Деф. Функција $f: I \to \mathbb{R}$ ($I \subseteq \mathbb{R}$ интервал) је апсолутно непрекидна на I ако $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ тј. за сваки низ дисјунктних подинтервала (x_j, y_j), $1 \le j \le n$ од I таквих да $\sum_{j=1}^{n}(y_j - x_j) < \delta$ важи $\sum_{j=1}^{n}|f(y_j) - f(x_j)| < \varepsilon$. Скуп свих апс. непр. фја на I означавамо $AC(I)$.

- $AC \Rightarrow$ равн. непр.: $n=1$
- равн. непр. $\not\Rightarrow AC$ (пример: канторова фја)
- C^1 на компактном интервалу $\Rightarrow AC$ $\left(\text{узмемо } \delta = \dfrac{\varepsilon}{\max_I |f'|}\right)$

$\boxed{T1}$ Нека је $f \in L^1[a,b]$ и $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, $x \in [a,b]$. Тада F има извод с.с. на $[a,b]$ и тј важи $F'(x) = f(x)$ и $F \in AC[a,b]$.

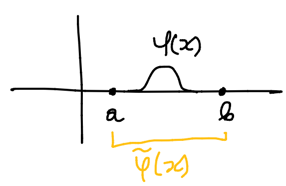
$\boxed{T2}$ Нека је $F \in AC[a,b]$. Тада F' постоји с.с. на $[a,b]$, важи $F' \in L^1[a,b]$ и $\int_a^x F'(t)\,dt = F(x) - F(a), \forall x \in [a,b]$.

(1) Нека је $f \in L^1(a,b)$. Важи да $f' \in L^1(a,b) \Leftrightarrow f \in AC[a,b]$.

↳ извод у $\mathcal{D}'(a,b)$.

$f \in L^1(a,b) \Rightarrow f \in \mathcal{D}'(a,b) \Rightarrow \exists f' \in \mathcal{D}'(a,b)$

$\boxed{\Leftarrow}$ $f \in L^1(a,b)$, $f \in AC[a,b]$



$\varphi \in \mathcal{D}(a,b)$ произв., $\varphi: (a,b) \to \mathbb{R}$

$$\tilde{\varphi}: [a,b] \to \mathbb{R}, \quad \tilde{\varphi}(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x \in (a,b) \\ 0, & x \in \{a,b\} \end{cases}$$

$\tilde{\varphi}$ је глатка на $[a,b] \Rightarrow \tilde{\varphi} \in AC[a,b]$

Рачунамо извод $f' \in \mathcal{D}'(a,b)$ и хоћемо $f' \in L^1(a,b)$.

$$\underset{\mathcal{D}'(a,b)}{\langle f', \varphi \rangle} = -\langle f, \varphi' \rangle = -\langle f, \tilde{\varphi}' \rangle = -\int_a^b f(x)\tilde{\varphi}'(x)\,dx = -\cancel{f(b)\tilde{\varphi}(b)}^{\,0} + \cancel{f(a)\tilde{\varphi}(a)}^{\,0} + \int_a^b f'(x)\tilde{\varphi}(x)\,dx$$

$\tilde{\varphi} \in AC[a,b]$

$$\underset{\mathcal{D}'(a,b)}{\langle f' \mid \varphi \rangle} = -\langle f, \varphi' \rangle = \ldots = -\int_a f(x)\varphi'(x)\,dx \overset{f,\tilde{\varphi} \in AC[a,b]}{=} \cancel{f(b)\varphi(b)} - \cancel{f(a)\varphi(a)} + \int_a \ldots$$

$$= \int_a^b f'(x)\varphi(x)\,dx = \langle f', \varphi \rangle$$

$\{a,b\} \subseteq [a,b]$ је мере нула

↳ као ф-ја задаје дистрибуцију

⊛ $f,g \in AC[a,b] \Rightarrow$ важи парцијална интеграција за f и g:

$$\int_a^b f'g\,dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b fg'\,dx$$

по T2 $\Rightarrow f' \in L^1[a,b]$ (као ф-ја) јер је $f \in AC[a,b]$.

$\boxed{\Rightarrow}$ $f' \in L^1(a,b)$, посматрамо $F(x) = \int_a^x f'(t)\,dt$

по T1 $\Rightarrow F \in AC[a,b]$, $F'(x) = f'(x)$ с.с.

Применимо смер $\Leftarrow$ на функцију F: $\underset{\mathcal{D}'(a,b)}{F'} = \underset{\substack{L^1(a,b)\\ \text{као ф-ја}}}{F'} \overset{T1}{=} f' \Rightarrow$ крај

Последица: Ако је дистр. индукована L^1 ф-јом $\Rightarrow$ њена прим. је индукована AC ф-јом.

(2) Нека је $u: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ дефинисана са $u(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & t \geq |x| \\ 0, & t < |x| \end{cases}$

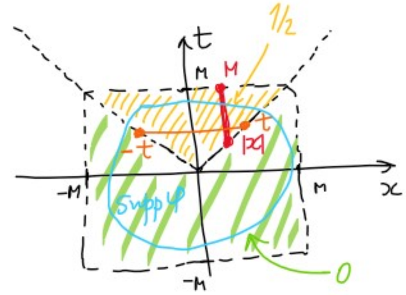
а) Доказати да $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$

б) Доказати да u решава парцијалну једначину $u_{tt} - u_{xx} = \delta$ у $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$.

а) домаћи

б) $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$, $\operatorname{supp}\varphi \subseteq [-M,M]^2$

$$\langle u_{tt} - u_{xx}, \varphi \rangle = \ldots = \langle u, \varphi_{tt} - \varphi_{xx} \rangle = \int_{[-M,M]^2} u(x,t)(\varphi_{tt} - \varphi_{xx})\,dx\,dt$$



$$\int_{[-M,M]^2} u(x,t)\varphi_{tt}(x,t)\,dx\,dt = \int_{-M}^{M}\int_{-M}^{M} u(x,t)\varphi_{tt}(x,t)\,dx\,dt = \int_{-M}^{M}\int_{|x|}^{M} \frac{1}{2}\varphi_{tt}(x,t)\,dt\,dx =$$

$[-M,M]^2$ $\quad -M \quad -M \quad -M \quad |x|$

$$|u(x,t)\varphi_{tt}(x,t)| \le \frac{1}{2} \max_{[-M,M]^2} |\varphi_{tt}(x,t)| \Rightarrow \text{важи Фубини}$$

$$= \int_{-M}^{M} \left(\frac{1}{2} \varphi_t(x,t) \Big|_{t=|x|}^{t=M} \right) dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-M}^{M} \left(\cancelto{0}{\varphi_t(x,M)} - \varphi_t(x,|x|) \right) dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_{-M}^{0} \varphi_t(x,-x)\,dx - \frac{1}{2}\int_{0}^{M} \varphi_t(x,x)\,dx$$

$$\int_{[-M,M]^2} u(x,t)\varphi_{xx}(x,t)\,dx\,dt \overset{\text{Фубини}}{=} \int_0^M \int_{-t}^{t} \frac{1}{2}\varphi_{xx}(x,t)\,dx\,dt = \int_0^M \frac{1}{2}\varphi_x(x,t)\Big|_{x=-t}^{x=t} dt = \frac{1}{2}\int_0^M \left(\varphi_x(t,t) - \varphi_x(-t,t)\right) dt$$

$$\langle u_{tt} - u_{xx}, \varphi \rangle = -\frac{1}{2}\int_{-M}^{0} \varphi_t(x,-x)\,dx - \frac{1}{2}\int_0^M \varphi_t(x,x)\,dx - \frac{1}{2}\int_0^M \left(\varphi_x(t,t) - \varphi_x(-t,t)\right) dt =$$

$$\int_{-M}^{0} \varphi_t(x,-x)\,dx \underset{\substack{y=-x \\ dx=-dy}}{=} \int_0^M \varphi_t(-y,y)\,dy$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^M \left(-\varphi_t(-y,y)dy - \varphi_t(y,y)dy - \varphi_x(y,y)dy + \varphi_x(-y,y)\right) dy =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^M \left(-\varphi_t(y,y) - \varphi_x(y,y) \right) dy + \frac{1}{2}\int_0^M \left(-\varphi_t(-y,y) + \varphi_x(-y,y) \right) dy =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^M \Phi_1'(y)\,dy - \frac{1}{2}\int_0^M \Phi_2'(y)\,dy = -\frac{1}{2}\left(\Phi_1(M) - \Phi_1(0) + \Phi_2(M) - \Phi_2(0) \right)$$

$$\psi_1 : y \mapsto (y,y) \quad , \quad \Phi_1 = \varphi \circ \psi_1 : \; y \mapsto (y,y) \mapsto \varphi(y,y)$$

$$\psi_2 : y \mapsto (-y,y) \quad , \quad \Phi_2 = \varphi \circ \psi_2 : \; y \mapsto (-y,y) \mapsto \varphi(-y,y)$$

$$\Phi'(y) = d\Phi_1(y) = d\varphi(\psi_1(y)) \cdot d\psi_1(y) = \begin{bmatrix} \varphi_x(\psi_1(y)) & \varphi_t(\psi_1(y)) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \varphi_x(y,y) + \varphi_t(y,y)$$

$$\Phi_2'(y) = d\Phi_2(y) = d\varphi(\psi_2(y)) \cdot d\psi_2(y) = \begin{bmatrix} \varphi_x(\psi_2(y)) & \varphi_t(\psi_2(y)) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = -\varphi_x(-y,y) + \varphi_t(-y,y)$$

$$\Phi_1(y) = \varphi(\psi_1(y)) = \varphi(y,y) \Rightarrow \Phi_1(M) = \varphi(M,M) = 0 \;,\; \Phi_1(0,0) = \varphi(0,0)$$

$$\Phi_2(y) = \varphi(\psi_2(y)) = \varphi(-y, y) \Rightarrow \Phi_2(M) = \varphi(-M, M) = 0 \;,\; \Phi_2(0,0) = \varphi(0,0)$$

$$\Rightarrow \langle u_{tt} - u_{xx}, \varphi \rangle = -\frac{1}{2}\Big(0 - \varphi(0,0) + 0 - \varphi(0,0)\Big) = \varphi(0,0) = \langle \delta, \varphi \rangle$$

$$\Rightarrow u_{tt} - u_{xx} = \delta$$