

$$① \quad \varepsilon > 0, f_\varepsilon: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_\varepsilon(x) = \frac{\varepsilon}{\pi(x^2 + \varepsilon^2)}$$

Опредишљавамо $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} f_\varepsilon$ у $D'(\mathbb{R})$.

f_ε непрекидна $\Rightarrow f_\varepsilon$ квадрирабилна

$\varphi \in D(\mathbb{R})$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \langle f_\varepsilon, \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon(x) \varphi(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varepsilon}{\pi(x^2 + \varepsilon^2)} \varphi(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varepsilon}{\pi(\varepsilon^2 y^2 + \varepsilon^2)} \varphi(\varepsilon y) \cdot \varepsilon dy = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(\varepsilon y)}{\pi(y^2 + 1)} dy$$

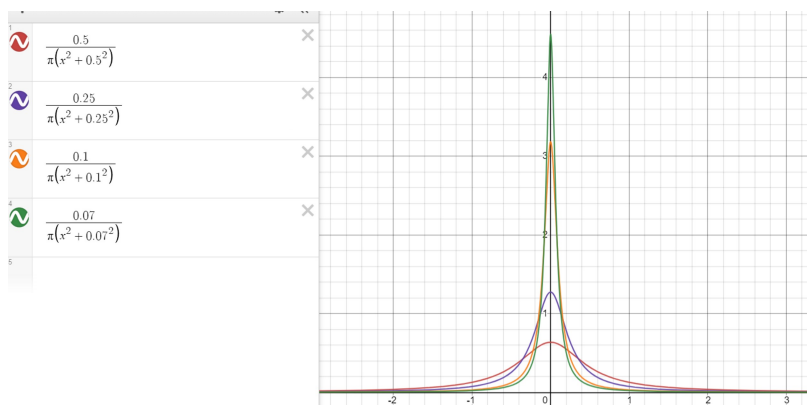
метода: $x = \varepsilon y$
 $dx = \varepsilon dy$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(\varepsilon y)}{\pi(y^2 + 1)} dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(0)}{\pi(y^2 + 1)} dy = \frac{\varphi(0)}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{y^2 + 1} = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle$$

$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{y^2 + 1} = \pi$

ТЗК: $\left| \frac{\varphi(\varepsilon y)}{\pi(y^2 + 1)} \right| \leq \frac{M}{\pi(y^2 + 1)} \rightsquigarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{M}{\pi(y^2 + 1)} dy = M \quad \checkmark$

$M = \max_{x \in \mathbb{R}} |\varphi(x)| \rightarrow \varphi$ непрекидно и ограничено.



$$② \quad a > 0, f_a: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

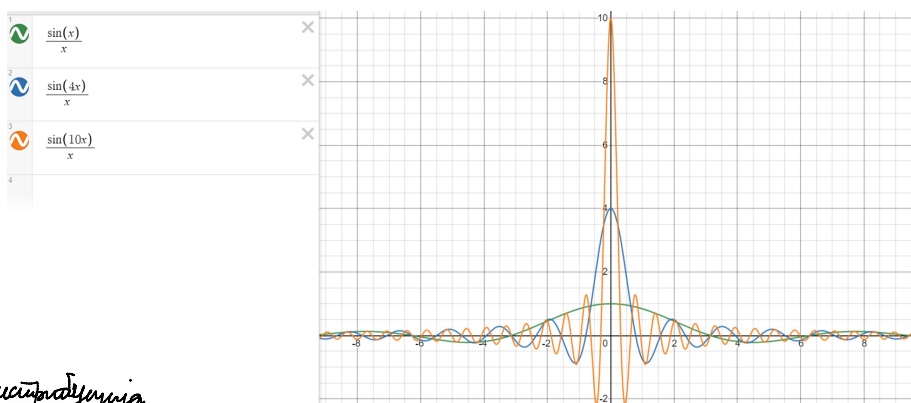
$$f_a(x) = \begin{cases} \frac{\sin ax}{x}, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$$

Опредишљавамо $\lim_{a \rightarrow +\infty} f_a$ у $D'(\mathbb{R})$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax)}{x} = a \Rightarrow f_a \text{ је непрекидно} \Rightarrow f_a \text{ је квадрирабилна}$$

$\varphi \in D(\mathbb{R})$

$$③ \quad \lim_{a \rightarrow \infty} \langle f_a, \varphi \rangle = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin ax}{x} \cdot \varphi(x) dx = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin y}{\frac{y}{a}} \cdot \varphi\left(\frac{y}{a}\right) \cdot \frac{dy}{a} = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin y}{y} \cdot \varphi\left(\frac{y}{a}\right) dy \stackrel{?}{=}$$



$$(*) \lim_{a \rightarrow \infty} \langle f_a, \varphi \rangle = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin ax}{x} \cdot \varphi(x) dx = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin y}{\frac{y}{a}} \cdot \varphi\left(\frac{y}{a}\right) \cdot \frac{dy}{a} = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin y}{y} \cdot \varphi\left(\frac{y}{a}\right) dy \stackrel{?}{=} \\ \text{смена: } ax=y \quad \frac{dx}{a} = \frac{dy}{a} \quad \stackrel{?}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin y}{y} \lim_{a \rightarrow \infty} \varphi\left(\frac{y}{a}\right) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin y}{y} \varphi(0) dy = \varphi(0) \cdot \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin y}{y} dy}_{\pi} = \pi \varphi(0)$$

$$\Rightarrow \lim_{a \rightarrow \infty} f_a = \pi \delta$$

$$\text{ТАК: } \left| \frac{\sin y}{y} \cdot \varphi\left(\frac{y}{a}\right) \right| \leq \left| \frac{\sin y}{y} \right| \cdot M, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\sin y}{y} \right| \cdot M dy = M \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\sin y}{y} \right| dy = +\infty$$

$$M = \max_{x \in \mathbb{R}} |\varphi(x)|$$

АМ1: не conv. абсолютно

$$\text{ужега: } \left| \frac{\sin y}{y} \right| \geq \frac{\sin^2 y}{y} = \frac{1 - \cos 2y}{2y} \quad \text{конт.} \\ \Rightarrow \text{губ.}$$

$\Rightarrow$ ТАК не работает!

(*) не прав!

непрерывность

на компактах

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin ax}{x} \varphi(x) dx \stackrel{\text{supp } \varphi \subseteq [-M, M]}{=} \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-M}^M \frac{\sin ax}{x} \varphi(x) dx = \lim_{a \rightarrow \infty} (R) \int_{-M}^M \frac{\sin ax}{x} \varphi(x) dx = \lim_{a \rightarrow \infty} (R) \int_{-M}^M \frac{\sin ax}{x} (\varphi(x) - \varphi(0) + \varphi(0)) dx =$$

$$\text{упрощ!} \Rightarrow \lim_{a \rightarrow \infty} \left((R) \int_{-M}^M \sin ax \cdot \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} dx + (R) \int_{-M}^M \frac{\sin ax}{x} \varphi(0) dx \right)$$

$$\lim_{a \rightarrow \infty} (R) \int_{-M}^M \frac{\sin ax}{x} \varphi(0) dx = \lim_{a \rightarrow \infty} \varphi(0) \cdot 2 \cdot (R) \int_0^M \frac{\sin ax}{x} dx = \lim_{a \rightarrow \infty} 2\varphi(0) \cdot (R) \int_0^M \frac{\sin y}{\frac{y}{a}} \cdot \frac{dy}{a} = 2\varphi(0) \cdot \lim_{a \rightarrow \infty} (R) \int_0^M \frac{\sin y}{y} dy$$

$$\left. \begin{array}{l} ax=y \\ dy=adx \end{array} \right\} \stackrel{?}{=} 2\varphi(0) \cdot (R) \int_0^{+\infty} \frac{\sin y}{y} dy = \pi \varphi(0)$$

$$(R) \int_0^{+\infty} \frac{\sin y}{y} dy \text{ не сходится} \Rightarrow \nexists \lim_{b \rightarrow \infty} (R) \int_0^b \frac{\sin y}{y} dy$$

$$\lim_{a \rightarrow \infty} (R) \int_{-M}^M \sin ax \cdot \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} dx = \lim_{a \rightarrow \infty} (R) \int_{-M}^M \sin(ax) \cdot \psi(x) dx \stackrel{?}{=} 0$$

$$\text{т.е. } \int \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x}, x \neq 0$$

не определено на $\mathbb{R}$

$$\psi(x) = \begin{cases} \frac{\psi(x) - \psi(0)}{x}, & x \neq 0 \\ \psi'(0), & x = 0 \end{cases} \quad - \text{непрерывна на } \mathbb{R}$$

T (us AHZ, фугуједни рогови, Риман-Лебегова лема):

Ако је $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ (може и бесконачан) и f ограничено интегрална на (a, b)

$$\text{Пага} \quad \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \sin(\lambda x) dx = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \cos(\lambda x) dx = 0$$

$$\text{Чегу,} \quad \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{D'(\mathbb{R})}{a} \rightarrow \pi \delta.$$

$a \in C^\infty(\mathbb{R})$, $f \in D'(\mathbb{R})$, а.ф. гуаутирдујуја?

$$\psi \in D(\mathbb{R}): \langle a \cdot f, \psi \rangle = \langle f, \underbrace{a \cdot \psi}_{\in D(\mathbb{R})} \rangle$$

гоналн: доказати да је а.ф. гуаутирдујуја

③ $a > 0$, одређујемо $\lim_{a \rightarrow \infty} e^{ax} \cdot P \frac{1}{x}$ у $D'(\mathbb{R})$.

$$P \frac{1}{x}(\psi) = \text{p.v.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\psi(x)}{x} dx$$

$\mu: x \mapsto e^{ax}$ је трајектор

$\psi \in D(\mathbb{R})$ упробована

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \langle e^{ax} \cdot P \frac{1}{x}, \psi \rangle = \lim_{a \rightarrow \infty} \langle P \frac{1}{x}, e^{ax} \cdot \psi \rangle = \lim_{a \rightarrow \infty} \text{p.v.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax} \cdot \psi(x)}{x} dx =$$

$$= \lim_{a \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{e^{ax} \psi(x)}{x} dx + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{ax} \psi(x)}{x} dx \right) = \lim_{a \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{e^{ax} \psi(x) - e^{-ax} \psi(-x)}{x} dx$$

$$\begin{aligned} & \text{ } \nearrow \\ & x = -y \\ & dx = -dy \\ & \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{e^{-ay} \psi(-y) (-dy)}{-y} = \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{-e^{-ay} \psi(-y)}{y} dy \end{aligned}$$

$$= \lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \frac{e^{ax} \psi(x) - e^{-ax} \psi(-x)}{x} dx$$

$$\begin{aligned} \frac{e^{ax} \psi(x) - e^{-ax} \psi(-x)}{x} & \sim \frac{e^{ax} (\psi(0) + x\psi'(0) + o(x^2)) - e^{-ax} (\psi(0) - x\psi'(0) + o(x^2))}{x} \sim \\ & \sim \frac{\psi(0)(e^{ax} - e^{-ax})}{x} + \psi'(0) \cdot (e^{ax} + e^{-ax}) + (e^{ax} - e^{-ax}) \cdot o(x) \sim \psi(0) \cdot 2a + 2\psi'(0) \end{aligned}$$

$$e^{ax} - e^{-ax} = (1+ax) - (1-ax) + o(x^2) = 2ax + o(x^2)$$

$$e^{ax} - e^{-ax} = (1+ax) - (1-ax) + o(x^2) = 2ax + o(x^2)$$

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \langle e^{ax} \cdot p_{\frac{1}{x}}, \varphi \rangle = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \frac{e^{ax} \varphi(x) - e^{-ax} \varphi(-x)}{x} dx = ?$$

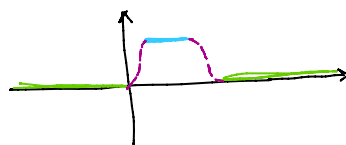
$e^{ax} \rightarrow \infty$ as $a \rightarrow \infty$ is not the case!

докажем что $\exists \eta \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ таковы, что $\lim_{a \rightarrow \infty} \langle e^{ax} p_{\frac{1}{x}}, \eta \rangle = \infty$.

возьмем $\eta(x) = 0, x \leq 0$:

$$\langle e^{ax} p_{\frac{1}{x}}, \eta \rangle = \int_0^{\infty} \frac{e^{ax} \eta(x) - e^{-ax} \eta(-x)}{x} dx = \int_0^{\infty} \frac{e^{ax} \eta(x)}{x} dx$$

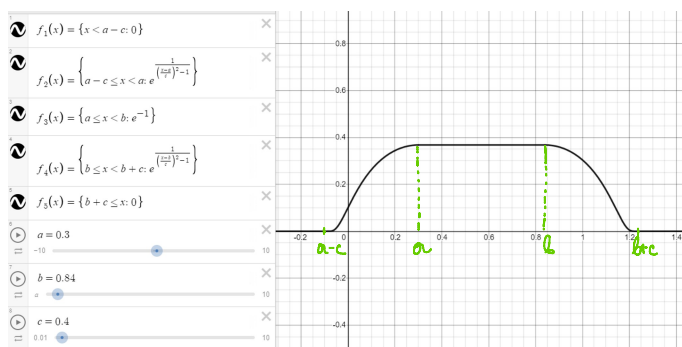
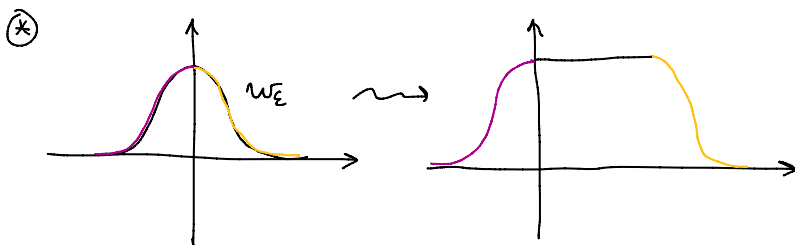
- *) $\exists \eta \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ таковы:
- 1) $\eta(x) = 0$ на $x \notin (0, 3)$
 - 2) $\eta(x) = 1$ на $x \in (1, 2)$
 - 3) $0 \leq \eta(x) \leq 1$ на $x \in \mathbb{R}$



выберем такое η :

$$\langle e^{ax} p_{\frac{1}{x}}, \eta \rangle = \int_0^{\infty} \frac{e^{ax} \eta(x)}{x} dx \geq \int_1^2 \frac{e^{ax} \cdot 1}{x} dx \geq \int_1^2 \frac{e^a}{x} dx = \ln 2 \cdot e^a \Big|_{a \rightarrow \infty}$$

$$\Rightarrow \lim_{a \rightarrow \infty} \langle e^{ax} p_{\frac{1}{x}}, \eta \rangle = \infty \quad (\Rightarrow e^{ax} \cdot p_{\frac{1}{x}} \text{ не конт. } a \rightarrow \infty).$$



Урок геометрии

$$\Omega \subset \mathbb{R}^n \text{ область, } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \rightsquigarrow \mathcal{D}\varphi = \frac{\partial^{|\alpha|} \varphi}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}, \quad \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n), \quad |\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$$

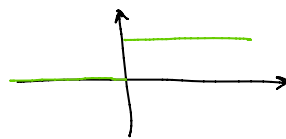
$$f \in D'(\Omega), D^\alpha f = ?$$

Def. $\langle D^\alpha f, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \cdot \langle f, D^\alpha \varphi \rangle$

заметьте: утверждение что $D^\alpha f$ густознаменит

$$\left. \begin{array}{l} f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}), \quad \{f^{(k)}\} \text{ изог } y \text{ классическом смысле} \\ f^{(k)} \text{ изог } y \text{ смысле густознаменит} \end{array} \right\} \text{заметьте: обе гле густознамениты с } u \text{ и } u'$$

④ кем же $\theta(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$ (Хевисайда)



а) докажем что $\theta \in D'(\mathbb{R})$.

б) Найти θ' в $D'(\mathbb{R})$. ($\theta' = D'\theta$)

а) θ не кн кнтермнн кн $L^1(\mathbb{R})$, ам же кн $L^1_{loc}(\mathbb{R})$

$K \subseteq \mathbb{R}$ компактно $\int_K |\theta(x)| dx \leq \int_K 1 dx = m(K) < +\infty \Rightarrow \theta \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$

б) $\varphi \in D(\mathbb{R}), \text{supp } \varphi \subseteq [-M, M] \Rightarrow \text{supp } \varphi' \subseteq [-M, M]$

$$\langle \theta', \varphi \rangle = (-1)' \cdot \langle \theta, \varphi' \rangle = - \int_{\mathbb{R}} \theta(x) \cdot \varphi'(x) dx = - \int_0^{+\infty} \varphi'(x) dx = - \int_0^M \varphi'(x) dx = - \varphi(x) \Big|_0^M = -\varphi(M) + \varphi(0) = \varphi(0)$$

$$\langle \theta', \varphi \rangle = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle \Rightarrow \theta' = \delta.$$

⑤ $a \in C^\infty(\mathbb{R})$

$f \in D'(\mathbb{R})$

докажем $(a \cdot f)' = \underbrace{a' \cdot f}_{\text{изог фн}} + \underbrace{a \cdot f'}_{\text{изог густознаменит}}$

$\varphi \in D(\mathbb{R})$

$a\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}) \Rightarrow (a\varphi)' = a'\varphi + a\varphi'$

$$\langle (a \cdot f)', \varphi \rangle = - \langle a \cdot f, \varphi' \rangle = - \langle f, a\varphi' \rangle$$

$$\langle a'f + af', \varphi \rangle = \langle a'f, \varphi \rangle + \langle af', \varphi \rangle = \langle f, a'\varphi \rangle + \langle f', a\varphi \rangle = \langle f, a'\varphi \rangle - \langle f, (a\varphi)' \rangle =$$

$$= \langle f, a'\varphi \rangle - \langle f, a'\varphi + a\varphi' \rangle = - \langle f, a\varphi' \rangle$$

$\uparrow$
f линейно

$$\Rightarrow (a \cdot f)' = a'f + af'$$