

* истраживање

Материјал: R. Strichartz - A Guide to Distribution Theory and Fourier Transforms

Б. Јовановић - Парцијалне једначине

материјали од претходних година

Часови: 50п+50г

↳ 3 зана, 2х 15мин

↳ 1 са саопштењем

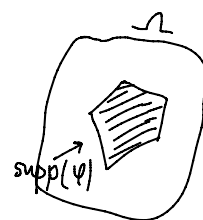
http://enastava.matf.bg.ac.rs/~dusan_drobnjak/2021-2022/DPJB-PJ/DPJB21_22_zadaci.pdf

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ одом (отворен, затворен и неопредељен)

$\psi: \Omega \rightarrow \mathbb{R} (\mathbb{C})$

$C^\infty(\Omega) = \{ \psi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C}) \mid \psi \text{ је глатка (} \infty \text{ пута диф.)} \}$

$\text{supp}(\psi) = \overline{\{x \in \Omega \mid \psi(x) \neq 0\}}$ (затворено у Ω)
↳ носач функције ψ (support)



$C_c^\infty(\Omega) = \{ \psi \in C^\infty(\Omega) \mid \text{supp}(\psi) \text{ је компактан} \}$

$\psi \equiv 0 \in C_c^\infty$ ($\text{supp} \psi = \emptyset$)

$$\Omega = \mathbb{R} : \varepsilon > 0 \quad w_\varepsilon(x) = \begin{cases} e^{\frac{\varepsilon^2}{x^2 - \varepsilon^2}} & , |x| < \varepsilon \\ 0 & , |x| \geq \varepsilon \end{cases}$$

затим $w_\varepsilon \in C_c^\infty(\mathbb{R})$

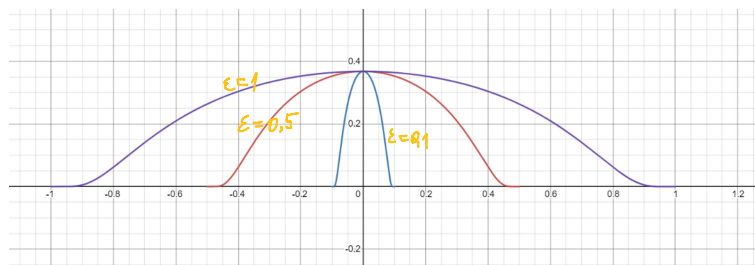
$$\text{supp}(w_\varepsilon) = \overline{\{w_\varepsilon \neq 0\}} = \overline{\{|x| < \varepsilon\}} = \{|x| \leq \varepsilon\} = [-\varepsilon, \varepsilon] \text{ компактно}$$

Глатка је са $|x| > \varepsilon$ и $|x| < \varepsilon$

$$w'_\varepsilon = e^{\frac{\varepsilon^2}{x^2 - \varepsilon^2}} \cdot \frac{-\varepsilon^2 \cdot 2x}{(x^2 - \varepsilon^2)^2} \quad \Rightarrow \quad w_\varepsilon \text{ је } C^1 \text{ са } |x| < \varepsilon$$

$$|x| > \varepsilon : w'_\varepsilon = 0 \Rightarrow C^1$$

$x = \pm \varepsilon : (x = \varepsilon, \text{ где постоји})$



$$\lim_{x \rightarrow \varepsilon} e^{\frac{\varepsilon^2}{x^2 - \varepsilon^2}} = 0 \Rightarrow w_\varepsilon \text{ непр.}$$

$$\lim_{x \rightarrow \varepsilon^+} w'_\varepsilon = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \varepsilon^-} w'_\varepsilon = 0 \quad (e^x \text{ је неограничана})$$

$$w'_\varepsilon(\varepsilon) = 0$$

$T \mapsto At+1$:

$$w'_{\varepsilon^+}(\varepsilon) = \lim_{x \rightarrow \varepsilon^+} w'(x) = 0$$

$$w'_{\varepsilon^-}(\varepsilon) = \lim_{x \rightarrow \varepsilon^-} w'(x) = 0$$

$\Rightarrow w'_\varepsilon$ је непрекидно

$\Rightarrow w_\varepsilon$ је C^1 на $\mathbb{R}$

Аналогно даље: $w''_\varepsilon = \dots \Rightarrow C^2 \Rightarrow \dots C^\infty$
(индукцијом)

$C_c^\infty(\mathbb{R})$ је векторски простор (о димензије)

Деф: $\{\psi_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ нис ψ_j из $C_c^\infty(\Omega)$ и $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$. Кажемо да $\psi_j \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \varphi$ ако важи:

1) Постоји $K \in \mathbb{R}$ константа так. $\forall j \in \mathbb{N} \quad \text{supp}(\psi_j) \subseteq K$ и $\text{supp}(\varphi) \subseteq K$.

2) За свако $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ важи $D^\alpha \psi_j \xrightarrow{j \rightarrow \infty} D^\alpha \varphi$.

$\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ — мултииндекс

$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$$

$$D^\alpha \varphi = \frac{\partial^{|\alpha|} \varphi}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

$$\text{нпр. } D^{(2,0,3)} \varphi = \frac{\partial^5 \varphi}{\partial x_1^2 \partial x_3^3} = \frac{\partial^5 \varphi}{\partial x_3^3 \partial x_1^2}$$

Деф. $\mathcal{D}(\Omega)$ је простор $C_c^\infty(\Omega)$ са конвергенцијом из дефиниције. Простор $\mathcal{D}(\Omega)$ позивамо простор основних (или) функција.

Кошечена: — $\mathcal{D}(\Omega)$ није метризујабилан

— конвергенција у $\mathcal{D}(\Omega)$ означава конвергенцију тачка по тачка и равномерну конв ($\alpha = (0, \dots, 0)$)

① Нема је $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Минимални компактни поддр у $\mathcal{D}(\mathbb{R})$:

a) $\varphi_n(x) = \frac{1}{n} \cdot \varphi(x)$

b) $\varphi_n(x) = \frac{1}{n} \cdot \varphi(nx)$

B) $\varphi_n(x) = \frac{1}{n} \cdot \varphi\left(\frac{x}{n}\right)$

a) $\varphi_n(x) = \frac{1}{n} \cdot \varphi(x)$

Чему равен $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x)$? $\varphi_n(x) = \frac{1}{n} \varphi(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

$$\varphi_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Да ли $\varphi_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$? (ако $\exists$ φ_n , мора бити 0)

$$\text{supp}(\varphi_n) = \underbrace{\text{supp}(\varphi)}_K, \quad \text{jer} \quad \varphi_n(x) \neq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{n} \varphi(x) \neq 0 \Leftrightarrow \varphi(x) \neq 0$$

$\varphi_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ jer су трајекте φ_n $D^\alpha \varphi_n = \frac{1}{n} D^\alpha \varphi$.

проверити: $\frac{1}{n} D^\alpha \varphi \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{K} 0$

$$D^\alpha \varphi = \varphi^{(\alpha)}$$

$$\left| \frac{1}{n} \varphi^{(\alpha)}(x) - 0 \right| = \frac{1}{n} |\varphi^{(\alpha)}(x)| \leq \frac{1}{n} \cdot \max_{x \in K} |\varphi^{(\alpha)}(x)| \leq \frac{M_\alpha}{n} \quad / \lim_{n \rightarrow \infty}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n} D^\alpha \varphi \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{K} 0$$

b) $\varphi_n(x) = \frac{1}{n} \varphi(nx)$

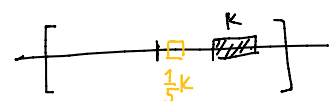
$$\varphi_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{TTT}} 0$$

$$\{ \varphi \neq 0 \} \subseteq \text{supp } \varphi$$

$$\varphi_n(x) \neq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{n} \varphi(nx) \neq 0 \Leftrightarrow \varphi(nx) \neq 0 \Rightarrow nx \in \text{supp } \varphi \Rightarrow x \in \frac{1}{n} \text{supp } \varphi$$

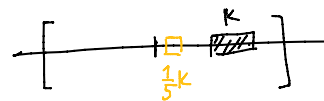
$$\text{supp } \varphi_n = \overline{\{ \varphi_n(x) \neq 0 \}} \subseteq \overline{\frac{1}{n} \text{supp } \varphi} = \frac{1}{n} \text{supp } \varphi$$

↑
..



$$\text{supp } \psi_n = \{ \psi_n(x) \neq 0 \} \subseteq \frac{1}{n} \text{supp } \psi = \frac{1}{n} \text{supp } \psi$$

↑
supp ψ je kompaktan



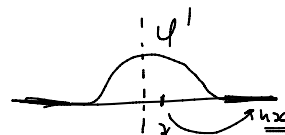
$$\text{Ako } \text{supp } \psi \subseteq [-M, M] \Rightarrow \text{supp } \psi_n \subseteq \frac{1}{n} [-M, M] = \left[-\frac{M}{n}, \frac{M}{n}\right] \subseteq [-M, M] = K$$

$$\psi_n^{(k)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{K} 0$$

$$d=0 \text{ (PK): } \psi_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{K} 0 \quad \checkmark \text{ (kao y a)}$$

$$d=1: \psi_n'(x) = \frac{1}{n} \cdot n \psi'(nx) = \psi'(nx) \Rightarrow 0?$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \psi'(nx) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ \psi'(0), & x = 0 \end{cases}$$



Ako je $\psi'(0) \neq 0$, onda ne može. Neka je $\psi'(0) = 0$.

Usta ako $\exists x_0$, t.j. $\psi'(x_0) \neq 0$? - pokazujemo kontradikciju gde PK

$$(\exists \varepsilon > 0) (\forall n_0 \in \mathbb{N}) (\exists x \in K) (\exists n \in \mathbb{N}) n > n_0 \wedge |\psi'(nx)| \geq \varepsilon.$$

$$\neg (n > n_0 \Rightarrow |\psi'(nx)| < \varepsilon)$$

$$\text{uzmemo: } \varepsilon = \frac{|\psi'(x_0)|}{2}, \text{ gde } n_0$$

$$x = \frac{x_0}{n}, n = n_0 \quad (x \in K \text{ jer } \psi'_{n_0}(x) = \psi'_{n_0}\left(\frac{x_0}{n_0}\right) = \psi'(x_0) \neq 0)$$

$$|\psi'(nx)| = \left| \psi'\left(n_0 \cdot \frac{x_0}{n_0}\right) \right| = |\psi'(x_0)| \geq \frac{|\psi'(x_0)|}{2} \quad \checkmark$$

ne sme odabrati x_0 ga $\exists \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} \psi'(x) = 0 \Rightarrow \psi \equiv c$ (supp kompaktan)

$$\Downarrow \\ c = 0$$

$$\psi \equiv 0 \Rightarrow \psi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{D(\mathbb{R})} 0, \text{ uvek ne}$$

$$b) \psi_n(x) = \frac{1}{n} \psi\left(\frac{x}{n}\right) \quad \text{gledati - upreda ga konv. ako } \psi \equiv 0$$

uostoj $\exists x_0 \psi(x_0) \neq 0 \Rightarrow \text{pokazati ga ne može 1)}$

Konvergenca: $\{\psi_j\}_{j \in \mathbb{N}}, n \rightarrow \infty$ - to može ga se saznati sa drugo kojim grupom nizovima

konv. $\{\psi_\varepsilon\}_{\varepsilon \in \mathbb{R}}, \varepsilon \rightarrow 0, \varepsilon \rightarrow \infty, \varepsilon \rightarrow 1+, \dots$

Def. За функционал $f: D(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$ кажемо да је линеаран ако $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$ и $\forall \varphi_1, \varphi_2 \in D(\Omega)$ важи

$$f(\lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2) = \lambda_1 f(\varphi_1) + \lambda_2 f(\varphi_2).$$

За линеаран функционал $f: D(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$ кажемо да је непрекидан ако $\forall \varphi_j \in D(\Omega)$ важи

$$\varphi_j \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow f(\varphi_j) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0.$$

Def. Линеарни непрекидни функционали на $D(\Omega)$ се зову генералнизоване функције (генерализоване фк). Често су их генерализоване означавамо са $D'(\Omega)$.

Примери: ① $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ (значи $f \in L^1(K)$, $\forall K$ компактна)

$$\begin{aligned} \tilde{f}: D(\Omega) &\rightarrow \mathbb{R} \\ \tilde{f}(\varphi) &= \langle \tilde{f}, \varphi \rangle = \int_{\Omega} f(x) \cdot \varphi(x) dx \end{aligned}$$

↑
локализација

← линеарно (ако се генерализује не може)

Проказујемо да је генерализована

(1) добра дефинисаност

$$\left| \int_{\Omega} f(x) \cdot \varphi(x) dx \right| \leq \int_{\Omega} |f(x) \cdot \varphi(x)| dx = \int_{\text{supp } \varphi} |f(x)| \cdot |\varphi(x)| dx \leq \max_{x \in \text{supp } \varphi} |\varphi(x)| \cdot \underbrace{\int_{\text{supp } \varphi} |f(x)| dx}_{\in \mathbb{R}} < \infty$$

(2) линеарност — следи из лине. интеграла

$$\begin{aligned} \langle \tilde{f}, \lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2 \rangle &= \int_{\Omega} f(x) (\lambda_1 \varphi_1(x) + \lambda_2 \varphi_2(x)) dx = \lambda_1 \int_{\Omega} f(x) \varphi_1(x) dx + \lambda_2 \int_{\Omega} f(x) \varphi_2(x) dx = \\ &= \lambda_1 \langle \tilde{f}, \varphi_1 \rangle + \lambda_2 \langle \tilde{f}, \varphi_2 \rangle. \end{aligned}$$

(3) непрекидност

$$\varphi_j \in D(\Omega), \varphi_j \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow \langle \tilde{f}, \varphi_j \rangle \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$$

$\varepsilon > 0$ дајемо:

$$|\langle \tilde{f}, \varphi_j \rangle - 0| = \left| \int_{\Omega} f(x) \varphi_j(x) dx \right| \leq \int_K |f(x) \cdot \varphi_j(x)| dx \leq \max_{x \in K} |\varphi_j(x)| \cdot \underbrace{\int_K |f(x)| dx}_M < \frac{\varepsilon}{M} \cdot M = \varepsilon.$$

$M \in \mathbb{R}, \forall \varphi \in L^1_{loc}$

$$\exists k \text{ constant s.t. } \supp \varphi_j \subseteq k$$
$$u \varphi_j \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0, \text{ по теореме } \text{ог } n \geq n_0: \max_{x \in K} |\varphi_j(x)| < \frac{\varepsilon}{M}$$

Posledica: Uvaka npr. fja je distributivna.

f непрерывна $\Rightarrow f \in L^1_{\text{loc}}$ $\Rightarrow \tilde{f}$ интегрируема (чтобы ее можно было интегрировать f).

$$(f \mapsto T_f(\Lambda_f))$$

② Дуранда генна дисрегулација

$$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n, a \in \Omega$$

$$f_a: D(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}(C)$$

$$\langle \delta_a, \psi \rangle = \psi(a)$$



gorati: upretni za je zadržavaju

случ: $\Omega = \mathbb{R}^n$, $a=0$, $\delta a = \delta$