CIKLOTRONSKA REZONANCA

PROTON SE KREĆE U STACIONARNOM I HOMOGENOM MAGNETNOM POLJU $\vec{B} = B_0 \vec{e_z}$ I ELEKTRIČNOM POLJU OBLIKA $\vec{E} = E_0 \cos(\omega t)\vec{e_x}$, GDE SU $E_0, B_0, \omega = const.$
ZANEMARUJUĆI DODATNO $\vec{B}$ POLJE KOJE NASTAJE USLED PROMENE $\vec{E}$ TOKOM VREMENA I PODRAZUMEVAJUĆI NERELATIVISTIČKI REŽIM RAZMOTRITI KRETANJE PRI $\omega \neq \omega_c$ I $\omega = \omega_c$.

$$m\ddot{\vec{r}} = e\vec{E} + e\vec{v}\times\vec{B} \qquad \vec{v}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{e_x} & \vec{e_y} & \vec{e_z} \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ 0 & 0 & B_0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{y}B_0 \\ -\dot{x}B_0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$m\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} eE_0\cos(\omega t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e\dot{y}B_0 \\ -e\dot{x}B_0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} \ddot{x} &= \frac{e}{m}E_0\cos(\omega t) + \frac{eB}{m}\dot{y} \\ \ddot{y} &= -\frac{eB}{m}\dot{x} \\ \ddot{z} &= 0 \end{aligned}$$

$e \equiv |e|$ $\quad \omega_c \equiv \frac{|e|B}{m}$

$m \equiv m_p$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} \ddot{x} &= \omega_c\dot{y} + \frac{e}{m}E_0\cos(\omega t) \\ \ddot{y} &= -\omega_c\dot{x} \\ \ddot{z} &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} \dddot{x} + \omega_c^2\dot{x} &= -\frac{e}{m}E_0\omega\sin(\omega t) \\ \dddot{y} + \omega_c^2\dot{y} &= -\frac{e}{m}E_0\omega_c\cos(\omega t) \\ \ddot{z} &= 0 \Rightarrow z = C_1't + C_2' \Rightarrow \underline{\underline{z = v_\parallel^0 t}} \end{aligned}$$

ISTO U OBA SLUČAJA

POČETNI USLOVI

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= y_0 = z_0 = 0 \\ \dot{x}_0 &= 0,\ \dot{y}_0 = v_\perp^0,\ \dot{z}_0 = v_\parallel^0 \end{aligned}\right\}$$

$$x_{OPSTE} = \underset{\overset{|||}{x_H}}{x_{HOMOGENO}} + \underset{\overset{|||}{x_P}}{x_{PARTIKULARNO}}$$

KADA GOD IMAMO SLUČAJ DA JE NEHOMOGENOST USLOVLJENA HARMONIJSKOM FUNKCIJOM RAZDVAJAMO REŠAVANJE: (1) $\omega \neq \omega_c$, (2) $\omega = \omega_c$

(1) $x_H = C_1 + C_2\sin(\omega_c t) + C_3\cos(\omega_c t)$ $\rightarrow$ OD RANIJE SMO TO NAŠLI

KAKO JE NEHOMOGENOST OBLIKA $\propto \sin(\omega t)$ MOŽEMO STAVITI $x_p = C_4\cos(\omega t)$ ILI $x_p = C_4\cos(\omega t) + C_5\sin(\omega t)$

ZA $x_p = C_4\cos(\omega t)$

$\dot{x}_p = -C_4\omega\sin(\omega t)$

$\ddot{x}_p = -C_4\omega^2\cos(\omega t)$

$\dddot{x}_p = C_4\omega^3\sin(\omega t)$

MORA VAŽITI $\dddot{x}_p + \omega_c^2\dot{x}_p = -\frac{e}{m}E_0\omega\sin(\omega t)$

$\Rightarrow C_4\omega^{3}\sin() + \omega_c^2(-)C_4\omega\sin() = -\frac{e}{m}E_0\omega\sin() \Rightarrow$

$C_4(\omega^2 - \omega_c^2) = -\frac{e}{m}E_0 \Rightarrow \underline{C_4 = -\frac{e}{m}\frac{E_0}{\omega^2-\omega_c^2}}$

DA SMO STAVILI

$$\left.\begin{aligned} x_p &= C_4\cos() + C_5\sin() \\ \dot{x}_p &= -C_4\omega\sin() + C_5\omega\cos() \\ \ddot{x}_p &= -C_4\omega^2\cos() + C_5\omega^2(-)\sin() \\ \dddot{x}_p &= C_4\omega^3\sin() - C_5\omega^3\cos() \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} &C_4\omega^3\sin() - C_5\omega^3\cos() + \\ &\omega_c^2(C_5\omega\cos() - C_4\omega\sin()) = \\ &= -\frac{e}{m}E_0\omega\sin() \Rightarrow \\ &C_4\omega^2\sin() - C_5\omega^2\cos() + \omega_c^2C_5\cos() - \\ &- \omega_c^2C_4\sin() = -\frac{e}{m}E_0\sin() \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} C_4(\omega^2-\omega_c^2) &= -\frac{e}{m}E_0 \\ C_5\underbrace{(\omega_c^2-\omega^2)}_{\neq 0} &= 0 \Rightarrow C_5 = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow x = C_1 + C_2\sin(\omega_c t) + C_3\cos(\omega_c t) - \frac{e}{m}\frac{E_0}{\omega^2-\omega_c^2}\cos(\omega t)$$

$$\left.\begin{aligned} x &= C_1 + C_2 \sin(\omega_c t) + C_3 \cos(\omega_c t) - \frac{\ell}{m}\frac{E_0}{\omega^2-\omega_c^2}\cos(\omega t) \\ \dot{x} &= C_2\omega_c \cos(\omega_c t) - C_3 \omega_c \sin(\omega_c t) + \frac{\ell}{m}\frac{E_0}{\omega^2-\omega_c^2}\,\omega \sin(\omega t) \\ \ddot{x} &= -C_2\omega_c^2 \sin(\omega_c t) - C_3\omega_c^2 \cos(\omega_c t) + \frac{\ell}{m}\frac{E_0}{\omega^2-\omega_c^2}\,\omega^2 \cos(\omega t) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{②}$$

$$0 = C_1 + C_3 - \frac{\ell}{m}\frac{E_0}{\omega^2-\omega_c^2} \Rightarrow C_1 = \frac{\ell}{m}\frac{E_0}{\omega^2-\omega_c^2} - C_3$$

$$0 = C_2\omega_c \Rightarrow \underline{C_2 = 0} \qquad C_3\omega_c^2 = \frac{\ell}{m}\frac{E_0}{\omega^2-\omega_c^2}\omega^2 - \omega_c v_\perp^0 - \frac{\ell}{m}E_0$$

$$(\omega_c \overset{v_\perp^0}{\dot{y}|_0} + \frac{\ell}{m}E_0) = -C_3\omega_c^2 + \frac{\ell}{m}\frac{E_0}{\omega^2-\omega_c^2}\omega^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_3 = \frac{\ell}{m}\frac{E_0}{\omega^2-\omega_c^2}\frac{\omega^2}{\omega_c^2} - \frac{v_\perp^0}{\omega_c} - \frac{\ell}{m}\frac{E_0}{\omega_c^2} \Rightarrow C_1 = \cancel{\frac{\ell}{m}\frac{E_0}{\omega^2-\omega_c^2}(-)\left(\frac{\omega_c^2-\omega^2}{\omega_c^2}\right)} + \frac{v_\perp^0}{\omega_c} + \frac{\ell}{m}\frac{E_0}{\omega_c^2}$$

$$\cancel{-\frac{\ell}{m}\frac{E_0}{\omega_c^2} + \frac{\ell}{m}\frac{E_0}{\omega_c^2}} + \frac{v_\perp^0}{\omega_c}$$

$$x = \frac{v_\perp^0}{\omega_c} + \left(\frac{\ell}{m}\frac{E_0}{\omega^2-\omega_c^2}\frac{\omega^2}{\omega_c^2} - \frac{v_\perp^0}{\omega_c} - \frac{\ell E_0}{m\omega_c^2}\right)\cos(\omega_c t) - \frac{\ell}{m}\frac{E_0}{\omega^2-\omega_c^2}\cos(\omega t) \Rightarrow$$

$$x = \frac{v_\perp^0}{\omega_c}(1-\cos(\omega_c t)) + \frac{\ell}{m}\frac{E_0}{\omega^2-\omega_c^2}\left(\frac{\omega^2}{\omega_c^2}\cos(\omega_c t) - \cos(\omega t) - \frac{\cos(\omega_c t)}{\omega_c^2}(\omega^2-\omega_c^2)\right) \Rightarrow$$

$$x = \frac{v_\perp^0}{\omega_c}(1-\cos(\omega_c t)) + \frac{\ell}{m}\frac{E_0}{\omega^2-\omega_c^2}(\cos(\omega_c t) - \cos(\omega t))$$

$$y = y_H + y_P \qquad \text{ZA } y_p \Rightarrow y_p = C_4 \sin(\omega t)$$

$$y_H = C_1 + C_2\sin(\omega_c t) + C_3\cos(\omega_c t)$$

$$\left.\begin{aligned} \dot{y}_p &= C_4\omega\cos(\omega t) \\ \ddot{y}_p &= -C_4\omega^2\sin(\omega t) \\ \dddot{y}_p &= -C_4\omega^3\cos(\omega t) \end{aligned}\right| \; \dddot{y}_p + \omega_c^2\dot{y}_p = -\frac{\ell}{m}E_0\omega_c\cos(\omega t)$$

$$\Rightarrow -C_4\omega^{\cancel{3}\,2}\cancel{\cos()} + \omega_c^2 C_4 \cancel{\omega}\cancel{\cos()} = -\frac{\ell}{m}E_0\frac{\omega_c}{\omega}\cancel{\cos()}$$

$$-C_4\omega^2 + C_4\omega_c^2 = -\frac{\ell}{m}E_0\frac{\omega_c}{\omega} \Rightarrow$$

$$C_4 = \frac{\ell}{m}\frac{E_0\omega_c}{\omega}\frac{1}{\omega^2-\omega_c^2} \Rightarrow y_p = \frac{\ell}{m}E_0\frac{\omega_c}{\omega}\frac{\sin(\omega t)}{\omega^2-\omega_c^2} \Rightarrow$$

$$y = C_1 + C_2\sin(\omega_c t) + C_3\cos(\omega_c t) + \frac{\ell E_0}{m}\frac{\omega_c}{\omega}\frac{\sin(\omega t)}{\omega^2-\omega_c^2}$$

$$\dot{y} = C_2\omega_c\cos(\omega_c t) - C_3\omega_c\sin(\omega_c t) + \frac{\ell E_0}{m}\frac{\omega_c}{\cancel{\omega}}\frac{\cancel{\omega}\cos(\omega t)}{\omega^2-\omega_c^2}$$

$$\ddot{y} = -C_2\omega_c^2\sin(\omega_c t) - C_3\omega_c^2\cos(\omega_c t) - \frac{\ell E_0}{m}\frac{\omega_c}{\omega^2-\omega_c^2}\,\omega\sin(\omega t) \Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} 0 &= C_1 + C_3 \Rightarrow C_1 = -C_3 \\ v_\perp^0 &= C_2\omega_c + \frac{\ell E_0}{m}\frac{\omega_c}{\omega^2-\omega_c^2} \\ 0 &= -C_3\omega_c^2 \Rightarrow C_3 = 0,\ C_1 = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} C_2\omega_c &= v_\perp^0 - \frac{\ell E_0}{m}\frac{\omega_c}{\omega^2-\omega_c^2} \Rightarrow \\ C_2 &= \frac{v_\perp^0}{\omega_c} - \frac{\ell E_0}{m}\frac{1}{\omega^2-\omega_c^2} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$y = \left(\frac{v_\perp^0}{\omega_c} - \frac{\ell E_0}{m}\frac{1}{\omega^2-\omega_c^2}\right)\sin(\omega_c t) + \frac{\ell E_0}{m}\frac{\omega_c}{\omega}\frac{\sin(\omega t)}{\omega^2-\omega_c^2} \Rightarrow$$

$$y = \frac{v_\perp^0}{\omega_c}\sin(\omega_c t) + \frac{\ell}{m}E_0\frac{1}{\omega^2-\omega_c^2}\left(\frac{\omega_c}{\omega}\sin(\omega t) - \sin(\omega_c t)\right)$$

---

② PRIMEĆUJEMO NEŠTO ČUDNO ZA $\omega = \omega_c$

$\Rightarrow$ MORAMO ODVOJENO RADITI

$\omega = \omega_c \Rightarrow$ SADA NE MOŽE $x_p \propto \cos(\omega t)$, ALI BI MOGLO

$$x_p = C_4 t\cos(\omega t) + C_5 t\sin(\omega t), \quad \text{uz } \omega = \omega_c$$

$$\dddot{x}_p + \omega_c^2\dot{x}_p = -\frac{\ell}{m}E_0\,\omega\sin(\omega t)$$

$x_p = C_4 t\cos(wt) + C_5 t\sin(wt)$, $w = w_c$

$\dddot{x}_p + w_c^2 \dot{x}_p = -\frac{\ell}{m} E_0 w_c \sin(w_c t)$

$\dot{x}_p = C_4 \cos(w_c t) - C_4 t w_c \sin(w_c t) + C_5 \sin(w_c t) + C_5 t w_c \cos(w_c t)$

$\ddot{x}_p = -C_4 w_c \sin(w_c t) - C_4 w_c \sin(w_c t) - C_4 t w_c^2 \cos(w_c t) + C_5 w_c \cos(w_c t) + C_5 w_c \cos(w_c t)$
$- C_5 t w_c^2 \sin(w_c t)$

$\dddot{x}_p = -C_4 w_c^2 \cos(w_c t) - C_4 w_c^2 \cos(w_c t) - C_4 w_c^2 \cos(w_c t) + C_4 t w_c^3 \sin(w_c t) - C_5 w_c^2 \sin(w_c t)$
$- C_5 w_c^2 \sin(w_c t) - C_5 w_c^2 \sin(w_c t) - C_5 t w_c^3 \cos(w_c t)$

$\Rightarrow \cos(w_c t)[-3C_4 w_c^2 - C_5 t w_c^3] + \sin(w_c t)[C_4 t w_c^3 - 3C_5 w_c^2] +$
$w_c^2 \left(\cos(w_c t)[C_4 + C_5 t w_c] + \sin(w_c t)[-C_4 t w_c + C_5] \right) = -\frac{\ell}{m} E_0 w_c \sin(w_c t)$

$\cos(w_c t)\left[-3C_4 w_c^2 - \cancel{C_5 t w_c^3} + C_4 w_c^2 + \cancel{C_5 t w_c^3}\right] + \sin(w_c t)\left[\cancel{C_4 t w_c^3} - 3C_5 w_c^2 + C_5 w_c^2 - \cancel{C_4 t w_c^3}\right]$
$= -\frac{\ell}{m} E_0 w_c \sin(w_c t) \Rightarrow$

$-2C_4 w_c^2 = 0 \Rightarrow \underline{C_4 = 0}$

$\underbrace{-3C_5 w_c^{\cancel{2}} + C_5 w_c^{\cancel{2}}}_{-2C_5 w_c} = \cancel{-}\frac{\ell}{m} E_0 \cancel{w_c} \Rightarrow C_5 = \frac{\ell E_0}{2m w_c}$ $\Rightarrow$ $x_p = \frac{\ell E_0}{2m w_c} t \sin(w_c t)$

$X = C_1 + C_2 \sin(w_c t) + C_3 \cos(w_c t) + \frac{\ell E_0}{2m w_c} t \sin(w_c t)$

$0 = C_1 + C_3 \Rightarrow C_1 = -C_3$

$\dot{x} = C_2 w_c \cos(w_c t) - C_3 w_c \sin(w_c t) + \frac{\ell E_0}{2m w_c} \sin(w_c t) + \frac{\ell E_0}{2m \cancel{w_c}} t \cancel{w_c} \cos(w_c t)$

$0 = C_2 w_c \Rightarrow \underline{C_2 = 0}$

$\ddot{x} = -C_3 w_c^2 \cos(w_c t) + \frac{\ell E_0}{2m \cancel{w_c}} \cancel{w_c} \cos(w_c t) + \frac{\ell E_0}{2m} \cos(w_c t) - \frac{\ell E_0}{2m} t w_c \sin(w_c t)$

$\ddot{x}|_0 = w_c \dot{y}|_0 + \frac{\ell}{m} E_0 = -C_3 w_c^2 + \frac{\ell E_0}{2m} + \frac{\ell E_0}{2m} \Rightarrow w_c v_I^0 + \cancel{\frac{\ell}{m} E_0} - \cancel{\frac{\ell}{m} E_0} = -C_3 w_c^2$

$\Rightarrow \underline{C_3 = -\frac{v_I^0}{w_c}}$, $\underline{C_1 = \frac{v_I^0}{w_c}}$ $\Rightarrow$

$x = \frac{v_I^0}{w_c} - \frac{v_I^0}{w_c} \cos(w_c t) + \frac{\ell E_0}{2m w_c} t \sin(w_c t) \Rightarrow \underline{\underline{X = \frac{v_I^0}{w_c}(1 - \cos(w_c t)) + \frac{\ell E_0}{2m w_c} t \sin(w_c t)}}$

$\dddot{y} + w_c^2 \dot{y} = -\frac{\ell}{m} E_0 w_c \cos(w_c t)$ $\quad y_p = C_4 t \cos(w_c t) + C_5 t \sin(w_c t) \Rightarrow$

$\ddot{y} = -w_c \dot{x}$

$\ddot{y}|_0 = -w_c \dot{x}|_0 = 0$ $\quad +2C_4 w_c^{\cancel{2}} = +\frac{\ell}{m} E_0 \cancel{w_c} \Rightarrow \underline{C_4 = \frac{\ell E_0}{2m w_c}}$

$y_p = \frac{\ell E_0}{2m w_c} t \cos(w_c t)$ $\quad -2C_5 w_c^2 = 0 \Rightarrow \underline{C_5 = 0}$

$y = C_1 + C_2 \sin(w_c t) + C_3 \cos(w_c t) + \frac{\ell E_0}{2m w_c} t \cos(w_c t)$

$0 = C_1 + C_3 \Rightarrow C_1 = -C_3$

$\dot{y} = C_2 w_c \cos(w_c t) - C_3 w_c \sin(w_c t) + \frac{\ell E_0}{2m w_c} \cos(w_c t) - \frac{\ell E_0}{2m} t \sin(w_c t)$

$v_I^0 = C_2 w_c + \frac{\ell E_0}{2m w_c} \Rightarrow \underline{C_2 = \frac{v_I^0}{w_c} - \frac{\ell E_0}{2m w_c^2}}$

$\ddot{y} = -C_2 w_c^2 \sin(w_c t) - C_3 w_c^2 \cos(w_c t) - \frac{\ell E_0}{2m} \sin(w_c t) - \frac{\ell E_0}{2m} \sin(w_c t) - \frac{\ell E_0}{2m} t w_c \cos(w_c t)$

$$0 = -C_3 \omega_c^2 \Rightarrow C_3 = 0 \Rightarrow C_1 = 0$$

$$y = \left(\frac{v_\perp^0}{\omega_c} - \frac{qE_0}{2m\omega_c^2}\right)\sin(\omega_c t) + \frac{qE_0}{2m\omega_c} t \cos(\omega_c t) \Rightarrow$$

$$y = \frac{v_\perp^0}{\omega_c}\sin(\omega_c t) + \frac{qE_0}{2m\omega_c^2}\left(\omega_c t \cos(\omega_c t) - \sin(\omega_c t)\right)$$

SADA JE JASNO DA $W_\perp \propto \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \propto \underline{\underline{t^2}}$ PORAST ENERGIJE TOKOM VREMENA

IPAK, TU SU SUDARI & ZRAČENJE PA NE IDE U ∞

DODATAK: UDARNI TALASI U IDEALNOJ MHD (POJAŠNJENJA)

1) 1D HIDRODINAMIČKI UDARNI TALASI

$$Y = \frac{P_2}{P_1} = \frac{(\gamma_g+1)X - (\gamma_g-1)}{(\gamma_g+1) - (\gamma_g-1)X} \begin{matrix} \leftarrow P_2 \\ \leftarrow P_1 \end{matrix}$$

$$\left.\begin{matrix} P_2 > 0 \\ P_1 > 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow Y > 0 \Rightarrow$$

$$(\gamma_g+1)X - (\gamma_g-1) > 0 \Rightarrow X > \frac{\gamma_g-1}{\gamma_g+1}$$

$$(\gamma_g+1) - (\gamma_g-1)X > 0 \Rightarrow X < \frac{\gamma_g+1}{\gamma_g-1}$$

ZBOG RASTA ENTROPIJE

IMAMO $\ln(YX^{-\gamma_g}) > 0 \Rightarrow YX^{-\gamma_g} > 1 \Rightarrow$

$$\underbrace{\boxed{\frac{(\gamma_g+1)X - (\gamma_g-1)}{(\gamma_g+1) - (\gamma_g-1)X}\,\frac{1}{X^{\gamma_g}}}}_{F(X)} > 1$$

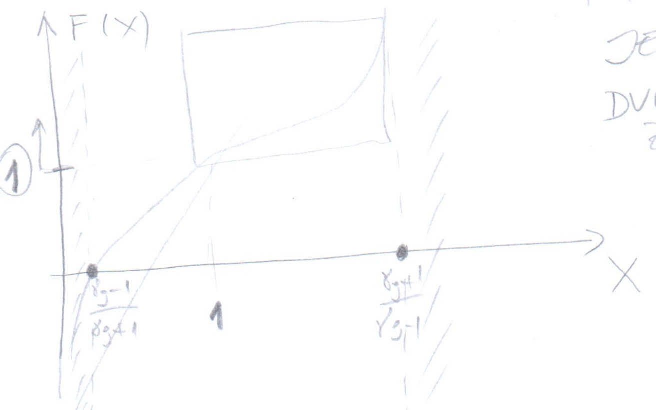
REŠITI GRAFIČKI

NAJBOLJE ISPROGRAMIRATI

JEDNA NULA ZA $X = \frac{\gamma_g-1}{\gamma_g+1}$

DVE VERTIKALNE ASIMPTOTE:
ZA $X = 0 \wedge X = \frac{\gamma_g+1}{\gamma_g-1}$

$\frac{dF(X)}{dX} > 0 \Rightarrow$ MONOTONO RASTE



$X \to \infty \Rightarrow F(X) \to 0$

$$1 < X < \frac{\gamma_g+1}{\gamma_g-1}$$

2)

$$\rho_1 v_1 = \rho_2 v_2$$
$$\rho_1 v_1^2 + P_1 = \rho_2 v_2^2 + P_2$$
$$X = \rho_2/\rho_1, \quad Y = P_2/P_1$$

$$v_1 - v_2 = v_1 - \frac{\rho_1}{\rho_2}v_1 = v_1\left(1 - \frac{1}{X}\right)$$

$$\rho_1 v_1^2 = \rho_2 v_2^2 + P_2 - P_1$$

$$v_1^2 = \frac{\rho_2}{\rho_1}v_2^2 + \frac{P_2}{\rho_1} - \frac{P_1}{\rho_1} \Rightarrow v_1^2 = \frac{\rho_2}{\rho_1}\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^2 v_1^2 + \frac{P_2}{P_1}\frac{P_1}{\rho_1} - \frac{P_1}{\rho_1} \Rightarrow$$

$$v_1^2 = \frac{1}{X}v_1^2 + (Y-1)P_1/\rho_1 = \left| \begin{matrix} P_2 = YP_1 \Rightarrow P_1 = P_2/Y \\ \rho_2 = X\rho_1 \Rightarrow \rho_1 = \rho_2/X \end{matrix} \right| =$$

$$v_1^2\left(1 - \frac{1}{X}\right) = (Y-1)\frac{P_2}{Y}\frac{X}{\rho_2} \Rightarrow v_1^2 = \frac{\frac{P_2}{\rho_2}\frac{X(Y-1)}{Y}}{1 - \frac{1}{X}} = \frac{\frac{P_2}{\rho_2}X\left(1 - \frac{1}{Y}\right)}{\frac{X-1}{X}} =$$

$$= \frac{P_2}{\rho_2}\left(\frac{X^2}{X-1}\left(1 - \frac{1}{Y}\right)\right) \Rightarrow$$

$$v_1 - v_2 = \left(1 - \frac{1}{X}\right)\sqrt{\frac{P_2}{\rho_2}\left(\frac{X^2}{X-1}\right)\left(1 - \frac{1}{Y}\right)} = \frac{X-1}{X}\sqrt{\frac{P_2}{\rho_2}\frac{X^2}{X-1}\left(1 - \frac{1}{Y}\right)} \Rightarrow$$

$$v_1 - v_2 = \sqrt{\frac{P_2}{\rho_2}\frac{X^2}{X-1}\frac{(X-1)^2}{X^2}\left(1 - \frac{1}{Y}\right)} \Rightarrow$$

$$v_1 - v_2 = \sqrt{\frac{P_2}{\rho_2}(X-1)\left(1 - \frac{1}{Y}\right)} \Rightarrow$$

$$v_1 - v_2 = \sqrt{\frac{P_2}{\rho_2}\left(\frac{\rho_2}{\rho_1} - 1\right)\left(1 - \frac{P_1}{P_2}\right)} \Rightarrow$$

$$v_1 - v_2 = \sqrt{(P_2 - P_1)\left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2}\right)}$$

(3) POLAZEĆI OD IZRAZA ZA FAKTOR KOMPRESIJE NORMALNOG MHD TALASA (2)

$$X = \frac{-\left(1+\frac{1}{\beta_1}+\frac{\gamma_g-1}{2}M_1^2\right)+\sqrt{\left(1+\frac{1}{\beta_1}+\frac{\gamma_g-1}{2}M_1^2\right)^2+\frac{2(\gamma_g+1)(2-\gamma_g)}{\gamma_g\beta_1}M_1^2}}{\frac{2(2-\gamma_g)}{\gamma_g\beta_1}}$$

, POKAZATI DA SE UDARNI FRONT UVEK KREĆE BRŽE OD BRZOG MAGNETNOG ZVUKA.

KAKO JE $X > 1 \Rightarrow$

$$-\left(1+\frac{1}{\beta_1}+\frac{\gamma_g-1}{2}M_1^2\right)+\sqrt{\quad} > \frac{2(2-\gamma_g)}{\gamma_g\beta_1} \Rightarrow$$

$$\sqrt{\quad} > \left(1+\frac{1}{\beta_1}+\frac{\gamma_g-1}{2}M_1^2\right)+\frac{2(2-\gamma_g)}{\gamma_g\beta_1} \Big/^2$$

$$\left(1+\frac{1}{\beta_1}+\frac{\gamma_g-1}{2}M_1^2\right)^2+\frac{2(\gamma_g+1)(2-\gamma_g)}{\gamma_g\beta_1}M_1^2 > \left[\left(1+\frac{1}{\beta_1}+\frac{\gamma_g-1}{2}M_1^2\right)+\frac{2(2-\gamma_g)}{\gamma_g\beta_1}\right]^2 \Rightarrow$$

$$\frac{2(\gamma_g+1)(2-\gamma_g)M_1^2}{\gamma_g\beta_1} > \frac{4(2-\gamma_g)^2}{\gamma_g^2\beta_1^2}+\frac{4(2-\gamma_g)}{\gamma_g\beta_1}\left(1+\frac{1}{\beta_1}+\frac{\gamma_g-1}{2}M_1^2\right)$$

$$> \frac{4(2-\gamma_g)}{\gamma_g\beta_1}\left(\frac{2-\gamma_g}{\gamma_g\beta_1}+1+\frac{1}{\beta_1}\right)+\frac{4(2-\gamma_g)(\gamma_g-1)}{2\gamma_g\beta_1}M_1^2 \Rightarrow$$

$$M_1^2\left(\frac{2(\gamma_g+1)(2-\gamma_g)}{\gamma_g\beta_1}-\frac{4(2-\gamma_g)(\gamma_g-1)}{2\gamma_g\beta_1}\right) > \frac{4(2-\gamma_g)}{\gamma_g\beta_1}\left(\frac{2-\cancel{\gamma_g}+\gamma_g\beta_1+\cancel{\gamma_g}}{\gamma_g\beta_1}\right) \Rightarrow$$

$$M_1^2\frac{\cancel{2}\cancel{(2-\gamma_g)}}{\cancel{\gamma_g\beta_1}}\left(\cancel{\gamma_g}+1-\cancel{\gamma_g}+1\right) > \frac{\cancel{4}\cancel{(2-\gamma_g)}}{\gamma_g^{\cancel{2}}\beta_1^{\cancel{2}}}(2+\gamma_g\beta_1) \Rightarrow$$

$$M_1^2 > \frac{2+\gamma_g\beta_1}{\gamma_g\beta_1} \Rightarrow M_1^2 > \frac{2}{\gamma_g\beta_1}+1 \Rightarrow M_1^2 > \frac{\cancel{2}\cancel{\gamma_g}v_{A1}^2}{\cancel{\gamma_g}\cancel{2}v_{s1}^2}+1 \Rightarrow$$

$$M_1^2 > \frac{v_{s1}^2+v_{A1}^2}{v_{s1}^2} \Rightarrow \frac{v_1^2}{v_{s1}^2} > \frac{v_{s1}^2+v_{A1}^2}{v_{s1}^2} \Rightarrow \underline{v_1^2 > v_{s1}^2+v_{A1}^2}$$

OBIČNO SE TADA UVODI $M_m = \frac{v}{\sqrt{v_s^2+v_A^2}}$ UMESTO $M=\frac{v}{v_s}$

ZA NORMALNE TALASE POSTAJE NORMALNI MAGNETNI ZVUK

4) POLAZEĆI OD IZRAZA (4.16e) i (4.16f) POKAZATI DA VAŽI (4.17) 3

VODITI RAČUNA DA JE $x \neq 0$, $y \neq 0$, $x \neq 1$, $y \neq 1$.

$$(4.16e) \quad y = \gamma_g \left(M_1^2 \left(1 - \frac{1}{x}\right) + \frac{1}{\gamma_g \beta_1}(1 - x^2) + \frac{1}{\gamma_g} \right) \Rightarrow$$

$$(4.16f) \quad y = x(\gamma_g - 1)\left(\frac{1}{2} M_1^2 \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) + \frac{2}{\gamma_g \beta_1}(1 - x) + \frac{1}{\gamma_g - 1} \right)$$

$$M_1^2 \gamma_g \left(1 - \frac{1}{x}\right) + \frac{1}{\beta_1}(1 - x^2) + 1 = \frac{1}{2} M_1^2 x(\gamma_g - 1)\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) + \frac{2}{\gamma_g \beta_1}(1-x)x(\gamma_g - 1) + x$$

$$\frac{M_1^2 \gamma_g (x-1)x}{x^2} + \frac{x^2(1-x)(1+x)}{\beta_1 x^2} + \frac{x^2}{x^2} = \frac{\frac{1}{2}M_1^2 x(\gamma_g - 1)(x-1)(x+1)}{x^2} + \frac{2(1-x)x^3(\gamma_g-1)}{\gamma_g \beta_1 x^2} + \frac{x^3}{x^2}$$

$x \neq 0 \Rightarrow$

$$M_1^2 \gamma_g x \underline{(x-1)} - (1+x)x^2 \frac{1}{\beta_1}\underline{(x-1)} - \frac{1}{2}M_1^2(\gamma_g - 1)x(x+1)\underline{(x-1)} + 2x^3(\gamma_g - 1)\frac{1}{\gamma_g \beta_1}\underline{(x-1)}$$
$$- x^2\underline{(x-1)} = 0$$

$x \neq 1 \Rightarrow$

$$M_1^2 \gamma_g x - (1+x)x^2 \frac{1}{\beta_1} - \frac{1}{2}M_1^2(\gamma_g - 1)x(x+1) + 2x^3(\gamma_g - 1)\frac{1}{\gamma_g \beta_1} - x^2 = 0$$

$$M_1^2 \gamma_g x - \frac{x^2}{\beta_1} - \frac{x^3}{\beta_1} - \frac{1}{2}M_1^2(\gamma_g - 1)x^2 - \frac{1}{2}M_1^2(\gamma_g - 1)x + \frac{2(\gamma_g - 1)}{\gamma_g \beta_1}x^3 - x^2 = 0$$

$$x^3\left(-\frac{1}{\beta_1} + \frac{2(\gamma_g - 1)}{\gamma_g \beta_1}\right) + x^2\left(-\frac{1}{\beta_1} - \frac{1}{2}M_1^2(\gamma_g - 1) - 1\right) + x\left(M_1^2 \gamma_g - \frac{1}{2}M_1^2(\gamma_g - 1)\right) = 0 \quad / \cdot -1$$

KAKO JE $x \neq 0 \Rightarrow$

$$x^2\left(\frac{1}{\beta_1} - \frac{2(\gamma_g - 1)}{\gamma_g \beta_1}\right) + x\left(\frac{1}{\beta_1} + \frac{1}{2}M_1^2(\gamma_g - 1) + 1\right) + \frac{1}{2}M_1^2(\gamma_g - 1) - M_1^2 \gamma_g = 0$$

$$x^2 \frac{\overbrace{\gamma_g - 2\gamma_g + 2}^{2-\gamma_g}}{\gamma_g \beta_1} + x\left(1 + \frac{1}{\beta_1} + \frac{1}{2}M_1^2(\gamma_g - 1)\right) + (-)\frac{1}{2}M_1^2(1 + \gamma_g) = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{-\left(1 + \frac{1}{\beta_1} + \frac{1}{2}M_1^2(\gamma_g - 1)\right) \pm \sqrt{\left(1 + \frac{1}{\beta_1} + \frac{1}{2}M_1^2(\gamma_g - 1)\right)^2 + 4^2\frac{(2-\gamma_g)}{\gamma_g \beta_1}\frac{1}{2}M_1^2(1+\gamma_g)}}{\frac{2(2-\gamma_g)}{\gamma_g \beta_1}}$$

$x > 0 \Rightarrow$

$$x = \frac{-\left(1 + \frac{1}{\beta_1} + \frac{\gamma_g - 1}{2}M_1^2\right) + \sqrt{\left(1 + \frac{1}{\beta_1} + \frac{\gamma_g - 1}{2}M_1^2\right)^2 + \frac{2(\gamma_g + 1)(2-\gamma_g)}{\gamma_g \beta_1}M_1^2}}{\frac{2(2-\gamma_g)}{\gamma_g \beta_1}}$$

(5) PRISUSTVO MAGNETNOG POLJA SMANJUJE PARAMETAR KOMPRESIJE (4)

VAN MAGNETNOG POLJA: (4.13a) $M_1^2\left(1-\frac{1}{X}\right)=\frac{1}{\gamma_3}(Y-1) \Rightarrow \frac{Y}{\gamma_3}-\frac{1}{\gamma_3}=M_1^2\left(1-\frac{1}{X}\right)$

$\Rightarrow Y=1+\gamma_3 M_1^2\frac{(X-1)}{X}$

(4.13b) $M_1^2\left(1-\frac{1}{X^2}\right)=\frac{2}{\gamma_3-1}\left(\frac{Y}{X}-1\right)$ $X\neq 0$, $X\neq 1$

$X=\frac{(\gamma_3+1)M_1^2}{2+(\gamma_3-1)M_1^2}$

NORMALNI UDARNI TALAS ODRANDJE ∃ J-NA ZA PRONALAŽENJE X_B

$X_B^2\frac{2-\gamma_3}{\gamma_3\beta_1}+X_B\left(1+\frac{1}{\beta_1}+\frac{1}{2}M_1^2(\gamma_3-1)\right)-\frac{1}{2}M_1^2(\gamma_3+1)=0 \Rightarrow$ OPSTAJE SAMO POZITIVNO REŠENJE $X_B>0$

$$X_B=\frac{-\left(1+\frac{1}{\beta_1}+\frac{\gamma_3-1}{2}M_1^2\right)+\sqrt{\left(1+\frac{1}{\beta_1}+\frac{\gamma_3-1}{2}M_1^2\right)^2+\frac{2(\gamma_3+1)(2-\gamma_3)M_1^2}{\gamma_3\beta_1}}}{\frac{2(2-\gamma_3)}{\gamma_3\beta_1}}$$

$X_B \rightarrow$ FAKTOR KOMPRESIJE KADA ∃ B

$\boxed{(1)}$ $X_B^2(2-\gamma_3)\beta_1^{-1}+X_B\left(\gamma_3(1+\beta_1^{-1})+\frac{1}{2}\gamma_3 M_1^2(\gamma_3-1)\right)-\frac{1}{2}\gamma_3 M_1^2(\gamma_3+1)=0$

$X_B^2(2-\gamma_3)\beta_1^{-1}+X_B\gamma_3\beta_1^{-1}+\underline{X_B\left(\gamma_3+\frac{1}{2}\gamma_3 M_1^2(\gamma_3-1)\right)}-\frac{1}{2}\gamma_3 M_1^2(\gamma_3+1)=0$

VAN MAGNETNOG POLJA $\Rightarrow$

$$\frac{M_1^2(X^2-1)}{X^2}=\frac{2}{\gamma_3-1}\left(\frac{1}{X}\left(1+\gamma_3 M_1^2\frac{(X-1)}{X}\right)-1\right)\Rightarrow$$

$$\frac{M_1^2(X^2-1)}{X^2}-\frac{2}{\gamma_3-1}\frac{1}{X}-\frac{2}{\gamma_3-1}\frac{1}{X}\gamma_3 M_1^2\frac{(X-1)}{X}+\frac{2}{\gamma_3-1}=0$$

$$\frac{M_1^2(X^2-1)}{X^2}-\frac{2}{\gamma_3-1}\frac{X}{X^2}-\frac{2}{\gamma_3-1}\gamma_3 M_1^2(X-1)\frac{1}{X^2}+\frac{2X^2}{(\gamma_3-1)X^2}=0,\quad X\neq 0\Rightarrow$$

$$\underline{M_1^2X^2}-M_1^2-\frac{2}{\gamma_3-1}X-\frac{2}{\gamma_3-1}\gamma_3 M_1^2 X+\frac{2}{\gamma_3-1}\gamma_3 M_1^2+\frac{2X^2}{\gamma_3-1}=0$$

$$X^2\left(M_1^2+\frac{2}{\gamma_3-1}\right)+X\left(-\frac{2}{\gamma_3-1}-\frac{2}{\gamma_3-1}\gamma_3 M_1^2\right)+\frac{2}{\gamma_3-1}\gamma_3 M_1^2-M_1^2=0$$

$$X^2\left(\frac{M_1^2(\gamma_3-1)+2}{\gamma_3-1}\right)+X\left(-\frac{2(1+\gamma_3 M_1^2)}{\gamma_3-1}\right)+\frac{2\gamma_3 M_1^2-M_1^2(\gamma_3-1)}{\gamma_3-1}=0$$

(POŠTO JE JEDNO REŠENJE $X=1$)

TO DAJE JEDNO FIZIČKI SMISLENO REŠENJE ZA X

$(\gamma_3+1)M_1^2=X\left(2+(\gamma_3-1)M_1^2\right)$ $\boxed{(2)}$ $\rightarrow \left(\frac{1}{2}\gamma_3 2+\frac{1}{2}\gamma_3(\gamma_3-1)M_1^2\right)X=\frac{1}{2}\gamma_3(\gamma_3+1)M_1^2 \Rightarrow$

$/\cdot\frac{1}{2}\gamma_3$ $\underline{\left(\gamma_3+\frac{1}{2}\gamma_3(\gamma_3-1)M_1^2\right)X}-\frac{1}{2}\gamma_3(\gamma_3+1)M_1^2=0,$

ODNOSNO, $X(2+(\gamma_3-1)M_1^2)-(\gamma_3+1)M_1^2=0$

UGLAVNOM JE $\gamma_3>1 \wedge \gamma_3<2$

$\boxed{(1)}-\boxed{(2)}\Rightarrow$

$$(X_B-X)\left(\gamma_3+\frac{1}{2}\gamma_3 M_1^2(\gamma_3-1)\right)=\cancel{\frac{1}{2}\gamma_3 M_1^2(\gamma_3+1)}-\cancel{\frac{1}{2}\gamma_3(\gamma_3+1)M_1^2}-X_B\gamma_3\beta_1^{-1}-X_B^2(2-\gamma_3)\beta_1^{-1}$$

$$(X_B-X)\left(\gamma_3+\frac{1}{2}\gamma_3 M_1^2(\gamma_3-1)\right)=-\beta_1^{-1}X_B\left(\gamma_3+X_B(2-\gamma_3)\right)\Rightarrow$$

$$\underbrace{(X_B-X)}\underbrace{\left(\gamma_3+\frac{1}{2}\gamma_3 M_1^2(\gamma_3-1)\right)}_{>0}=-\underbrace{\beta_1^{-1}X_B}_{>0}\underbrace{\left(\gamma_3+X_B(2-\gamma_3)\right)}_{>0}$$

$$X_B-X<0\Rightarrow \underline{\underline{X_B<X}}$$

ŠTO JE B_1 VEĆE (ISPRED UDARNOG FRONTA)

POŠTO JE $\frac{\rho_2}{\rho_1}=\frac{v_1}{v_2}\wedge v_1B_1=v_2B_2\Rightarrow\frac{\rho_2}{\rho_1}=\frac{B_2}{B_1}\Rightarrow$ TO ĆE $\overline{X}$ BITI MANJE $\Rightarrow$ MAGNETNO POLJE SMANJUJE KOMPRESIJU

(6) PARAMETAR JAČINE UDARNOG TALASA SE SMANJUJE U SLUČAJU KADA $\exists B$.

ZAMRZNUTO MAGNETNO POLJE POVEĆAVA ELASTIČNOST GASA, JER SE I ONO SVOJIM MAGNETNIM NAPONIMA SUPROTSTAVLJA KOMPRESIJI $\Rightarrow$ PROMENA GASNOG PRITISKA KADA $\exists B$ JE MANJA NEGO VAN NJEGA (PRI OSTALIM JEDNAKIM USLOVIMA)

OD RANIJE (4.13a) $\Rightarrow Y = 1 + \gamma_g M_1^2 \frac{X-1}{X}$

(4.16e) $\Rightarrow Y_B = 1 + \gamma_g M_1^2 \frac{X_B-1}{X_B} + \underbrace{\beta_1^{-1}(1-X_B^2)}_{<0}$

KAKO JE $X_B < X \Rightarrow \gamma_g M_1^2 \underbrace{\frac{X-1}{X}}_{1-\frac{1}{X}} > \gamma_g M_1^2 \underbrace{\frac{X_B-1}{X_B}}_{1-\frac{1}{X_B}}$

$\left.\begin{array}{l}\beta_1^{-1} > 0 \\ X_B > 1\end{array}\right\}$

$\Rightarrow \underline{Y_B < Y}$

(7) POKAZATI DA SE KOD NORMALNIH MHD UDARNIH TALASA, AKO SE UMESTO $\frac{p_2}{p_1}$) ZA JAČINU UDARNOG TALASA, UVEDE $Y^* = v_1 - v_2$ ZA JAČINU UDARNOG TALASA

MOŽE PISATI $Y \equiv v_1 - v_2 = \sqrt{\left(\frac{1}{\rho_1}-\frac{1}{\rho_2}\right)\left(p_2 - p_1 + \frac{B_2^2}{2\mu_0} - \frac{B_1^2}{2\mu_0}\right)}$

SETIMO SE DA JE VAN MAGNETNOG POLJA $v_1 - v_2 = \sqrt{(p_2-p_1)\left(\frac{1}{\rho_1}-\frac{1}{\rho_2}\right)}$

$\rho_1 v_1 = \rho_2 v_2 \Rightarrow v_2 = \frac{\rho_1}{\rho_2} v_1 \Rightarrow \frac{v_1}{v_2} = \frac{\rho_2}{\rho_1}$ $\quad X = \rho_2/\rho_1$, $\quad Y^* = p_2/p_1$

$v_1 B_1 = v_2 B_2 \Rightarrow B_2 = \frac{v_1}{v_2} B_1 \Rightarrow B_2 = \frac{\rho_2}{\rho_1} B_1$

$v_1 - v_2 = v_1\left(1 - \frac{1}{X}\right)$ $\quad v_1^2 = \frac{\rho_2}{\rho_1} v_2^2 + \frac{p_2}{\rho_1} + \frac{1}{2\mu_0}\frac{B_2^2}{\rho_1} - \frac{p_1}{\rho_1} - \frac{1}{2\mu_0}\frac{B_1^2}{\rho_1}$

$\rho_1 v_1^2 + p_1 + \frac{1}{2\mu_0}B_1^2 = \rho_2 v_2^2 + p_2 + \frac{1}{2\mu_0}B_2^2 \Rightarrow$

$v_1^2 = \frac{\rho_2}{\rho_1}\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^2 v_1^2 + \frac{p_2}{p_1}\frac{p_1}{\rho_1} - \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{1}{2\mu_0}\frac{1}{\rho_1}\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^2 B_1^2 - \frac{1}{2\mu_0}\frac{B_1^2}{\rho_1}$

$v_1^2 = \frac{1}{X}v_1^2 + Y^*\frac{p_1}{\rho_1} - \frac{p_1}{\rho_1} + X^2\frac{1}{2\mu_0}\frac{B_1^2}{\rho_1} - \frac{1}{2\mu_0}\frac{B_1^2}{\rho_1}$

$v_1^2 = \frac{1}{X}v_1^2 + \frac{p_1}{\rho_1}(Y^*-1) + \frac{1}{2}v_{A1}^2(X^2-1)$

$v_1^2\left(1-\frac{1}{X}\right) = (Y^*-1)\frac{p_2}{Y^*}\frac{X}{\rho_2} + \frac{1}{2}v_{A1}^2(X^2-1)$

$v_1^2 = \frac{p_2}{\rho_2}\left(\frac{X^2}{X-1}\right)\left(1-\frac{1}{Y^*}\right) + \frac{1}{2}v_{A1}^2\frac{(X^2-1)X}{X-1}$

$v_1 = \sqrt{\frac{p_2}{\rho_2}\frac{X^2}{X-1}\left(1-\frac{1}{Y^*}\right) + \frac{1}{2}v_{A1}^2(X+1)X}$

$v_1 - v_2 = \left(1-\frac{1}{X}\right)\sqrt{\frac{p_2}{\rho_2}\frac{X^2}{X-1}\left(1-\frac{1}{Y^*}\right) + \frac{1}{2}v_{A1}^2(X+1)X}$

$v_1 - v_2 = \sqrt{\frac{\cancel{(X-1)^2}\,(X-1)}{\cancel{X^2}}\frac{p_2}{\rho_2}\frac{\cancel{X^2}}{\cancel{X-1}}\left(1-\frac{1}{Y^*}\right) + \frac{(X-1)^2}{X^2}\frac{1}{2}v_{A1}^2(X+1)X}$

$v_1 - v_2 = \sqrt{p_2/\rho_2\,(X-1)\left(1-\frac{1}{Y^*}\right) + \frac{1}{2}v_{A1}^2(X^2-1)\left(1-\frac{1}{X}\right)}$

$v_1 - v_2 = \sqrt{p_2/\rho_2\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}-\frac{\rho_1}{\rho_1}\right)\left(1-\frac{p_1}{p_2}\right) + \frac{1}{2}v_{A1}^2\left(\frac{\rho_2^2}{\rho_1^2}-1\right)\left(1-\rho_1/\rho_2\right)}$

6

$$v_1 - v_2 = \sqrt{\frac{\cancel{\rho_2}}{\rho_2}\,\frac{(\rho_2-\rho_1)}{\rho_1}\,\frac{(p_2-p_1)}{\cancel{p_2}} + \frac{1}{2} v_{A1}^2 \left(\frac{\rho_2^2-\rho_1^2}{\rho_1^2}\right)\left(\frac{\rho_2-\rho_1}{\rho_2}\right)}$$

$$v_1 - v_2 = \sqrt{(p_2-p_1)\left(\frac{1}{\rho_1}-\frac{1}{\rho_2}\right) + \frac{1}{2} v_{A1}^2 \left(\frac{\rho_2^2}{\rho_1^2}-1\right)\left(1-\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)}$$

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{B_1}{B_2}$$

$$v_1 - v_2 = \sqrt{(p_2-p_1)\left(\frac{1}{\rho_1}-\frac{1}{\rho_2}\right) + \frac{1}{2}\frac{B_1^2}{\mu_0\rho_1}\left(\frac{\rho_2^2}{\rho_1^2}-1\right)\left(1-\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)}$$

$$\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^2 = \left(\frac{B_2}{B_1}\right)^2 \Rightarrow$$

$$v_1 - v_2 = \sqrt{(p_2-p_1)\left(\frac{1}{\rho_1}-\frac{1}{\rho_2}\right) + \left(\frac{1}{\rho_1}-\frac{1}{\rho_2}\right)\underbrace{\frac{1}{2}\frac{B_1^2}{\mu_0}\left(\frac{B_2^2}{B_1^2}-\frac{B_1^2}{B_1^2}\right)}_{\frac{1}{2}\frac{B_2^2}{\mu_0}-\frac{1}{2}\frac{B_1^2}{\mu_0}}}$$

$$\boxed{v_1 - v_2 = \sqrt{\left(\frac{1}{\rho_1}-\frac{1}{\rho_2}\right)\left(p_2-p_1+\frac{1}{2}\frac{B_2^2}{\mu_0}-\frac{1}{2}\frac{B_1^2}{\mu_0}\right)}} \equiv Y$$

RANIJE (VAN B) JE BILO $v_1 - v_2 = \sqrt{(p_2-p_1)\left(\frac{1}{\rho_1}-\frac{1}{\rho_2}\right)}$

$B_2 > B_1$ KAKO JE $\rho_2 > \rho_1$

U gornjoj formuli je trag odmah izražen pomoću matričnih elemenata (5.1.–33), tj. u proizvoljnom trijedru koordinatnih osa.

Homotetične i ekvivolumne deformacije. – Svaki simetrični tenzor se može jednoznačno razložiti na jedan *izotropni tenzor* i jedan *devijator*. Kod posmatranih tenzora deformacije za vreme dt i brzine deformacije, ova razlaganja glase:

$$\left\{\nabla,\mathbf{u}\right\}_s=\left(\frac{1}{3}\operatorname{div}\mathbf{u}\right)\mathscr{E}+\left[\left\{\nabla,\mathbf{u}\right\}_s-\left(\frac{1}{3}\operatorname{div}\mathbf{u}\right)\mathscr{E}\right], \qquad (5.1.–46)$$

$$\left\{\nabla,\mathbf{v}\right\}_s=\left(\frac{1}{3}\operatorname{div}\mathbf{v}\right)\mathscr{E}+\left[\left\{\nabla,\mathbf{v}\right\}_s-\left(\frac{1}{3}\operatorname{div}\mathbf{v}\right)\mathscr{E}\right], \qquad (5.1.–47)$$

gde je sa $\mathscr{E}$ označen jedinični tenzor. Fizička svrsishodnost ovog razlaganja je u tome što tenzori koji stoje s desne strane napisanih jednačina odgovaraju suštinski različitim tipovima deformacija, u šta se možemo lako uveriti na sledeći način.

Posmatrajmo najpre tenzor deformacije za vreme dt. Promena relativnog vektora položaja $\mathbf{r}'$ neke tačke M unutar uočenog malog dela neprekidne sredine *usled deformacije* je data zadnjim sabirkom desne strane u (5.1.–27), tj. $(d\mathbf{r}')_{ed}=\left\{\nabla,\mathbf{u}\right\}_s\cdot\mathbf{r}'$. Primenimo li (5.1.–46), dobićemo:

181

$$(d\mathbf{r}')_{ed}=\left(\frac{1}{3}\operatorname{div}\mathbf{u}\right)\mathscr{E}\cdot\mathbf{r}'+\left[\left\{\nabla,\mathbf{u}\right\}_s-\left(\frac{1}{3}\operatorname{div}\mathbf{u}\right)\mathscr{E}\right]\cdot\mathbf{r}'. \qquad (5.1.–48)$$

Deformacija opisana prvim sabirkom desne strane ove jednačine ima (zbog $\mathscr{E}\cdot\mathbf{r}'=\mathbf{r}'$) tu osobenost da dovodi samo do promene intenziteta vektora $\mathbf{r}'$, ne menjajući mu pravac; intenziteti svih vektora $\mathbf{r}'$ nekog skupa tačaka se pri ovome menjaju za isti faktor. Takve deformacije, dakle, *očuvavaju oblike ali dovode do promene zapremine* (na primer, skup tačaka M, koje su pre deformacije ležale na jednoj sferi, nalaziće se i posle deformacije za vreme dt na jednoj sferi, samo će radijus ove poslednje biti izmenjen), i stoga se nazivaju ***homotetične deformacije*** ili ***deformacije geometrijske sličnosti***.

Drugi sabirak u jednačini (5.1.–48) opisuje deformaciju za koju je karakteristično da odgovarajući tenzor (devijator) ima trag jednak nuli. To su, dakle, ***deformacije bez kubne dilatacije***, tj. deformacije kod kojih dolazi do ***promena oblika ali bez promene zapremina***, i koje se, zbog toga, nazivaju ***ekvivolumne deformacije***.

Po analogiji sa navedenim rezonovanjem, možemo zaključiti da dva sabirka desne strane u jednačini (5.1.–47) opisuju *brzine homotetičnih i ekvivolumnih deformacija* respektivno.

Zabeležimo još, na kraju, matrične elemente tenzora koji figurišu u (5.1.–46) i (5.1.–47):

$$u_{ij}=\frac{1}{3}\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\delta_{ij}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i}+\frac{\partial u_i}{\partial x_j}-\frac{2}{3}\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\delta_{ij}\right), \qquad (5.1.–49)$$

$$v_{ij}=\frac{1}{3}\frac{\partial v_k}{\partial x_k}\delta_{ij}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i}+\frac{\partial v_i}{\partial x_j}-\frac{2}{3}\frac{\partial v_k}{\partial x_k}\delta_{ij}\right), \qquad (5.1.–50)$$

gde je δ_{ij} Kronekerov simbol, a divergencije relevantnih vektora su prikazane uz korišćenje sumacione konvencije ($\operatorname{div}\mathbf{u}=\frac{\partial u_k}{\partial x_k}$, i analogno za $\operatorname{div}\mathbf{v}$).

5.1.4. Diferenciranje po vremenu pod znakom integrala. – U daljim razmatranjima ćemo u više navrata biti u situaciji da diferenciramo po vremenu izraze koji imaju oblik integrala, pri čemu i integrand i granice integracije (domen integracije) zavise od ove promenljive. U ovom paragrafu, koji ima karakter matematičke digresije, navešćemo najčešće formule ovog tipa, što će nam u velikoj meri olakšati docnija razmatranja.

Zapreminski integrali. – Posmatraćemo najpre integral sledećeg oblika:

$$F_V(t)=\int_{V(t)}\Phi(x,y,z,t)\,dV, \qquad (5.1.–51)$$

gde je $V(t)$ oblast integracije, koja se *na zadani način* menja sa vremenom. To znači da nam je, u trenutku vremena t u kome želimo da odredimo izvod $dF_V(t)/dt$, poznata brzina $\mathbf{V}(x,y,z,t)$ kojom se kreću pojedine tačke ove oblasti. Između ostalog, može biti $\mathbf{V}=0$ (oblast integracije nepomična u prostoru, tzv. *kontrolna zapremina*), ili $\mathbf{V}=\mathbf{v}$ (oblast integracije se kreće zajedno sa neprekidnom sredinom, tj. u svakom trenutku vremena se sastoji od istih tačaka supstance neprekidne sredine, tzv. *supstancijalna zapremina*). Diferencirajmo (5.1.–51), postupajući pritom po definiciji:

$$\frac{d}{dt}\int_{V(t)}\Phi(x,y,z,t)\,dV=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\left[\int_{V(t+\Delta t)}\Phi(x,y,z,t+\Delta t)\,dV-\int_{V(t)}\Phi(x,y,z,t)\,dV\right]=$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\left[\int_{V(t+\Delta t)}\Phi(x,y,z,t+\Delta t)\,dV-\int_{V(t+\Delta t)}\Phi(x,y,z,t)\,dV+\int_{V(t+\Delta t)-V(t)}\Phi(x,y,z,t)\,dV\right]=$$

$$=\int_{V(t)}\frac{\partial\Phi}{\partial t}\,dV+\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\int_{V(t+\Delta t)-V(t)}\Phi(x,y,z,t)\,dV. \qquad (5.1.–52)$$

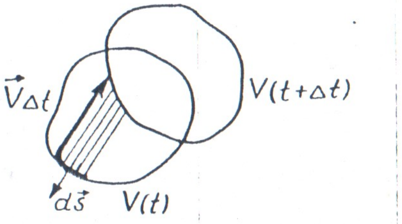
Prva od napisanih jednakosti predstavlja po definiciji izraz za izvod po vremenu posmatranog integralnog izraza. U drugoj jednakosti je tom izrazu dodata i oduzeta ista veličina, $\int_{V(t+\Delta t)}\Phi(x,y,z,t)\,dV$, i u zadnjem sabirku je iskorišćena poznata osobina određenih integrala.

Najzad, u trećoj jednakosti, prva dva sabirka prethodne jednakosti su dovedena u očevidnu vezu sa parcijalnim izvodom integranda po vremenu. Zadnji član ove jednakosti je u vezi sa integralom po zapremini koju „prebriše" granična površina oblasti V(t) za vreme Δt (Slika 5.1.-3). Lako se vidi da je u ovoj zapremini:

$$dV = (\mathbf{V}\,\Delta t)\cdot d\mathbf{S}, \tag{5.1.-53}$$

gde je $d\mathbf{S}$ element granične površine oblasti V(t). Ako ovaj izraz unesemo u (5.1.-52), dobićemo:

$$\frac{d}{dt}\int_{V(t)} \Phi(x,y,z,t)\,dV = \int_{V(t)} \frac{\partial \Phi}{\partial t}\,dV + \oint_{S(t)} \Phi(x,y,z,t)\,\mathbf{V}\cdot d\mathbf{S}, \tag{5.1.-54}$$



Slika 5.1.-3.

pri čemu se integracija u drugom integralu desne strane vrši po graničnoj površini oblasti V(t). Ovaj integral možemo, na osnovu Gausove teoreme, transformisati u integral po V(t). Prema tome, definitivni rezultat je, uz nešto uprošćeno pisanje, oblika:

$$\frac{d}{dt}\int_{V(t)} \Phi\,dV = \int_{V(t)} \left[\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \mathrm{div}\,(\Phi \mathbf{V})\right] dV. \tag{5.1.-55}$$

Čitalac će lako sam pokazati da se na osnovu ovog rezultata može dobiti i relacija:

$$\frac{d}{dt}\int_{V(t)} \mathbf{A}\,dV = \int_{V(t)} \left[\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \nabla\cdot\left\{\mathbf{V}, \mathbf{A}\right\}\right] dV, \tag{5.1.-56}$$

u kojoj je integrand vektorska funkcija. Da bi se izvela ova relacija, treba napisati $\mathbf{A} = A_i\,e_i$, pa tako integral koji stoji sa njene leve strane svesti na tri integrala oblika (5.1.-55).

Površinski integrali. – U primenama se mogu sresti i integrali oblika:

$$F_S(t) = \int_{S(t)} \mathbf{A}(x,y,z,t)\cdot d\mathbf{S}, \tag{5.1.-57}$$

gde je S(t) neka otvorena površina, koja se *na zadani način* kreće, a $F_S(t)$ je *fluks* vektorske funkcije **A** kroz tu površinu. Postupajući analogno kao u relacijama (5.1.-52), u ovom slučaju dobijamo:

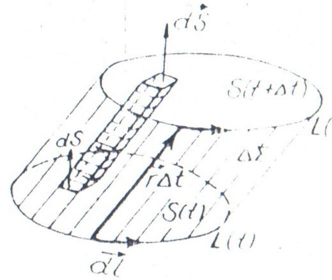
$$\frac{d}{dt}\int_{S(t)} \mathbf{A}(x,y,z,t)\cdot d\mathbf{S} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\left[\int_{S(t+\Delta t)} \mathbf{A}(x,y,z,t+\Delta t)\cdot d\mathbf{S} - \int_{S(t)} \mathbf{A}(x,y,z,t)\cdot d\mathbf{S}\right] =$$

$$= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\left\{\int_{S(t+\Delta t)}\left[\mathbf{A}(x,y,z,t+\Delta t) - \mathbf{A}(x,y,z,t)\right]\cdot d\mathbf{S} + \int_{S(t+\Delta t)} \mathbf{A}(x,y,z,t)\cdot d\mathbf{S} - \int_{S(t)} \mathbf{A}(x,y,z,t)\cdot d\mathbf{S}\right\} =$$

$$= \int_{S(t)} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\cdot d\mathbf{S} + \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\left[\int_{S(t+\Delta t)} \mathbf{A}(x,y,z,t)\cdot d\mathbf{S} - \int_{S(t)} \mathbf{A}(x,y,z,t)\cdot d\mathbf{S}\right]. \tag{5.1.-58}$$

Da bismo izračunali razliku integrala koja se pojavila u zadnjem izrazu, posmatraćemo Sliku 5.1.-4. koja prikazuje površine S(t) i S(t + Δt) kao i njihove granične konture. Pri pomeranju površine S(t), tačke njene granične konture (koja je orijentisana na ukazani način), opisuju površinu omotača $\Delta\Sigma$. Izračunajmo fluks vektorske funkcije po ovako formiranoj zatvorenoj površini ΔS, koristeći pritom Gausovu teoremu:

$$\int_{\Delta V} \mathrm{div}\,\mathbf{A}\,dV = \oint_{\Delta S} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{S} = \int_{\bar{S}(t)} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{S} + \int_{S(t+\Delta t)} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{S} + \int_{\Delta\Sigma} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{S} \tag{5.1.-59}$$



Slika 5.1.-4.

182

U gornjoj jednačini oznaka $\bar{S}(t)$ kod prvog integrala signalizira da se, u duhu Gausove teoreme, taj integral računa sa orijentacijom suprotnom od usvojene pozitivne orijentacije normale.

Pošto je $\int_{\bar{S}} = -\int_{S}$, prebacivanjem zadnjeg člana desne strane ove jednačine na levu stranu dobijamo:

$$\int_{S(t+\Delta t)} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{S} - \int_{S(t)} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{S} = \int_{\Delta V} \mathrm{div}\,\mathbf{A}\,dV - \int_{\Delta\Sigma} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{S} \tag{5.1.-60}$$

Sa slike 5.1.-4. se vidi da je u oblasti ΔV moguće staviti $dV = (\mathbf{V}\,\Delta t)\cdot d\mathbf{S}$, dok je na površini omotača $\Delta\Sigma$ orijentisani element površine dat sa $d\mathbf{S} = d\vec{l}\times(\mathbf{V}\Delta t)$. Dakle:

$$\int_{S(t+\Delta t)} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{S} - \int_{S(t)} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{S} = \Delta t\left[\int_{S(t)} \mathrm{div}\,\mathbf{A}\,(\mathbf{V}\cdot d\mathbf{S}) - \int_{L(t)} \mathbf{A}\cdot(d\vec{l}\times\mathbf{V})\right] -$$

$$
= \Delta t \left[\int\limits_{S(t)} (\mathbf{V} \operatorname{div} \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} - \int\limits_{S(t)} \operatorname{rot} \; (\mathbf{V} \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} \right];
$$

pri pisanju drugog izraza je primenjena Stoksova teorema, pošto je prethodno u konturnom integralu izvršena ciklična izmena vektora u mešovitom proizvodu. Unošenjem gornjeg rezultata u (5.1.–58) dobijamo konačno:

$$
\frac{d}{dt} \int\limits_{S(t)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \int\limits_{S(t)} \left[\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \operatorname{rot} (\mathbf{V} \times \mathbf{A}) + \mathbf{V} \operatorname{div} \mathbf{A} \right] \cdot d\mathbf{S}. \tag{5.1.–61}
$$

Ukoliko je površina S(t) *zatvorena*, formula glasi:

$$
\frac{d}{dt} \oint\limits_{S(t)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \oint\limits_{S(t)} \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{V} \operatorname{div} \mathbf{A} \right) \cdot d\mathbf{S}. \tag{5.1.–62}
$$

Ovaj rezultat se može dobiti ili tako što će se integral po zatvorenoj površini izraziti kao zapreminski integral po zapremini omeđenoj tom površinom na osnovu Gausove teoreme i zatim iskoristiti (5.1.–55), ili tako što će se zapaziti da je (5.1.–61) primenljivo i na zatvorene površine, samo je u tom slučaju $\oint\limits_{S(t)} \operatorname{rot} (\mathbf{V} \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} = 0$ zbog identiteta $\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{F} = 0$.

Čitaocu se ostavlja da samostalno proveri ove detalje, kao i da izvede analogne formule za površinske integrale drugih tipova, na primer:

$$
\frac{d}{dt} \int\limits_{S(t)} \Phi \, d\mathbf{S} = \int\limits_{S(t)} \left(\left[\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \operatorname{div} (\mathbf{V}\Phi) \right] \mathscr{E} - \Phi \left\{ \nabla, \mathbf{V} \right\} \right) \cdot d\mathbf{S}. \tag{5.1.–63}
$$

Ovaj se rezultat dobija kad se integral $\int\limits_{S(t)} \Phi d\mathbf{S}$ najpre skalarno pomnoži nekim konstantnim ali proizvoljnim jediničnim vektorom, a zatim primeni (5.1.–61).

Linijski integrali. – Najvažniji integral ovog tipa je *cirkulacija vektorske funkcije po zatvorenoj konturi:*

$$
\Gamma_1(t) = \oint\limits_{L(t)} \mathbf{B} \cdot d\vec{l}. \tag{5.1.–64}
$$

Primenom Stoksove teoreme ovaj integral se može predstaviti kao integral po površini nategnutoj na konturu L(t).

$$
\oint\limits_{L(t)} \mathbf{B} \cdot d\vec{l} = \int\limits_{S(t)} \operatorname{rot} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S},
$$

a zatim se može primeniti formula (5.1.–61), stavljajući $\mathbf{A} = \operatorname{rot} \mathbf{B}$. Pošto je onda $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$, imaćemo

$$
\frac{d}{dt} \oint\limits_{L(t)} \mathbf{B} \cdot d\vec{l} = \frac{d}{dt} \int\limits_{S(t)} \operatorname{rot} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int\limits_{S(t)} \left[\frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{rot} \mathbf{B}) - \operatorname{rot} (\mathbf{V} \times \operatorname{rot} \mathbf{B}) \right] \cdot d\mathbf{S}.
$$

Zapazimo li da je očevidno $\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \mathbf{B} = \operatorname{rot} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$, jer parcijalni izvodi drugog reda ne zavise od redosleda diferenciranja, moći ćemo dalje pisati:

$$
\frac{d}{dt} \oint\limits_{L(t)} \mathbf{B} \cdot d\vec{l} = \int\limits_{S(t)} \left[\operatorname{rot} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \operatorname{rot} (\mathbf{V} \times \operatorname{rot} \mathbf{B}) \right] \cdot d\mathbf{S} =
$$

$$
= \int\limits_{S(t)} \operatorname{rot} \left[\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \mathbf{V} \times \operatorname{rot} \mathbf{B} \right] \cdot d\mathbf{S}
$$

Ponovnom primenom Stoksove teoreme na zadnji integral dobijamo konačno:

$$
\frac{d}{dt} \oint\limits_{L(t)} \mathbf{B} \cdot d\vec{l} = \oint\limits_{L(t)} \left[\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \mathbf{V} \times \operatorname{rot} \mathbf{B} \right] \cdot d\vec{l}. \tag{5.1.–65}
$$

Druge tipove konturnih integrala ovde nećemo navoditi.

5.2 OSNOVNE DINAMIČKE JEDNAČINE NEPREKIDNE SREDINE (KONTINUUMA)

Neprekidna sredina kao model za realne mnogočestične sisteme ima sledeću važnu karakteristiku: bilo koja zatvorena površ koja se kreće zajedno sa sredinom, obuhvata, u zapremini koju omeđuje, uvek istu supstancu te sredine. Ovo je posledica zanemarivanja mogućnosti migracije pojedinih molekula kroz tu površ kod realnih sistema. Zahvaljujući toj karakteristici, deo supstance neprekidne sredine obuhvaćen zatvorenom površi koja se kreće sa njim može se tretirati kao *sistem* u mehaničkom (i, šire, termodinamičkom) smislu, i na njega primeniti opšte zakonitosti mehanike (po potrebi i termodinamike). Relacije do kojih se dolazi na taj način zovu se *osnovne dinamičke jednačine neprekidne sredine*. One *ne zavise ni od kakvih konkretnih svojstava* realnog mnogočestičnog sistema na koji se primenjuju. Međutim, kao što će se videti na kraju ovog odeljka, one istovremeno *nisu dovoljne* za rešavanje problema kretanja tog sistema.

5.2.1. Jednačina kontinuiteta mase. – Jedna od najopštijih zakonitosti, koje u okviru Njutnove mehanike važe za kontinuum, jeste *zakon održanja (konzervacije) mase ma kog njegovog izdvojenog dela koji se uvek sastoji od istih delića*. Da bismo ovoj zakonitosti dali matematičku formulaciju, uočićemo neku zapreminu V(t), koja se u svakom trenutku vremena sastoji od istih delića sredine, tj. čije se tačke pomeraju brzinom $\mathbf{v}$ kretanja delića neprekidne sredine (tzv. *supstancijalna zapremina*). Onda se, očevidno, razmatrani zakon može navesti u sledećem *integralnom obliku:*

$$
\frac{d}{dt} \int\limits_{V(t)} \rho_m dV = 0. \tag{5.2.–1}
$$

očevidno, obična diferencijalna jednačina tipa $\frac{dT}{d\rho} = \varphi(\rho, T)$. Njeno opšte rešenje je oblika $T = T(\rho, C)$, gde je C integraciona konstanta koja se može naći iz početnih ili graničnih uslova zadatka. Ako se tako određeno partikularno rešenje $T = T^*(\rho)$ unese u (5.3.–14), izlazi:

$$p = p\left[\rho, T^*(\rho)\right] = F_s(\rho), \qquad (5.3.-19)$$

tj. dobija se veza samo između gustine i pritiska *u istoj tački i u istom trenutku vremena;* indeks S signalizira da ova veza odgovara izentropijskom procesu. Relacija (5.3.–19) se naziva i *adijabata;* njen konkretan oblik zavisi od termičke i kaloričke jednačine stanja, tj. od prirode supstance o kojoj je reč.[209]

Prema tome, činjenica da se u mehanički i termodinamički idealnom fluidu odigravaju isključivo izentropijski (adijabatski) procesi omogućava da se sistem jednačina (5.3.–11) – (5.3.–15) zameni redukovanim sistemom:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0, \qquad (5.3.-20)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\, \mathbf{v} = \mathbf{f} - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p, \qquad (5.3.-21)$$

$$p = F_S(\rho), \qquad (5.3.-22)$$

[209] Na primer, posmatrajmo idealan gas sa termičkom jednačinom stanja $p = \frac{kT}{m}\rho$ (v. fusnotu 206.). Za njegovu kaloričku jednačinu stanja uzmimo relaciju $e = c_V T$ i pretpostavimo da je c_V (specifična toplota pri konstantnoj zapremini *po jedinici mase*) k o n s t a n t a. Idealan gas može, naravno, imati i složeniju kaloričku jednačinu stanja, pri nepromenjenoj termičkoj jednačini, ukoliko je (u temperaturskom intervalu od interesa) stepen pobuđenja intramolekularnih kretanja promenljiv. Iz navedene termičke jednačine stanja sledi poznata *Majerova relacija* $C_p - C_V = R$, odnosno $c_p - c_V = k/m$ (c_p je specifična toplota pri konstantnom pritisku, takođe *po jedinici mase).* Na osnovu svih iznetih detalja, jednačina (5.3.–18) ovde konkretno glasi:

$$\frac{dT}{d\rho} = \frac{kT}{m\rho\, c_V}\;; \quad \frac{dT}{T} = \frac{k}{m c_V}\,\frac{d\rho}{\rho} = \frac{c_p - c_V}{c_V}\,\frac{d\rho}{\rho}, \qquad (a)$$

i ima, pošto su c_V i c_p po pretpostavci konstante, opšte rešenje:

$$T = C\rho^{\gamma - 1}, \quad \left(\gamma = \frac{c_p}{c_V} = \frac{C_p}{C_V}\right). \qquad (b)$$

gde je C integraciona konstanta. Unesemo li ovaj rezultat u termičku jednačinu stanja, dobićemo:

$$p = \frac{kT}{m}\rho = \frac{k}{m} C\rho^{\gamma-1} \cdot \rho = C'\rho^{\gamma}, \quad \left(C' = \frac{k}{m} C\right). \qquad (c)$$

gde je C' takođe neka proizvoljna konstanta. Dobijeni rezultat *(c)* (u kome treba još iz uslova zadatka odrediti C') predstavlja jednačinu adijabate u idealnom gasu; ta jednačina se u literaturi obično navodi pod nazivom *Poasonova adijabata.*

u kome kao nepoznate funkcije figurišu samo „mehaničke" veličine ρ, p i $\mathbf{v}$. I ovaj sistem je *zatvoren* (pet skalarnih diferencijalnih jednačina i isto toliko nepoznatih funkcija Ojlerovih promenljivih), što znači da se *mehaničke karakteristike kretanja fluida u ovakvom slučaju mogu izučavati nezavisno od termodinamičkih.* Ukoliko su i ove poslednje od interesa, one se mogu bez daljih integracija odrediti iz (5.3.–14) i (5.3.–15) ako se prethodno nađu, integrisanjem sistema (5.3.–20) – (5.3.–22), funkcije ρ (x,y,z,t) i p (x,y,z,t).

5.3.2. Fluidi koji su idealni samo u mehaničkom pogledu.

U praktičnim primenama su česte situacije da je proučavani fluid *idealan samo u mehaničkom pogledu,* tj. da se njegovo naponsko stanje može sa zadovoljavajućom tačnošću opisati jednačinom (5.3.–9), ali da njegovo kretanje (proticanje) nije izentropijsko niti potpuno reverzibilno. Na primer, proticanje nekog gasa može biti izotermno ili politropsko[210] u stanju lokalne termodinamičke ravnoteže, a pod tim uslovima efekti toplotne razmene među delićima postaju važni, tj. zanemarivanje toplote unutrašnjeg trenja i aproksimacija $\mathbf{q} = 0$, nisu opravdani. U takvim slučajevima, kad postoji *odstupanje od idealnosti u termodinamičkom pogledu,* sistem jednačina (5.3.–20) – (5.3.–22) nije u celini primenljiv; korektne su samo prve dve jednačine tog sistema [prva od njih je jednačina kontinuiteta i važi sasvim uopšte kod neprekidnih sredina, a pri pisanju druge je iskorišćen samo uslov mehaničke idealnosti (5.3.–9)], dok jednačina (5.3.–22) očito ne važi. Problem određivanja mehaničkih i termodinamičkih karakteristika proticanja fluida tada postaje vrlo složen, i zahteva poznavanje konkretne termodinamičke prirode ovog procesa.

194

Barotropna proticanja. – Situacija postaje jednostavnija, i svodi se na određivanje samo mehaničkih karakteristika proticanja fluida, ukoliko je poznata veza između pritiska i gustine, oblika:

$$p = F(\rho), \qquad (5.3.-23)$$

tzv. *karakteristična jednačina*[211]. Ovakvo proticanje se naziva *barotropno;* često se i sam fluid koji se kreće tako da između njegovog pritiska i gustine

[210] Adijabatski proces je okarakterisan apsolutnim odsustvom izmene toplote između delića. Kod izotermnog procesa, naprotiv, ova izmena toplote postoji i to u takvoj meri da obezbeđuje konstantnost temperature u svakoj tački fluida i u svakom trenutku vremena. Politropski procesi su okarakterisani postojanjem izvesne izmene toplote među delićima, ali ne u onoj meri kao kod izotermnih procesa. Recimo, kod idealnog gasa, čija termička i kalorička jednačina stanja su navedene u prethodnoj fusnoti, izotermni proces je okarakterisan vezom $p = C\rho$, gde je C neka konstanta. Kod adijabatskog procesa u istom gasu je, kao što smo videli u istoj fusnoti, $p = C\rho^{\gamma}$. Za *politropski proces u takvom idealnom gasu* je $p = C\rho^{n}$, gde je $1 \leq n \leq \gamma$ (za $n = 1$ politropa prelazi u izotermu, a za $n = \gamma$ u adijabatu).

[211] Karakteristična jednačina ili može biti *a priori* data, ili se može smatrati da je njeno poznavanje rezultat raspolaganja određenom informacijom o termodinamičkim karakteristikama procesa proticanja i eliminacije temperature iz termičke jednačine stanja (5.3.–14) na osnovu ovoga. Ovo poslednje bi bilo analogno dobijanju jednačine (5.3.–22) pozivanjem na činjenicu da je svaki proces proticanja u mehanički i termodinamički idealnom fluidu izentropijski, što je bilo objašnjeno u tekstu [jednačine (5.3.–16) – (5.3.–19) i komentar uz njih].

u svakoj tački prostora i u svakom trenutku vremena postoji *poznata* veza oblika (5.3.–23) naziva *barotropni fluid*[212].

Prema tome, mehaničke karakteristike (ρ, p, **v**) proticanja fluida koji je mehanički idealan i barotropan mogu se odrediti iz sledećeg sistema jednačina:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0, \tag{5.3.–24}$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\,\mathbf{v} = \mathbf{f} - \frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p, \tag{5.3.–25}$$

$$p = F(\rho). \tag{5.3.–26}$$

$\partial p = \frac{\partial F(\rho)}{\partial \rho}\partial\rho$

195

Ove jednačine su *osnovne diferencijalne jednačine mehanički idealnog i barotropnog fluida*. One imaju identičnu matematičku strukturu kao i sistem (5.3.–20) – (5.3.–22); razlika je u tome što (5.3.–26) nije jednačina adija- bate, jer je reč o barotropnom proticanju kod fluida koji nije idealan u termodinamičkom pogledu. Sistem jednačina (5.3.–24) – (5.3.–26) je *zatvo- ren*, i u tom pogledu u potpunosti važi komentar iznet uz jednačine (5.3.–20) – (5.3.–22).

Zabeležimo, radi docnijih razmatranja, da se sistem jednačina (5.3.–21) – (5.3.–26) može dalje redukovati, ako se na osnovu karakteri- stične jednačine (5.3.–26) uvede tzv. *karakteristična funkcija barotropnog fluida*

$$\psi(\rho) = \int \frac{dp}{\rho} = \int \frac{F'(\rho)}{\rho}\, d\rho. \tag{5.3.–27}$$

Za tu funkciju[213] očevidno važi:

$$\operatorname{grad} \psi(\rho) = \frac{d\psi}{d\rho}\operatorname{grad}\rho = \frac{F'(\rho)}{\rho}\operatorname{grad}\rho = \frac{\operatorname{grad} p}{\rho}, \tag{5.3.–27 a}$$

[212] Očito je da jedan isti fluid (na primer, idealan gas) u izvesnim problemima možemo smatrati kao barotropan, dok u drugim situacijama to nije opravdano (tzv. *baroklina proti- canja*, odnosno *baroklini fluid*). Drugim rečima, nije sam fluid po svojoj prirodi barotro- pan, već je barotropno njegovo kretanje (proticanje). Pa ipak, u literaturi se često sreće termin „barotropni fluid", koji ćemo i mi koristiti u tom uslovnom smislu. *Barotropni fluid ne mora istovremeno biti idealan u mehaničkom pogledu.*

[213] Karakteristična jednačina (5.3.–26) se često navodi i u obliku eksplicitno rešenom po gustini:

$$p = F(\rho) \quad \Leftrightarrow \quad \rho = F^*(p). \tag{a}$$

U takvom slučaju se karakteristična funkcija (5.3.–27) može pisati u obliku

$$\psi^*(p) = \int \frac{dp}{\rho} = \int \frac{dp}{F^*(p)}, \tag{b}$$

pri čemu je, naravno,

$$\psi^*(p) = \psi\left[F(\rho)\right] = \psi(\rho). \tag{c}$$

jer je, zbog poznatih pravila za izračunavanje gradijenata,

$$\operatorname{grad} p = \operatorname{grad} F(\rho) = F'(\rho)\operatorname{grad}\rho. \tag{5.3.–27 b}$$

Na osnovu ovih rezultata, za kretanje mehanički idealnog i barotropnog fluida dobijamo sledeći sistem jednačina

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0, \tag{5.3.–28}$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\,\mathbf{v} = \mathbf{f} - \operatorname{grad} \psi(\rho), \tag{5.3.–29}$$

u kojem kao nepoznate funkcije figurišu samo ρ (x,y,z,t) i **v** (x,y,z,t). Ukoliko je poznata masena gustina zapreminskih sila **f** (x,y,z,t), kao i svi potrebni početni i granični uslovi, iz navedenih jednačina se mogu naći ove nepoznate funkcije i time odrediti mehaničke karakteristike kretanja ovakvog fluida.

Helmholc–Tomsonovi fluidi. – Helmholc–Tomsonove fluide defini- šemo kao *mehanički idealne i barotropne fluide podvrgnute delovanju isključivo potencijalnih zapreminskih sila*. Ovakve zapreminske sile se u primenama najčešće sreću, i za njih možemo pisati

$$\mathbf{f} = -\operatorname{grad} u, \tag{5.3.–30}$$

gde je u (x,y,z,t) *potencijalna energija jedinice mase fluida* u polju tih sila na mestu sa koordinatama *x, y, z* i u trenutku *t*. Ako su spoljašnje za- preminske sile *konzervativne*, biće $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$.

Jednačine (5.3.–28) i (5.3.–29), koje važe za mehanički idealne i baro- tropne fluide u opštem slučaju, ovde postaju, zbog (5.3.–30),

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0, \tag{5.3.–31}$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\,\mathbf{v} = -\operatorname{grad}(u + \psi). \tag{5.3.–32}$$

Jednačina kretanja (5.3.–32) se može prepisati i u Gromeka–Lembovoj formi (5.3.–12 *a*), koja sad glasi:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \mathbf{v} \times \operatorname{rot}\mathbf{v} = -\operatorname{grad}\left(\frac{1}{2}v^2 + u + \psi\right); \tag{5.3.–33}$$

izvršene transformacije su potpuno očigledne. Uzimanjem rotora leve i desne strane poslednje jednačine, vodeći računa o (5.3.–3), dolazimo do re- zultata:

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} = \text{rot}\,(\mathbf{v} \times \vec{\omega}), \tag{5.3.-34}$$

koji se naziva *Helmholcova kinematička jednačina*. Ova jednačina se zove „kinematička", zato što povezuje samo kinematičke karakteristike $\mathbf{v}\,(x,y,z,t)$ i $\vec{\omega}\,(x,y,z,t)$ u jednom Helmholc–Tomsonovom fluidu; svi dinamički detalji su otpali pri uzimanju rotora jednačine (5.3.–33). Razvijanjem rotora vektorskog proizvoda sa desne strane jednačine (5.3.–34) imamo dalje:

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} = (\vec{\omega} \cdot \nabla)\,\mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \nabla)\,\vec{\omega} + \mathbf{v}\,\text{div}\,\vec{\omega} - \vec{\omega}\,\text{div} =$$

$$= (\vec{\omega} \cdot \nabla)\,\mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \nabla)\,\vec{\omega} + \frac{\vec{\omega}}{\rho}\frac{d\rho}{dt};$$

kod pisanja druge jednakosti su iskorišćene relacije (5.3.–5) i (5.2.–4). Ako se još uzme u obzir veza (5.1.–17) između lokalnog i supstancijalnog izvoda neke veličine, izlazi:

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} - \frac{\vec{\omega}}{\rho}\frac{d\rho}{dt} = (\vec{\omega} \cdot \nabla)\,\mathbf{v},$$

odnosno, nakon deljenja sa ρ,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{\omega}}{\rho}\right) = \left(\frac{\vec{\omega}}{\rho} \cdot \nabla\right)\mathbf{v}, \tag{5.3.-35}$$

što predstavlja *alternativni oblik Helmholcove kinematičke jednačine*.

Osim ovih Helmholcovih rezultata, za Helmholc–Tomsonove fluide važi i tzv. *Tomsonova teorema o konzervaciji cirkulacije brzine*. Po toj teoremi je *cirkulacija brzine proticanja*,

$$\Gamma = \oint_{L(t)} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l}, \tag{5.3.-36}$$

konstantna u toku vremena ukoliko se kontura L(t), duž koje se računa ova cirkulacija, u svakom trenutku vremena sastoji od istih delića fluida. Ovo se može lako dokazati na osnovu relacije (5.1.–65), koja ovde daje:

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \frac{d}{dt}\oint_{L(t)} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = \oint_{L(t)} \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \mathbf{v} \times \text{rot}\,\mathbf{v}\right) \cdot d\mathbf{l}, \tag{5.3.-36 a}$$

pri čemu je stavljeno $\mathbf{V} = \mathbf{v}$ (jer se kontura kreće sa fluidom) i $\mathbf{B} = \mathbf{v}$ (jer nas interesuje cirkulacija ove veličine). Na osnovu jednačine (5.3.–33) se može dalje pisati:

$$\frac{d\Gamma}{dt} = -\oint_{L(t)} \text{grad}\left(\frac{1}{2}v^2 + u + \psi\right) \cdot d\mathbf{l} = 0. \tag{5.3.-37}$$

U napisanom integralu figuriše integrand oblika grad $\Phi \cdot d\mathbf{l}$, koji je totalni diferencijal, usled čega je neposredno jasno da vrednost tog integrala duž zatvorene konture mora biti jednaka nuli. Time je teorema dokazana.[214]

Zbog veze (5.3.–3) između $\mathbf{v}$ i $\vec{\omega}$, cirkulacija (5.3.–36) se može, pomoću Stoksove teoreme, prikazati i kao:

$$\Gamma = \oint_{L(t)} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = 2\int_{S(t)} \vec{\omega} \cdot d\mathbf{S}, \tag{5.3.-38}$$

gde je S(t) bilo koja površina nategnuta na konturu L(t). Na osnovu upravo dokazane Tomsonove teoreme zaključujemo da će *jačina vrtloga biti konstantna u bilo kojoj pokretnoj površini, nategnutoj na konturu koja se u svakom trenutku vremena sastoji od istih delića Helmholc–Tomsonovog fluida.* Ovaj zaključak važi, u duhu Stoksove teoreme, *čak i kad se sama površina* S(t) *ne sastoji stalno od istih delića fluida.* Ako se međutim, ograničimo na površine koje se sastoje uvek od istih delića, navedeni zaključak postaje neposredna posledica relacije (5.1.–61); ovo se vidi kad se u tu relaciju uvrsti $\mathbf{A} = \vec{\omega}$, $\mathbf{V} = \mathbf{v}$ i uzme u obzir da je div $\omega = 0$, kao i da važi Helmholcova jednačina (5.3.–34).

---

[214] U literaturi se pod nazivom *Tomsonova teorema* ponekad podrazumeva opšti iskaz da je *izvod po vremenu cirkulacije brzine fluida jednak cirkulaciji ubrzanja, za konture koje se u svakom trenutku vremena sastoje od istih delića fluida*. Ovo je, međutim, formalna posledica jednačine (5.3.–36 *a*), odnosno, u krajnjoj liniji, relacije (5.1.–65), i nije vezano za Helmholc – Tomsonove fluide. Naime, prema već mnogo puta korišćenoj vezi između lokalnog i supstancijalnog izvoda po vremenu, imamo

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\,\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \mathbf{v} \times \text{rot}\,\mathbf{v} + \text{grad}\left(\frac{1}{2}v^2\right)$$

[upor. (5.3.–12 *a*)], tako da (5.3.–36 *a*) daje:

$$\frac{d}{dt}\oint_{L(t)} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = \oint_{L(t)} \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \mathbf{v} \times \text{rot}\,\mathbf{v}\right) \cdot d\mathbf{l} = \oint_{L(t)} \left[\frac{d\mathbf{v}}{dt} - \text{grad}\left(\frac{1}{2}v^2\right)\right] \cdot d\mathbf{l},$$

odnosno, pošto je integral u čijem se integrandu pojavljuje gradijent jednak nuli, konačno izlazi:

$$\frac{d}{dt}\oint_{L(t)} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = \oint_{L(t)} \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot d\mathbf{l} \tag{*}$$

Ovim je izrečena teorema dokazana. Iz te opšte *Tomsonove teoreme* (*) može se sad lako dobiti *Tomsonova teorema o konzervaciji cirkulacije brzine*, ako se uoči da je, kod Helmholc–Tomsonovih fluida, $\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\,\text{grad}\,(u + \psi)$ [v. jednačinu (5.3.–32)], tako da se desna strana relacije (*) svodi opet na jedan integral totalnog diferencijala (integrand sadrži gradijent) po zatvorenoj konturi koji je jednak nuli. Napomenimo da se, zbog relacije $\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\,\text{grad}\,(u + \psi)$, suma $u + \psi$ često naziva *potencijal ubrzanja*; uvođenje ove veličine je moguće samo kod Helmholc–Tomsonovih fluida.

196

Primer 5.3.-1. *Ispitati karakteristike stacionarnog proticanja Helmholc–Tomsonovog fluida.*

Kod stacionarnog proticanja, karakteristične veličine *ne zavise eksplicitno od vremena*. U komentaru jednačina (5.3.-1) i (5.3.-2) je bilo istaknuto da se, u slučaju stacionarnog proticanja, *strujne linije poklapaju sa trajektorijama delića*. Stacionarno proticanje Helmholc–Tomsonovog fluida je moguće *samo u polju konzervativnih zapreminskih sila*, pošto zbog stacionarnosti mora biti i $\dfrac{\partial u}{\partial t} = 0$.

Jednačina kontinuiteta (5.3.-28) za stacionarno proticanje poprima oblik:

$$\operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0. \qquad (a)$$

Na osnovu ovoga se, po analogiji sa (5.3.-5) – (5.3.-7), može zaključiti da je

$$\int_{S'} \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = \int_{S} \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}, \qquad (b)$$

pri čemu su S' i S bilo koja dva preseka jedne *strujne cevi* (upor. sa Slikom 5.3.-1, na kojoj je prikazana jedna *vrtložna cev*). Dakle, *fluks mase fluida u stacionarnom proticanju je jednak u svim presecima iste strujne cevi*. Treba zapaziti, štaviše, da ovaj zaključak nije specifično vezan za Helmholc–Tomsonove fluide. Relacija *(b)* se obično navodi kao jednačina kontinuiteta ili „prva Bernulijeva jednačina" kod jednostavnijih izlaganja hidrodinamike (u srednjoškolskim udžbenicima, u tehničkoj literaturi).

Jednačina kretanja (5.3.-33) se, kod stacionarnog proticanja Helmholc–Tomsonovog fluida, svodi na:

$$\mathbf{v} \times \operatorname{rot} \mathbf{v} = \operatorname{grad}\left(\frac{1}{2} v^2 + u + \psi\right) \qquad (c)$$

197

Pomnožimo ovu relaciju skalarno sa elementom luka *strujne linije* $d\mathbf{r}$; prema osobinama stacionarnog proticanja to je istovremeno i element luka *trajektorije delića* za koji, prema (5.1.-12), imamo $d\mathbf{r} = \mathbf{v}\, dt$. Dakle:

$$(\mathbf{v} \times \operatorname{rot} \mathbf{v}) \cdot d\mathbf{r} = \operatorname{grad}\left(\frac{1}{2} v^2 + u + \psi\right) \cdot d\mathbf{r}. \qquad (d)$$

Zbog kolinearnosti vektora $\mathbf{v}$ i $d\mathbf{r}$, mešoviti proizvod vektorâ koji se pojavljuje sa leve strane jednak je nuli. Dakle:

$$\operatorname{grad}\left(\frac{1}{2} v^2 + u + \psi\right) \cdot d\mathbf{r} = 0. \qquad (e)$$

S druge strane, skalarni proizvod $\operatorname{grad} \Phi \cdot d\mathbf{r}$ ima smisao promene skalarne funkcije Φ pri pomeranju za $d\mathbf{r}$ duž zadane linije. Jednačina *(e)*, stoga, tvrdi da *duž jedne strujne linije izraz* $\dfrac{1}{2} v^2 + u + \psi$ *ostaje konstantan kod stacionarnih proticanja Helmholc–Tomsonovog fluida*. Relacija

$$\frac{1}{2} v^2 + u + \psi = C, \qquad (f)$$

u kojoj konstanta C ima, u opštem slučaju, različite numeričke vrednosti na pojedinim strujnim linijama, naziva se *Bernulijeva jednačina* („druga Bernulijeva jednačina"). Lako je utvrditi da ona ima *smisao iskaza o održanju m e h a n i č k e energije jedinice mase Helmholc–Tomsonovog fluida*; ovo važi *samo kod stacionarnog proticanja* i nije u neposrednoj vezi sa zakonom održanja ukupne energije (v. komentar uz jednačine (5.2.-32) i (5.2.-33)].

Primer 5.3.-2. *Analizirati karakteristike potencijalnih proticanja Helmholc–Tomsonovog fluida, uz poseban osvrt na s t a c i o n a r n a potencijalna proticanja.*

Proticanje fluida zove se *potencijalno*, ako je vektorsko polje brzine proticanja potencijalno, tj. ako je

$$\mathbf{v} = \operatorname{grad} \varphi; \qquad (a)$$

skalarna funkcija $\varphi\,(x,y,z,t)$ se zove *potencijal brzine*. Kod potencijalnih proticanja, je očevidno,

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} = 0, \qquad \text{tj.} \qquad \vec{\omega} = 0, \qquad (b)$$

što znači da se *pri potencijalnom proticanju delići fluida ne obrću*.

S obzirom na izraze *(a)* i *(b)*, jednačina (5.3.-33) kretanja Helmholc–Tomsonovog fluida dobija oblik:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\operatorname{grad} \varphi) = -\operatorname{grad}\left(\frac{1}{2} v^2 + u + \psi\right), \qquad (c)$$

odnosno, zahvaljujući komutativnosti operatora $\dfrac{\partial}{\partial t}$ i grad, uz neznatno pregrupisavanje članova,

$$\operatorname{grad}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} v^2 + u + \psi\right) = 0. \qquad (d)$$

Napisana jednačina pokazuje da veličina u zagradi ima parcijalne izvode po promenljivim x, y i z jednake nuli, što znači da ona može biti samo funkcija vremena t:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} v^2 + u + \psi = \Omega(t). \qquad (e)$$

U jednom fiksiranom trenutku vremena, izraz $\dfrac{\partial \varphi}{\partial t} + \dfrac{1}{2} v^2 + u + \psi$ *ima istu vrednost u svim tačkama Helmholc–Tomsonovog fluida koji potencijalno protiče.* Rezultat *(e)*, koji opisuje fundamentalnu karakteristiku potencijalnih proticanja Helmholc–Tomsonovog fluida, naziva se *Koši–Lagranžev integral*.

Još jedna važna karakteristika posmatranog proticanja je njegova *acikličnost*, tj. činjenica da za bilo koju zatvorenu konturu važi:

$$\Gamma = \oint_L \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = \oint_L \operatorname{grad} \varphi \cdot d\mathbf{l} = 0. \qquad (f)$$

Cirkulacija brzine je, dakle, uvek jednaka nuli, bez obzira na to da li je reč o konturi koja je u svakom trenutku sastavljena od istih delića fluida ili ne[215].

Ukoliko je reč o *stacionarnim* proticanjima, potencijal brzine ne zavisi eksplicitno od vremena, $\dfrac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$, a u rezultatu *(e)* se funkcija $\Omega(t)$ svodi na konstantu (jer bi, u protivnom, stanje fluida zavisilo od vremena). Dakle, za stacionarno potencijalno proticanje važi:

$$\frac{1}{2} v^2 + u + \psi = C. \qquad (g)$$

[215] Potpunosti radi, spomenimo da jednačina *(f)* može biti narušena, ako kontura L (u čijim tačkama proticanje ima potencijalan karakter) obuhvata oblast u kojoj je narušen uslov *(a)* odn. *(b)*. Takvo potencijalno proticanje se zove *ciklično*; u tom slučaju je $\Gamma \neq 0$.

1 IDEALNA MHD (1)

$$\boxed{f = f_0 + f_1 \;,\; \|f_1\| \ll \|f_0\|}$$

U OSNOVNOM, NEPOREMEĆENOM STANJU:

HOMOGEN I STACIONARAN FLUID ($\nabla f_0 = 0$, $\frac{\partial f_0}{\partial t} = 0$)

STATIKA: $\vec{v}_0 = \vec{0}$

∞ PROSTIRUĆI FLUID

NESTIŠLJIV FLUID: $\rho = \rho_0$, $\rho_1 = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} \rho = \rho_0 \\ p = p_0 + p_1 \\ \vec{v} = \vec{v}_1 \\ \vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}_1 \end{cases}$$

OPŠTI IZRAZI KOJI VAŽE I ZA OSNOVNO "0" STANJE:

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\nabla p + \frac{1}{\mu_0}(\nabla \times \vec{B}) \times \vec{B}$$

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}) \;,\; \nabla \cdot \vec{B} = 0$$

KAKO JE $\vec{v}_0 = \vec{0}$, $\nabla p_0 = 0$, $\nabla \times \vec{B}_0 = \vec{0}$, $\rho_1 = 0$, $\frac{\partial \vec{B}_0}{\partial t} = \vec{0}$, $\nabla \cdot \vec{B}_0 = 0$

$$\Rightarrow \rho_0 \left(\frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} + (\vec{v}_1 \cdot \nabla)\vec{v}_1 \right) = -\nabla p_1 + \frac{1}{\mu_0}(\nabla \times \vec{B}_1) \times (\vec{B}_0 + \vec{B}_1)$$

$$\frac{\partial \vec{B}_1}{\partial t} = \nabla \times (\vec{v}_1 \times (\vec{B}_0 + \vec{B}_1))$$

$$\nabla \cdot \vec{B}_1 = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{v}_1 = 0$$

NEKA SU REŠENJA RAVNI TALASI SA $\vec{k} = k\vec{e}_z$, $\vec{B}_0 = B_0(\sin\theta\, \vec{e}_x + \cos\theta\, \vec{e}_z)$

IZ $\nabla \cdot \vec{B}_1 = 0$ SLEDI

$$\frac{\partial B_{1x}}{\partial x} + \frac{\partial B_{1y}}{\partial y} + \frac{\partial B_{1z}}{\partial z} = 0 \quad \text{ALI} \quad e^{-i\omega t + i\vec{k}\cdot\vec{r}} = e^{-i\omega t + ikz} \Rightarrow f_1 = f_1(z) \Rightarrow$$

$\Rightarrow B_{1z} = \text{const}$

U ∞ JE $B_{1z} = 0 \Rightarrow$ SVUDA $\underline{B_{1z} = 0}$

ISTO IZA $\nabla \cdot \vec{v}_1 = 0 \Rightarrow \underline{v_{1z} = 0}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_1 \perp \vec{k} \\ \vec{B}_1 \perp \vec{k} \end{cases}$$

OVDE NE RADIMO LINEARIZACIJU

ŠTA JE $(\vec{v}_1 \cdot \nabla)\vec{v}_1 \Rightarrow (\vec{v}_1 \cdot \nabla)(\vec{v}_1) = \left(\begin{pmatrix} v_{1x} \\ v_{1y} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} v_{1x} \\ v_{1y} \\ \cancel{v_{1z}}\; 0 \end{pmatrix} =$

$$= \left(v_{1x}\frac{\partial}{\partial x} + v_{1y}\frac{\partial}{\partial y} \right) \begin{pmatrix} v_{1x} \\ v_{1y} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

JER JE $f_1 = f_1(z)$

$$\Rightarrow \rho_0 \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} = -\nabla p_1 + \frac{1}{\mu_0}(\nabla \times \vec{B}_1) \times (\vec{B}_0 + \vec{B}_1)$$

$$\nabla \times \vec{B}_1 = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ B_{1x} & B_{1y} & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -\partial B_{1y}/\partial z \\ \partial B_{1x}/\partial z \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(\nabla \times \vec{B}_1) \times \vec{B}_0 = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ -\partial B_{1y}/\partial z & \frac{\partial B_{1x}}{\partial z} & 0 \\ B_0 \sin\theta & 0 & B_0 \cos\theta \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} B_0\cos\theta\, \partial B_{1x}/\partial z \\ B_0 \cos\theta\, \partial B_{1y}/\partial z \\ -B_0 \sin\theta\, \partial B_{1x}/\partial z \end{pmatrix}$$

$$(\nabla \times \vec{B}_1) \times \vec{B}_1 = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ -\partial B_{1y}/\partial z & \frac{\partial B_{1x}}{\partial z} & 0 \\ B_{1x} & B_{1y} & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -B_{1y}\frac{\partial B_{1y}}{\partial z} - B_{1x}\frac{\partial B_{1x}}{\partial z} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (\nabla \times \vec{B}_1) \times (\vec{B}_0 + \vec{B}_1) = \begin{pmatrix} B_0 \cos\theta \frac{\partial B_{1x}}{\partial z} \\ B_0 \cos\theta\, \partial B_{1y}/\partial z \\ -B_0 \sin\theta \frac{\partial B_{1x}}{\partial z} - B_{1y}\frac{\partial B_{1y}}{\partial z} - B_{1x}\frac{\partial B_{1x}}{\partial z} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \rho_0 \frac{\partial v_{1x}}{\partial t} = \frac{1}{\mu_0} B_0 \cos\theta \frac{\partial B_{1x}}{\partial z} \\ \rho_0 \frac{\partial v_{1y}}{\partial t} = \frac{1}{\mu_0} B_0 \cos\theta \frac{\partial B_{1y}}{\partial z} \\ 0 = -\frac{\partial p_1}{\partial z} - \frac{1}{\mu_0}\left(B_{1x}\frac{\partial B_{1x}}{\partial z} + B_{1y}\frac{\partial B_{1y}}{\partial z} + B_0 \sin\theta \frac{\partial B_{1x}}{\partial z} \right) \quad (*) \end{cases}$$

$$\frac{\partial p_1}{\partial z} + \frac{1}{\mu}\frac{\partial}{\partial z}\left(B_0 \sin\theta B_{1x} + \frac{B_{1x}^2}{2} + \frac{B_{1y}^2}{2}\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(p_1 + \frac{1}{\mu} B_0 B_{1x} \sin\theta + \frac{1}{2\mu}(B_{1x}^2 + B_{1y}^2)\right) = 0$$

KAKO JE $\frac{\partial}{\partial z}\left(p_0 + \frac{B_0^2}{2\mu}\right) = 0$ JER JE OSNOVNO STANJE HOMOGENO $\Rightarrow$ (2)

$$\frac{\partial}{\partial z}\Big(\overbrace{p_0 + p_1}^{p} + \underline{\frac{B_0^2}{2\mu}} + \underline{\frac{1}{\mu} B_0 B_{1x} \sin\theta} + \underline{\frac{1}{2\mu}(B_{1x}^2 + B_{1y}^2)}\Big) = 0$$

$$\vec{B_1} = B_{1x}\vec{e_x} + B_{1y}\vec{e_y}, \quad \vec{B} = \vec{B_0} + \vec{B_1}, \quad \vec{B}\cdot\vec{B} = B^2 = B_0^2 + B_1^2 + 2\vec{B_0}\cdot\vec{B_1}$$

$$\vec{B_0}\cdot\vec{B_1} = \begin{pmatrix} B_0\sin\theta \\ 0 \\ B_0\cos\theta \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} B_{1x} \\ B_{1y} \\ 0 \end{pmatrix} = B_{1x} B_0 \sin\theta \Rightarrow$$

$$B_1^2 = B_{1x}^2 + B_{1y}^2$$

$$\frac{B^2}{2\mu} = \underline{\frac{B_0^2}{2\mu} + \frac{B_1^2}{2\mu} + \frac{B_{1x}B_0\sin\theta}{\mu}}$$

$$\Rightarrow \underline{\frac{\partial}{\partial z}\left(p + \frac{B^2}{2\mu}\right) = 0}$$

OSTADUJE JOŠ:

$$\vec{B_0} + \vec{B_1} = \begin{pmatrix} B_0\sin\theta + B_{1x} \\ B_{1y} \\ B_0\cos\theta \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{v_1}\times(\vec{B_0}+\vec{B_1}) = \begin{vmatrix} \vec{e_x} & \vec{e_y} & \vec{e_z} \\ v_{1x} & v_{1y} & 0 \\ (B_0\sin\theta + B_{1x}) & B_{1y} & B_0\cos\theta \end{vmatrix} = \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array}\begin{pmatrix} B_0\cos\theta\, v_{1y} \\ -B_0\cos\theta\, v_{1x} \\ v_{1x}B_{1y} - v_{1y}(B_{1x} - B_0\sin\theta) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \nabla\times(\vec{v_1}\times(\vec{B_0}+\vec{B_1})) = \begin{vmatrix} \vec{e_x} & \vec{e_y} & \vec{e_z} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ A & B & C \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \cancel{\frac{\partial C}{\partial y}} - \frac{\partial B}{\partial z} \\ \frac{\partial A}{\partial z} - \cancel{\frac{\partial C}{\partial x}} \\ \cancel{\frac{\partial B}{\partial x}} - \cancel{\frac{\partial A}{\partial y}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_0\cos\theta \frac{\partial v_{1x}}{\partial z} \\ B_0\cos\theta\frac{\partial v_{1y}}{\partial z} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} \frac{\partial B_{1x}}{\partial t} &= B_0\cos\theta\frac{\partial v_{1x}}{\partial z} \\ \frac{\partial B_{1y}}{\partial t} &= B_0\cos\theta\frac{\partial v_{1y}}{\partial z} \end{aligned}\right|$$

DAKLE, OSTAJU

$$\boxed{\begin{aligned} \rho_0\frac{\partial v_{1x}}{\partial t} &= \frac{1}{\mu} B_0\cos\theta\frac{\partial B_{1x}}{\partial z} \\ \rho_0\frac{\partial v_{1y}}{\partial t} &= \frac{1}{\mu} B_0\cos\theta\frac{\partial B_{1y}}{\partial z} \\ \frac{\partial B_{1x}}{\partial t} &= B_0\cos\theta\frac{\partial v_{1x}}{\partial z} \\ \frac{\partial B_{1y}}{\partial t} &= B_0\cos\theta\frac{\partial v_{1y}}{\partial z} \end{aligned}}$$

ALFVENOV TALAS (v_{1y}, B_{1y}), $\vec{v_1}, \vec{B_1} \perp \vec{k}, \vec{B_0}$ $\Rightarrow$

$$\rho_0\frac{\partial v_{1y}}{\partial t} = \frac{1}{\mu} B_0\cos\theta\frac{\partial B_{1y}}{\partial z}, \quad \frac{\partial B_{1y}}{\partial t} = B_0\cos\theta\frac{\partial v_{1y}}{\partial z}$$

MODIFIKOVANI ALFVENOV TALAS

$$\left.\begin{aligned} \rho_0\frac{\partial v_{1x}}{\partial t} &= \frac{1}{\mu} B_0\cos\theta\frac{\partial B_{1x}}{\partial z} \\ \frac{\partial B_{1x}}{\partial t} &= B_0\cos\theta\frac{\partial v_{1x}}{\partial z} \end{aligned}\right\}$$

UOPŠTENO:

$$\left.\begin{aligned} \rho_0\frac{\partial v_{1i}}{\partial t} &= \frac{1}{\mu} B_0\cos\theta\frac{\partial B_{1i}}{\partial z} \\ \frac{\partial B_{1i}}{\partial t} &= B_0\cos\theta\frac{\partial v_{1i}}{\partial z} \end{aligned}\right\} i = x, y$$

|| KAKO JE $\nabla \to i\vec{k}$, $\frac{\partial}{\partial t} \to -i\omega$ $\Rightarrow$

$$f_1 = \check{f}_1 e^{-i\omega t + ikz}$$

$$\left.\begin{aligned} -i\omega\rho_0\check{v}_{1i} &= i\frac{1}{\mu} B_0\cos\theta\, k\, \check{B}_{1i} \\ -i\omega\check{B}_{1i} &= i B_0\cos\theta\, k\, \check{v}_{1i} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} -i\omega\rho_0 & -\frac{i}{\mu}B_0\cos\theta\, k \\ -i B_0\cos\theta\, k & -i\omega \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$-\omega^2\rho_0 + \frac{B_0^2}{\mu}\cos^2\theta\, k^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\boxed{\omega^2 = k^2 v_{A0}^2\cos^2\theta, \quad v_{A0}^2 = \frac{B_0^2}{\mu\rho_0}}$$

NETRIVIJALNA REŠENJA SISTEMA ALGEBARSKIH JEDNAČINA ZA $\Delta = 0$

2 IDEALNA MHD

STIŠLJIV FLUID

ADIJABATSKI PROCESI

HOMOGENO I STACIONARNO OSNOVNO STANJE

STATIKA

$$\rho = \rho_0 + \rho_1 \qquad p = p_0 + p_1 \qquad \vec{v} = \vec{v_1} \qquad \vec{B} = \vec{B_0} + \vec{B_1}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\text{ "0" } \to 0 \qquad \nabla \text{ "0" } \to 0$$

LINEARIZACIJA $f_1 \cdot g_1 \to 0$

OPŠTI IZRAZ

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\vec{v}) = 0$$
$$\rho\frac{d\vec{v}}{dt} = -\nabla p + \frac{1}{\mu_0}(\nabla\times\vec{B})\times\vec{B}$$
$$\frac{\partial p}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\nabla)p + \gamma_g\, p\,\nabla\cdot\vec{v} = 0$$
$$\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = \nabla\times(\vec{v}\times\vec{B}), \quad \nabla\cdot\vec{B} = 0$$

$\Rightarrow$

$$\frac{\partial\rho_1}{\partial t} + \rho_0\,\nabla\cdot\vec{v_1} = 0$$
$$\rho_0\frac{\partial\vec{v_1}}{\partial t} = -\nabla p_1 + \frac{1}{\mu_0}(\nabla\times\vec{B_1})\times\vec{B_0}$$
$$\frac{\partial p_1}{\partial t} + \gamma_g\, p_0\,\nabla\cdot\vec{v_1} = 0$$
$$\frac{\partial\vec{B_1}}{\partial t} = \nabla\times(\vec{v_1}\times\vec{B_0}), \quad \nabla\cdot\vec{B_1} = 0$$

$$B_{1z} = 0$$

REŠENJA SE TRAŽE U FORMI RAVNIH TALASA

$$\vec{k} = k\,\vec{e_z} \qquad \vec{B_0} = B_0(\sin\theta\,\vec{e_x} + \cos\theta\,\vec{e_z}) \qquad f_1 = f_1(z)$$

$$f_1 = \check{f}_1\, e^{-i\omega t + ikz} \qquad \nabla \to i\vec{k} \qquad \frac{\partial}{\partial t} \to -i\omega$$

$$\vec{B_1} = B_{1x}\vec{e_x} + B_{1y}\vec{e_y} \qquad \vec{v_1} = \begin{pmatrix} v_{1x}\\ v_{1y}\\ v_{1z}\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow -i\omega\check{\rho}_1 + \rho_0\, i\underbrace{\vec{k}}_{k\vec{e_z}}\cdot\check{\vec{v}}_1 = 0 \Rightarrow \underline{-\omega\check{\rho}_1 + \rho_0 k\check{v}_{1z} = 0}$$

$$-i\rho_0\omega\check{\vec{v}}_1 = -i\vec{k}\check{p}_1 + \frac{1}{\mu_0}i(\vec{k}\times\check{\vec{B}}_1)\times\vec{B_0}$$

$$\vec{k}\times\check{\vec{B}}_1 = \begin{vmatrix}\vec{e_x} & \vec{e_y} & \vec{e_z}\\ 0 & 0 & k\\ \check{B}_{1x} & \check{B}_{1y} & 0\end{vmatrix} = \begin{pmatrix}-k\check{B}_{1y}\\ k\check{B}_{1x}\\ 0\end{pmatrix}$$

$$(\vec{k}\times\check{\vec{B}}_1)\times\vec{B_0} = \begin{vmatrix}\vec{e_x} & \vec{e_y} & \vec{e_z}\\ -k\check{B}_{1y} & k\check{B}_{1x} & 0\\ B_0\sin\theta & 0 & B_0\cos\theta\end{vmatrix} = \begin{pmatrix}kB_0\check{B}_{1x}\cos\theta\\ +k\check{B}_{1y}B_0\cos\theta\\ -kB_0\check{B}_{1x}\sin\theta\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow -\rho_0\omega\begin{pmatrix}\check{v}_{1x}\\ \check{v}_{1y}\\ \check{v}_{1z}\end{pmatrix} = -\check{p}_1\begin{pmatrix}0\\0\\k\end{pmatrix} + \frac{1}{\mu_0}\begin{pmatrix}kB_0\check{B}_{1x}\cos\theta\\ +k\check{B}_{1y}B_0\cos\theta\\ -kB_0\check{B}_{1x}\sin\theta\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow -\rho_0\omega\check{v}_{1x} = \frac{1}{\mu_0}kB_0\check{B}_{1x}\cos\theta \Rightarrow \underline{-\omega\check{v}_{1x} = \frac{kB_0\cos\theta}{\mu_0\rho_0}\check{B}_{1x}}$$

$$-\rho_0\omega\check{v}_{1y} = \frac{1}{\mu_0}k\check{B}_{1y}B_0 \Rightarrow \underline{-\omega\check{v}_{1y} = \frac{kB_0\cos\theta}{\mu_0\rho_0}\check{B}_{1y}}$$

$$-\rho_0\omega\check{v}_{1z} = -\check{p}_1 k - \frac{1}{\mu_0}kB_0\check{B}_{1x}\sin\theta$$

$$\Rightarrow -\omega\check{v}_{1z} = -\frac{k}{\rho_0}\check{p}_1 - \frac{1}{\mu_0}\frac{kB_0\check{B}_{1x}\sin\theta}{\rho_0}$$

$$-i\omega\check{p}_1 + \gamma_g p_0\, i k\check{v}_{1z} = 0 \Rightarrow \check{p}_1 = \frac{\gamma_g p_0 k\check{v}_{1z}}{\omega}$$

$$\boxed{v_{S0}^2 = \frac{\gamma_g p_0}{\rho_0}}$$

$$\Rightarrow -\omega\check{v}_{1z} = -\frac{k}{\rho_0}\frac{\gamma_g p_0\, k\check{v}_{1z}}{\omega} - \frac{1}{\mu_0\rho_0}kB_0\sin\theta\,\check{B}_{1x}$$

$$\boxed{k\check{v}_{1z}} = \frac{\omega\check{\rho}_1}{\rho_0}$$

$$\Rightarrow -\omega\check{v}_{1z} = -\frac{v_{S0}^2}{\rho_0}k\check{\rho}_1 - \frac{kB_0\sin\theta\check{B}_{1x}}{\mu_0\rho_0}$$

$$-i\omega\check{\vec{B}}_1 = i\vec{k}\times(\check{\vec{v}}_1\times\vec{B_0})$$

$$\check{\vec{v}}_1\times\vec{B_0} = \begin{vmatrix}\vec{e_x} & \vec{e_y} & \vec{e_z}\\ \check{v}_{1x} & \check{v}_{1y} & \check{v}_{1z}\\ B_0\sin\theta & 0 & B_0\cos\theta\end{vmatrix} = \begin{array}{c}A\\B\\C\end{array}\begin{pmatrix}\check{v}_{1y}B_0\cos\theta\\ \check{v}_{1z}B_0\sin\theta - \check{v}_{1x}B_0\cos\theta\\ -\check{v}_{1y}B_0\sin\theta\end{pmatrix}$$

$$\vec{k}\times(\check{\vec{v}}_1\times\vec{B_0}) = \begin{vmatrix}\vec{e_x} & \vec{e_y} & \vec{e_z}\\ 0 & 0 & k\\ A & B & C\end{vmatrix} = \begin{pmatrix}-k\check{v}_{1z}B_0\sin\theta + k\check{v}_{1x}B_0\cos\theta\\ k\check{v}_{1y}B_0\cos\theta\\ 0\end{pmatrix}$$

$$-\omega\begin{pmatrix}\check{B}_{1x}\\ \check{B}_{1y}\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}k\check{v}_{1x}B_0\cos\theta - k\check{v}_{1z}B_0\sin\theta\\ k\check{v}_{1y}B_0\cos\theta\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \underline{-\omega\check{B}_{1x} = kB_0\cos\theta\,\check{v}_{1x} - kB_0\sin\theta\,\check{v}_{1z}}$$

$$\underline{-\omega\check{B}_{1y} = kB_0\cos\theta\,\check{v}_{1y}}$$

$$\left.\begin{aligned} -\omega \check{v}_{1y} &= \frac{KB_0\cos\theta}{\mu_0\rho_0}\check{B}_{1y} \\ -\omega \check{B}_{1y} &= KB_0\cos\theta\, \check{v}_{1y} \end{aligned}\right\} \mathrm{I}$$

OVO OD RANIJE
ZA NESTISLJIV FLUID

$$\mathrm{II}\left\{\begin{aligned} -\omega \check{v}_{1x} &= \frac{KB_0\cos\theta}{\mu_0\rho_0}\check{B}_{1x} \\ -\omega \check{v}_{1z} &= -\frac{v_{S0}^2}{\rho_0}K\check{\rho}_1 - \frac{KB_0\sin\theta}{\mu_0\rho_0}\check{B}_{1x} \\ -\omega \check{B}_{1x} &= KB_0\cos\theta\,\check{v}_{1x} - KB_0\sin\theta\,\check{v}_{1z} \\ -\omega\check{\rho}_1 + \rho_0 K \check{v}_{1z} &= 0 \end{aligned}\right.$$

$$\Longrightarrow \check{\rho}_1 = \frac{\rho_0 \check{v}_{1z}}{\underbrace{\omega/K}_{v_f}}$$

NEKA JE $v_f = \omega/K \Rightarrow$

$$\frac{\omega}{K}\check{v}_{1x} = -\frac{B_0\cos\theta}{\mu_0\rho_0}\check{B}_{1x} \Rightarrow \underline{v_f\check{v}_{1x} + \frac{B_0\cos\theta}{\mu_0\rho_0}\check{B}_{1x} = 0}$$

$$-\omega\check{v}_{1z} = -\frac{v_{S0}^2}{\cancel{\rho_0}}K\frac{\cancel{\rho_0}\check{v}_{1z}}{v_f} + \frac{KB_0\sin\theta}{\mu_0\rho_0}\check{B}_{1x} \Big/ \cdot\frac{1}{K} \Rightarrow \underline{\check{v}_{1z}\left(v_f - \frac{v_{S0}^2}{v_f}\right) - \frac{B_0\sin\theta}{\mu_0\rho_0}\check{B}_{1x} = 0}$$

$$\frac{\omega}{K}\check{B}_{1x} = B_0\sin\theta\,\check{v}_{1z} - B_0\cos\theta\,\check{v}_{1x} \Rightarrow \underline{v_f\check{B}_{1x} = B_0\sin\theta\,\check{v}_{1z} - B_0\cos\theta\,\check{v}_{1x}}$$

DAKLE IMAMO

NETRIVIJALNA REŠENJA

$$\left.\begin{aligned} &v_f\check{v}_{1x} + \frac{B_0\cos\theta}{\mu_0\rho_0}\check{B}_{1x} = 0 \\ &\check{v}_{1z}\left(v_f - \frac{v_{S0}^2}{v_f}\right) - \frac{B_0\sin\theta}{\mu_0\rho_0}\check{B}_{1x} = 0 \\ &v_f\check{B}_{1x} = B_0\sin\theta\,\check{v}_{1z} - B_0\cos\theta\,\check{v}_{1x} \end{aligned}\right\} \quad \Delta = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} v_f & 0 & \frac{B_0\cos\theta}{\mu_0\rho_0} \\ 0 & v_f - \frac{v_{S0}^2}{v_f} & -\frac{B_0\sin\theta}{\mu_0\rho_0} \\ B_0\cos\theta & -B_0\sin\theta & v_f \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$!!\ v_{A0}^2 = \frac{B_0^2}{\mu_0\rho_0}\ !!$$

$$\Longrightarrow v_f\left(v_f\left(v_f - \frac{v_{S0}^2}{v_f}\right) - \frac{B_0^2\sin^2\theta}{\mu_0\rho_0}\right) + \frac{B_0\cos\theta}{\mu_0\rho_0}\left(\frac{v_{S0}^2}{v_f} - v_f\right)B_0\cos\theta = 0$$

$$\Rightarrow v_f^3 - v_f\left(v_{S0}^2 + v_{A0}^2\sin^2\theta + v_{A0}^2\cos^2\theta\right) + \underbrace{\frac{B_0^2}{\mu_0\rho_0}}_{v_{A0}^2}\cos^2\theta\,\frac{v_{S0}^2}{v_f} = 0$$

$$\boxed{v_f^4 - v_f^2\left(v_{S0}^2 + v_{A0}^2\right) + v_{A0}^2 v_{S0}^2\cos^2\theta = 0} \Rightarrow$$

$$v_f^4 = \xi^2 \Rightarrow \xi^2 - \xi\left(v_{S0}^2 + v_{A0}^2\right) + v_{A0}^2v_{S0}^2\cos^2\theta = 0 \Rightarrow$$

$$v_f^2 = \xi \qquad v_f^2 = \frac{1}{2}\left((v_{S0}^2 + v_{A0}^2) \pm \sqrt{(v_{S0}^2+v_{A0}^2)^2 - 4v_{A0}^2v_{S0}^2\cos^2\theta}\right) \Rightarrow$$

$$\underline{\underline{v_f^{b/s} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(v_{S0}^2+v_{A0}^2) \pm \sqrt{(v_{S0}^2+v_{A0}^2)^2 - 4v_{A0}^2v_{S0}^2\cos^2\theta}}}}$$

BRZI I SPORI MAGNETNI ZVUK

IZVOĐENJE UOPŠTENOG OMOVOG ZAKONA

$$\rho_e \frac{d\vec{v}_e}{dt} = -\nabla p_e + \rho_e^{el}\vec{E} + \vec{j}_e \times \vec{B} + \vec{C}_2 \quad / \cdot \frac{-|e|}{m_e}$$

$$\rho_p \frac{d\vec{v}_p}{dt} = -\nabla p_p + \rho_p^{el}\vec{E} + \vec{j}_p \times \vec{B} - \vec{C}_2 \quad / \cdot \frac{|e|}{m_p}$$

$(+)$

$$\Gamma \quad \rho_\alpha \frac{d\vec{v}_\alpha}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}(\rho_\alpha \vec{v}_\alpha) + \nabla\cdot(\rho_\alpha \vec{v}_\alpha \vec{v}_\alpha)$$

$$\vec{C}_2 = \frac{n_e|e|}{\sigma}\vec{j}$$

$$\vec{v}_e = \vec{v} - \frac{\vec{j}}{n_e|e|}, \quad \vec{v}_p = \vec{v}$$

$$n_e = n_p$$

$$\frac{m_e}{m_p} \ll 1$$

$$\Gamma \quad \rho_e = m_e n_e$$

$$\rho_p = m_p n_p$$

$$-\frac{|e|}{m_e}\frac{\partial}{\partial t}\left(m_e n_e\left(\vec{v} - \frac{\vec{j}}{n_e|e|}\right)\right) - \frac{|e|}{m_e}\nabla\cdot\left(m_e n_e\left(\vec{v} - \frac{\vec{j}}{n_e|e|}\right)\left(\vec{v} - \frac{\vec{j}}{n_e|e|}\right)\right) +$$

$$+ \frac{|e|}{m_p}\frac{\partial}{\partial t}(m_p n_e \vec{v}) + \frac{|e|}{m_p}\nabla\cdot(n_e m_p \vec{v}\vec{v}) = \frac{|e|}{m_e}\nabla p_e - \frac{|e|}{m_e}\rho_e^{el}\vec{E} - \frac{|e|}{m_e}\vec{j}_e\times\vec{B} - \frac{|e|}{m_e}\frac{n_e|e|}{\sigma}\vec{j}$$

$$-\frac{|e|}{m_p}\nabla p_p + \frac{|e|}{m_p}\rho_p^{el}\vec{E} + \frac{|e|}{m_p}\vec{j}_p\times\vec{B} - \frac{|e|}{m_p}\frac{n_e|e|}{\sigma}\vec{j}$$

$$-\cancel{\frac{|e|}{m_e}\frac{\partial}{\partial t}(m_e n_e \vec{v})} + \frac{|e|}{m_e}\frac{\partial}{\partial t}\left(m_e n_e \frac{\vec{j}}{n_e|e|}\right) - \boxed{\frac{|e|}{m_e}\nabla\cdot\left(m_e n_e\left(\vec{v}\vec{v} - \frac{\vec{v}\vec{j}}{n_e|e|} - \frac{\vec{j}\vec{v}}{n_e|e|} + \frac{\vec{j}\vec{j}}{n_e^2 e^2}\right)\right)} +$$

$$+\cancel{\frac{|e|}{m_p}\frac{\partial}{\partial t}(m_p n_e \vec{v})} + \frac{|e|}{m_p}\nabla\cdot(m_p n_e \vec{v}\vec{v}) = \frac{|e|}{m_e}\nabla p_e - \boxed{\frac{|e|}{m_e}n_e|e|\vec{E}} - \frac{|e|}{m_e}\vec{j}_e\times\vec{B} - \frac{e^2 n_e}{m_e\sigma}\vec{j} -$$

$$-\frac{|e|}{m_p}\nabla p_p + \boxed{\frac{e^2 n_e}{m_p}\vec{E}} + \frac{|e|}{m_p}\vec{j}_p\times\vec{B} - \frac{e^2 n_e}{m_p\sigma}\vec{j} \Longrightarrow$$

$$\frac{e^2 n_e}{m_e}\vec{E}\left(1 + \frac{m_e}{m_p}\right) = \frac{e^2 n_e}{m_e\sigma}\vec{j}\left(1 + \frac{m_e}{m_p}\right) + \frac{\partial\vec{j}}{\partial t} - \nabla\cdot\left(\cancel{n_e|e|\vec{v}\vec{v}} - \vec{v}\vec{j} - \vec{j}\vec{v} + \frac{\vec{j}\vec{j}}{n_e|e|}\right) +$$

$$+\cancel{\nabla\cdot(n_e|e|\vec{v}\vec{v})} - \frac{|e|}{m_e}\nabla p_e + \frac{|e|}{m_p}\nabla p_p + \frac{|e|}{m_e}\vec{j}_e\times\vec{B} - \frac{|e|}{m_p}\vec{j}_p\times\vec{B} \Longrightarrow$$

$$\vec{E} = \frac{\vec{j}}{\sigma} + \frac{m_e}{n_e e^2}\frac{\partial\vec{j}}{\partial t} + \frac{m_e}{n_e e^2}\nabla\cdot\left(\vec{v}\vec{j} + \vec{j}\vec{v} - \frac{\vec{j}\vec{j}}{n_e|e|}\right) - \frac{m_e|e|}{n_e e^2 m_e}\nabla p_e\left(1 - \frac{m_e}{m_p}\frac{\nabla p_p}{\nabla p_e}\right) +$$

$$+\frac{m_e}{n_e e^2}\frac{|e|}{m_e}(\vec{j} - n_e|e|\vec{v})\times\vec{B} - \cancel{\frac{|e| m_e}{n_e e^2 m_p} n_e|e|\vec{v}\times\vec{B}} \Longrightarrow$$

$$\Gamma \quad \vec{j}_e = -n_e|e|\vec{v}_e = -n_e|e|\left(\vec{v} - \frac{\vec{j}}{n_e|e|}\right) = -n_e|e|\vec{v} + \vec{j}$$

$$\vec{j}_p = n_e|e|\vec{v}$$

$$\vec{E} = -\vec{v}\times\vec{B} + \frac{\vec{j}}{\sigma} + \frac{1}{n_e|e|}\vec{j}\times\vec{B} + \frac{m_e}{n_e e^2}\left[\frac{\partial\vec{j}}{\partial t} + \nabla\cdot\left(\vec{v}\vec{j} + \vec{j}\vec{v} - \frac{\vec{j}\vec{j}}{n_e|e|}\right)\right] - \frac{1}{n_e|e|}\nabla p_e$$