PREDGOVOR

Materija u vasioni uglavnom pripada nekom od mnogobrojnih tipova plazmi. U tom smislu je upoznavanje sa najvažnijim osobinama plazmenog stanja materije neizostavan deo studija astronomskih nauka.

U okviru ovog udžbenika predstavljene su najvažnije osobine, kao i metode proučavanja plazmi. Poseban akcenat je dat razmatranju onih primera koji su od značaja za astronomiju. Udžbenik je osmišljen tako da u potpunosti prati sadržaj predmeta „Dinamika kosmičke plazme”, koji je od 1968. godine bio deo dvosemestralnog kursa „Teorijska astrofizika”, a koji se od 2006. godine predaje kao poseban jednosemestralni predmet na Katedri za astronomiju Matematičkog fakulteta Univerziteta u Beogradu, na osnovnim akademskim studijama. Za početni izbor tema, odnosno za sastavljanje prvog programa kursa zaslužna je profesorka Mirjana Vukićević-Karabin, koja je ujedno i bila predmetni nastavnik, te i autor udžbenika „Teorijska astrofizika”. Od 1995. godine, prof. Olga Atanacković je od prof. Mirjane Vukićević-Karabin preuzela svu nastavu koja obuhvata sadržaje teorijske astrofizike. Nastavu iz predmeta „Dinamika kosmičke plazme” držala je sve do školske 2015/16. godine.

Na nekoliko mesta ovaj udžbenik prevazilazi nivo predmeta sa osnovnih studija i pruža studentima dodatna znanja kao pripremu za izborni kurs „Magnetohidrodinamika” na doktorskim studijama programa Astronomija i astrofizika na Matematičkom fakultetu Univerziteta u Beogradu.

Veliku zahvalnost dugujem profesorki Olgi Atanacković čiji su komentari i sugestije doprineli da početna verzija ovog rukopisa bude znatno poboljšana. Naravno, ovaj udžbenik ne bi bio takav kakav jeste da nije bilo dobronamernih i korisnih saveta prof. Dejana Uroševića i prof. Bojana Arbutine (Katedra za astronomiju Matematičkog fakulteta Univerziteta u Beogradu), kao i prof. Đorđa Spasojevića (Fizički fakultet Univerziteta u Beogradu), koji su kao recenzenti pažljivo pročitali celokupni rukopis.

Za pomoć oko tehničke realizacije nekoliko crteža u ovoj knjizi zahvalnost dugujem Ivanki Vuković. Želeo bih da istaknem veliku potporu porodice, a posebno bake Ružice, koja me je još od malih nogu zainteresovala za svet nauke. Konačno, najviše zahvalnosti dugujem supruzi Sonji Telebaković Onić, bez čije ljubavi i podrške ovaj udžbenik i ne bi bio napisan.

U Beogradu, Autor
maja 2023.

Pod pretpostavkom da je brzina drifta vodećeg centra $\vec{V}_{\mathrm{D}}$ skoro konstantna u vremenu, ova jednačina se može rešavati iterativno. U prvoj iteraciji (I; podrazumeva se da nema vremenske zavisnosti brzine drifta, odnosno samih veličina koje istu određuju), relacija (2.15b) predstavlja izraz za brzinu tzv. magnetnog drifta vodećeg centra, $\vec{V}_{\mathrm{D}}^{(\mathrm{I})} \equiv \vec{V}_{\mathrm{D}}^{\mathrm{mag}}$ (Milić 1977):

$$\vec{V}_{\mathrm{D}}^{\mathrm{mag}} = \frac{1}{q}\frac{\langle \vec{F}_\perp \rangle \times \vec{B}}{B^2} = \frac{M}{qB^2}\,\vec{B} \times \nabla B + \frac{2\mathrm{w}_\parallel}{qB^2}\,\vec{B} \times (\vec{b} \cdot \nabla)\vec{b}. \tag{2.16a}$$

Prvi član sa desne strane izraza (2.16a) potiče od prisustva nenulte transverzalne komponente gradijenta intenziteta magnetnog polja i uobičajeno je da se takvo kretanje naziva gradijentni drift vodećeg centra (eng. *gradient drift*). Drugi član je povezan sa krivinom magnetnih linija. Naime, kretanje vodećeg centra duž zakrivljenih magnetnih linija je ubrzano pa je i odgovarajući lokalni referentni sistem vodećeg centra neinercijalan. Usled dejstva (usrednjene) centrifugalne sile, vodeći centar trpi tzv. centrifugalni drift (eng. *centrifugal, curvature drift*).

Primetimo sada da se pod osnovnim pretpostavkama orbitalnog metoda (razmatranje slobodnih polja) i uslova stacionarnosti polja, magnetno polje može tretirati kao Laplasovo ($\nabla \times \vec{B} \approx \vec{0}$). Iz tog razloga, zamenom $\vec{A} = \vec{B} \equiv \vec{B}$ u relaciji (P1.29) može se pisati $\nabla(\vec{B} \cdot \vec{B}) = 2(\vec{B} \cdot \nabla)\vec{B}$, iz čega sledi da se gradijent intenziteta magnetnog polja upravo može predstaviti preko lokalnog tenzora magnetnog polja $\nabla B = \vec{b} \cdot \nabla\vec{B}$ (vidi Prilog 1). Transverzalna komponenta gradijenta intenziteta magnetnog polja $\nabla_\perp B$ se može dovesti u vezu sa krivinom magnetnih linija. Uz pretpostavku o Laplasovom karakteru magnetnog polja i izraz (P1.25) imamo $\nabla \times (B\vec{b}) = \vec{0}$, odnosno $B\nabla \times \vec{b} = \vec{b} \times \nabla B$. Sada, uz gore navedeno i upotrebu izraza (P1.7) sledi $\nabla_\perp B = (\vec{b} \times \nabla B) \times \vec{b} = -B\vec{b} \times (\nabla \times \vec{b})$. Ako se ponovo iskoristi relacija (P1.29) uz $\vec{A} = \vec{B} \equiv \vec{b}$, dobija se $\nabla(\vec{b} \cdot \vec{b}) = 0$, odnosno $\vec{b} \times (\nabla \times \vec{b}) = -(\vec{b} \cdot \nabla)\vec{b}$. Konačno, sada je jasno da sledi[120] $\nabla_\perp B = B(\vec{b} \cdot \nabla)\vec{b}$. Kada bi bilo $\nabla \times \vec{B} \neq \vec{0}$, tada bi važilo $\nabla_\perp B \equiv (\vec{b} \times \nabla B) \times \vec{b} = \vec{b} \times (\nabla \times \vec{B}) + B(\vec{b} \cdot \nabla)\vec{b}$, a u protivnom, za brzinu konkretnog magnetnog drifta vodećeg centra (tzv. toroidalni (eng. *toroidal*) drift koji se npr. javlja kod konfiguracija konfiniranja plazmi sličnih torusu ili prilikom kretanja čestica u magnetosferama; Piel 2010) imamo:

$$\vec{V}_{\mathrm{D}}^{\mathrm{mag}} \approx \frac{(MB + 2\mathrm{w}_\parallel)}{qB^3}\,\vec{B} \times \nabla B. \tag{2.16b}$$

Na sličan način, uz relaciju (P1.29) se može pokazati da važi:

$$\langle \vec{F}_{\nabla \mathrm{B}} \rangle = -M\nabla B = (\vec{M} \cdot \nabla)\vec{B} + \vec{M} \times (\nabla \times \vec{B}) \approx (\vec{M} \cdot \nabla)\vec{B},$$

[120] Pri $\|\nabla_\perp B\| = 0$ sledi da su magnetne linije prave i važi $\|\nabla_\parallel B\| = 0$. Ukoliko je ispunjeno $\|\nabla_\perp B\| \neq 0$ tada su magnetne linije zakrivljene ali intenzitet longitudinalne komponente gradijenta intenziteta magnetnog polja ne mora nužno biti različit od nule (Milić 1977).

rečima, to je tipična vrednost dužine na kojoj dolazi do promene svih relevantnih makroskopskih veličina koje određuju fenomen koji se razmatra (eng. *length scale of gradients*). Takođe, neka je referentno vreme za procese koji se analiziraju τ. Tako se onda može uvesti bezdimenzioni parametar $\bar{t} = t/\tau$, pri čemu se podrazumeva da je ispunjeno $\partial/\partial\bar{t} = \tau\partial/\partial t$. Pretpostavlja se, radi jednostavnosti, a bez većih gubitaka u opštosti, da se za sva relevantna polja mogu iskoristiti upravo te iste vrednosti za $\boldsymbol{L}$ i τ. Kako sve vreme razmatramo isključivo nerelativistički režim, karakteristična brzina fenomena od interesa je $u_0 = \boldsymbol{L}/\tau \ll c$. Dodatno, uvedimo sledeće bezdimenzione veličine, definisane pomoću odgovarajućih karakterističnih vrednosti polja $\bar{B} = B/B_0$, $\bar{E} = E/E_0$, $\bar{j} = j/j_0$, $\bar{u} = u/u_0$, $\bar{\rho} = \rho/\rho_0$, $\bar{n} = n/n_0$, $\bar{n}_{\mathrm{p/e}} = n_{\mathrm{p/e}}/n_0$, $\bar{p} = p/p_0$, $\bar{p}_{\mathrm{e}} = p_{\mathrm{e}}/p_0$, $\bar{\rho}^{\mathrm{el}} = \rho^{\mathrm{el}}/\rho_0^{\mathrm{el}}$, $\bar{\sigma} = \sigma/\sigma_0$.

Krenimo najpre od Maksvelove jednačine $\nabla \times \vec{E} = -\partial\vec{B}/\partial t$, koja se u bezdimenzionom obliku može zapisati preko $\bar{\nabla} \times \vec{\bar{E}} = -\partial\vec{\bar{B}}/\partial\bar{t}$, uz vezu $E_0 = u_0 B_0$, koja trivijalno sledi. Takođe, jednačina $\nabla \times \vec{B} = \mu_0\vec{j} + c^{-2}\partial\vec{E}/\partial t$ može da se napiše u bezdimenzionom obliku kao $\bar{\nabla} \times \vec{\bar{B}} = (\mu_0 j_0 \boldsymbol{L}/B_0)\vec{\bar{j}} + (u_0/c)^2\partial\vec{\bar{E}}/\partial\bar{t}$. Kako je $u_0 \ll c$, jasno je da se u nerelativističkom slučaju može zanemariti član koji uključuje struju pomeranja, pa ova Maksvelova jednačina postaje izraz za gustinu struje $\vec{\bar{j}} = \bar{\nabla} \times \vec{\bar{B}}$, a $j_0 = B_0/(\mu_0\boldsymbol{L})$.

Zgodno je još prodiskutovati i o ranije pomenutoj pretpostavci makroskopske elektroneutralnosti posmatrane plazme u nerelativističkim (jednokomponentnim) MHD modelima. U tom cilju je korisno napisati izraz $\nabla \cdot \vec{E} = \rho^{\mathrm{el}}/\varepsilon_0$ u bezdimenzionom obliku. Kako je $\rho^{\mathrm{el}} = |q_{\mathrm{e}}|(n_{\mathrm{p}} - n_{\mathrm{e}})$, pogodno je uvesti $\rho_0^{\mathrm{el}} = |q_{\mathrm{e}}|n_0$, pa je $\bar{\rho}^{\mathrm{el}} = \bar{n}_{\mathrm{p}} - \bar{n}_{\mathrm{e}}$. Množenjem i deljenjem Maksvelove jednačine za $\nabla \cdot \vec{E}$ sa $B_0 m_{\mathrm{p}}$, kao i zamenom $\varepsilon_0 = 1/(\mu_0 c^2)$, sledi da je $\bar{\rho}^{\mathrm{el}} = (v_{\mathrm{A0}}/c)^2(\omega/\omega_{\mathrm{cp0}})\bar{\nabla}\cdot\vec{\bar{E}}$, gde je $v_{\mathrm{A0}}^2 = B_0^2/(\mu_0\rho_0)$ Alfvenova brzina, a $\omega = 1/\tau$ i $\rho_0 = m_{\mathrm{p}}n_0$. Očigledno je da se u nerelativističkom režimu ($v_{\mathrm{A0}} \ll c$), pri razmatranju tako sporih fenomena da je $\omega \ll \omega_{\mathrm{cp0}}$, može pisati $n_{\mathrm{p}} - n_{\mathrm{e}} \ll n_0$.

Ukoliko se iskoristi ranije predstavljena relacija, može se napisati i bezdimenzioni oblik jednačine $\partial\rho^{\mathrm{el}}/\partial t + \nabla\cdot\vec{j} = 0$, i to u obliku $(u_0/c)^2\partial(\bar{\nabla}\cdot\vec{\bar{E}})/\partial\bar{t} + \bar{\nabla}\cdot\vec{\bar{j}} = 0$, pa je jasno zašto se u nerelativističkom režimu ($u_0 \ll c$) uglavnom može zanemariti prvi član u prethodnom izrazu. U relativističkoj MHD se diskusija malo komplikuje, pa je potrebno biti veoma obazriv (o relativističkoj MHD vidi u Goedbloed, Keppens & Poedts 2010).

Konačno, sada je moguće proceniti značaj člana $\rho^{\mathrm{el}}\vec{E}$ u jednačini kretanja (3.8), koji je ranije zanemaren samo uz pretpostavku važenja makroskopske elektroneutralnosti u MHD modelu. Naime, bezdimenziona forma jednačine kretanja $\rho d\vec{u}/dt = -\nabla p + \rho^{\mathrm{el}}\vec{E} + \vec{j} \times \vec{B}$ je uz prethodne relacije, kao i sledeće definicije $v_{\mathrm{tho,p}}^2 = kT_0/m_{\mathrm{p}}$, $v_{\mathrm{s0}}^2 = \gamma_{\mathrm{g}} v_{\mathrm{tho,p}}^2$, $v_{\mathrm{A0}}^2 = 2v_{\mathrm{tho,p}}^2/\beta_0$, $\beta_0 = 2\mu_0 n_0 kT_0/B_0^2$ baš oblika $\bar{\rho}d\vec{\bar{u}}/d\bar{t} = -(v_{\mathrm{tho,p}}/u_0)^2\bar{\nabla}\bar{p} + (2/\beta_0)(v_{\mathrm{tho,p}}/u_0)^2\vec{\bar{j}} \times \vec{\bar{B}} + (v_{\mathrm{A0}}/c)^2(\bar{\nabla}\cdot\vec{\bar{E}})\vec{\bar{E}}$. Uko-

Na primeru Sunca, podsetimo se i da neke izolovane plazmene magnetne cevi (snop (eng. *bundle*) toroidalnih magnetnih linija), usled nestabilnosti[237], odnosno pratećeg dejstva magnetnog potiska (eng. *magnetic buoyancy*) izbijaju iz konvektivne zone u samu fotosferu, te u više slojeve atmosfere (vidi sliku 29). Naime, za razliku od termalnog potiska, koji dovodi do konvektivnog kretanja (usled konvektivne nestabilnosti plazme, kao jednog od termalnih mehanizama prenosa energije), postoji i tzv. magnetni potisak.

Radi jednostavnosti, analizirajmo potfotosfersku plazmenu magnetnu cev baš kao na slici 29 ($p_{\rm in}$, $\rho_{\rm in}$, $B_{\rm in}$), koja se nalazi u plazmi mnogo slabijeg okolnog magnetnog polja koje se može zanemariti ($p_{\rm ex}$, $\rho_{\rm ex}$, $B_{\rm ex} = 0$). Pretpostavimo da je sredina izotermalna i da je magnetna cev veoma tanka, u smislu da joj je radijus poprečnog preseka mnogo manji od karakteristične skale promene pritiska. Uslov magnetohidrostatike se svodi na $p_{\rm in} + B_{\rm in}^2/(2\mu_0) = p_{\rm ex}$, što uz jednačinu stanja idealnog gasa $p = \rho\mathcal{R}T$ dovodi do toga da je $\Delta\rho \equiv \rho_{\rm ex} - \rho_{\rm in} = B_{\rm in}^2/(2\mu_0\mathcal{R}T) > 0$. Gustina unutar cevi postaje manja od gustine sredine van cevi. To rezultuje stvaranjem magnetnog potiska $\Delta\rho g = B_{\rm in}^2 g/(2\mu_0\mathcal{R}T) = B_{\rm in}^2/(2\mu_0\mathcal{H})$, gde je $\mathcal{H} = p/(\rho g) = \mathcal{R}T/g$ tzv. lokalna skala visine za pritisak (eng. *pressure scale height*), odnosno ono rastojanje na kome se pritisak smanji e-puta[238]. Magnetohidrostatička ravnoteža je tako narušena (vidi Parker 1955, 1966). Pošto magnetna cev u realnosti nije ni u početnom trenutku potpuno prava, na nju će delovati i magnetni napon kako bi je ispravio. Ipak, za dovoljno dugu magnetnu cev, magnetni potisak nastavlja da izdiže njene delove (slika 29). Konkretnije, toroidalne magnetne linije se mogu izdizati i istezati usled (turbulentnog) kretanja konvektivnih elemenata.

U malim oblastima fotosfere dolazi do izbijanja gusto pakovanih magnetnih linija iz konvektivne zone. Ta lokalna magnetna polja su izrazito velikog intenziteta u odnosu na okolinu i koncentrisana su u izolovane plazmene magnetne cevi. Recimo, centralni, tamni deo pega na Suncu se naziva senka (lat. *umbra*) i toj izolovanoj oblasti je svojstveno veoma jako, uglavnom vertikalno lokalno magnetno polje. Ispod centralne oblasti pege su jačina i topologija magnetnog polja takve da je smanjena efikasnost konvektivnog prenosa toplote (vidi poglavlje 4.6), što rezultuje nižim temperaturama, uz smanjenu vrednost sjaja, koji zavisi od temperature (Vukićević-Karabin & Atanacković 2010). U oblasti polusenke (lat. *penumbra*) je ovaj efekat manje izražen jer je ugao između magnetnog polja i pravca konvektivnog transporta energije oštar. Naime, skoro potpuno je blokirano samo kretanje normalno na magnetno polje.

[237]Sasvim uopšteno, može se reći da postoje dva opšta tipa nestabilnosti magnetnog potiska (eng. *magnetic buoyancy instability*; vidi Shibata et al. 1989), tzv. magnetna Rejli-Tejlorova nestabilnost (eng. *magnetic Rayleigh-Taylor, Kruskal-Schwarzschild (interchange mode) instability*; eng. *Sir Geoffrey Ingram Taylor*, 1886 – 1975) i Parkerova nestabilnost (eng. *Parker (undular mode) instability*).

[238]Za sfernu simetriju i hidrostatičku ravnotežu oblika $dp/dr = -\rho g$, sledi $\mathcal{H} = -dr/d\ln p$.

4.6.1 Gravito-akustički talasi

Do sada su bile posmatrane samo one plazme koje su u osnovnom, neperturbovanom stanju homogene, stacionarne, u stanju mirovanja, te beskonačno prostiruće. Ono što je sve vreme bilo prećutno podrazumevano jeste da se pri teorijskoj analizi u okviru MHD modela koristi Ojlerov pristup, te tako Ojlerove promenljive. U tom smislu se pri analizi reakcije plazme na poremećaje koriste Ojlerove perturbacije relevantnih veličina f_1 (perturbacije koje su vezane za konkretni položaj u prostoru). Naravno, mogu se definisati i odgovarajuće Lagranžove perturbacije f', koje važe za konkretan element plazme. Perturbacija uopšte dovodi do promene vrednosti neke veličine u proizvoljnoj tački prostora usled dva razloga. Prvo, perturbacija može promeniti vrednost neke veličine u elementu fluida koji se trenutno nalazi u konkretnoj tački prostora. Ipak, perturbacija može dovesti i do toga da novi element fluida, sa drugačijim parametrima osnovnog stanja, dospe u razmatranu tačku prostora (vidi poglavlje 6 u knjizi Clarke & Carswell 2007). U slučaju homogenog osnovnog stanja ova dva tipa perturbacija se izjednačavaju. Važno je skrenuti pažnju i na to da, pri veoma čestoj pretpostavci izentropijskog proticanja, svaki element plazme za sebe održava entropiju. Sa druge strane, neka se, radi jednostavnosti razmatra model izotermalne atmosfere neke zvezde sa eksponencijalnom raspodelom gustine i pritiska. Tada pojedinačni elementi plazme na različitim visinama imaju različitu vrednost entropije. Drugim rečima, entropija po jedinici mase u nekoj tački prostora nije očuvana. Iz tog razloga se uslov izentropijskog proticanja i predstavlja preko $d(p\rho^{-\gamma_{\mathrm{g}}})/dt = 0$, a ne preko $\partial(p\rho^{-\gamma_{\mathrm{g}}})/\partial t = 0$ (vidi jednačinu 5.1.-17 u Milić 1983). Za kompletniju diskusiju o talasima i nestabilnostima u nehomogenim plazmama vidi npr. u Goedbloed & Poedts (2004) ili Priest (2014).

Analizirajmo sada samo stacionarnu i statičnu izotermalnu plazmu, koja predstavlja deo atmosfere jedne idealizovane zvezde. Neka pomenuta izotermalna plazma zauzima dovoljno veliku zapreminu tako da se opet mogu zanemariti granični uslovi. Recimo i da je moguće zanemariti magnetno polje i rotaciju zvezde. U osnovnom stanju je ispunjen uslov hidrostatičke ravnoteže $\nabla p_0 = \rho_0 \vec{g}$. Radi jednostavnosti, neka se još podrazumeva i važenje tzv. Kaulingove aproksimacije (Cowling 1941), da se perturbacije u gravitacionom potencijalu mogu zanemariti, pa da se može pisati da je $\vec{g} = -g\vec{\mathrm{e}}_z$, $g = \mathrm{const}$. Ako se pritisak plazme, kao i do sada, predstavi preko pritiska idealnog gasa, tada sledi da je $\nabla(\rho_0 \mathcal{R}T) = -\rho_0 g \vec{\mathrm{e}}_z$, odnosno $\partial \ln \rho_0/\partial z = -g/(\mathcal{R}T)$, pa je konačno $\rho_0(z) = \rho(0)e^{-\frac{g}{\mathcal{R}T}z}$. Dakle, raspodele gustine i pritiska su eksponencijalne, te važi $\rho_0(z) = \rho(0)e^{-z/\mathcal{H}}$, $p_0(z) = p(0)e^{-z/\mathcal{H}}$, uz $\mathcal{H} = \mathcal{R}T/g$.

Linearizovana jednačina kretanja za perturbacije postaje:

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} = -\nabla p_1 - \rho_1 g \vec{\mathrm{e}}_z,$$

uz:

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} = -\vec{v}_1 \cdot \nabla \rho_0 - \rho_0 \nabla \cdot \vec{v}_1 = 0, \quad \frac{\partial p_1}{\partial t} = -\vec{v}_1 \cdot \nabla p_0 - \gamma_{\rm g} p_0 \nabla \cdot \vec{v}_1.$$

Diferenciranjem jednačine kretanja po vremenu i zamenom izraza za $\partial\rho_1/\partial t$ i $\partial p_1/\partial t$, dobija se:

$$\frac{\partial^2 \vec{v}_1}{\partial t^2} = v_{\rm s0}^2 \nabla(\nabla \cdot \vec{v}_1) - (\gamma_{\rm g} - 1) g \vec{\rm e}_z (\nabla \cdot \vec{v}_1) - g \nabla v_{1z},$$

gde je $v_{\rm s0}^2 = \gamma_{\rm g} p_0/\rho_0$. Ako se potraže rešenja u obliku prostih ravnih talasa uobičajenog oblika $\vec{v}_1(\vec{r}, t) = \check{\vec{v}}_1 e^{i\vec{k}\cdot\vec{r} - i\omega t}$, sledi:

$$\omega^2 \check{\vec{v}}_1 = v_{\rm s0}^2 \vec{k}(\vec{k} \cdot \check{\vec{v}}_1) + i(\gamma_{\rm g} - 1) g \vec{\rm e}_z (\vec{k} \cdot \check{\vec{v}}_1) + ig\vec{k}\check{v}_{1z}.$$

Skalarnim množenjem gornje jednačine najpre sa $\vec{k}$, a zatim sa $\vec{\rm e}_z$, dobijaju se dva izraza sa dve nepoznate $\check{v}_{1z}$ i $\vec{k} \cdot \check{\vec{v}}_1$. Izjednačavanjem determinante sistema sa nulom sledi konkretna disperziona jednačina. Nakon odgovarajuće manipulacije tako dobijene jednačine, konačno proizilazi:

$$\omega^2(\omega^2 - \omega_{\rm ac}^2) = (\omega^2 - \omega_{\rm BV}^2 \sin^2\theta_{\mathbb{C}}) k_{\mathbb{C}}^2 v_{\rm s0}^2,$$

uz $\omega_{\rm BV}^2 = (\gamma_{\rm g} - 1) g^2/v_{\rm s0}^2$, $\omega_{\rm ac}^2 = v_{\rm s0}^2/(4\mathcal{H}^2)$, $\vec{k}_{\mathbb{C}} = \vec{k} + (i/2\mathcal{H})\vec{\rm e}_z$ i $\sin^2\theta_{\mathbb{C}} = 1 - (k_{\mathbb{C}z}^2/k_{\mathbb{C}}^2)$. Veličina $\omega_{\rm BV}$ se obično naziva Brant-Vaisalina[266] frekvencija, dok je sa oznakom $\omega_{\rm ac}$ obeležena tzv. niskofrekvenciona granica za akustičke talase (eng. *acoustic cut-off frequency*) u konkretnoj, izotermalnoj sredini. Dobijena je disperziona relacija za tzv. gravito-akustičke talase (eng. *acoustic-gravity waves*).

Lako se može pokazati da je $\omega_{\rm BV}/\omega_{\rm ac} = 2\sqrt{\gamma_{\rm g} - 1}/\gamma_{\rm g}$, pa je za relevantan slučaj kada je $\gamma_{\rm g} = 5/3$ ispunjeno $\omega_{\rm BV} \approx 0.98\ \omega_{\rm ac}$, a za $\gamma_{\rm g} = 2$ su frekvencije baš jednake. Drugim rečima, može se reći da je $\omega_{\rm BV} \leq \omega_{\rm ac}$, ali uglavnom $\omega_{\rm BV} \sim \omega_{\rm ac}$.

Pošto je uvedena smena za talasni broj, poremećaj brzine se onda može predstaviti kao $\vec{v}_1(\vec{r}, t) = \check{\vec{v}}_1 e^{z/(2\mathcal{H})} e^{-i\vec{k}_{\mathbb{C}}\cdot\vec{r} - i\omega t}$. Skrenimo još pažnju da je zapravo $k_{\mathbb{C}z} = k_z + i/(2\mathcal{H})$, te da je $k_{\mathbb{C}}^2 = k^2 + k_{\mathbb{C}z}^2 - k_z^2$. Dodatno, uvedena smena $\theta_{\mathbb{C}}$ suštinski predstavlja ugao koji zaklapaju vektori $\vec{k}_{\mathbb{C}}$ i $\vec{\rm e}_z$.

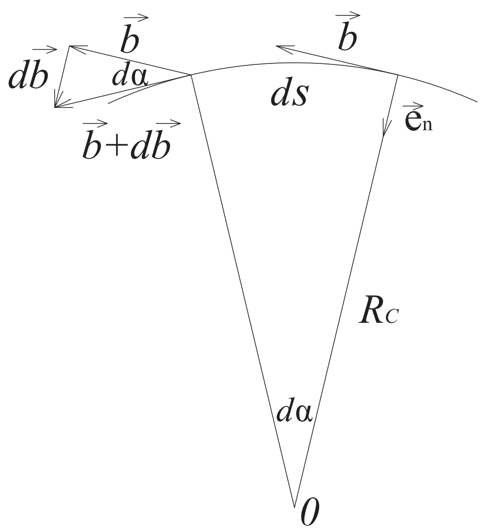
Ako talasi nisu evanescentni (zahteva se $k_{\mathbb{C}}^2 > 0$), te ako se ne razmatraju nestabilnosti (smatra se da je $\omega^2 > 0$), ispada da postoje dva tipa rešenja, jedno sa $\omega > \omega_{\rm ac}$ (tzv. (pseudo-)akustički talasi u izotermalnoj sredini), a drugo za koje važi $\omega < \omega_{\rm BV} \sin\theta_{\mathbb{C}}$ (unutrašnji gravitacioni talasi; eng. *internal gravity waves*). Sve ostale frekvencije padaju u režim evanescencije (vidi sliku 36). Inače, akustički talasi u MHD modelu se obično nazivaju i pseudo-akustičkim kako bi se

[266]Prema Brantu (eng. *Sir David Brunt*, 1886 – 1965) i Vaisali (fin. *Vilho Väisälä*, 1889 – 1969).

Ako je magnetno polje dato preko $\vec{B} = B\vec{b}$, tada po definiciji sledi da je $\vec{b}$ ujedno i ort tangente na magnetne linije. Ako sa $d\vec{r}$ označimo infinitezimalnu promenu vektora položaja kada se duž magnetne linije pređe rastojanje (elementarni luk) ds, tada je jasno da važi $\vec{b} = \frac{d\vec{r}}{ds}$. Promena orta tangente[279] na magnetnu liniju, duž same linije, data je preko:

$$\frac{d\vec{b}}{ds} = (\vec{b} \cdot \nabla)\vec{b} = \frac{\vec{e}_{\mathrm{n}}}{R_{\mathrm{C}}}, \tag{P1.6}$$

gde $\vec{e}_{\mathrm{n}}$ označava jedinični vektor (glavne) normale, a R_{C} (lokalni) poluprečnik krivine[280] magnetne linije. Kako je $d\vec{b} = d\vec{r} \cdot \nabla\vec{b}$ i važi $d\vec{b} = d\alpha\vec{e}_{\mathrm{n}}$, odnosno $ds = d\alpha R_{\mathrm{C}}$ (vidi sliku P1.2) očigledno je važenje izraza (P1.6). Ako se pravac jediničnog vektora tangente na magnetnu liniju menja duž same linije (norma, odnosno intenzitet mu je jedan) tada je jasno da je reč o zakrivljenoj liniji pa izraz (P1.6) predstavlja svojevrsni indikator zakrivljenosti magnetnih linija.



Slika P1.2: Skica dela zakrivljene magnetne linije sa istaknutim jediničnim vektorima magnetnog polja u dva infinitezimalno bliska položaja.

[279] Ovde smo označili ort tangente sa $\vec{b}$ radi konzistentnosti sa literaturom iz dinamike plazme. Ipak, važno je voditi računa da se na taj način često obeležava ort binormale prirodnog trijedra.

[280] Kriva $\Gamma(t)$, $t \in (a, b)$ je regularna ako je neprekidno diferencijabilna na celom intervalu $t \in (a, b)$ i za svako t iz tog intervala važi $\dot{\vec{r}}(t) \neq \vec{0}$. Krivina regularne krive u $\mathbb{R}^3$ je data preko $k = \frac{\|\dot{\vec{r}}(t) \times \ddot{\vec{r}}(t)\|}{\|\dot{\vec{r}}(t)\|^3}$, a poluprečnik krivine kao $R_{\mathrm{C}} = 1/k$ (Adnađević & Kadelburg 2008). Ako je kriva zadata u polarnim koordinatama, $\rho = \rho(\varphi)$, onda važi $R_{\mathrm{C}} = (\rho^2 + \rho_\varphi^2)^{3/2}/|\rho^2 + 2\rho_\varphi^2 - \rho\rho_{\varphi\varphi}|$, uz $\rho_\varphi \equiv d\rho/d\varphi$ i $\rho_{\varphi\varphi} \equiv d^2\rho/d\varphi^2$.

$$\nabla(T+P)=\nabla T+\nabla P, \tag{P1.20}$$

$$\nabla(TP)=P\nabla T+T\nabla P, \tag{P1.21}$$

$$\nabla\cdot(\vec{A}+\vec{B})=\nabla\cdot\vec{A}+\nabla\cdot\vec{B}, \tag{P1.22}$$

$$\nabla\cdot(T\vec{A})=\vec{A}\cdot\nabla T+T(\nabla\cdot\vec{A}), \tag{P1.23}$$

$$\nabla\times(\vec{A}+\vec{B})=\nabla\times\vec{A}+\nabla\times\vec{B}, \tag{P1.24}$$

$$\nabla\times(T\vec{A})=T(\nabla\times\vec{A})-\vec{A}\times\nabla T, \tag{P1.25}$$

$$\begin{aligned}\nabla\times(\vec{A}\times\vec{B})&=\nabla\cdot(\vec{B}\vec{A}-\vec{A}\vec{B})=\\&=\vec{B}\cdot\nabla\vec{A}-\vec{B}(\nabla\cdot\vec{A})+\vec{A}(\nabla\cdot\vec{B})-\vec{A}\cdot\nabla\vec{B},\end{aligned} \tag{P1.26}$$

$$\nabla\cdot(\vec{A}\times\vec{B})=\vec{B}\cdot(\nabla\times\vec{A})-\vec{A}\cdot(\nabla\times\vec{B}), \tag{P1.27}$$

$$\nabla\cdot\vec{A}\vec{B}=\vec{B}(\nabla\cdot\vec{A})+\vec{A}\cdot\nabla\vec{B}, \tag{P1.28}$$

$$\nabla(\vec{A}\cdot\vec{B})=\vec{A}\times(\nabla\times\vec{B})+\vec{B}\times(\nabla\times\vec{A})+\vec{A}\cdot\nabla\vec{B}+\vec{B}\cdot\nabla\vec{A}, \tag{P1.29}$$

$$\nabla\cdot(\nabla\times\vec{A})=0, \tag{P1.30}$$

$$\nabla\times(\nabla T)=\vec{0}, \tag{P1.31}$$

$$\nabla\times(\nabla\times\vec{A})=\nabla(\nabla\cdot\vec{A})-\nabla\cdot\nabla\vec{A}, \tag{P1.32}$$

$$\nabla\left(\frac{f}{g}\right)=\frac{g\nabla f-f\nabla g}{g^2}, \tag{P1.33}$$

$$\nabla\cdot\left(\frac{\vec{A}}{g}\right)=\frac{g(\nabla\cdot\vec{A})-\vec{A}\cdot\nabla g}{g^2}, \tag{P1.34}$$

$$\nabla\times\left(\frac{\vec{A}}{g}\right)=\frac{g(\nabla\times\vec{A})+\vec{A}\times\nabla g}{g^2}, \tag{P1.35}$$

$$\nabla\cdot\vec{r}=3,\ \nabla\times\vec{r}=\vec{0},\ \nabla\vec{r}=\hat{\mathrm{I}},\ \vec{r}=r\vec{\mathrm{e}}_r, \tag{P1.36a}$$

$$\nabla\cdot\left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right)=-\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right)=4\pi\delta(\vec{r}),\ \nabla^2\equiv\Delta\equiv\nabla\cdot\nabla, \tag{P1.36b}$$

$$\nabla\cdot(\hat{\mathrm{T}}\cdot\vec{A})=\vec{A}\cdot(\nabla\cdot\hat{\mathrm{T}})+(\hat{\mathrm{T}}\cdot\nabla)\cdot\vec{A}, \tag{P1.36c}$$

$$\ddot{\vec{r}}\cdot\dot{\vec{r}}=\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{r}^2}{2}\right),\ \ \frac{\vec{r}\cdot\dot{\vec{r}}}{r^3}=-\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\right), \tag{P1.36d}$$

$$\hat{\mathrm{A}}:\hat{\mathrm{B}}=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}A_{ij}B_{ji}, \tag{P1.37}$$