Универзитет у Београду
Математички факултет

АНАЛИТИЧКА ГЕОМЕТРИЈА

(ГЕОМЕТРИЈА 1)

– рокови –

Рокови школске 2021/2022 године

Геометрија 1, јануар 1, 2023. године

1) (20) Доказати да код троугла ABC симетрала спољашњег угла A и симетрале унутрашних углова B и C секу праве одређене наспрамним ивицама у колинеарним тачкама.
2) (20) Дат је правилан петоугао $ABCDE$. У равни петоугла изабрана су два афина репера: репер Axy са почетком у тачки A и координатним векторима $\overrightarrow{e_1} = \overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{AD}$ и репер $Cx'y'$ са почетком у тачки C и координатним векторима $\overrightarrow{f_1} = \overrightarrow{CE}$ и $\overrightarrow{f_2} = \overrightarrow{CA}$. Одредити везу координата (x, y) и (x', y'), као и координате темена у оба репера.
3) (20) Дата је хипербола $xy - 1 = 0$. Одредити пар њених конјугованих дијаметара од којих је један паралелан правој $p : 2x + y - 6 = 0$.
4) (20) Одредити формуле афиног пресликавања простора које представља композицију ротације за угао $\phi = \frac{\pi}{4}$ око праве $p : x = 0,\ y = 0$ и рефлексије у односу на раван $\alpha : z = 0$. Шта је слика сфере $x^2 - 2x + y^2 + z^2 = 0$ при том пресликавању ?
5) (20) Једначину површи другог реда $2x^2 + y^2 + 2z^2 + 6xz - 10x + 2y - 10 = 0$ изометријским трансформацијама свести на канонски облик и написати формуле те трансформације.

Геометрија 1, септембар 2, 2022. године

1) (20) Дат је једнакокраки трапез $ABCD$ чија је основа AB, угао код темена A је $60°$ и $BC = CD = DA = 2$. Ако су M и N средишта страница BC и CD, а $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ редом јединични вектори истог смера као вектори $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$, изразити векторе $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AN}$, $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{MN}$ помоћу вектора $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$, а затим одредити скаларни производ вектора $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{MN}$.
2) (20) Одредити угао под којим се секу криве $x^2 + y^2 - 8y - 24 = 0$ и $x^2 = 6y$. Скицирати!
3) (20) Раван $\alpha : x+4y+8z-8 = 0$ и координатне равни образују тетраедар. Одредити једначину сфере уписане у тај тетраедар.
4) (20) Одредити афину трансформацију простора која представља композицију хомотетије са центром $S(1, 2, 3)$ и коефицијентом 2 и раванске рефлексије у односу на раван $\alpha : x+2y+2z-1 = 0$.
5) (20) Одредити приближно растојање између градова $A(60°N, 45°E)$ и $B(30°S, 60°W)$. Узети да је Земља сфера полупречника $r = 6370km$.

ГЕОМЕТРИЈА 1, септембар 1, 06.09.2022.

1.[20] Нека су у равни дате тачке $A(-20, 10)$, $B(40, 10)$ и $C(-5, 25)$. Одредити координате подножја висина из темена A, B, C као и координате ортоцентра H троугла ABC.

2.[20] Одредити једначине свих равни које садрже праву $p : \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{0}$ и граде угао $\frac{\pi}{4}$ с равни Oxy.

3.[20] Одредити једначину криве другог реда чије су осе праве $p : 3x + 4y = 0$ и $q : -4x + 3y = 0$, једна од жижа је тачка $F(3, 4)$ и има ексцентрицитет $\frac{5}{4}$.

4.[20] Свести површ другог реда $3x^2 + 4y^2 + 2z^2 - 4xy + 4xz + 6y + 12z = 0$ на канонски облик изометријском трансформацијом и одредити формуле трансформације. Која је површ у питању?

5.[20] На јединичној сфери израчунати површину сферног троугла чије су странице $a = b = c = \frac{\pi}{3}$.

Геометрија 1, јун 2 2022. године

1) [20] Нека је ABC троугао, тачка M средиште тежишне дужи CC_1, а тачка N пресек правих BC и AM. Израчунати односе $\overrightarrow{AM} : \overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{BC} : \overrightarrow{CN}$.
2) [7+7+6] а) Одредити афино пресликавање које пресликава квадрат $ABCD$ са теменима $A(-2, -3)$, $B(0, -3)$, $C(0, -1)$, $D(-2, -1)$ у паралелограм $A'B'C'D'$ са теменима $A'(3, 3)$, $B'(7, 5)$, $C'(5, 7)$ и $D'(1, 5)$. б) Одредити једначину слике круга уписаног у квадрат. Која је то крива? в) Колика је површина слике круга?
3) [20] Дата је коцка $OAFBCEGD$ ивице 1, са центром S. Афини репер $Oxyz$ са почетком у темену O има координатне векторе $\overrightarrow{e_1} = \overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{e_3} = \overrightarrow{OC}$. Други афини репер $Sx'y'z'$ има почетак у тачки S, а његови координатни вектори $\overrightarrow{f_1}$, $\overrightarrow{f_2}$ и $\overrightarrow{f_3}$ су редом јединични вектори истог смера као вектори $\overrightarrow{SA}$, $\overrightarrow{SB}$ и $\overrightarrow{SC}$. Изразити координате (x, y, z) произвољне тачке M у реперу $Oxyz$ помоћу координата (x', y', z') исте тачке у реперу $Sx'y'z'$.
4) [10 + 10] а) Одредити једначину праве q која садржи тачку $Q(1, 2, 4)$, сече праву $p : \frac{x-3}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+1}{-1}$ и паралелна је равни $\alpha : x - 4y + 3z - 1 = 0$. б) Израчунати запремину пирамиде $PABC$ ако су A, B, C редом пресеци оса Ox, Oy, Oz са равни α, а P пресечна тачка правих p и q.
5) [10 + 10] а) Шта се добија (објаснити и написати једначину) ротацијом праве $p : x = 0, z = y\sqrt{3}$ око осе Oz? б) Која крива је пресек те површи и равни $y = 1$? Скицирати слику.

Геометрија 1 - јун 1, 15.6.2022.

1. [20] Нека је $ABCD$ конвексан четвороугао у равни такав да је $AB = CD$. Ако су тачке E, F, G и H средишта дужи AD, BC, AC и BD, редом, изразити векторе $\overrightarrow{EF}$ и $\overrightarrow{GH}$ као линеарну комбинацију вектора $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{DC}$, а затим доказати да је $\overrightarrow{EF} \perp \overrightarrow{GH}$.

2. [20] Свести криву другог реда $2x^2+5xy+2y^2-2=0$ на канонски облик изометријском трансформацијом координата и написати формуле те трансформације. Која је то крива? Наћи њен ексцентрицитет и скицирати је.

3. [20] Одредити једначину равни α која садржи тачку $T(-2,1,3)$ и паралелна је са равни Oxy. Одредити формуле рефлексије простора S_α у односу на раван α, као и формуле транслације $\tau_{\vec{v}}$ простора за вектор $\vec{v} = (0,1,0)$ ($\tau_{\vec{v}}(X) = X'$ ако и само ако је $\overrightarrow{XX'} = \vec{v}$). Одредити формуле композиција $S_\alpha \circ \tau_{\vec{v}}$ и $\tau_{\vec{v}} \circ S_\alpha$ и скицирати слику тачке $M(1,2,4)$ при овим пресликавањима.

4. [20] Одредити једначину правог кружног цилиндра чија је оса пресечна права равни $x+2y=4$ и $2y-z=3$ ако је познато да тај цилиндар додирује раван која садржи тачку $(-3,1,1)$ и нормална је на праву $\frac{x-15}{1} = \frac{y-6}{-2} = \frac{z-2022}{2}$.

5. [20] На јединичној сфери у сферној геометрији одредити (изражавањем координата темена у сферним координатама) низ једнакостраничних троуглова $(NA_nB_n)_{n\in\mathbb{N}}$ чији збир унутрашњих углова тежи ка π, при чему је N северни пол те сфере.

Рокови школске 2020/2021 године

ГЕОМЕТРИЈА 1, јануар, 22.01.2022.

1. [14п] Нека је $ABCD$ паралелограм, нека је F тачка на страници BC таква да је $BF : FC = 2 : 3$, нека је G тачка на страници CD таква да је $CG : GD = 2 : 5$ и нека је E пресечна тачка дужи AF и BG. Одредити односе у којима тачка E дели дужи AF и BG.

2. [14п] Одредити једначину праве која садржи тачку $A(3,6,9)$ и нормална је на равни $\alpha : 2x - y - 2z = 0$. Одредити координате тачке A' која је симетрична тачки A у односу на раван α.

3. [14п] Ако су AC и BD било који конјуговани дијаметри једне елипсе, доказати да површина четвороугла $ABCD$ не зависи од избора дијаметара.

4. [14п] Свести површ другог реда $7x^2 + y^2 + z^2 + 8xy - 8xz + 16yz = 1$ и одредити тип површи.

5. [14п] На сфери полупречника $R = 2$ израчунати површину сферног троугла чије су странице $a = b = c = \frac{\pi}{3}$.

ГЕОМЕТРИЈА 1, септембар 2, 25.09.2021.

1.[20п] Нека су A, B, C и D четири различите тачке у простору и M, N, P, Q, R и S редом средишта дужи AB, BC, CD, DA, AC и BD. Доказати да дужи MP, NQ и RS имају заједничко средиште.

2.[20п] Дате су тачке $A(5,3)$, $B(3,5)$ и $C(9,3)$.

(а) [10п] Одредити једначину круга описаног око троугла ABC.

(б) [10п] Одредити афину трансформацију равни којој су тачке B и C непокретне и која тачку A слика у центар описаног круга око троугла ABC.

3.[20п] Одредити угао под којим се секу криве $x^2 + y^2 - 4x - 6 = 0$ и $y^2 = 3x$.

4.[20п] Одредити једначину кружног цилиндра који је описан око сфера $\sigma_1 : (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 3$ и $\sigma_2 : (x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-2)^2 = 3$.

5.[20п] На јединичној сфери су дате тачке $A(0,0,1)$, $B(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2})$ и $C(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$. Израчунати обим сферног троугла ABC.

Геометрија 1
септембар 1 2021.

1. Дате су координате тачака $B(-1,-2), C(3,-1)$ и $H(1,0)$.

а) Одредити координате тачке A тако да тачка H буде ортоцентар троугла ABC.

б) Нека су P_1 и P_2 редом површине троуглова BCH и ABC. Одредити однос $P_1 : P_2$.

2. Нека је $ABCD$ правилан тетраедар, нека је D_1 подножје висине тетраедра из темена D на пљосан ABC и нека су дата два репера: $A\vec{e}$ и $D_1\vec{f}$, где је $\vec{e} = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$ и $\vec{f} = (\overrightarrow{D_1A}, \overrightarrow{D_1B}, \overrightarrow{D_1D})$.

а) Одредити формуле трансформације координата из репера $A\vec{e}$ у репер $D_1\vec{f}$.

б) Одредити координате средишта ивица тетраедра у оба репера.

3. Нека је права t тангента у тачки M хиперболе Γ. Доказати да тачка M полови дуж чији су крајеви пресечне тачке праве t и асимптота хиперболе Γ.

4. Нека су дате тачке $A(1,-1,0), B(2,1,1), C(-1,0,0)$. Одредити геометријско место тачака које су подједнако удаљене од тачака A, B и C.

5. Дата је тачка $V(0,-1,2)$ и раван $\alpha: x+y-z=0$. Одредити једначину конуса чији је врх тачка V и чије изводнице заклапају угао $\pi/3$ са равни α.

ГЕОМЕТРИЈА 1, септембар 0, 25.08.2021.

1.[20п] Нека је тачка M средиште тежишне дужи AA_1 троугла ABC. Ако је тачка N пресек правих BM и AC одредити односе $NA:AC$ и $BM:MN$.

2.[20п] Дата је тачка $A(5,-2,1)$ и права $p: x=0,\ y=z$.

(а) [10п] Одредити тачку B симетричну тачки A у односу на праву p.

(б) [10п] На правој p одредити тачку C тако да троугао ABC буде једнакостраничан.

3.[20п] У простору су дате равни $\alpha: 2x+y+2z=0$ и $\beta: 2x-2y-z=0$. Нека је f пресликавање које представља композицију рефлексија у односу на равни α и β редом. Одредити формуле пресликавања f. Шта је слика сфере $\sigma: (x+1)^2+(y+2)^2+(z-2)^2=9$ при том пресликавању?

4.[20п] Одредити једначину кружног конуса описаног око сфера $\sigma_1: x^2+y^2+z^2-2y-2z+1=0$ и $\sigma_2: x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z+13=0$.

5. [20п] Одредити приближно растојање између тачака на планети Земљи $A(30°S, 45°W)$ и $B(60°N, 45°E)$. Узети да је Земља сфера полупречника $6370km$.

Геометрија 1
јун 2 2021.

1. Нека је ABC троугао и тачке P и Q такве да је $\overrightarrow{AP}=2\overrightarrow{PB}$ и $2\overrightarrow{BQ}=\overrightarrow{QC}$.

а) Ако је R тачка праве AC таква да се AQ, BR и CP секу у једној тачки, одредити однос $\overrightarrow{AC}:\overrightarrow{AR}$.

б) Одредити координате тачке Q у реперу Ae уколико је $e=(\overrightarrow{AP},\overrightarrow{AC})$.

2. Дате су права $s: x=-1$ и круг $k: (x-2)^2+y^2=1$. Одредити геометријско место центара кругова који спољашњом страном додирују круг k и праву s. Која крива је тражено геометријско место?

3. Дате су две праве $a: \frac{x-1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{-2}$ и $b: \frac{x+1}{0}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{-1}$ као и тачка $C(1,-1,0)$. Одредити праву c која садржи тачку C, сече праву b и чији вектор правца је ортогоналан на вектор правца праве a.

4. Нека су дате праве $p: \frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-3}{2}$ и $q: \frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-1}{2}$. Одредити једначине свих кружних конуса који садрже праве p и q, а чија оса припада равни одређеној правама p и q.

5. На сфери полупречника 2 одредити растојање између тачака $X(30°N, 60°W)$ и $Y(30°S, 30°E)$.

ГЕОМЕТРИЈА 1, јун, 15.06.2021.

1.[20] Нека су A,B,C и D,E,F две тројке колинеарних тачака таквих да је B средиште AC и E средиште DF. Ако су P,Q,R редом средишта дужи AD, BE, CF, доказати да су P,Q,R колинеарне и да је Q средиште дужи PR.

2.[20]

(а) [10] Одредити једначину равни γ која полови угао између равни $\alpha: 2x-2y+z-3=0$ и $\beta: 8x+y-4z-1=0$ и садржи тачку $C(-4,1,1)$.

(б) [10] Одредити једначину нормалне пројекције праве $p: \frac{x-1}{1}=\frac{y}{-1}=\frac{z-2}{0}$ на равни $\pi: x-2y+2z-5=0$ и израчунати угао између праве p и равни π.

3.[20] Одредити једначину криве другог реда чије су осе праве $p: 2x+y=0$ и $q: -x+2y=0$, једна од жижа је тачка $F(-1,2)$ и садржи тачку $B(2,1)$.

4.[20] Одредити формуле бар једног афиног пресликавања које квадрат $ABCD$ с теменима $A(0,0)$, $B(3,4)$, $C(-1,7)$, $D(-4,3)$ слика на паралелограм $A'B'C'D'$ с теменима $A'(0,0)$, $B'(7,-2)$, $C'(6,-13)$ и $D'(-1,-11)$. Израчунати површину паралелограма користећи податак да је површина квадрата $ABCD$ једнака 25.

5. [20] На сфери полупречника 1 израчунати површину сферног троугла чије су странице $a-b-c-\frac{\pi}{4}$.

Рокови школске 2019/2020 године

Геометрија 1
јануар 2021.

1. [14] Нека је дат троугао ABC који није једнакокрак, нека су A', B', C' подножја висина из темена A, B, C редом и нека је P пресечна тачка правих $BC, B'C'$, Q пресечна тачка правих $AC, A'C'$ и R пресечна тачка правих $AB, A'B'$. Доказати да су тачке P, Q, R колинеарне.

2. [14] Нека се равни $\alpha : 2x + y + z = 0$ и $\beta : 4x - 3y + z = 0$ секу по правој p. Одредити једначину праве q која садржи координатни почетак, припада равни $\gamma : x + y - 2z = 0$ и нормална је на праву p.

3. [14] Одредити формуле трансформације која представља композицију осне симетрије равни у односу на осу $p : x - 2y = 0$ и осне симетрије равни у односу на осу $q : 2x + y = 0$.

4. [14] Одредити једначину конуса чији је врх тачка $V(0, 0, 0)$ и додирује сферу $S : (x - 2)^2 + y^2 + z^2 = 2$.

5. [14] Одредити обим сферног троугла ABC на сфери полупречника 1 коме су углови $\sphericalangle BAC = \frac{\pi}{2}$, $\sphericalangle ABC = \frac{\pi}{2}$, $\sphericalangle ACB = \frac{\pi}{6}$.

Време за рад је 135 минута.

ГЕОМЕТРИЈА 1, Сеп 3, 2020.

1.[14п] Дат је паралелограм $ABCD$ чија је површина једнака P. Уколико су M и N тачке такве да важи $\frac{\overrightarrow{BM}}{\overrightarrow{MD}} = \frac{1}{2}$ и $\frac{\overrightarrow{DN}}{\overrightarrow{NC}} = -\frac{4}{1}$, израчунати (у функцији од P) површину троугла AMN.

2.[14п] Одредити једначине свих хомотетија које сферу $x^2 + y^2 + z^2 - 1$ трансформишу на сферу $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z + 1)^2 = 9$.

3.[14п] Одредити растојање између паралелних равни $\alpha : x - y + 4z + 2020 = 0$ и $\beta : x - y + 4z - 1 = 0$.

4.[14п] Одредити једначину параболе која садржи тачку $A(\sqrt{2}, 0)$, чија је директриса права $d : x + y - 3\sqrt{2} = 0$, а оса симетрије права $o : x - y + \sqrt{2} = 0$.

5.[14п] Површ П настаје ротацијом праве $p : \frac{x-2}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z-3}{0}$ око праве $o : \frac{x-3}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-3}{0}$. Одредити једначину површи П, скицирати и написати која је то површ.

Геометрија 1
септембар 2 2020.

1. Нека је $ABCD$ квадрат и тачка O центар тог квадрата. Репер Oxy има координатне векторе $\overrightarrow{e_1} = \overrightarrow{DA}$ и $\overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{DC}$, а репер $Ox'y'$ координатне векторе $\overrightarrow{f_1} = \overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{f_2} = \overrightarrow{OA}$

   а) Одредити формуле које представљају везу између координата (x, y) и (x', y').

   б) Одредити координате средишта страница квадрата $ABCD$ у оба репера.

   ц) Да ли се при промени координата из дела а) задатка мења оријентација?(Образложити)

2. а) Одредити формуле пројектовања простора на раван $\alpha : x - z = 4$.

   б) Одредити пројекцију A' тачке $A(0, 1, 0)$ и пројекцију p' праве $p : \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{0} = \frac{z+1}{-1}$ на раван α.

3. Свести криву другог реда $\Gamma : 5x^2 + 10xy + 5y^2 - 4x = 6$ на канонски облик изометријском трансформацијом и написати формуле трансформације. Која крива је у питању?

4. Одредити једначину кружног конуса $\mathcal{C}$ уколико је врх конуса тачка $V(2, -3, 5)$, тачка $P(1, -2, 3)$ припада конусу, а вектор правца осе конуса заклапа једнаке углове са свим координатним векторима.

5. На сфери полупречника 2 одредити растојање између тачака $A(45°N, 30°W)$ и $B(30°N, 60°E)$.

Геометрија 1
септембар 1 2020.

1. Дат је троугао ABC и тачке P и Q такве да важи $3\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{PB}$ и $\overrightarrow{BQ} = 2\overrightarrow{QC}$, а тачка R је пресек правих AC и PQ.

   а) Одредити однос $\overrightarrow{AR} : \overrightarrow{AC}$.

   б) Одредити координате тачака P, Q и R у реперу Ae_1e_2 ако су координатни вектори $\overrightarrow{e_1} = \overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{AB}$.

2. Дате су тачка $L(2, 0, 2)$ као и праве $p : \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{0}$ и $q : \frac{x-3}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z-4}{0}$.

   а) Одредити међусобни положај правих p и q.

   б) Одредити праву која садржи тачку L и сече праве p и q.

3. Дате су кружнице $k_1 : (x+1)^2 + y^2 = 1$ и $k_2 : (x-3)^2 + y^2 = 4$. Одредити геометријско место центара кружница које тангирају две дате кружнице са спољашње стране. Која крива је у питању?

4. Свести површ другог реда $\mathcal{M} : x^2+y^2+4xz+z^2 = 1$ на канонски облик изометријском трансформацијом и написати формуле трансформације. Одредити тип површи и скицирати ту површ.

5. Сферни троугао на јединичној сфери има углове $\alpha = \pi/4$ и $\beta = \pi/2$ као и површину $P = \pi/4$. Одредити обим тог троугла.

ГЕОМЕТРИЈА 1, јул, 05.07.2020.

1.[15п] Нека су H, T и O редом ортоцентар, тежиште и центар описаног круга троугла ABC.

а) [10п] Показати да је $\overrightarrow{HT} = 2\overrightarrow{TO}$.

б) [5п] Показати да је $\overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.

2.[15п] Одредити једначину праве p која садржи тачку $P(1,0,-2)$, паралелна је равни $\alpha : 2x - y + z - 3 = 0$ и има заједничку тачку с правом $q : \frac{x-2}{1} - \frac{y-2}{3} - \frac{z+2}{0}$.

3.[15п]

а) [5п] Одредити формуле ротације равни такве да се x-оса слика у праву $y = x$, а y-оса у праву $y = -x$.

б) [10п] Одредити једначину криве другог реда чије су осе праве $y - x$ и $y - -x$ и која садржи тачке $A\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$ и $B\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Која је то крива?

4.[15п] Свести површ другог реда $x^2+y^2-2z^2+xy+5xz-5yz = 3$ на канонски облик изометријском трансформацијом. Написати формуле трансформације. Одредити тип површи.

5.[10п] На сфери полупречника $R = 2$ израчунати површину сферног троугла ABC чије су странице $\widehat{AB} = \pi$, $\widehat{AC} = \pi$, $\widehat{BC} - \frac{2\pi}{3}$.

ГЕОМЕТРИЈА 1, јун, 24.06.2020.

1.[15п] Дате су координате темена $A(0,0)$, $B(3,0)$ и $C(1,1)$ троугла ABC. Одредити координате центра описаног круга O, ортоцентра H и тежишта T троугла ABC.

2.[15п] Одредити једначину равни α у простору која садржи тачку $A(-4,0,3)$ такву да је права n, која садржи A и нормална је на правој $l : \frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{0}$, нормална на α.

3.[15п] Одредити формуле афиног пресликавања које је композиција хомотетије с центром $S(2,1)$ и коефицијентом 13 и ротације око исте тачке S за оштар угао $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{5}{12}$.

4.[15п] Одредити површ у простору која представља скуп тачака M на једнаком растојању од тачке $A(1,0,0)$ и праве $p : \frac{x}{0} - \frac{y}{1} - \frac{z}{0}$.

5.[10п] Одредити приближно растојање између тачака на планети Земљи $A(45°N, 10°E)$ и $B(60°S, 35°W)$. Претпоставити да је Земља сфера полупречника $R = 6370\text{km}$.

Рокови школске 2018/2019 године

ГЕОМЕТРИЈА 1, јануар 1, 14.01.2020.

1.[10п] Дате су координате тачака $A(1,10)$, $B(1,18)$ и $C(2,3)$ у односу на афини репер Oxy у равни. У односу на нови афини репер $O'x'y'$ те исте тачке имају координате $A(2,1)$, $B(3,3)$, $C(1,-2)$. Изразити координате произвољне M у реперу Oxy помоћу координата (x', y') те тачке у реперу $O'x'y'$.

2.[10п] Одредити заједничку нормалу и растојање између мимоилазних правих $p : \frac{x-1}{4} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-5}{-2}$ и $q : \frac{x+1}{3} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z-2}{-1}$.

3.[10п] Одредити једначине равни које садрже праву $\frac{x-3}{-2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{2}$ и додирују сферу $x^2+y^2+z^2-2x-6y-4z+10 = 0$. Одредити једначине симетралних равни диедара између ове две равни и назначити која сече дату сферу.

4.[10п] Одредити приближно растојање између тачака на планети Земљи $A(45°N, 10°E)$ и $B(60°S, 35°W)$. Претпоставити да је Земља сфера полупречника $R = 6370\text{km}$.

ГЕОМЕТРИЈА 1, септембар 2, 18.09.2019.

1. Нека су E, F, G средишта ивица AB, BC, CD паралелограма $ABCD$ и нека праве BG и DE секу AF у тачкама M и N. Изразити $\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AN}$ у функцији вектора $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$. Доказати затим да тачке M и N разлажу дуж AF у односу $2:2:1$.

2. Одредити афину трансформацију која представља композицију симетрије у односу на праву $l : x + 3y - 5 = 0$ и хомотетије са центром $S(2,1)$ и коефицијентом 3.

3. Одредити једначину цилиндра чије су изводнице паралелне правој $p: \frac{x-3}{1} = \frac{y}{3} = \frac{z+4}{2}$ и садржи параболу $y^2 = 2x,\ z = 0$.

4. Нека су на јединичној сфери дата темена троугла $A(1,0,0)$, $B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $C(0,0,1)$. Одредити ивице и углове сферног троугла ABC.

ГЕОМЕТРИЈА 1, септембар 1, 08.09.2019.

1.[7п+3п] Нека је ABC троугао који није једнакокрак.

а) Нека симетрала спољашњег угла код темена A сече праву BC у тачки F. Доказати да је $BF : FC = AB : AC$.

б) Доказати да се у троуглу ABC симетрала једног унутрашњег угла и два спољашња угла секу у једној тачки.

2.[10п] Изометријском трансформацијом свести криву другог реда $x^2 - 2xy + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$ на канонски облик. Написати формуле трансформације. Одредити координате центра (ако постоји) и жижа, као и једначине оса и асимптота (ако постоје).

3.[10п] Наћи једначину конуса коме је врх у тачки $(0,0,0)$ и додирује сферу $(x-5)^2 + y^2 + z^2 = 9$. Израчунати полупречник круга по коме се конус и сфера додирују.

4.[10п] Израчунати растојање између тачака $A(45°N, 20°E)$ и $B(60°S, 25°W)$. Претпоставити да је Земља сфера полупречника $R = 6370\text{km}$.

ГЕОМЕТРИЈА 1, Јун 2, 29.06.2019.

1.[10п] Коришћењем свостава скаларног, векторског и мешовитог производа доказати да за произвољне векторе $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d} \in \vec{E}^3$ важи

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \circ (\vec{c} \times \vec{d}) = \begin{vmatrix} \vec{a} \circ \vec{c} & \vec{a} \circ \vec{d} \\ \vec{b} \circ \vec{c} & \vec{b} \circ \vec{d} \end{vmatrix}.$$

2.[4п+6п] Одредити једначину кружног цилиндра $\mathcal{C}$ полупречника 3 чија је оса права $o: \dfrac{x-2}{5} = \dfrac{y+2}{6} = \dfrac{z-2}{-2}$. Одредити једначине равни које садрже тачку $M(0,1,1)$ и по изводници додирују цилиндар $\mathcal{C}$.

3.[10п] Одредити једначине парабола које садрже тачку $A(0,7)$, чија је оса $o: x + y + 1 = 0$, а пресек директрисе и осе тачка $D(1,-2)$.

4.[10п] Одредити (приближно) растојање између тачака на Земљи између градова $A(30°S, 105°E)$ и $B(45°S, 45°W)$. Узети да је Земља сфера полупречника $R = 6370km$

ГЕОМЕТРИЈА 1, Јун 1, 19.06.2019.

1.[4п+6п] За дате неколинеарне тачке A, B, C одређене су тачке P, Q, R тако да је $\overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{PB}$, $\overrightarrow{BQ} = 2\overrightarrow{QC}$ и $\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{CR}$.

а) Доказати да су P , Q и R колинеарне.

б) Одредити у ком односу тачка Q дели дуж PR.

2.[10п] Одредити једначину праве која је паралелна равни $2x - y - 3z + 2019 = 0$, садржи тачку $(1,1,1)$ и сече праву $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y}{0} = \dfrac{z-2}{-3}$.

3.[10п] Одредити једначину кружног конуса коме је права $\dfrac{x-1}{0} = \dfrac{y-2}{0} = \dfrac{z-2019}{2019}$ оса и коме је раван $\pi: x - z + 2 = 0$ тангентна раван. Свести једначину добијене површи на канонски облик изометријском трансформацијом и написати формуле трансформације.

4.[10п] Тачке $A(1,0,0)$, $B(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2})$ и $C(0,1,0)$ леже на јединичној сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Одредити слику сфере и троугла ABC при хомотетији са центром у кооординатном почетку и коефицијентом -3. Одредити (сферне) углове, дужине страница и површину слике сферног троугла ABC.

Рокови школске 2017/2018 године

ГЕОМЕТРИЈА 1, Септембар 2, 20.09.2018.

1.[8п] Нека је $OA'B'$ троугао добијен ротацијом троугла OAB око темена O за прав угао. Доказати да је тежишна дуж из темена O троугла $OA'B$ нормална на праву AB'.

2.[8п] Одредити заједничку нормалу правих $p: x + 3z = 0, y = 0$ и $q: x - z + 4 = 0, y + 2z - 16 = 0$.

3.[8п] Ако су AC и BD било који конјуговани дијаметри једне елипсе, доказати да површина четвороугла $ABCD$ не зависи од избора дијаметара.

4.[8п] Одредити геометријско место тачака које су једнако удаљене од тачке $(2,2,0)$ и равни $x + y = 0$. Одредити тип површи и скицирати је. Без коришћења сопствених вредности и сопствених вектора, одредити формуле ротације око једне од координатних оса, као и транслације којима се дата површ може поставити у један од канонских положаја.

5.[8п] На јединичној сфери дате су тачке $A(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ и $B(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$. Одредити све тачке C на сфери тако да сферни троугао ABC буде једнакостраничан. Колике су странице, углови и површина тог сферног троугла?

ГЕОМЕТРИЈА 1, септембар 1, 11.09.2018.

1.[8п] Нека је $ABCD$ паралелограм и нека су E и F редом средишта страница BC и CD. Одредити у ком односу дијагонала AC и дуж AE деле дуж BF.

2.[8п] Одредити једначине равни које садрже праву $p : x = y, z = 0$ и с равни Oxy граде угао $\frac{\pi}{4}$.

3.[8п] Одредити формуле пресликавања које је композиција хомотетије са коефицијентом 3 у односу на тачку $S_1(1, 2)$ и хомотетије са коефицијентом $\frac{1}{3}$ у односу на тачку $S_2(-2, -1)$. Наћи слику круга $k : x^2 + y^2 = 1$ при овом пресликавању. Одредити које је пресликавање добијено, да ли је директно и да ли чува површине.

4.[8п] Изометријском трансформацијом свести површ другог реда $P : x^2 + y^2 - 2z^2 + 4xz + 5 = 0$ на канонски облик, написати формуле трансформације и одредити тип површи.

5.[8п] На сфери полупречника $R = 2$ израчунати површину сферног троугла ABC чије су странице $\widehat{AB} = \pi$, $\widehat{AC} = \pi$, $\widehat{BC} - \frac{2\pi}{3}$.

ГЕОМЕТРИЈА 1, Јун 2, 28.06.2018.

1.[8п] Дат је паралелограм $ABCD$ чија је површина једнака P. Уколико су M и N тачке такве да важи $\frac{\overrightarrow{BM}}{\overrightarrow{MD}} = \frac{1}{2}$ и $\frac{\overrightarrow{AN}}{\overrightarrow{ND}} = -\frac{2}{1}$, израчунати (у функцији од P) површину троугла AMN.

2.[8п] Одредити једначину равни која је ортогонална на пресек равни $\alpha : x + 2y = 3$ и $\beta : -2x + z = 1$, а додирује сферу $x^2 + y^2 + z^2 = 21$.

3.[6п] Одредити формуле хомотетије са коефицијентом -3 у односу на тачку $S(1, -2)$, као и слику криве $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0$.

4.[8п] Одредити једначину конуса са врхом у тачки $V(0, 0, -1)$ описаног око површи $\sigma : x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z+10 = 0$.

5.[10п] Доказати да на јединичној сфери не постоји сферни троугао који има два угла $\frac{\pi}{4}$ и $\frac{3\pi}{4}$, а чија је површина једнака $\frac{3\pi}{4}$.

ГЕОМЕТРИЈА 1, Јун 1, 19.06.2018.

1.[3п+5п] Нека су P, Q и R додирне тачке круга уписаног у троугао ABC редом са страницама BC, CA и AB.

а) Доказати да се праве AP, BQ и CR секу у једној тачки M.

б) Ако је $AB = 5$, $BC = 4$ и $CA = 3$ одредити координате вектора $\overrightarrow{CM}$ у бази $(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA})$.

2.[8п] Одредити једначину праве l која садржи тачку $L(0, -1, -4)$ и сече праву $p : x + y + z - 3 = 0, 2y - z - 14 = 0$ под правим углом.

3.[8п] Крива другог реда садржи координатни почетак, центар јој је тачка $C(-1, 1)$, а директриса права $d : x - y + 1 = 0$. Одредити једначину те криве.

4.[8п] Одредити једначину уније свих правих које су ортогоналне на раван $\alpha : x + y + z = 0$ и које додирују сферу $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 4z = 0$. Одредити канонски облик површи без рачуна. Која је то површ из класификације површи другог реда?

5.[8п] Тачке $A(0, 0, -1)$, $B(\frac{\sqrt{6}}{4}, \frac{\sqrt{6}}{4}, \frac{1}{2})$ и $C(0, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$ припадају сфери. Одредити обим сферног троугла ABC.

Рокови школске 2016/2017 године

Геометрија 1
септембар2 2017.

1. [8] Одредити полупречник уписаног круга троугла $\triangle ABC$ чија су темена $A(5, -3)$, $B(1, -3)$, $C(10, 9)$.

2. [8] Одредити једначину праве која садржи тачку $A(3, -1, 2)$, паралелна је равни $\alpha : x - 6y + z - 10 = 0$ и сече праву $p : \frac{x}{0} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-5}{2}$.

3. [8] Свести криву $16x^2 - 24xy + 9y^2 - 20x - 110y + 225 = 0$ на канонски облик изометријском трансформацијом. Написати једначине трансформације и одредити координате жиже и једначину директрисе полазне криве. Скицирати полазну криву и координатне системе.

4. (а) [4] Одредити слику сфере $\sigma : (x - 2)^2 + y^2 + (z - 3)^2 = 4$ при рефлексији у односу на раван $\pi : x = y$. Скицирати сферу и њену слику.

   (б) [4] Прецизно описати пројекције пресека сфере σ и равни π на координатне равни.

5. [8] Одредити једначину конуса чији је врх $V(1, 1, 1)$ и који садржи криву $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$, $z = 0$.

Време за рад је 135 минута.

Геомстрија 1
септембар 1 2017.

1. [8] Нека су X_1 и X_2 тачке ивица AB и AD, а Y_1 и Y_2 тачке ивице CD паралелограма $ABCD$, такве да је $AX_1 : X_1B = 4:1$, $AX_2 : X_2D = 3:2$ и $CY_1 : Y_1Y_2 : Y_2D = 2:1:2$. Нека су даље, Z_1 и Z_2 тачке на дужима X_1Y_1 и X_2Y_2, такве да је $X_1Z_1 : Z_1Y_1 = 1:4$ и $X_2Z_2 : Z_2Y_2 = 1:1$. Изразити вектор $\overrightarrow{Z_1Z_2}$ као линеарну комбинацију вектора $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$.

2. [8] Одредити једначину равни у простору која садржи тачку $A(4,3,9)$, управна је на равни $\alpha : 2x-3y+z-2=0$ и паралелна је правој $p : \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z}{0}$.

3. [8] Наћи једначину елипсе чији је центар тачка $O(2,2)$, једна жижа тачка $F_1(5,3)$ и садржи тачку $A(11,5)$.

4. (а) [6] Одредити формуле бар једног афиног пресликавања којим се сфера $\sigma : x^2+y^2+z^2=1$ пресликава на елипсоид $E : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} + \frac{z^2}{9} = 1$.

   (б) [2] Израчунати запремину елипсоида E.

5. [8] Нека је на јединичној сфери дат једнакостранични сферни троугао ABC странице $\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)$. Одредити површину тог троугла.

Време за рад је x минута.

Геометрија 1
јун 2 2017.

1. [8] Одредити запремину правилног тетраедра ивице 3, као и растојање између мимоилазних ивица.

2. [6] Одредити једначину равни која садржи праву $p : \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z+4}{1}$ и нормална је на раван $\alpha : 2x+y-z+14=0$.

3. [9] Одредити афино пресликавање f које слика квадрат $ABCD$ у квадрат $A'B'C'D'$, ако је $A(-1,-1)$, $B(1,-1)$, $C(1,1)$, $A'(6,2)$, $B'(8,4)$, $C'(6,6)$. Наћи једначину слике хиперболе $\chi : x^2-y^2=1$ при овом пресликавању. Скицирати оба квадрата, хиперболу χ и слику $f(\chi)$. Да ли је f изометрија?

4. [9] Свести површ $x^2-yz+1=0$ на канонски облик изометријском трансформацијом и написати формуле трансформације. Која је то површ из класификације? Скицирати.

5. [8] На јединичној сфери, дате су тачке $A(0,0,1)$ и $B(\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2})$. Одредити неку тачку C на сфери тако да троугао ABC буде једнакокраки са основицом BC, и сферним углом $\angle BAC = \frac{\pi}{2}$. Одредити ивице, углове и површину троугла ABC.

Геометрија 1
јун, 20.06.2017.

1. (9 поена) Дат је паралелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Нека су M, N, P, Q, R, S, редом, средишта страница AB, BC, CC_1, C_1D_1, A_1D_1, AA_1.

   (а) Доказати да шестоугао $MNPQRS$ лежи у једној равни.

   (б) Ако је тачка T тежиште шестоугла $MNPQRS$, изразити вектор $\overrightarrow{AT}$ у функцији од вектора $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AA_1}$.

2. (7 поена) Одредити површину троугла који одређују асимптоте хиперболе $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$ и тангента хиперболе у тачки $M(-\frac{5}{2},\frac{9}{4})$.

3. (7 поена) Кроз тачку $L(1,2,3)$ одредити праву l која сече праве $p : \frac{x-2}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z-6}{2}$ и $q : \frac{x-8}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-8}{1}$.

4. (10 поена) Одредити једначину купуса у који су уписане, са разних страна, сфере $\sigma_1 : x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z+10=0$ и $\sigma_2 : x^2+y^2+z^2+2x+4y+10z+14=0$.

5. (7 поена) На јединичној сфери одредити растојање између тачака $A(60°N, 45°E)$ и $B(30°S, 135°W)$.

Рокови школске 2015/2016 године

Геометрија 1
септембар 2 2016.

1. Око правилног октаедра је описана коцка, тако да су темена октаедра средишта пљосни коцке. У исти октаедар је уписана коцка, тако да су темена коцке средишта пљосни октаедра. Колики је однос запремина ове две коцке?

2. Одредити једначину параболе која је одређена теменом $T(2,2)$ и жижом $F(3,1)$. Скицирати слику.

3. а) Одредити једначину конуса чија је оса права $y=z$, $x=0$ и изводница y-оса.
   б) Која крива је пресек датог конуса и равни $z=1$? Скицирати слику.

4. Одредити формуле рефлексије простора у односу на раван $\alpha: x+2y-z+3=0$. Одредити слику сфере $x^2+y^2+z^2-12x-6z+29=0$ при тој рефлексији.

Геометрија 1
септембар 1 2016.

1. Уписани круг троугла ABC додирује странице AB, BC, CA редом у тачкама P, Q, R. Доказати да се праве CP, AQ и BR секу у једној тачки.

2. Свести једначину криве $x^2+y^2-xy-3x-1=0$ на канонски облик изометријском трансформацијом. Одредити формуле трансформације, центар и осе полазне криве. Скицирати криву, центар и осе у полазном координатном систему .

3. Одредити једначину конуса са врхом $V(1,0,4)$, који додирује сферу $(x-4)^2+y^2+(z-3)^2=4$. Ако је извор светлости тачка V,одредити која је крива контура сенке сфере на раван O_{xy}. Скицирати конус и контуру сенке.

4. На сфери $x^2+y^2+z^2=1$ дате су тачке $A(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0)$, $B(0,1,0)$, $C(0,0,-1)$. Одредити слику сфере и троугла ABC при хомотетији са центром у координатном почетку и коефицијентом 6. Одредити (сферне) углове, дужине страница и површину слике троугла ABC .

Геометрија 1
јун 2 2016.

1. (8п) У Декартовом правоуглом координатном систему дата је тачка $M(a,b,c)$, где су a,b,c позитивни реални бројеви. Означимо са A, B, C нормалне пројекције тачке M редом на координатне равни O_{xy}, O_{yz}, O_{xz}. Одредити трансформацију координата између полазног координатног система и координатног система M_f, где је база $f=(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MC})$. Да ли ова промена координата чува орјентацију? Одредити координате тежишта троугла ABC у оба координатна система.

2. (5п) Нека су A_1,B_1,C_1 нормалне пројекције тачке M редом на координатне осе O_x,O_y,O_z. Одредити једначине равни одређених тачкама A,B,C и A_1,B_1,C_1 и доказати да су паралелне. (Тачке M, A, B, C су дате у претходном задатку.)

3. (10п) Одредити једначину хиперболе која садржи тачке $A(2,0)$ и $B(4,2)$, оса симетрије је права $x-y-2=0$, а ексцентрицитет је $\epsilon=\sqrt{2}$. Одредити једначине асимптота, скицирати хиперболу, осе и асимптоте.

4. (8п) Одредити једначину цилиндра који додирује сферу $(x+1)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=9$ по кругу, а изводнице су паралелне правој $p: x=0,7x+3y-2z=0$.

5. (9п) На сфери $x^2+y^2+z^2=4$ дате су тачке $A(\sqrt{2},0,\sqrt{2})$ и $B(\sqrt{2},0,-\sqrt{2})$. Одредити неку тачку C са сфере тако да сферни троугао ABC буде једнакостраничан. Колике су странице, углови и површина тог сферног троугла?

Геометрија 1
јун 1 2016.

1. (5п) Одредити једначину уписаног круга троугла ABC, ако је $A(6,-2)$, $B(6,4)$, $C(2,1)$.

2. (8п) Дате су мимоилазне праве $p: x+2y+4z=0, z=0$ и $q=\frac{x-5}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z+11}{1}$. Одредити заједничку нормалу и растојање између правих p и q. Одредити раван која садржи праву q и паралелна је правој p.

3. (9п) Одредити формуле неког афиног пресликавања које круг $k : (x-3)^2 + (y-5)^2 = 1$ слика у елипсу $\epsilon : \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$. Шта је слика криве $y^2 = x$ при том пресликавању (једначина и ексцентрицитет)?

4. (9п) Одредити једначину конуса који настаје ротацијом праве $p : x = 0, y = 3z$ око осе O_y. Шта је пресек конуса са равни $z = -2$? Одредити нормалну пројекцију пресечне криве на координатне равни. Скицирати.

5. (9п) Одредити дужине страница и углове сферног троугла ABC на јединичној сфери, ако је $A(0,0,1)$, $B(1,0,0)$, $C(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$.

Рокови школске 2014/2015 године

ГЕОМЕТРИЈА 1, Јануар, 19.01.2016.

1. Нека је ABC троугао, P и Q такве да је $3\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{BA}$ и $2\overrightarrow{BQ} = \overrightarrow{BC}$. Ако је R тачка праве AC таква да се AQ, CP и BR секу у једној тачки, одредити однос $\overrightarrow{AC} : \overrightarrow{AR}$.

2. Одредити једначине свих хомотетија које сферу $x^2+y^2+z^2 = 1$ трансформишу на сферу $(x-3)^2+(y-1)^2+(z-3)^2 = 3$.

3. Одредити једначину криве другог реда која садржи тачке $A(2,4), B(0,2), C(1,5)$ и $D(1,1)$, ако тетиве AB и CD имају конјуговане правце.

4. Одредити једначину цилиндра који у пресеку са равни нормалној на његове изводнице даје криву $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4z - 20 = 0$, $2x - y + z + 8 = 0$.

ГЕОМЕТРИЈА 1, Септембар, 1. 9. 2015.

1. Нека је $ABCDEFV$ права правилна шестострана пирамида са врхом V. Ако је страница основе дужине a, а висина двоструко дужа, одредити угао између вектора $\overrightarrow{AV}$ и $\overrightarrow{CD}$. Ако је тачка S центар основе, а координатни вектори базе e су $\overrightarrow{e_1} = \overrightarrow{SC}$, $\overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{SD}$, $\overrightarrow{e_3} = \overrightarrow{SV}$, одредити координате свих темена пирамиде у координатном систему S_e.

2. Одредити слику сфере $\sigma : (x+2)^2 + (y-3)^2 + (z-3)^2 = 4$ при симетрији у односу на раван $\alpha : x - 2y - 2z - 4 = 0$. Одредити једначину равни β која садржи тачку $B(0,5,5)$, центар сфере σ и центар њене слике. Колики је угао између равни α и β?

3. Доказати да је збир растојања сваке тачке елипсе од жижа пропорционалан растојању директриса те елипсе. Одредити једначину, центар и осе елипсе која има жижу $F(2,2)$, одговарајућу директрису $l : x + y = 0$ и ексцентрицитет $e = \frac{1}{2}$. Скицирати.

4. Одредити једначину кружног конуса који додирује раван $\alpha : z = 0$ и коме је оса права $o : \frac{x}{-3} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1}$. Шта је пресек равни $\beta : z = 5$ са овим конусом (име из класификације) и зашто? Скицирати конус, равни α, β и пресек.

ГЕОМЕТРИЈА 1, Јун 2, 2.7.2015.

1. (8п) Нека је $ABCD$ тетраедар и нека је тачка T тежиште троугла BCD. Ако су координатни вектори базе e: $\overrightarrow{e_1} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{e_3} = \overrightarrow{AD}$, а координатни вектори базе f: $\overrightarrow{f_1} = \overrightarrow{TA}$, $\overrightarrow{f_2} = \overrightarrow{TB}$, $\overrightarrow{f_3} = \overrightarrow{TC}$, одредити везу између координата произвољне тачке M у координатним системима Ae и Tf. Одредити координате темена тетраедра у систему Tf.

2. (8п) Одредити једначине кругова који додирују праве $p : x - 2y - 1 = 0$ и $q : 2x - y - 5 = 0$, а центри су им на правој $r : x = 4$. Одредити слике ових кругова при хомотетији којој је центар пресек правих p и q, а коефицијент -3.

3. (8п) Одредити формуле централне симетрије у односу на тачку $(-1,0,6)$ и слику праве $p : \frac{x+1}{-3} = \frac{y-1}{4} = \frac{z+3}{16}$ при тој симетрији.

4. (8п) Одредити једначину криве другог реда која има жиже $F_1(3,3)$ и $F_2(-1,-1)$ и садржи тачку $A(0,0)$. Скицирати криву и одредити јој центар и осе симетрије.

5. (8п) Површ П настаје ротацијом праве $p : \frac{x-2}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-3}{2}$ око праве $o : \frac{x-3}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-3}{0}$. Одредити једначину површи П, скицирати и написти која је то површ. Која површ се добија ротацијом праве $q : \frac{x-2}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z-3}{0}$ око праве o (скица, име и једначина)?

ГЕОМЕТРИЈА 1, Јун 1, 23.06.2015.

1.[9п] Дат је паралелограм $ABCD$ чија је површина једнака P. Уколико су M и N тачке такве да важи $\frac{\overrightarrow{AM}}{\overrightarrow{MC}} = \frac{1}{3}$ и $\frac{\overrightarrow{DN}}{\overrightarrow{NC}} = -\frac{2}{1}$, израчунати (у функцији од P) површину троугла AMN.

2.[7п] Одредити ортогоналну пројекцију праве $l : \frac{x+1}{2} = \frac{y-4}{-1} = \frac{z-4}{0}$ на раван $\alpha : -2x + 3y + z - 4 = 0$.

3.[6п] Одредити растојање између паралелних равни $\alpha : -2x + y + 5z + 27 = 0$ и $\beta : -2x + y + 5z - 3 = 0$.

4.[9п] Одредити једначину параболе која садржи тачку $A(0, \sqrt{2})$, чија је директриса права $d : x + y - 3\sqrt{2} = 0$, а оса симетрије права $o : -x + y + \sqrt{2} = 0$.

5.[9п] Одредити једначину цилиндра који садржи круг $k : x^2 + y^2 + z^2 = 4, x + y + z = 2$, а генератриса му је паралелна правој $p : \frac{x-2015}{0} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{0}$.

Рокови школске 2013/2014 године

Геометрија 1
јануар 2015.

1. Нека је тачка E средиште странице AB паралелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Ако су координатни вектори базе e: $\overrightarrow{e_1} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{e_3} = \overrightarrow{AA_1}$, а координатни вектори базе f: $\overrightarrow{f_1} = \overrightarrow{CE}$, $\overrightarrow{f_2} = \overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{f_3} = \overrightarrow{CD_1}$, одредити везу између координата призвољне тачке M у координатним системима A_e и C_f. Одредити координате свих темена паралелепипеда у систему C_f.

2. Одредити једначине равни које садрже праву $p : \frac{x}{2} = \frac{y-1}{0} = \frac{z}{1}$ и додирују сферу $S : (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+3)^2 = 2$.

3. Свести једначину криве $4x^2 - 4xy + y^2 + x + 12y + 6 = 0$ на канонски облик изометријском трансформацијом и написати формуле трансформације. Која је то крива и колики је њен ексцентрицитет?

4. Шта у простору представља једначина $\Pi : x^2 + y^2 = 4$? Шта је пресек Π са равни $\alpha : x + y + z = 1$? Скицирати координатне осе, Π, раван α и пресек! Одредити једначину сфере уписане у Π, чији центар припада равни α.

ГЕОМЕТРИЈА 1, Септембар 2, 14.09.2014.

1.[10п] Нека је S центар круга уписаног у троугао ABC.

а) Изразити вектор $\overrightarrow{AS}$ у функцији од вектора $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ и дужина страница троугла.

б) Доказати да је $a\overrightarrow{AS} + b\overrightarrow{BS} + c\overrightarrow{CS} = \overrightarrow{0}$, где су a, b и c дужине одговарајућих страница троугла ABC.

2.[10п] Одредити ортогоналну пројекцију праве $l : \frac{x-4}{0} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-4}{-1}$ на раван $\alpha : x - 2y + 3z - 4 = 0$.

3.[10п] Нека се тангенте параболе у њеним тачкама A и B секу у тачки P. Доказати да тачка P лежи на симетрали угла AFB, где је F жижа дате параболе.

4.[10п] Одредити једначину неког кружног конуса који садржи све три координатне осе.

Геометрија 1
јун 2, 2014.

1. Нека је $ABCDA_1B_1C_1D_1$ коцка ивице a. Одредити угао и растојање између мимоилазних правих AC и BD_1.

2. Нека је пресликавање g симетрија у односу на x осу, а h хомотетија са центром $C(0, -1, 2)$ и коефицијентом 3. Наћи формуле трансформације простора $f = g \circ h$, а затим одредити слику површи $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 2z + 2 = 0$ при трансформацији f.

3. Свести једначину криве $xy + x + y = 0$ на канонски облик изометријском трансформацијом и написати једначине те трансформације. Скицирати полазну криву и одредити јој центар и осе.

4. Одредити једначину коноидне површи чија су оса и директриса праве $o : x = z, y = 0$ и $d : x = \frac{y+2}{-2} = z - 2$, а директорна раван $\alpha : x + z = 0$. Која је то површ (име из класификације)?

ГЕОМЕТРИЈА 1, Јун 1, 17.06.2014.

1. [8п] Дат је паралелограм $ABCD$. Нека су тачке E,F и G такве да важи $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{FD}$, $\overrightarrow{DE} = 3\overrightarrow{EC}$ и $\overrightarrow{BG} = 2\overrightarrow{BD}$. Ако са X означимо пресек GE и CB, а са Y пресек GF и AB, доказати да су праве AC, EF и XY конкурентне.

2. [8п] Одредити једначине свих равни које су нормалне на праву $p : x + 2y = 3, -2x + z = 1$, а удаљене су од координатног почетка за $\sqrt{21}$.

3. [8п] Дате су елипса $3x^2 - 2xy + y^2 + 6x - 10 = 0$ и хипербола $3x^2 - 2xy - y^2 + 6y - 10 = 0$. Одредити једначине правих d_1, d_2, d_3 и d_4 тако да важи: d_1 и d_2 су међусобно конјуговани дијаметри дате елипсе, d_3 и d_4 су међусобно конјуговани дијаметри дате хиперболе, d_1 је паралелно са d_3, а d_2 паралелно са d_4.

4. [8п] Одредити једначине свих парабола са директрисом $x - y + 1 = 0$ које садрже тачке $P(0, -9)$ и $Q(0, -1)$.

5. [8п] Одредити једначину кружног конуса чија је оса права $o : \frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z+1}{-1}$, чији врх припада равни $x = 0$ и који садржи тачку $M(1, 1, -\frac{1}{2})$.

Рокови школске 2012/2013 године

ГЕОМЕТРИЈА 1, Јануар, 21.01.2014.

1.[10п] Нека је ABC троугао, P и Q такве да је $3\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB}$ и $2\overrightarrow{BQ} = \overrightarrow{BC}$. Ако је R тачка праве AC таква да се AQ, CP и BR секу у једној тачки, одредити однос $\overrightarrow{AC} : \overrightarrow{AR}$.

2.[10п] Дата је раван $\alpha : x + y = 0$ и праве $p : \frac{x}{3} = \frac{y+1}{1} = \frac{3-z}{2}$ и $q : y = z + 2, x = 1$. Одредити праву паралелну датој равни, која сече дате праве у тачкама између којих је растојање једнако три.

3.[10п] Одредити једначину криве другог реда која садржи координатни почетак и тачке $P(5, 0)$ и $Q(0, 1)$ и чији је центар тачка $S(3, -1)$.

4.[10п] Дате су праве $p : \frac{x-2}{1} = \frac{1-y}{1} = \frac{z}{-1}$ и $q : x - 2y + z = 0, x - 3y + z + 2 = 0$. Написати једначину кружног цилиндра са осом p који додирује праву q.

Писмени испит из Геометрије 1

септембар 2 15.09.2013.

1. Нека су P, Q и R додирне тачке круга уписаног у троугао ABC редом на страницама BC, CA и AB. Доказати да се праве AP, BQ и CR секу у једној тачки. (8 поена)

2. Кроз тачку $L(-3, 1, 2)$ поставити праву која је паралелна равни $\alpha : 4x - y + 2z - 5 = 0$ и која сече праву $p : \frac{x+3}{0} = \frac{2-y}{-2} = \frac{1+z}{-1}$, а затим одредити једначину њој симетричне праве у односу на раван α. (8 поена)

3. Наћи једначину конусног пресека који садржи тачку (1,1), ако су му два пара конјугованих дијаметара $2x - 3y = 0$, $x + 2y = 0$ и $x - y = 0$, $3x - 5y = 0$. (12 поена)

4. Одредити једначину кружног цилиндра ако су познате три изводнице $p : x = y = z$, $q : x = y - 1 = z$, $r : x - 1 = y = z$. (12 поена)

ГЕОМЕТРИЈА 1, Јун 2, 23.06.2013.

1.[8п] Нека је тачка P средиште тежишне дужи CC_1 троугла ABC. Ако је тачка Q пресек правих AP и BC, одре односе $BQ : QC$ и $AP : PQ$.

2.[6п] Одредити вредност параметра λ за коју се праве $p : \dfrac{x-\lambda}{2} = \dfrac{\lambda-y}{-1} = \dfrac{z-1}{2}$ и $q : y = 2, x - z - 1 = 0$ нала истој равни.

3.[8п] Наћи једначину праве l која садржи тачку $T(3, -3, 1)$ и паралелна је равнима $\alpha : x - 2y + z + 2 = 0$, $\beta : 3x - y - 2z + 2013 = 0$. Одредити потом праву l' симетричну правој l у односу на раван α.

4.[9п] Нека су тачке $A(-4, -1)$, $B(5, 0)$ и $C(-3, 0)$ темена троугла ABC. Одредити једначину криве другог реда опи око троугла ABC, ако је познато да је центар тражене криве тачка $O(1, -1)$.

5.[9п] Одредити једначину бар једног правог кружног конуса описаног око сфера $\sigma_1 : x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y + 6z + 10$ и $\sigma_2 : x^2 + y^2 + z^2 - 10x - 8y - 6z + 49 = 0$.

ГЕОМЕТРИЈА 1, Јун 1, 04.06.2013.

1. [9п] Нека је $ABCDV$ права пирамида чија је основа $ABCD$ ромб ивице 2 са углом $\measuredangle BAD = \frac{\pi}{3}$. Колика је висина пирамиде уколико знамо да је $\measuredangle AVB = \arccos\left(\sqrt{\frac{3}{8}}\right)$?

2. [4п] Одредити једначину равни која сече праву $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{0}$, нормална је на праву $\frac{x-7}{2} = \frac{y-6}{3} = \frac{z-5}{1}$ и садржи тачку $(2,1,4)$.

3. [9п] Одредити једначине свих равни које садрже праву $\frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{5} = \frac{z+2}{4}$ и подједнако су удаљене од тачака $(1,2,5)$ и $(3,0,-1)$.

4. [9п] Одредити једначине свих парабола које имају директрису $x+y+1=0$ и садрже тачке $(0,9)$ и $(0,1)$.

5. [9п] Одредити једначину правог кружног цилиндра описаног око сфере $x^2+y^2+z^2+2x+4y+6z-11=0$ ако тачка $(1,0,-2)$ припада његовој оси.

Рокови школске 2011/2012 године

Писмени испит из Геометрије 1

јануарски рок

21.01.2013.

1. Нека је дат квадрат $ABCD$ и тачке E и F тако да је октаедар $ABCDEF$ правилан и два афина координатна система. Координатни систем $Axyz$ са почетком у тачки A има базне векторе $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AF})$ и координатни систем $Tx'y'z'$ са почетком у тачки T која је тежиште троугла ABF и базним векторима $(\overrightarrow{TA},\overrightarrow{TE},\overrightarrow{TC})$. Одредити координате темена октаедра у датим системима.

2. Нека су дате равни $3x-4y-5z+11=0$ и $x-z+5=0$. Одредити једначине равни које су ортогоналне на пресек ових двеју равни и додирују сферу $x^2+y^2+z^2+4x-2y-6z+5=0$.

3. Одредити једначину конуса чији је врх тачка $S(0,0,1)$, а директриса елипса у равни Oxy дата на следећи начин: велика полуоса дужине 2 паралелна је са осом Ox, нумерички ексцентрицитет елипсе је $\frac{1}{2}$, елипса се налази у другом квадранту и додирује координатне осе.

4. Одредити растојање тачака A и B на Земљи (полупречника R) чије су координате $A: 60°$ северне ширине, $45°$ источне дужине и $B: 30°$ јужне ширине, $75°$ западне дужине.

ГЕОМЕТРИЈА 1, Октобарски рок 07.10.2012.

1. [10п] Са разних страна квадрата $ABCD$ странице 2, конструисане су две праве пирамиде $ABCDE$ и $ABCDF$ тако да једна има дупло већу запремину од друге. Ако праве AE и BF заклапају угао од $\arccos\frac{2}{\sqrt{10}}$, одредити висине тих пирамида.

2. [10п] Одредити једначину криве другог реда која садржи тачке $A(-2,-1)$ и $B(0,-2)$ и којој су праве $x+y+1=0$ и $x-y+1=0$ осе симетрије.

3. [10п] Одредити све равни које садрже тачку $(1,2,3)$ и додирују сфере $x^2+y^2+z^2=\frac{1}{2}$ и $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=\frac{1}{2}$.

4. [10п] Одредити једначину цилиндра који садржи круг полупречника $\sqrt{2}$ у равни $x+y+z=3$ са центром у $(1,1,1)$, ако он садржи и пресек равни $x+y-z+1=0$ и $5x-4y+z+2=0$.

ГЕОМЕТРИЈА 1, Септембарски рок 15.09.2012.

1. [10п] Дата је коцка $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Афини координатни систем $Axyz$ има базне векторе $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AA_1})$ и почетак у тачки A. Афини координатни систем $Tx'y'z'$ има базне векторе $(\overrightarrow{TD_1},\overrightarrow{TC_1},\overrightarrow{TA_1})$ и почетак у тачки T која је тежиште тетраедра B_1CAD_1. Одредити координате темена коцке у датим системима.

2. [10п] Одредити једначину праве која сече праве $p: \frac{x-2}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z-6}{2}$ и $q: \frac{x-8}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-8}{1}$ и садржи тачку $A(1,2,3)$.

3. [10п] Одредити једначину параболе која има директрису $d: x+y+1=0$, ако она садржи тачке $A(0,1)$ и $B(0,9)$, а не садржи тачку $C(3,0)$.

4. [10п] Ако су сфере $\sigma_1: x^2+y^2+z^2-2y-2z+1=0$ и $\sigma_2: x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z+13=0$ уписане у прави кружни конус, одредити му једначину.

ГЕОМЕТРИЈА 1, Јулски рок 03.07.2012.

1. [7п] Дат је паралелограм $ABCD$. Ако је E средиште дужи CD, а F пресек правих AE и BD, одредити однос $\overrightarrow{AE} : \overrightarrow{AF}$.

2. [11п] Одредити једначину равни која садржи праву $p : \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y-1}{5} = \dfrac{z+2}{4}$, сече праву $x = y = 4z$, а подједнако је удаљена од тачака $A(1,2,5)$ и $B(3,0,-1)$.

3. [11п] Изометријском трансформацијом свести једначину криве другог реда $\Gamma : 2x^2 - xy + 2y^2 - 6 = 0$ на канонски облик, а затим одредити координате жижа криве Γ.

4. [11п] Ако су сфере $\sigma_1 : x^2 + y^2 + z^2 - 2y - 2z + 1 = 0$ и $\sigma_2 : x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z + 13 = 0$ уписане у прави кружни цилиндар, одредити му једначину.

ГЕОМЕТРИЈА 1, Јунски рок 12.06.2012.

1. [7п] Дата је коцка $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Одредити угао између правих D_1A и C_1A.

2. [9п] Одредити једначину равни која садржи пресечну праву равни $\alpha : 4x - 5y + 7z - 21 = 0$ и $\beta : y - z + 3 = 0$ и садржи средиште дужи коју чини одсечак праве $l : \dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y-3}{1} = \dfrac{z-3}{0}$ између равни α и β.

3. [9п] Крива другог реда Γ има директрисе дате једначинама $d_1 : x - y - 3 = 0$ и $d_2 : x - y - 7 = 0$, а једна жижа јој је тачка $F(2,1)$. Одредити центар криве Γ, а затим и једначину саме криве.

4. [9п] Одредити једначину кружног конуса са врхом $V(0,0,0)$, који садржи тачку $A(3,-4,1)$, ако му је оса паралелна правој $p : \dfrac{x-2010}{11} = \dfrac{y-2011}{2} = \dfrac{z-2012}{1}$.

5. [6п] Одредити једначину равни која додирује површ $\sigma : x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 6y + 4z + 13 = 0$ у тачки $S(0,3,-2)$.