

Борђе Коцић

АНАЛИТИЧКА ГЕОМЕТРИЈА (ГЕОМЕТРИЈА 1)

— решени рокови —

Универзитет у Београду
Математички факултет

Аналитичка геометрија (Геометрија 1)

Јануар 1 - 16. 8. 2025.

Време рада: 135 минута. Срећно!



1. Нека је ABC троугао, а P, Q, R тачке на страницама BC, AC, AB , редом, такве да се дужи AP, BQ, CR секу у једној тачки и да је $\overrightarrow{AR} : \overrightarrow{AB} = 2 : 7$ и $\overrightarrow{AQ} : \overrightarrow{QC} = 8 : 5$.
 - а) [5п] Ако је дужина странице BC једнака 15, одредити дужине дужи BP и PC .
 - б) [10п] Одредити координате тачке P у афином реперу Axy са почетком у тачки A и координатним векторима $\vec{e}_1 = \overrightarrow{AB}$ и $\vec{e}_2 = \overrightarrow{AC}$, као и у афином реперу $Bx'y'$ са почетком у тачки B и координатним векторима $\vec{f}_1 = \overrightarrow{BQ}$ и $\vec{f}_2 = \overrightarrow{BA}$. Одредити везу координата (x, y) и (x', y') .
2. а) [6п] Одредити једначину равни α у простору која је паралелна y -оси и садржи тачке $A(2, 0, -3)$ и $B(4, 2, 7)$.
б) [10п] Одредити формуле равanske рефлексije простора у односу на раван α . Испитати да ли ово пресликавање чува оријентацију простора.
3. [12п] Одредити једначине свих парабола које имају директрису $x + y - 2 = 0$ и садрже тачке $A(0, 4)$ и $B(0, 12)$.
4. [16п] Свести једначину површи $x^2 - yz - y + 1 = 0$ на канонски облик изометријском трансформацијом и написати формуле трансформације. Која површ је у питању?
5. а) [4п] Одредити полупречник круга k на сфери $\sigma: x^2 + y^2 + z^2 = 1$ који садржи тачке $A\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$, $B\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$ и $C(0, 0, 1)$.
б) [7п] Израчунати најкраће растојање d између тачака A и B мерено по кругу k и доказати да је оно веће од најкраћег растојања по великом кругу сфере σ између тачака A и B .

Аналитичка геометрија (Геометрија 1)

Јануар 1 - 16. 8. 2025.

Време рада: 135 минута. Срећно!



1. Нека је ABC троугао, а P, Q, R тачке на страницама BC, AC, AB , редом, такве да се дужи AP, BQ, CR секу у једној тачки и да је $\overrightarrow{AR} : \overrightarrow{AB} = 2 : 7$ и $\overrightarrow{AQ} : \overrightarrow{QC} = 8 : 5$.
 - а) [5п] Ако је дужина странице BC једнака 15, одредити дужине дужи BP и PC .
 - б) [10п] Одредити координате тачке P у афином реперу Axy са почетком у тачки A и координатним векторима $\vec{e}_1 = \overrightarrow{AB}$ и $\vec{e}_2 = \overrightarrow{AC}$, као и у афином реперу $Bx'y'$ са почетком у тачки B и координатним векторима $\vec{f}_1 = \overrightarrow{BQ}$ и $\vec{f}_2 = \overrightarrow{BA}$. Одредити везу координата (x, y) и (x', y') .
2. а) [6п] Одредити једначину равни α у простору која је паралелна y -оси и садржи тачке $A(2, 0, -3)$ и $B(4, 2, 7)$.
б) [10п] Одредити формуле равanske рефлексije простора у односу на раван α . Испитати да ли ово пресликавање чува оријентацију простора.
3. [12п] Одредити једначине свих парабола које имају директрису $x + y - 2 = 0$ и садрже тачке $A(0, 4)$ и $B(0, 12)$.
4. [16п] Свести једначину површи $x^2 - yz - y + 1 = 0$ на канонски облик изометријском трансформацијом и написати формуле трансформације. Која површ је у питању?
5. а) [4п] Одредити полупречник круга k на сфери $\sigma: x^2 + y^2 + z^2 = 1$ који садржи тачке $A\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$, $B\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$ и $C(0, 0, 1)$.
б) [7п] Израчунати најкраће растојање d између тачака A и B мерено по кругу k и доказати да је оно веће од најкраћег растојања по великом кругу сфере σ између тачака A и B .

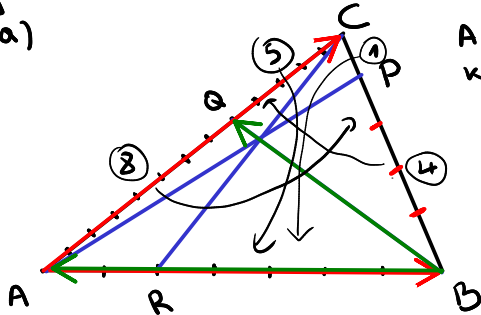


1. Нека је ABC троугао, а P, Q, R тачке на страницама BC, AC, AB , редом, такве да се дужи AP, BQ, CR секу у једној тачки и да је $\overrightarrow{AR} : \overrightarrow{AB} = 2 : 7$ и $\overrightarrow{AQ} : \overrightarrow{AC} = 8 : 5$.

а) [5п] Ако је дужина странице BC једнака 15, одредити дужине дужи BP и PC .

б) [10п] Одредити координате тачке P у афиним реперу Axy са почетком у тачки A и координатним векторима $\vec{e}_1 = \overrightarrow{AB}$ и $\vec{e}_2 = \overrightarrow{AC}$, као и у афиним реперу $Bx'y'$ са почетком у тачки B и координатним векторима $\vec{f}_1 = \overrightarrow{BQ}$ и $\vec{f}_2 = \overrightarrow{BA}$. Одредити везу координата (x, y) и (x', y') .

а)



AP, BQ, CR
конкурентне

$$\frac{\overrightarrow{BR}}{\overrightarrow{RA}} \cdot \frac{\overrightarrow{AQ}}{\overrightarrow{QC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CP}}{\overrightarrow{PB}} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{5}{2} \cdot \frac{8}{5} \cdot \frac{\overrightarrow{CP}}{\overrightarrow{PB}} = 1 \Rightarrow \overrightarrow{PB} = 4 \overrightarrow{CP}$$

$$BC = 15 \Rightarrow PC = 3, PB = 12$$

$$б) \quad \overrightarrow{AP} = \frac{1}{5} \overrightarrow{AB} + \frac{4}{5} \overrightarrow{AC} \Rightarrow [P]_{Ae} = (1/5, 4/5)$$

$$\overrightarrow{BQ} = \frac{8}{13} \overrightarrow{BC} + \frac{5}{13} \overrightarrow{BA} = \frac{8}{13} \cdot \frac{5}{4} \overrightarrow{BP} + \frac{5}{13} \overrightarrow{BA} \quad / \cdot \frac{13}{10}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{BP} = \frac{13}{10} \overrightarrow{BQ} - \frac{1}{2} \overrightarrow{BA} \Rightarrow [P]_{Bf} = (13/10, -1/2)$$

$$[B]_{Ae} = [\overrightarrow{AB}]_e = [\vec{e}_1]_e = (1, 0) \quad (-1, 8/13)$$

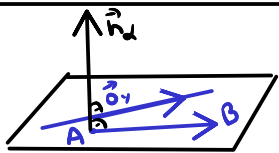
$$[\vec{f}_1]_e = [\overrightarrow{BQ}]_e = [\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AQ}]_e = [-\overrightarrow{AB} + \frac{8}{13} \overrightarrow{AC}]_e \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 8/13 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$[\vec{f}_2]_e = [\overrightarrow{BA}]_e = [-\overrightarrow{AB}]_e = (-1, 0)$$

2. а) [6п] Одредити једначину равни α у простору која је паралелна y -оси и садржи тачке $A(2, 0, -3)$ и $B(4, 2, 7)$.

б) [10п] Одредити формуле равanske рефлексије простора у односу на раван α . Испитати да ли ово пресликавање чува оријентацију простора.

а)



$$A(2, 0, -3) \in \alpha \quad \checkmark$$

$$O_y \parallel \alpha \Rightarrow \vec{n}_\alpha \perp \vec{O}_y = (0, 1, 0)$$

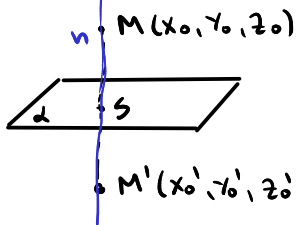
$$A, B \in \alpha \Rightarrow \vec{n}_\alpha \perp \overrightarrow{AB} = (2, 2, 10)$$

$$\Rightarrow \alpha: 5(x-2) - 1(z+3) = 0$$

$$\vec{n}_\alpha = \overrightarrow{AB} \times \vec{O}_y = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 2 & 10 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (10, 0, -2) \parallel (5, 0, -1)$$

$$\Rightarrow \alpha: 5x - z - 13 = 0$$

б)



$$1) \quad n \perp \alpha, M \in n \Rightarrow n: \begin{cases} x = 5t + x_0 \\ y = y_0 \\ z = -t + z_0 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

$$2) \quad n \cap \alpha: 25t + 5x_0 + t - z_0 - 13 = 0 \Rightarrow t = \frac{-5x_0 + z_0 + 13}{26}$$

$$\Rightarrow S \left(\frac{1}{26} x_0 + \frac{5}{26} z_0 + \frac{5}{2}, y_0, \frac{5}{26} x_0 + \frac{25}{26} z_0 - \frac{1}{2} \right)$$

$$3) \quad [M'] = 2[S] - [M] = \left(-\frac{12}{13} x_0 + \frac{5}{13} z_0 + 5, y_0, \frac{5}{13} x_0 + \frac{12}{13} z_0 - 1 \right)$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12/13 & 0 & 5/13 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5/13 & 0 & 12/13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\det S_\alpha = -1 < 0$$

$\Rightarrow$ не чува оријентацију

3. [12п] Одредити једначине свих парабола које имају директрису $x + y - 2 = 0$ и садрже тачке $A(0, 4)$ и $B(0, 12)$.

$$d: x + y - 2 = 0$$

Нека је $F(x_0, y_0)$ жижа параболе $\mathcal{P}$

$$A(0, 4) \in \mathcal{P}, B(0, 12) \in \mathcal{P}$$

$$M \in \mathcal{P} \text{ произв} \Rightarrow d(M, F) = d(M, d)$$

$$d(A, F) = d(A, d) \Rightarrow \sqrt{x_0^2 + (y_0 - 4)^2} = \frac{|0 + 4 - 2|}{\sqrt{2}} \Rightarrow x_0^2 + (y_0 - 4)^2 = 2 \quad / -1$$

$$d(B, F) = d(B, d) \Rightarrow \sqrt{x_0^2 + (y_0 - 12)^2} = \frac{|0 + 12 - 2|}{\sqrt{2}} \Rightarrow x_0^2 + (y_0 - 12)^2 = 50 \quad / +$$

$$\Rightarrow x_0^2 - 24y_0 + 144 - x_0^2 + 8y_0 - 16 = 48 \Rightarrow 16y_0 = 80 \Rightarrow y_0 = 5 \Rightarrow x_0^2 = 1$$

$$\Rightarrow [F^1(-1, 5), F^2(1, 5)], M(x, y) \in \mathcal{S} \text{ произв.} \Rightarrow \mathcal{S}: d(M, F) = d(M, d)$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{S}^1: (x+1)^2 + (y-5)^2 = \frac{(x+y-2)^2}{2}, \mathcal{S}^2: (x-1)^2 + (y-5)^2 = \frac{(x+y-2)^2}{2}}$$

4. [16п] Свести једначину површи $x^2 - yz - y + 1 = 0$ на канонски облик изометријском трансформацијом и написати формуле трансформације. Која површ је у питању?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \varphi_B(\lambda) = \dots = -(\lambda - 1)(\lambda - \frac{1}{2})(\lambda + \frac{1}{2})$$

$$\Rightarrow \varphi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \varphi_{1/2} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix}, \varphi_{-1/2} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2} y' + \frac{\sqrt{2}}{2} z' \\ z = -\frac{\sqrt{2}}{2} y' + \frac{\sqrt{2}}{2} z' \end{cases} \Rightarrow \mathcal{S}^1: x'^2 + \frac{1}{2} y'^2 - \frac{1}{2} z'^2 - \frac{\sqrt{2}}{2} y' - \frac{\sqrt{2}}{2} z' + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \mathcal{S}^1: x'^2 + \frac{1}{2} (y' - \sqrt{2} z' + \frac{1}{2}) - \frac{1}{2} (z' + \sqrt{2} z' + \frac{1}{2}) - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 1 = 0$$

$$\mathcal{S}^1: x'^2 + \frac{1}{2} (y' - \frac{\sqrt{2}}{2})^2 - \frac{1}{2} (z' + \frac{\sqrt{2}}{2})^2 + \frac{1}{2} = 0$$

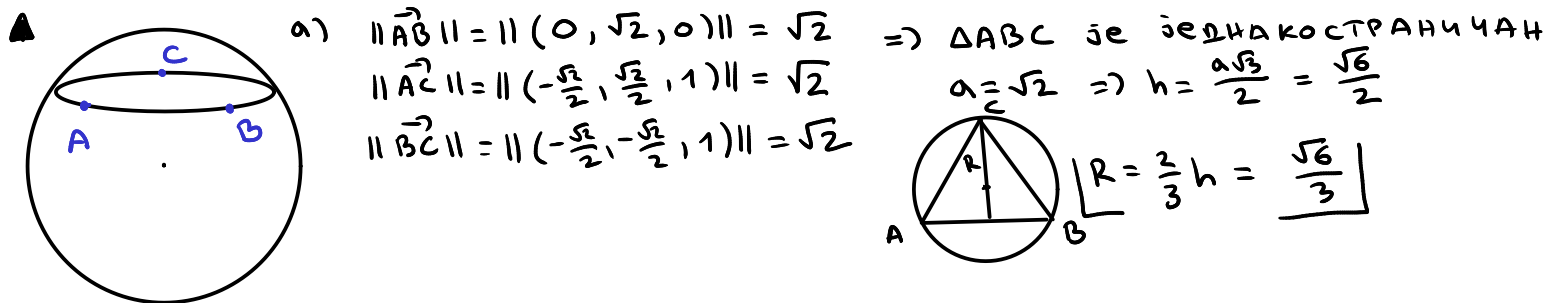
$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{S}'' : x''^2 + \frac{y''^2}{2} - \frac{z''^2}{2} = -1}$$

$$\begin{cases} x = x'' \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2} y'' + \frac{\sqrt{2}}{2} z'' \\ z = -\frac{\sqrt{2}}{2} y'' + \frac{\sqrt{2}}{2} z'' - 1 \end{cases}$$

двограни хиперболоид

5. а) [4п] Одредити полупречник круга k на сфери $\sigma: x^2 + y^2 + z^2 = 1$ који садржи тачке $A(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$, $B(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$ и $C(0, 0, 1)$.

б) [7п] Израчунати најкраће растојање d између тачака A и B мерено по кругу k и доказати да је оно веће од најкраћег растојања по великом кругу сфере σ између тачака A и B .



б)

$$\widehat{AB}^R = \frac{1}{3} 2R\pi = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{6}}{3} \pi = \frac{2\sqrt{6}}{9} \pi$$

$$\widehat{AB} = \angle AOB = \angle(\vec{OA}, \vec{OB}) = \frac{\pi}{2} \text{ јер } \vec{OA} \cdot \vec{OB} = 0$$

$$\frac{2\sqrt{6}}{9} \pi > \frac{1}{2} \pi \quad /^2 \Leftrightarrow \frac{24}{81} > \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{96}{4 \cdot 81} > \frac{81}{4 \cdot 81} \quad \checkmark$$

$$\Rightarrow \boxed{\widehat{AB} < \widehat{AB}^R}$$

Аналитичка геометрија (Геометрија 1)**ЈАНУАР 2 - 29.08.2025. године****Време рада: 135мин. Срећно!**

- Дат је паралелограм $ABCD$ и нека су E , F и G тачке такве да важи $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{FD}$, $\overrightarrow{DE} = 3\overrightarrow{EC}$ и $\overrightarrow{BG} = 2\overrightarrow{BD}$. Означимо са X пресек правих GE и BC , а са Y пресек правих GF и AB .
 - [8п] Одредити у ком односу тачке X и Y деле странице BC и AB паралелограма $ABCD$.
 - [8п] Доказати да се праве AC , EF и XY секу у једној тачки.
- Дате су праве $p: \frac{x-1}{0} = \frac{y-\lambda}{1} = \frac{z-1}{-2}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ и $q: \frac{x+4}{-1} = \frac{y+2}{0} = \frac{z+2}{3}$.
 - [4п] Одредити вредност параметра λ тако да се праве p и q секу, као и координате пресечне тачке.
 - [10п] За $\lambda = 3$ одредити једначину заједничке нормале, као и растојање мимоилазних правих p и q .
- [6п] Одредити једначину параболе $\mathcal{P}$ чије је теме $T(2,2)$ и жижа $F(3,1)$. Скицирати слику.
 - [10п] Изометријском трансформацијом координата свести параболу $\mathcal{P}$ на канонски облик.
- [12п] Одредити једначину кружног цилиндра чија је оса права $o: x = -2, y + z = 1$ и који је описан око сфере $S: x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2z - 4 = 0$.
- [12п] На планети Марс налазе се Марсовци Пум ($30^\circ S, 29^\circ E$) и Пај ($60^\circ N, 61^\circ W$). Под претпоставком да је Марс сфера полупречника $R = 3390km$, одредити приближно растојање између Марсоваца Пум и Пај.

Аналитичка геометрија (Геометрија 1)**ЈАНУАР 2 - 29.08.2025. године****Време рада: 135мин. Срећно!**

- Дат је паралелограм $ABCD$ и нека су E , F и G тачке такве да важи $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{FD}$, $\overrightarrow{DE} = 3\overrightarrow{EC}$ и $\overrightarrow{BG} = 2\overrightarrow{BD}$. Означимо са X пресек правих GE и BC , а са Y пресек правих GF и AB .
 - [8п] Одредити у ком односу тачке X и Y деле странице BC и AB паралелограма $ABCD$.
 - [8п] Доказати да се праве AC , EF и XY секу у једној тачки.
- Дате су праве $p: \frac{x-1}{0} = \frac{y-\lambda}{1} = \frac{z-1}{-2}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ и $q: \frac{x+4}{-1} = \frac{y+2}{0} = \frac{z+2}{3}$.
 - [4п] Одредити вредност параметра λ тако да се праве p и q секу, као и координате пресечне тачке.
 - [10п] За $\lambda = 3$ одредити једначину заједничке нормале, као и растојање мимоилазних правих p и q .
- [6п] Одредити једначину параболе $\mathcal{P}$ чије је теме $T(2,2)$ и жижа $F(3,1)$. Скицирати слику.
 - [10п] Изометријском трансформацијом координата свести параболу $\mathcal{P}$ на канонски облик.
- [12п] Одредити једначину кружног цилиндра чија је оса права $o: x = -2, y + z = 1$ и који је описан око сфере $S: x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2z - 4 = 0$.
- [12п] На планети Марс налазе се Марсовци Пум ($30^\circ S, 29^\circ E$) и Пај ($60^\circ N, 61^\circ W$). Под претпоставком да је Марс сфера полупречника $R = 3390km$, одредити приближно растојање између Марсоваца Пум и Пај.

Аналитичка геометрија (Геометрија 1)**ЈАНУАР 2 - 29.08.2025. године****Време рада: 135мин. Срећно!**

- Дат је паралелограм $ABCD$ и нека су E , F и G тачке такве да важи $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{FD}$, $\overrightarrow{DE} = 3\overrightarrow{EC}$ и $\overrightarrow{BG} = 2\overrightarrow{BD}$. Означимо са X пресек правих GE и BC , а са Y пресек правих GF и AB .
 - [8п] Одредити у ком односу тачке X и Y деле странице BC и AB паралелограма $ABCD$.
 - [8п] Доказати да се праве AC , EF и XY секу у једној тачки.
- Дате су праве $p: \frac{x-1}{0} = \frac{y-\lambda}{1} = \frac{z-1}{-2}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ и $q: \frac{x+4}{-1} = \frac{y+2}{0} = \frac{z+2}{3}$.
 - [4п] Одредити вредност параметра λ тако да се праве p и q секу, као и координате пресечне тачке.
 - [10п] За $\lambda = 3$ одредити једначину заједничке нормале, као и растојање мимоилазних правих p и q .
- [6п] Одредити једначину параболе $\mathcal{P}$ чије је теме $T(2,2)$ и жижа $F(3,1)$. Скицирати слику.
 - [10п] Изометријском трансформацијом координата свести параболу $\mathcal{P}$ на канонски облик.
- [12п] Одредити једначину кружног цилиндра чија је оса права $o: x = -2, y + z = 1$ и који је описан око сфере $S: x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2z - 4 = 0$.
- [12п] На планети Марс налазе се Марсовци Пум ($30^\circ S, 29^\circ E$) и Пај ($60^\circ N, 61^\circ W$). Под претпоставком да је Марс сфера полупречника $R = 3390km$, одредити приближно растојање између Марсоваца Пум и Пај.



1. Дат је паралелограм $ABCD$ и нека су E, F и G тачке такве да важи $\vec{AF} = \vec{FD}$, $\vec{DE} = 3\vec{EC}$ и $\vec{BG} = 2\vec{BD}$. Означимо са X пресек прaviх GE и BC , а са Y пресек прaviх GF и AB .
- а) [8п] Одредити у ком односу тачке X и Y деле странице BC и AB паралелограма $ABCD$.
- б) [8п] Доказати да се праве AC, EF и XY секу у једној тачки.

а) Како је $GE \cap BC = \{X\} \Rightarrow G, E, X$ су колинеарне
Како је $GF \cap AB = \{Y\} \Rightarrow G, F, Y$ су колинеарне

ΔBDC Менелаж $\Rightarrow \frac{\vec{BG}}{\vec{GD}} \cdot \frac{\vec{DE}}{\vec{EC}} \cdot \frac{\vec{CX}}{\vec{XB}} = -1 \Rightarrow \frac{\vec{CX}}{\vec{XB}} = \frac{1}{6}$

ΔBDA Менелаж $\Rightarrow \frac{\vec{BG}}{\vec{GD}} \cdot \frac{\vec{DF}}{\vec{FA}} \cdot \frac{\vec{AY}}{\vec{YB}} = -1 \Rightarrow \frac{\vec{AY}}{\vec{YB}} = \frac{1}{2}$

б) Нека је $AC \cap FE = \{O\} \Rightarrow O, E, F$ кол. Докажујемо $O \in XY$:

$O \in XY \Leftrightarrow Y, X, O$ кол. Менелаж $\Delta ACB \Rightarrow \frac{\vec{AO}}{\vec{OC}} \cdot \frac{\vec{CX}}{\vec{XB}} \cdot \frac{\vec{BO}}{\vec{OA}} = -1$

Менелаж $\Delta ACD \Rightarrow \frac{\vec{AO}}{\vec{OC}} \cdot \frac{\vec{CE}}{\vec{ED}} \cdot \frac{\vec{DO}}{\vec{OA}} = -1$

Менелаж $\Delta AEF \Rightarrow \frac{\vec{AO}}{\vec{OC}} \cdot \frac{\vec{CE}}{\vec{ED}} \cdot \frac{\vec{DO}}{\vec{OA}} = -1$

Менелаж $\Delta ACB \Rightarrow \frac{\vec{AY}}{\vec{YB}} \cdot \frac{\vec{BX}}{\vec{XC}} \cdot \frac{\vec{CO}}{\vec{OA}} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \frac{-1}{3} = -1 \checkmark$

2. Дате су праве $p: \frac{x-1}{0} = \frac{y-\lambda}{1} = \frac{z-1}{-2}, \lambda \in \mathbb{R}$ и $q: \frac{x+4}{-1} = \frac{y+2}{0} = \frac{z+2}{3}$.

- а) [4п] Одредити вредност параметра λ тако да се праве p и q секу, као и координате пресечне тачке.
- б) [10п] За $\lambda = 3$ одредити једначину заједничке нормале, као и растојање мимоилазних прaviх p и q .

а) $p: \begin{cases} x=1 \\ y=t+\lambda \\ z=-2t+1 \end{cases} \quad q: \begin{cases} x=-\lambda-4 \\ y=-2 \\ z=3\lambda-2 \end{cases}$

$\Rightarrow \lambda = -11$

$p \cap q = A(1, -2, -17)$

б) $P(1, t+3, -2t+1) \in p$ произв.
 $Q(-\lambda-4, -2, 3\lambda-2) \in q$ произв.

$\Rightarrow \vec{QP} = (\lambda+5, t+5, 3-2t-3\lambda)$

1) $\vec{QP} \cdot \vec{p} = 0 \Rightarrow t+5-6+4t+6\lambda=0 \Rightarrow 5t+6\lambda=1$

2) $\vec{QP} \cdot \vec{q} = 0 \Rightarrow -\lambda-5+9-6t-9\lambda=0 \Rightarrow -6t-10\lambda=-4$

$\Rightarrow \lambda = 1 \Rightarrow t = -1$

$\Rightarrow P(1, 2, 3) \quad Q(-5, -2, 1) \Rightarrow \vec{QP} = (6, 4, 2) \parallel (3, 2, 1)$

$\Rightarrow n = PQ: \frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{1}$

$d(P, q) = \|\vec{QP}\| = \sqrt{6^2 + 4^2 + 2^2} = \sqrt{56} = 2\sqrt{14}$

3. а) [6п] Одредити једначину параболе P чије је теме $T(2, 2)$ и жижа $F(3, 1)$. Скицирати слику.
- б) [10п] Изометријском трансформацијом координата свести параболу P на канонски облик.

а) Оса параболе је права $TF \Rightarrow \vec{o} = \vec{TF} = (1, -1)$
 $\Rightarrow$ вектор нормале директрисе d је $\vec{n}_d = \vec{o} = (1, -1)$

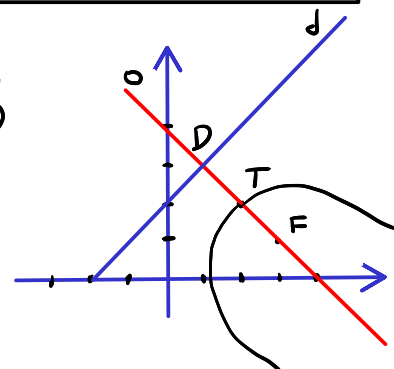
Означимо са $D = d \cap O \Rightarrow T$ средиште $FD \Rightarrow D(1, 3)$

$\Rightarrow d: x - y + 2 = 0$

$M(x, y) \in P$ произв. $\Rightarrow d(M, F) = d(M, d)$

$P: \sqrt{(x-3)^2 + (y-1)^2} = \frac{|x-y+2|}{\sqrt{2}}$

$2(x^2 - 6x + 9 + y^2 - 2y + 1) = x^2 - 2xy + y^2 + 4x - 4y + 4$



$$\Rightarrow \boxed{P: x^2 + 2xy + y^2 - 16x + 16 = 0}$$

$$b) A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -8 \\ 1 & 1 & 0 \\ -8 & 0 & 16 \end{bmatrix} \Rightarrow B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \varphi_B = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 1 = \lambda(\lambda-2)$$

$$\Rightarrow \dots \Rightarrow \varphi_0 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \varphi_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

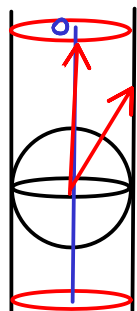
$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y') \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}(-x' + y') \end{cases}$$

$$P': \frac{1}{2}(x'^2 + 2x'y' + y'^2) + 2 \cdot \frac{1}{2}(-x'^2 + y'^2) + \frac{1}{2}(x'^2 - 2x'y' + y'^2) - \frac{16}{\sqrt{2}}(x' + y') + 16 = 0$$

$$P': 2y'^2 - 8\sqrt{2}y' - 8\sqrt{2}x' + 16 = 0 \quad |:2 \Rightarrow y'^2 - 4\sqrt{2}y' + 8 - 8 = 4\sqrt{2}x' + 8$$

$$P': (y' - 2\sqrt{2})^2 = 4\sqrt{2}(x' + 2\sqrt{2}) \Rightarrow \boxed{P'': y''^2 = 4\sqrt{2}x''}$$

4. [12п] Одредити једначину кружног цилиндра чија је оса права $o: x = -2, y + z = 1$ и који је описан око сфере $S: x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2z - 4 = 0$.



$$S: (x+2)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 9 \Rightarrow C(-2, 0, 1), R=3$$

$$O: x = -2, y = t, z = -t + 1, t \in \mathbb{R} \Rightarrow \vec{O} = (0, 1, -1)$$

$$M \in \mathcal{C} \text{ произв.} \Rightarrow d(M, O) = R,$$

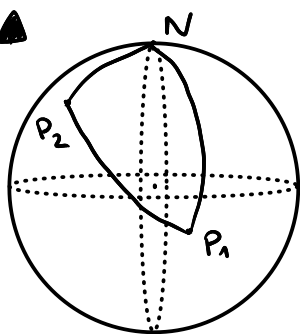
$$\Rightarrow \mathcal{C}: \frac{\|\vec{CM} \times \vec{O}\|}{\|\vec{O}\|} = 3$$

$$\vec{CM} \times \vec{O} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x+2 & y & z-1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-y-z+1, x+2, x+2)$$

$$\mathcal{C}: \frac{\sqrt{(1-y-z)^2 + (x+2)^2 + (x+2)^2}}{\sqrt{2}} = 3$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{C}: (1-y-z)^2 + 2(x+2)^2 = 18}$$

5. [12п] На планети Марс налазе се Марсовци Пум ($30^\circ S, 29^\circ E$) и Пај ($60^\circ N, 61^\circ W$). Под претпоставком да је Марс сфера полупречника $R = 3390 \text{ km}$, одредити приближно растојање између Марсоваца Пум и Пај.



Претпоставимо да је $R = 1$

Нека је P_1 станица Марсовца Пум $\Rightarrow \varphi_{P_1} = -30^\circ, \theta_{P_1} = 29^\circ$

P_2 станица Марсовца Пај $\Rightarrow \varphi_{P_2} = 60^\circ, \theta_{P_2} = -61^\circ$

N северни пол $\Rightarrow \varphi_N = 90^\circ, \theta_N = \text{недеф.}$

КОСИНУСНА ТЕОРЕМА ЗА СФЕРНИ ТРОУГАО P_1NP_2 :

$$\cos \widehat{P_1P_2} = \cos \widehat{NP_1} \cos \widehat{NP_2} + \sin \widehat{NP_1} \sin \widehat{NP_2} \cos \angle \widehat{P_1NP_2}$$

$$\widehat{NP_1} = \varphi_N - \varphi_{P_1} = 90^\circ - (-30^\circ) = 120^\circ, \widehat{NP_2} = \varphi_N - \varphi_{P_2} = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$$

$$\angle \widehat{P_1NP_2} = |\theta_{P_1} - \theta_{P_2}| = |29^\circ - (-61^\circ)| = 90^\circ$$

$$\cos \widehat{P_1P_2} = \cos 120^\circ \cdot \cos 30^\circ + \sin 120^\circ \cdot \sin 30^\circ \cdot \cos 90^\circ$$

$$\cos \widehat{P_1P_2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\Rightarrow \widehat{P_1P_2} = \arccos \left(-\frac{\sqrt{3}}{4} \right)$$

Како је на Марсу $R = 3390 \text{ km}$, применом хомотетије добијамо

$$\widehat{P_1P_2} = R \arccos \left(-\frac{\sqrt{3}}{4} \right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\text{Пум Пај} = 3390 \arccos \left(-\frac{\sqrt{3}}{4} \right) \text{ km}}$$

Аналитичка геометрија (Геометрија 1)

ЈУН 1 - 18.09.2025. године

Време рада: 135мин. Срећно!



1. Нека је дат трапез $ABCD$ и нека тачка O представља пресек његових дијагонала и нека их дели у односу $2:1$ тако да важи $\overrightarrow{AO} = 2\overrightarrow{OC}$. Нека је S средиште основице AB .
 - а) [4п] Ако је M тачка на краку AD тако да су праве DS, AO и BM конкурентне и N тачка на краку BC тако да су праве CS, BO и AN конкурентне. У ком односу тачке M и N деле краке на којима се налазе?
 - б) [12п] Доказати да су тачке M, O и N колинеарне, као и да су праве AN, BM и OS конкурентне.
2. [12п] Дата је тачка $S(-2, 2)$. Одредити формуле ротације $\mathcal{R}_{S, \frac{\pi}{3}}$ и хомотетије $\mathcal{H}_{S, 2}$. Показати да ова два пресликавања комутирају. Шта је слика круга $k: (x-4)^2 + (y+2)^2 = 4$ при композицији $\mathcal{R}_{S, \frac{\pi}{3}} \circ \mathcal{H}_{S, 2}$?
3. Дате су тачке $A(-1, 1)$ и $B(0, -2)$, као и праве $p: x + y - 3 = 0$ и $q: x - y - 1 = 0$.
 - а) [4п] Одредити тачку A' која је симетрична тачки A у односу на праву p .
 - б) [9п] Одредити једначину криве другог реда која садржи тачке A и B и којој су праве p и q осе симетрије. Која крива је у питању?
4. [16п] Површ $\mathcal{P}: 3x^2 + 3y^2 + 10xy - 16x - 12z - 12 = 0$ изометријском трансформацијом свести на канонски облик и написати формулу те трансформације. Која површ је у питању?
5. На јединичној сфери дате су тачке $A(0, 0, 1)$ и $B(0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$.
 - а) [5п] Одредити тачку C тако да сферни троугао ABC буде једнакокрак, где је $\widehat{AB} = \widehat{AC}$ и $\angle BAC = \frac{2\pi}{3}$.
 - б) [8п] Одредити све стране и углове сферног троугла ABC , као и његову површину.

Аналитичка геометрија (Геометрија 1)

ЈУН 1 - 18.09.2025. године

Време рада: 135мин. Срећно!

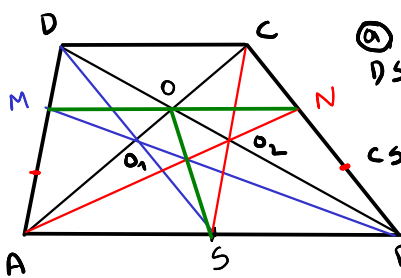


1. Нека је дат трапез $ABCD$ и нека тачка O представља пресек његових дијагонала и нека их дели у односу $2:1$ тако да важи $\overrightarrow{AO} = 2\overrightarrow{OC}$. Нека је S средиште основице AB .
 - а) [4п] Ако је M тачка на краку AD тако да су праве DS, AO и BM конкурентне и N тачка на краку BC тако да су праве CS, BO и AN конкурентне. У ком односу тачке M и N деле краке на којима се налазе?
 - б) [12п] Доказати да су тачке M, O и N колинеарне, као и да су праве AN, BM и OS конкурентне.
2. [12п] Дата је тачка $S(-2, 2)$. Одредити формуле ротације $\mathcal{R}_{S, \frac{\pi}{3}}$ и хомотетије $\mathcal{H}_{S, 2}$. Показати да ова два пресликавања комутирају. Шта је слика круга $k: (x-4)^2 + (y+2)^2 = 4$ при композицији $\mathcal{R}_{S, \frac{\pi}{3}} \circ \mathcal{H}_{S, 2}$?
3. Дате су тачке $A(-1, 1)$ и $B(0, -2)$, као и праве $p: x + y - 3 = 0$ и $q: x - y - 1 = 0$.
 - а) [4п] Одредити тачку A' која је симетрична тачки A у односу на праву p .
 - б) [9п] Одредити једначину криве другог реда која садржи тачке A и B и којој су праве p и q осе симетрије. Која крива је у питању?
4. [16п] Површ $\mathcal{P}: 3x^2 + 3y^2 + 10xy - 16x - 12z - 12 = 0$ изометријском трансформацијом свести на канонски облик и написати формулу те трансформације. Која површ је у питању?
5. На јединичној сфери дате су тачке $A(0, 0, 1)$ и $B(0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$.
 - а) [5п] Одредити тачку C тако да сферни троугао ABC буде једнакокрак, где је $\widehat{AB} = \widehat{AC}$ и $\angle BAC = \frac{2\pi}{3}$.
 - б) [8п] Одредити све стране и углове сферног троугла ABC , као и његову површину.



1. Нека је дат траpez $ABCD$ и нека тачка O представља пресек његових дијагонала и нека их дели у односу $2:1$ тако да важи $\vec{AO} = 2\vec{OC}$. Нека је S средиште основице AB .

- а) [4п] Ако је M тачка на краку AD тако да су праве DS, AO и BM конкурентне и N тачка на краку BC тако да су праве CS, BO и AN конкурентне, у ком односу тачке M и N деле краке на којима се налазе?
- б) [12п] Доказати да су тачке M, O и N колинеарне, као и да су праве AN, BM и OS конкурентне.



а) $\triangle ABD$
 DS, AO, BM конк.

Чеба $\Rightarrow$

$$\frac{\vec{AS}}{\vec{SB}} \cdot \frac{\vec{BO}}{\vec{OD}} \cdot \frac{\vec{DM}}{\vec{MA}} = 1 \Rightarrow \frac{\vec{DM}}{\vec{MA}} = \frac{1}{2} \quad (*)$$

$\triangle ABC$
 CS, BO, AN конк.

Чеба $\Rightarrow$

$$\frac{\vec{BS}}{\vec{SA}} \cdot \frac{\vec{AO}}{\vec{OC}} \cdot \frac{\vec{CN}}{\vec{NB}} = 1 \Rightarrow \frac{\vec{CN}}{\vec{NB}} = \frac{1}{2} \quad \#$$

б) Означимо $O_1 = DS \cap AO$ и $O_2 = CS \cap BO$.

$\triangle AO_2D$
 $M \in AD, O \in DO_2, N \in O_2A$ колинеарне

Менелaj $\Rightarrow$

$$\frac{\vec{AM}}{\vec{MD}} \cdot \frac{\vec{DO}}{\vec{OO_2}} \cdot \frac{\vec{O_2N}}{\vec{NA}} = -1 \quad ? \quad (\text{проверavamo})$$

$\triangle ABN$
 S, C, O_2 колн

Менелaj $\Rightarrow$

$$\frac{\vec{AS}}{\vec{SB}} \cdot \frac{\vec{BC}}{\vec{CN}} \cdot \frac{\vec{NO_2}}{\vec{O_2A}} = -1 \Rightarrow \frac{\vec{NO_2}}{\vec{O_2A}} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{\vec{O_2N}}{\vec{NA}} = -\frac{1}{4}$$

$\triangle BO_2S$
 AO, BN, O_2S конк.

Чеба $\Rightarrow$

$$\frac{\vec{AS}}{\vec{SB}} \cdot \frac{\vec{BO}}{\vec{OO_2}} \cdot \frac{\vec{O_2N}}{\vec{NA}} = 1 \Rightarrow \frac{\vec{BO}}{\vec{OO_2}} = -4 \Rightarrow \frac{\vec{DO}}{\vec{OO_2}} = \frac{-\frac{1}{2}\vec{BO}}{\vec{OO_2}} = 2$$

Дакле, $\frac{\vec{AM}}{\vec{MD}} \cdot \frac{\vec{DO}}{\vec{OO_2}} \cdot \frac{\vec{O_2N}}{\vec{NA}} = 2 \cdot 2 \cdot (-\frac{1}{4}) = -1 \Rightarrow M, O, N$ колинеарне

$\triangle BSO$
 AO_2, BO_1, OS конк.

Чеба $\Rightarrow$

$$\frac{\vec{BO_2}}{\vec{O_2O}} \cdot \frac{\vec{OO_1}}{\vec{O_1A}} \cdot \frac{\vec{AS}}{\vec{SB}} = 1 \quad ? \quad \Leftrightarrow 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 = 1 \quad \checkmark$$

$\triangle ASM$
 S, D, O_1 колн

Менелaj $\Rightarrow$

$$\frac{\vec{AS}}{\vec{SB}} \cdot \frac{\vec{BO_1}}{\vec{O_1M}} \cdot \frac{\vec{MD}}{\vec{DA}} = -1 \Rightarrow \frac{\vec{BO_1}}{\vec{O_1M}} = 3$$

$\Rightarrow AN, BM, SO$ конкурентне

$\triangle BO_1S$
 BO, AM, O_1S конк.

Чеба $\Rightarrow$

$$\frac{\vec{AS}}{\vec{SB}} \cdot \frac{\vec{BM}}{\vec{MO_1}} \cdot \frac{\vec{O_1O}}{\vec{OA}} = 1 \Rightarrow \frac{\vec{O_1O}}{\vec{OA}} = -4 \Rightarrow \frac{\vec{OO_1}}{\vec{O_1A}} = \frac{1}{3}$$

II начин $\vec{ON} = \vec{OB} + \vec{BN} = \frac{2}{3}(\vec{OB} + \vec{BC}) = \frac{2}{3}\vec{OC}$, $\vec{OM} = \vec{OA} + \vec{AM} = \frac{2}{3}\vec{OD} \Rightarrow ON \parallel OC \parallel OM \Rightarrow M, N, O$ колн.

2. [12п] Дата је тачка $S(-2, 2)$. Одредити формуле ротације $R_{S, \frac{\pi}{3}}$ и хомотетије $H_{S, 2}$. Показати да ова два пресликавања комутирају. Шта је слика круга $k: (x-4)^2 + (y+2)^2 = 4$ при композицији $R_{S, \frac{\pi}{3}} \circ H_{S, 2}$?

$$1) [R_{S, \frac{\pi}{3}}] = \begin{bmatrix} \cos \frac{\pi}{3} & -\sin \frac{\pi}{3} \\ \sin \frac{\pi}{3} & \cos \frac{\pi}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$S \mapsto S \Rightarrow \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} a = -1 + \sqrt{3} \\ b = 1 + \sqrt{3} \end{matrix}$$

$$\Rightarrow R_{S, \frac{\pi}{3}}: \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sqrt{3}-1 \\ \sqrt{3}+1 \end{bmatrix}$$

$$1 + \sqrt{3} + \sqrt{3} - 1$$

$$2) H_{S, 2}(M) = M' \Leftrightarrow \vec{SM'} = 2\vec{SM} \Rightarrow \begin{bmatrix} x'+2 \\ y'+2 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} x+2 \\ y+2 \end{bmatrix}$$

$$H_{S, 2}: \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$3) [R_{S, \frac{\pi}{3}} \circ H_{S, 2}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \sqrt{3}-1 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & \sqrt{3}+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} & 2\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 & 2\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[H_{S, 2} \circ R_{S, \frac{\pi}{3}}] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \sqrt{3}-1 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & \sqrt{3}+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} & 2\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 & 2\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow F: \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

F слика центар K у центар K'
 $R_{5, \pi/3}$ изометрија $\Rightarrow$ тачка K
 $H_{5,2}$ симетрија $K \Rightarrow K' = 2K = 4$

$$K: (x-4)^2 + (y+2)^2 = 4 \Rightarrow C(4, -2), r = 2$$

$$C': \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} \end{bmatrix} \Rightarrow C'(4+4\sqrt{3}, 6\sqrt{3}-2)$$

$$\Rightarrow K': (x-4-4\sqrt{3})^2 + (y-6\sqrt{3}+2)^2 = 16$$

3. Дате су тачке $A(-1, 1)$ и $B(0, -2)$, као и праве $p: x+y-3=0$ и $q: x-y-1=0$.

а) [4п] Одредити тачку A' која је симетрична тачки A у односу на праву p .

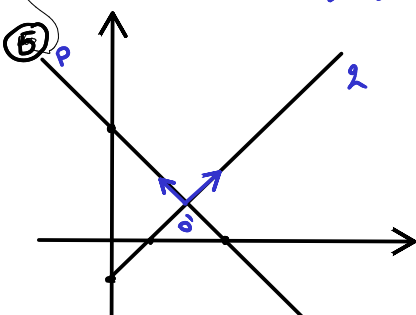
б) [9п] Одредити једначину криве другог реда која садржи тачке A и B и којој су праве p и q осе симетрије.
 Која крива је у питању?

$$p: x+y-3=0 \Rightarrow \vec{n}_p = (1, 1) = \vec{n}$$

$$p \perp n \Rightarrow A \in n, n \perp p \Rightarrow n: \frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{1} \Rightarrow n: y = x+2$$

$$2) S = n \cap p: \begin{cases} x+y=3 \\ x-y=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1/2 \\ y=5/2 \end{cases} \Rightarrow S(1/2, 5/2)$$

$$3) [A'] = 2[S] - [A] \Rightarrow [A'](2, 4)$$



Бирамо нови координатни систем $O'x'y'$ т.д. $O'x' = 2, O'y' = p$

$$2: x-y-1=0 \Rightarrow \vec{q} = (1, 1) \Rightarrow \vec{f}_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$$

$$p: x+y-3=0 \Rightarrow \vec{p} = (-1, 1) \Rightarrow \vec{f}_2 = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$$

$$O' = p \cap q \Rightarrow O'(2, 1)$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$x = Cx' + B \Rightarrow x' = C^{-1}x - C^{-1}B, C^{-1} = C^T \text{ (о.н.б.)}$$

$$A(-1, 1) \mapsto A_1(-3/\sqrt{2}, 3/\sqrt{2})$$

$$B(0, -2) \mapsto B_1(-5/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$$

$$A_1 \in \mathcal{K}' \Rightarrow \frac{9}{2a^2} + \frac{1}{2b^2} = 1 \quad \frac{24}{2a^2} = \frac{8}{9} \Rightarrow \frac{12^2}{a^2} = \frac{8^2}{9} \Rightarrow a^2 = \frac{27}{2} \Rightarrow \text{елипса}$$

$$B_1 \in \mathcal{K}' \Rightarrow \frac{25}{2a^2} + \frac{1}{2b^2} = 1 \Rightarrow \frac{25}{27} + \frac{1}{2b^2} = 1 \Rightarrow \frac{1}{2b^2} = \frac{2}{27} \Rightarrow b^2 = \frac{27}{4}$$

$$\mathcal{K}': \frac{2x'^2}{27} + \frac{4y'^2}{27} = 1 \Rightarrow \mathcal{E}: \frac{2(\frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y - \frac{3}{\sqrt{2}})^2}{27} + \frac{4(-\frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y + \frac{1}{\sqrt{2}})^2}{27} = 1$$

$$\Rightarrow \mathcal{E}: (x+y-3)^2 + 2(x-y-1)^2 = 27$$

4. [16п] Површ $P: 3x^2 + 3y^2 + 10xy - 16x - 12z - 12 = 0$ изометријском трансформацијом свести на канонски облик и написати формулу те трансформације. Која површ је у питању?

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 0 & -8 \\ 5 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \\ -8 & 0 & -6 & -12 \end{bmatrix} \Rightarrow B = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\varphi_B(\lambda) = \dots = -\lambda(\lambda+2)(\lambda-8)$$

$$U_8 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, U_{-2} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, U_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y') \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' - y') \\ z = z' \end{cases}$$

$$P': 8x'^2 - 2y'^2 - 8\sqrt{2}x' - 8\sqrt{2}y' - 12z' - 12 = 0 \quad /:2$$

$$P': 4(x'^2 - \sqrt{2}x' + \frac{1}{2}) - 2 - (y'^2 + 4\sqrt{2}y' + 8) + 8 - 6z' - 6 = 0$$

$$P': 4(x' - \frac{1}{\sqrt{2}})^2 - (y' + 2\sqrt{2})^2 - 6z' = 0$$

$$P'': 4x''^2 - y''^2 = 6z''$$

хиперболички
параболоид

$$\text{формуле: } \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}(x'' + \frac{1}{\sqrt{2}} + y'' - \frac{4}{\sqrt{2}}) = \frac{1}{\sqrt{2}}x'' + \frac{1}{\sqrt{2}}y'' - \frac{3}{2} \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}(x'' + \frac{1}{\sqrt{2}} - y'' + \frac{4}{\sqrt{2}}) = \frac{1}{\sqrt{2}}x'' - \frac{1}{\sqrt{2}}y'' + \frac{5}{2} \end{cases}$$

5. На јединичној сфери дате су тачке $A(0,0,1)$ и $B(0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$.

а) [5п] Одредити тачку C тако да сферни троугао ABC буде једнакокрак, где је $\widehat{AB} = \widehat{AC}$ и $\angle BAC = \frac{2\pi}{3}$.

б) [8п] Одредити све странице и углове сферног троугла ABC , као и његову површину.

$$\begin{aligned} x &= \cos \theta \cos \varphi \\ y &= \sin \theta \cos \varphi \\ z &= \sin \varphi \end{aligned}$$

$$|A: \varphi_A = \pi/2 \quad \theta_A \text{ не дефинисано}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin \varphi_B \Rightarrow \varphi_B = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \cos \theta_B = 0 \Rightarrow \theta_B = \pi/2$$

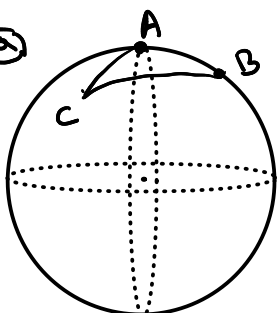
$$\Rightarrow |B: \varphi_B = \frac{\pi}{3}, \quad \theta_B = \frac{\pi}{2}$$

$$\widehat{AB} = \varphi_A - \varphi_B = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \widehat{AC} = \widehat{AB} = \frac{\pi}{6} \Rightarrow |\varphi_C = \frac{\pi}{3}$$

$$\frac{2\pi}{3} = \Delta BAC = |\theta_B - \theta_C| = |\frac{\pi}{2} - \theta_C| \Rightarrow \frac{\pi}{2} - \theta_C = \pm \frac{2\pi}{3}$$

$$\Rightarrow \theta_C = \frac{\pi}{2} \pm \frac{2\pi}{3} \Rightarrow \theta_C = -\frac{\pi}{6} \vee \theta_C = \frac{7\pi}{6}$$

$$\text{ИМА ДВА РЕШЕЊА, УЗМИМО НАПР} \quad |C: \varphi_C = \frac{\pi}{3}, \quad \theta_C = -\frac{\pi}{6}$$



б) Из дела а) знамо $b = \widehat{AC} = \frac{\pi}{6}$, $c = \widehat{AB} = \frac{\pi}{6}$, $\alpha = \Delta BAC = \frac{2\pi}{3}$

КОСИНУСНА ТЕОРЕМА $\Rightarrow$

$$\cos \alpha = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \cos \frac{\pi}{6} \cdot \cos \frac{\pi}{6} + \sin \frac{\pi}{6} \cdot \sin \frac{\pi}{6} \cos \frac{2\pi}{3}$$

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot (-\frac{1}{2}) = \frac{3}{4} - \frac{1}{8} = \frac{5}{8}$$

$$\Rightarrow \alpha = \arccos \frac{5}{8} \Rightarrow \sin \alpha = \sqrt{1 - \frac{25}{64}} = \frac{\sqrt{39}}{8}$$

$$b = c \Rightarrow \beta = \gamma$$

$$\cos b = \cos \alpha \cos c + \sin \alpha \sin c \cos \beta$$

$$\cos \frac{\pi}{6} = \frac{5}{8} \cos \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{39}}{8} \cdot \sin \frac{\pi}{6} \cdot \cos \beta$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{16} + \frac{\sqrt{39}}{16} \cos \beta$$

$$\frac{\sqrt{39}}{16} \cos \beta = \frac{3\sqrt{3}}{16} \Rightarrow \cos \beta = \frac{3}{\sqrt{13}} \Rightarrow \beta = \arccos \frac{3}{\sqrt{13}} = \gamma$$

$$P = \alpha + \beta + \gamma - \pi = \frac{2\pi}{3} + 2 \arccos \frac{3}{\sqrt{13}} - \pi$$

$$P = 2 \arccos \frac{3}{\sqrt{13}} - \frac{\pi}{3}$$

Може и
ДРУГА
КОСИНУСНА
ТЕОРЕМА $\Rightarrow$

$$-\cos \alpha = \cos \beta \cos \gamma - \sin \beta \sin \gamma \cos \alpha$$

$$-\cos \frac{2\pi}{3} = \cos^2 \beta - (1 - \cos^2 \beta) \cdot \cos (\arccos \frac{5}{8})$$

$$\frac{1}{2} = \cos^2 \beta - (1 - \cos^2 \beta) \cdot \frac{5}{8}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{13}{8} \cos^2 \beta - \frac{5}{8} \Rightarrow \frac{13}{8} \cos^2 \beta = \frac{1}{2} + \frac{5}{8} = \frac{9}{8}$$

$$\cos^2 \beta = \frac{9}{13} \Rightarrow \cos \beta = \pm \frac{3}{\sqrt{13}} \stackrel{\beta < \alpha}{\Rightarrow} \cos \beta = \frac{3}{\sqrt{13}}$$

$$\Rightarrow \beta = \arccos \frac{3}{\sqrt{13}} = \gamma$$

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin b}{\sin \beta} \Rightarrow \frac{\frac{\sqrt{39}}{8}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\sin \beta} \Rightarrow \frac{\sqrt{13}}{4} = \frac{1}{2 \sin \beta}$$

$$\Rightarrow \sin \beta = \frac{2}{\sqrt{13}} \Rightarrow \beta = \arcsin \frac{2}{\sqrt{13}} = \gamma$$

ОШТАР УГАО

Аналитичка геометрија (Геометрија 1)**Јун 2 - 1. 10. 2025.****Време рада: 135 минута. Срећно!**

1. Нека је $ABCDEF$ правилан шестоугао у равни.
а) [4п] Наћи $\alpha \in \mathbb{R}$ и $\beta \in \mathbb{R}$ такве да је $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE} = \alpha \overrightarrow{AD} + \beta \overrightarrow{AF}$. Да ли је уређен пар (α, β) јединствен?
б) [5п] Доказати да тежиште T скупа тачака B, C, D, E, F припада дужи AD . Да ли су тачке C, T и F колинеарне?
в) [7п] Ако је дужина странице шестоугла $ABCDEF$ једнака 1, одредити дужину дијагонале HJ и површину паралелограма $AHIJ$ ако је $\overrightarrow{AH} = 2(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$ и $\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$.
2. Нека је $ABCD$ правоугаоник у ортонормираном реперу Axy такав да је $B(8,0)$ и $C(8,6)$.
а) [6п] Одредити бар једно афино пресликавање равни које описани круг око правоугаоника $ABCD$ пресликава на елипсу $\mathcal{E}: \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.
б) [7п] Ако је тачка S центар описаног круга око правоугаоника $ABCD$ и $Sx'y'$ ортонормирани репер који има позитиван део x' -осе у смеру вектора $\overrightarrow{SC}$ и исте је оријентације као репер Axy , одредити везу координата (x, y) и (x', y') , као и координате тачке E симетричне тачки A у односу на тачку C у оба репера.
3. [14п] Изометријском трансформацијом свести криву $\mathcal{K}: x^2 - 3x + 4xy + y^2 + 21y - 15 = 0$ на канонски облик и одредити њене жиже. Која крива је у питању?
4. а) [6п] Одредити међусобни положај правих $p: y = 0, z = 0$ и $q: x = 0, z = 2025$. Одредити једначину равни α која садржи праву p и паралелна је правој q , као и растојање тачке $T(3, 4, 5)$ од те равни.
б) [7п] Одредити једначину геометријског места тачака које су једнако удаљене од правих p и q . Која површ је у питању?
5. [14п] Користећи сферне координате навести бар један пар тачака B и C јединичне сфере $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ тако да сферни троугао ABC буде једнакостраничан са унутрашњим углом $\frac{3\pi}{4}$, при чему је тачка A северни пол. Одредити обим и површину тог троугла.

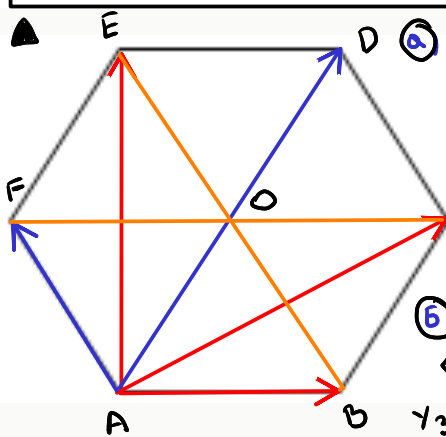
Аналитичка геометрија (Геометрија 1)**Јун 2 - 1. 10. 2025.****Време рада: 135 минута. Срећно!**

1. Нека је $ABCDEF$ правилан шестоугао у равни.
а) [4п] Наћи $\alpha \in \mathbb{R}$ и $\beta \in \mathbb{R}$ такве да је $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE} = \alpha \overrightarrow{AD} + \beta \overrightarrow{AF}$. Да ли је уређен пар (α, β) јединствен?
б) [5п] Доказати да тежиште T скупа тачака B, C, D, E, F припада дужи AD . Да ли су тачке C, T и F колинеарне?
в) [7п] Ако је дужина странице шестоугла $ABCDEF$ једнака 1, одредити дужину дијагонале HJ и површину паралелограма $AHIJ$ ако је $\overrightarrow{AH} = 2(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$ и $\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$.
2. Нека је $ABCD$ правоугаоник у ортонормираном реперу Axy такав да је $B(8,0)$ и $C(8,6)$.
а) [6п] Одредити бар једно афино пресликавање равни које описани круг око правоугаоника $ABCD$ пресликава на елипсу $\mathcal{E}: \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.
б) [7п] Ако је тачка S центар описаног круга око правоугаоника $ABCD$ и $Sx'y'$ ортонормирани репер који има позитиван део x' -осе у смеру вектора $\overrightarrow{SC}$ и исте је оријентације као репер Axy , одредити везу координата (x, y) и (x', y') , као и координате тачке E симетричне тачки A у односу на тачку C у оба репера.
3. [14п] Изометријском трансформацијом свести криву $\mathcal{K}: x^2 - 3x + 4xy + y^2 + 21y - 15 = 0$ на канонски облик и одредити њене жиже. Која крива је у питању?
4. а) [6п] Одредити међусобни положај правих $p: y = 0, z = 0$ и $q: x = 0, z = 2025$. Одредити једначину равни α која садржи праву p и паралелна је правој q , као и растојање тачке $T(3, 4, 5)$ од те равни.
б) [7п] Одредити једначину геометријског места тачака које су једнако удаљене од правих p и q . Која површ је у питању?
5. [14п] Користећи сферне координате навести бар један пар тачака B и C јединичне сфере $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ тако да сферни троугао ABC буде једнакостраничан са унутрашњим углом $\frac{3\pi}{4}$, при чему је тачка A северни пол. Одредити обим и површину тог троугла.



1. Нека је $ABCDEF$ правилан шестоугао у равни.

- а) [4п] Наћи $\alpha \in \mathbb{R}$ и $\beta \in \mathbb{R}$ такве да је $\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AE} = \alpha \vec{AD} + \beta \vec{AF}$. Да ли је уређен пар (α, β) јединствен?
 б) [5п] Доказати да тежиште T скупа тачака B, C, D, E, F припада дужи AD . Да ли су тачке C, T и F колинеарне?
 в) [7п] Ако је дужина стране шестоугла $ABCDEF$ једнака 1, одредити дужину дијагонале HJ и површину паралелограма $AHIJ$ ако је $\vec{AH} = 2(\vec{AB} + \vec{AC})$ и $\vec{AJ} = \vec{AB} - 3\vec{AC}$.



а) $\vec{AB} = \vec{FO} = \vec{FA} + \vec{AO} = -\vec{AF} + \frac{1}{2} \vec{AD}$
 $\vec{AC} = \vec{FO} = \vec{FA} + \vec{AO} = -\vec{AF} + \frac{1}{2} \vec{AD}$
 $\vec{AE} = \vec{AF} + \vec{AO} = \vec{AF} + \frac{1}{2} \vec{AD}$

$\Rightarrow \vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AE} = 2\vec{AD} - \vec{AF} \Rightarrow \boxed{\alpha = 2 \quad \beta = -1}$

$\vec{AD}$ и $\vec{AF}$ лнн. нез. $\Rightarrow$ чине базу $\Rightarrow (\alpha, \beta)$ јединств.

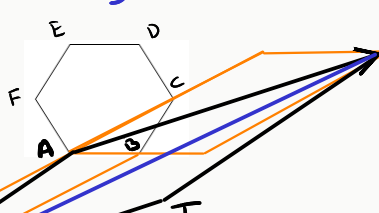
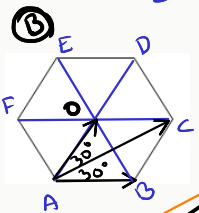
б) Т тежиште $BCDEF$

$\Rightarrow (\forall O') \vec{O'T} = \frac{1}{5} (\vec{O'B} + \vec{O'C} + \vec{O'D} + \vec{O'E} + \vec{O'F})$

узмимо $O' \equiv A \Rightarrow \vec{AT} = \frac{1}{5} (\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AD} + \vec{AE} + \vec{AF})$
 (бог о) краћи рачун

$\Rightarrow \vec{AT} = \frac{1}{5} (2\vec{AD} - \vec{AF} + \vec{AD} + \vec{AF}) = \frac{3}{5} \vec{AD} \Rightarrow \vec{AT}$ и $\vec{AD}$ колнн. $\Rightarrow \boxed{T \in AD}$

$\vec{AT} = \frac{3}{5} \vec{AD} = \frac{3}{5} (\vec{AF} + \vec{AC}) = \frac{3}{5} \vec{AF} + \frac{3}{5} \vec{AC}$, $\frac{3}{5} + \frac{3}{5} = \frac{6}{5} \neq 1 \Rightarrow T \notin FC$



в) $\|\vec{AB}\| = 1$. Тражимо $\|\vec{AC}\|$: (јер су сви вектори задати преко њих)

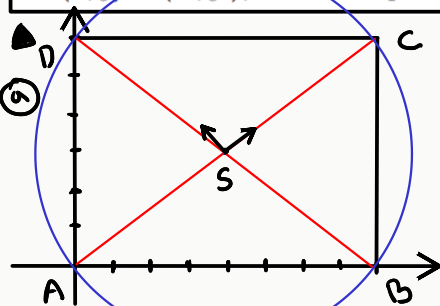
$\|\vec{AC}\|^2 = \|\vec{AB} + \vec{AO}\|^2 = (\vec{AB} + \vec{AO}) \cdot (\vec{AB} + \vec{AO})$
 $= \|\vec{AB}\|^2 + 2 \cdot \vec{AB} \cdot \vec{AO} + \|\vec{AO}\|^2$
 $= \|\vec{AB}\|^2 + 2 \|\vec{AB}\| \cdot \|\vec{AO}\| \cdot \cos 60^\circ + \|\vec{AO}\|^2$
 $= 1 + 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} + 1 = 3 \Rightarrow \boxed{\|\vec{AC}\| = \sqrt{3}}$

$\|\vec{HJ}\|^2 = \|\vec{HA} + \vec{AJ}\|^2 = \|\vec{HA} + \vec{AJ}\|^2 = \|\vec{HA} + \vec{AJ}\|^2$
 $= (\vec{AB} + 5\vec{AC}) \cdot (\vec{AB} + 5\vec{AC}) = \|\vec{AB}\|^2 + 10 \|\vec{AB}\| \cdot \|\vec{AC}\| \cos 30^\circ + 25 \|\vec{AC}\|^2$
 $= 1 + 10 \cdot 1 \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 25 \cdot 3 = 91 \Rightarrow \boxed{\|\vec{HJ}\| = \sqrt{91}}$

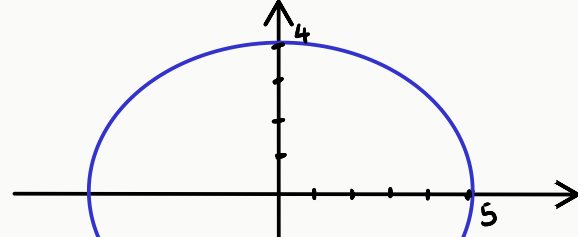
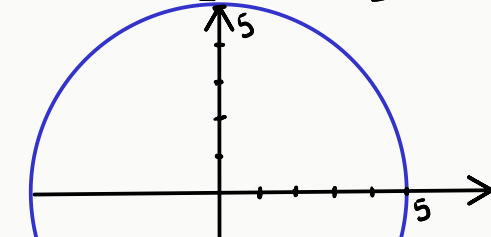
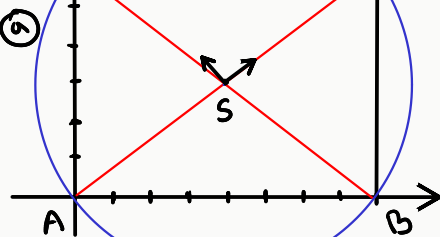
$P = \|\vec{AH} \times \vec{AJ}\| = \|(2\vec{AB} + 2\vec{AC}) \times (\vec{AB} - 3\vec{AC})\| = \|-6\vec{AB} \times \vec{AC} + 2\vec{AC} \times \vec{AB}\|$
 $= \|-8\vec{AB} \times \vec{AC}\| = 8 \cdot \|\vec{AB}\| \cdot \|\vec{AC}\| \cdot \sin 30^\circ = 8 \cdot 1 \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} = 4\sqrt{3} \Rightarrow \boxed{P = 4\sqrt{3}}$

2. Нека је $ABCD$ правоугаоник у ортонормираном реперу Axy такав да је $B(8,0)$ и $C(8,6)$.

- а) [6п] Одредити бар једно афино пресликавање равни које описани круг око правоугаоника $ABCD$ пресликава на елипсу $\mathcal{E}: \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.
 б) [7п] Ако је тачка S центар описаног круга око правоугаоника $ABCD$ и $Sx'y'$ ортонормирани репер који има позитиван део x' -осе у смеру вектора $\vec{SC}$ и исте је оријентације као репер Axy , одредити везу координата (x, y) и (x', y') , као и координате тачке E симетричне тачки A у односу на тачку C у оба репера.



$[S] = \frac{[A] + [C]}{2} \Rightarrow [S(4,3)]$, $r = \|\vec{AS}\| = \|(4,3)\| = 5$



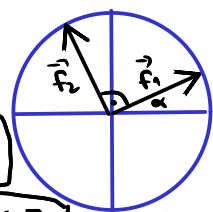
$\Rightarrow \mathcal{K}: (x-4)^2 + (y-3)^2 = 25$

$\mathcal{K}' : x'^2 + y'^2 = 25$

$H_1, \frac{4}{5}$

$\mathcal{E}: \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

$T_{SA} : \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 \\ -4 \end{bmatrix}, H_{1, \frac{4}{5}} : \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$
 $F = H_{1, \frac{4}{5}} \circ T_{SA} \Rightarrow [F] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 4/5 & -12/5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x'' = x - 4 \\ y'' = \frac{4}{5}y - \frac{12}{5} \end{cases}$
 б) у релери $A_{xy} : \vec{e}_1 = \vec{AB}/8, \vec{e}_2 = \vec{AD}/6$
 $[S]_{Ae} = [A\vec{S}]_e = [\frac{1}{2}\vec{AC}]_e = [\frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AD}]_e = [4\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2]_e \Rightarrow \boxed{S(4, 3)} \leftarrow \text{може}$
 $\vec{f}_1 = \frac{\vec{SC}}{\|\vec{SC}\|} = \frac{\vec{AC}}{\|\vec{AC}\|} = \frac{8\vec{e}_1 + 6\vec{e}_2}{10} = \frac{4}{5}\vec{e}_1 + \frac{3}{5}\vec{e}_2 \Rightarrow [\vec{f}_1]_e = (\frac{4}{5}, \frac{3}{5})$
 $\Rightarrow [\vec{f}_2]_e = (\cos(\alpha + \frac{\pi}{2}), \sin(\alpha + \frac{\pi}{2})) = (-\sin\alpha, \cos\alpha) \Rightarrow [\vec{f}_2]_e = (-\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$
 $\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/5 & -3/5 \\ 3/5 & 4/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/5 & 3/5 \\ -3/5 & 4/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \boxed{C^{-1} = C^T}$
 $[E]_{Ae} = [A\vec{E}]_e = [2\vec{AC}]_e = [2\vec{AB} + 2\vec{AD}]_e = [16\vec{e}_1 + 12\vec{e}_2]_e \Rightarrow \boxed{E(16, 12)_e}$
 $[E]_{sf} : \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/5 & 3/5 \\ -3/5 & 4/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 16 \\ 12 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{E(15, 0)_f}$



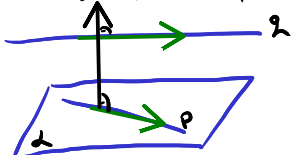
3. [14п] Изометријском трансформацијом свести криву $K: x^2 - 3x + 4xy + y^2 + 21y - 15 = 0$ на канонски облик и одредити њене жиже. Која крива је у питању?

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3/2 \\ 2 & 1 & 21/2 \\ -3/2 & 21/2 & -15 \end{bmatrix} \Rightarrow B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \varphi_B(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 1 - 2\lambda + \lambda^2 - 4 = (\lambda+1)(\lambda-3)$
 $\lambda_1 = -1 \Rightarrow (B+E)u = 0 \quad \lambda_2 = 3 \Rightarrow (B-3E)u = 0$
 $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow u_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow u_3 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \Rightarrow R = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$
 $2a+2b=0 \Rightarrow b=-a \Rightarrow -2a+2b=0 \Rightarrow b=a$
 $\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y') \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}(-x' + y') \end{cases} \Rightarrow \mathcal{K} : \frac{1}{2}(x'^2 + 2x'y' + y'^2) + 4 \cdot \frac{1}{2}(y'^2 - x'^2) + \frac{1}{2}(x'^2 - 2x'y' + y'^2) - \frac{3}{\sqrt{2}}(x' + y') + \frac{21}{\sqrt{2}}(-x' + y') - 15 = 0$
 $\Rightarrow \mathcal{K}' : -x'^2 + 3y'^2 - 12\sqrt{2}x' + 9\sqrt{2}y' - 15 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x'' = x' + 6\sqrt{2} \\ y'' = y' + \frac{3\sqrt{2}}{2} \end{cases}$
 $\mathcal{K}' : -\frac{(x' + 6\sqrt{2})^2}{x''} + 72 + 3(y' + \frac{3\sqrt{2}}{2})^2 - \frac{27}{2} - 15 = 0$
 $\mathcal{K}'' : -x''^2 + 3y''^2 = -\frac{87}{2} \Rightarrow \mathcal{K}'' : \frac{2x''^2}{87} - \frac{2y''^2}{29} = 1 \Rightarrow \boxed{\text{хиперболоја}}$
 $\Rightarrow a^2 = \frac{87}{2}, b^2 = \frac{29}{2} \Rightarrow c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{58} \Rightarrow F_1''(\sqrt{58}, 0), F_2''(-\sqrt{58}, 0)$
 $x = \frac{1}{\sqrt{2}}(x'' - 6\sqrt{2} + y'' - \frac{3\sqrt{2}}{2}) = \frac{1}{\sqrt{2}}x'' + \frac{1}{\sqrt{2}}y'' - \frac{15}{2} \Rightarrow \begin{cases} F_1(\sqrt{29} - 15/2, -\sqrt{29} + 9/2) \\ F_2(-\sqrt{29} - 15/2, \sqrt{29} + 9/2) \end{cases}$
 $y = \frac{1}{\sqrt{2}}(-x'' + 6\sqrt{2} + y'' - \frac{3\sqrt{2}}{2}) = -\frac{1}{\sqrt{2}}x'' + \frac{1}{\sqrt{2}}y'' + \frac{9}{2}$

4. а) [6п] Одредити међусобни положај правих $p: y=0, z=0$ и $q: x=0, z=2025$. Одредити једначину равни α која садржи праву p и паралелна је правој q , као и растојање тачке $T(3, 4, 5)$ од те равни.

б) [7п] Одредити једначину геометријског места тачака које су једнако удаљене од правих p и q . Која површ је у питању?

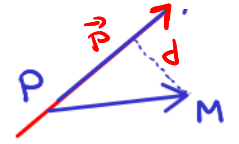
а) б) $P: \begin{cases} x=t \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}, t \in \mathbb{R} \quad Q: \begin{cases} x=0 \\ y=s \\ z=2025 \end{cases}, s \in \mathbb{R} \Rightarrow \vec{p} = (1, 0, 0), \vec{q} = (0, 1, 0)$
 $\vec{p} \neq \lambda \vec{q} \Rightarrow p \not\parallel q \Rightarrow p \neq q, u_3 z=0 \neq 2025 \Rightarrow \text{не секу се} \Rightarrow \underline{\text{мимоулазне}}$
 $\alpha \text{ т.д. } p \subset \alpha, q \parallel \alpha : 1) p(0, 0, 0) \in p \subset \alpha \Rightarrow \underline{p \in \alpha}$
 $2) p \subset \alpha \Rightarrow \vec{n}_\alpha \perp \vec{p} = (1, 0, 0) \Rightarrow \vec{n}_\alpha = \vec{p} \times \vec{q} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, 1)$
 $3) q \parallel \alpha \Rightarrow \vec{n}_\alpha \perp \vec{q} = (0, 1, 0)$
 $\Rightarrow \alpha: 0(x-0) + 0(y-0) + 1(z-0) = 0 \Rightarrow \boxed{\alpha: z=0}$
 $d(T, \alpha) = \frac{|5|}{\sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2}} = 5 \Rightarrow \boxed{d(T, \alpha) = 5}$



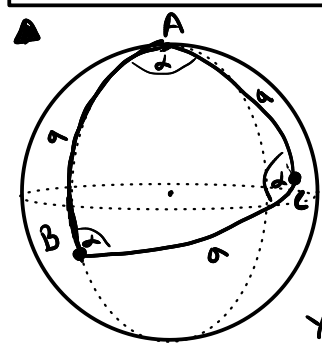
Б) $M(x, y, z) \in \mathcal{S}$ произв $\Rightarrow d(M, P) = d(M, Q)$
 $\vec{P} = (1, 0, 0)$, $\vec{Q} = (0, 1, 0)$
 $P(0, 0, 0) \in P$, $Q(0, 0, 2025) \in Q$

$\vec{P} \times \vec{PM} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ x & y & z \end{vmatrix} = (0, -z, y)$ $\Leftrightarrow \frac{\sqrt{z^2 + y^2}}{1} = \frac{\sqrt{(z-2025)^2 + x^2}}{1}$
 $\vec{Q} \times \vec{QM} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ x & y & z-2025 \end{vmatrix} = (z-2025, 0, -x)$ $\Leftrightarrow \mathcal{S}: z^2 + y^2 = (z-2025)^2 + x^2$

$\mathcal{S}: z^2 + y^2 = z^2 - 2 \cdot 2025 z + 2025^2 + x^2 \Leftrightarrow \mathcal{S}: x^2 - y^2 = 4050(z - \frac{2025}{2})$
 $x' = x$
 $y' = y$
 $z' = z - \frac{2025}{2} \Rightarrow \mathcal{S}': x'^2 - y'^2 = 4050 z'$ гиперболически ПАРАБОЛОИД (седло)



5. [14п] Користећи сферне координате навести бар један пар тачака B и C јединичне сфере $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ тако да сферни троугао ABC буде једнакостраничан са унутрашњим углом $\frac{3\pi}{4}$, при чему је тачка A северни пол. Одредити обим и површину тог троугла.



$A: \varphi_A = \pi/2$, θ_A - недефинисано
 $\widehat{AB} = \widehat{AC} = \widehat{BC} = a$, $a = b = c = \frac{3\pi}{4}$
Како је $\Delta BAC = \frac{3\pi}{4} \Rightarrow |\theta_B - \theta_C| = \frac{3\pi}{4}$
Можемо узети $\theta_B = 0 \Rightarrow \theta_C = \pm \frac{3\pi}{4}$

$\cos a = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
 $\sin a = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Узмимо нпр $B: \theta_B = 0$, $\varphi_B = \frac{\pi}{2} - a$
 $C: \theta_C = \frac{3\pi}{4}$, $\varphi_C = \frac{\pi}{2} - a$

ОСТАЈЕ ДА ИЗРАЧУНАМО a

СТАЛНА КОСИНУСНА ТЕОРЕМА: $-\cos a = \cos a \cos a - \sin a \sin a \cos a$

$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos a \Rightarrow \cos a = 1 - \sqrt{2}$

$\Rightarrow a = \arccos(1 - \sqrt{2})$

$\Rightarrow B: \theta_B = 0$, $\varphi_B = \frac{\pi}{2} - \arccos(1 - \sqrt{2})$
 $C: \theta_C = 0$, $\varphi_C = \frac{\pi}{2} - \arccos(1 - \sqrt{2})$

$\Rightarrow 0 = 3a = 3 \arccos(1 - \sqrt{2})$
 $P = 3a - \pi = \frac{9\pi}{4} - \pi = \frac{5\pi}{4}$

Аналитичка геометрија (Геометрија 1)

СЕПТЕМБАР 1 - 14.10.2025. године

Време рада: 135мин. Срећно!



1. а) [2п] Доказати да за произвољне векторе $\vec{a}$ и $\vec{b}$ важи $2 \cdot \vec{a} \circ \vec{b} = \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 - \|\vec{a} - \vec{b}\|^2$.
 б) [10п] Нека је D тачка на страници BC троугла ABC . Доказати да је тада

$$\|\vec{AD}\|^2 = \frac{\vec{BD}}{\vec{BC}} \|\vec{AC}\|^2 + \frac{\vec{DC}}{\vec{BC}} \|\vec{AB}\|^2 + \vec{BD} \circ \vec{CD}.$$

2. [15п] Дат је квадрат $ABCD$ и тачке E и F тако да је $ABCDEF$ правилан октаедар. Афини репер $Axyz$ има базне векторе $\vec{e}_1 = \vec{AB}$, $\vec{e}_2 = \vec{AD}$ и $\vec{e}_3 = \vec{AF}$, док афини репер $Tx'y'z'$ са почетком у тачки T , која је тежиште троугла ABF , има базне векторе $\vec{f}_1 = \vec{TA}$, $\vec{f}_2 = \vec{TE}$ и $\vec{f}_3 = \vec{TC}$. Изразити координате (x, y, z) произвољне тачке M у реперу $Axyz$ помоћу координата (x', y', z') исте тачке у реперу $Tx'y'z'$. Одредити координате темена октаедра у оба афина репера.

3. [15п] Дате су тачке

$$P_1(1, 1, 1), \quad U(2, 1, -1), \quad M(-1, 0, 2), \quad P_2(1, 1, -1), \quad A(-1, -1, 1), \quad J(-2, 4, 2).$$

Ако је B тачка симетрична тачки J у односу на раван α одређену тачкама P_1 , U и M , а C тачка симетрична тачки J у односу на праву p која садржи тачке P_2 и A , одредити дужину дужи BC .

4. [14п] Одредити једначину криве другог реда чија једна директриса има једначину $d : y = x - 1$, а жиже су јој тачке $F_1(-1, 3)$ и $F_2(1, 1)$.

5. Дата је права $p : \frac{x-1}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{2}$.

а) [7п] Одредити једначину површи $\mathcal{P}$ настале ротацијом праве p око Oz -осе. Која површ је у питању?

б) [7п] Круг добијен у пресеку $\mathcal{P}$ са Oxy -равни написати као пресек две сфере полупречника $\frac{\sqrt{21}}{2}$.

Аналитичка геометрија (Геометрија 1)

СЕПТЕМБАР 1 - 14.10.2025. године

Време рада: 135мин. Срећно!



1. а) [2п] Доказати да за произвољне векторе $\vec{a}$ и $\vec{b}$ важи $2 \cdot \vec{a} \circ \vec{b} = \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 - \|\vec{a} - \vec{b}\|^2$.
 б) [10п] Нека је D тачка на страници BC троугла ABC . Доказати да је тада

$$\|\vec{AD}\|^2 = \frac{\vec{BD}}{\vec{BC}} \|\vec{AC}\|^2 + \frac{\vec{DC}}{\vec{BC}} \|\vec{AB}\|^2 + \vec{BD} \circ \vec{CD}.$$

2. [15п] Дат је квадрат $ABCD$ и тачке E и F тако да је $ABCDEF$ правилан октаедар. Афини репер $Axyz$ има базне векторе $\vec{e}_1 = \vec{AB}$, $\vec{e}_2 = \vec{AD}$ и $\vec{e}_3 = \vec{AF}$, док афини репер $Tx'y'z'$ са почетком у тачки T , која је тежиште троугла ABF , има базне векторе $\vec{f}_1 = \vec{TA}$, $\vec{f}_2 = \vec{TE}$ и $\vec{f}_3 = \vec{TC}$. Изразити координате (x, y, z) произвољне тачке M у реперу $Axyz$ помоћу координата (x', y', z') исте тачке у реперу $Tx'y'z'$. Одредити координате темена октаедра у оба афина репера.

3. [15п] Дате су тачке

$$P_1(1, 1, 1), \quad U(2, 1, -1), \quad M(-1, 0, 2), \quad P_2(1, 1, -1), \quad A(-1, -1, 1), \quad J(-2, 4, 2).$$

Ако је B тачка симетрична тачки J у односу на раван α одређену тачкама P_1 , U и M , а C тачка симетрична тачки J у односу на праву p која садржи тачке P_2 и A , одредити дужину дужи BC .

4. [14п] Одредити једначину криве другог реда чија једна директриса има једначину $d : y = x - 1$, а жиже су јој тачке $F_1(-1, 3)$ и $F_2(1, 1)$.

5. Дата је права $p : \frac{x-1}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{2}$.

а) [7п] Одредити једначину површи $\mathcal{P}$ настале ротацијом праве p око Oz -осе. Која површ је у питању?

б) [7п] Круг добијен у пресеку $\mathcal{P}$ са Oxy -равни написати као пресек две сфере полупречника $\frac{\sqrt{21}}{2}$.



1. а) [2п] Доказати да за произвољне векторе $\vec{a}$ и $\vec{b}$ важи $2 \cdot \vec{a} \circ \vec{b} = \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 - \|\vec{a} - \vec{b}\|^2$.

б) [10п] Нека је D тачка на страници BC троугла ABC . Доказати да је тада

$$\|\vec{AD}\|^2 = \frac{\vec{BD}}{\vec{BC}} \|\vec{AC}\|^2 + \frac{\vec{DC}}{\vec{BC}} \|\vec{AB}\|^2 + \vec{BD} \circ \vec{CD}.$$

▲ а) $\|\vec{a} - \vec{b}\|^2 = (\vec{a} - \vec{b}) \circ (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a} \circ \vec{a} - \vec{a} \circ \vec{b} - \vec{b} \circ \vec{a} + \vec{b} \circ \vec{b}$
 $\Rightarrow \|\vec{a} - \vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 - 2\vec{a} \circ \vec{b} + \|\vec{b}\|^2 \Rightarrow 2\vec{a} \circ \vec{b} = \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 - \|\vec{a} - \vec{b}\|^2$

б) $D \in \text{страницы } BC \Rightarrow \vec{BD} = \alpha \vec{BC}$ за неко $\alpha \in [0, 1]$

$\Rightarrow \vec{DC} = \vec{DB} + \vec{BC} = -\alpha \vec{BC} + \vec{BC} = (1 - \alpha) \vec{BC}$

1.4 $\Rightarrow \vec{AD} = \alpha \vec{AC} + (1 - \alpha) \vec{AB}$

$\|\vec{AD}\|^2 = \vec{AD} \circ \vec{AD} = (\alpha \vec{AC} + (1 - \alpha) \vec{AB}) \circ (\alpha \vec{AC} + (1 - \alpha) \vec{AB})$
 $= \alpha^2 \|\vec{AC}\|^2 + 2\alpha(1 - \alpha) \vec{AC} \circ \vec{AB} + (1 - \alpha)^2 \|\vec{AB}\|^2 = *$

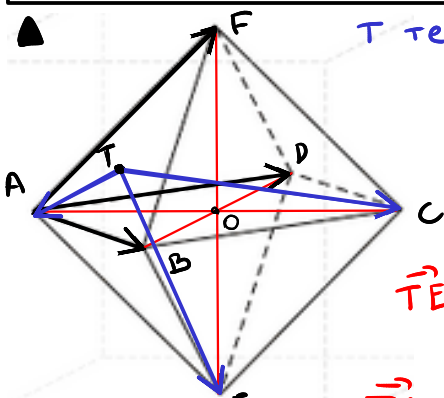
а) $\Rightarrow 2\vec{AC} \circ \vec{AB} = \|\vec{AC}\|^2 + \|\vec{AB}\|^2 - \|\vec{AC} - \vec{AB}\|^2 = \|\vec{AC}\|^2 + \|\vec{AB}\|^2 - \|\vec{BC}\|^2$

$*$ $= \alpha^2 \|\vec{AC}\|^2 + \alpha(1 - \alpha) (\|\vec{AC}\|^2 + \|\vec{AB}\|^2 - \|\vec{BC}\|^2) + (1 - \alpha)^2 \|\vec{AB}\|^2$
 $= (\alpha^2 + \alpha - \alpha^2) \|\vec{AC}\|^2 + (\alpha - \alpha^2 + 1 - 2\alpha + \alpha^2) \|\vec{AB}\|^2 - \alpha(1 - \alpha) \|\vec{BC}\|^2$
 $= \alpha \|\vec{AC}\|^2 + (1 - \alpha) \|\vec{AB}\|^2 - \alpha(1 - \alpha) \vec{BC} \circ \vec{BC}$

$\vec{BD} = \alpha \vec{BC} \Rightarrow \alpha = \frac{\vec{BD}}{\vec{BC}}, \vec{DC} = (1 - \alpha) \vec{BC} \Rightarrow 1 - \alpha = \frac{\vec{DC}}{\vec{BC}} = -\frac{\vec{BD}}{\vec{BC}} \circ \frac{\vec{DC}}{\vec{BC}} = \frac{\vec{BD} \circ \vec{CD}}{\vec{BC} \circ \vec{BC}}$

$\Rightarrow \|\vec{AD}\|^2 = \frac{\vec{BD}}{\vec{BC}} \|\vec{AC}\|^2 + \frac{\vec{DC}}{\vec{BC}} \|\vec{AB}\|^2 + \vec{BD} \circ \vec{CD}$

2. [15п] Дат је квадрат $ABCD$ и тачке E и F тако да је $ABCDEF$ правилан октаедар. Афини репер $Axyz$ има базне векторе $\vec{e}_1 = \vec{AB}$, $\vec{e}_2 = \vec{AD}$ и $\vec{e}_3 = \vec{AF}$, док афини репер $Tx'y'z'$ са почетком у тачки T , која је тежиште троугла ABF , има базне векторе $\vec{f}_1 = \vec{TA}$, $\vec{f}_2 = \vec{TE}$ и $\vec{f}_3 = \vec{TC}$. Изразити координате (x, y, z) произвољне тачке M у реперу $Axyz$ помоћу координата (x', y', z') исте тачке у реперу $Tx'y'z'$. Одредити координате темена октаедра у оба афина репера.



T тежиште $\Delta ABF \Rightarrow \vec{AT} = \frac{1}{3}(\vec{AA} + \vec{AB} + \vec{AF}) = \frac{1}{3}(\vec{AB} + \vec{AF})$

$\Rightarrow [T]_{Ae} = [\vec{AT}]_e = [\frac{1}{3}\vec{e}_1 + \frac{1}{3}\vec{e}_3]_e = (\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3})$

$[\vec{f}_1]_e = [\vec{TA}]_e = (-\frac{1}{3}, 0, -\frac{1}{3})$

$[\vec{f}_2]_e = [\vec{TE}]_e = (\frac{2}{3}, 1, -\frac{4}{3})$

$\vec{TE} = \vec{TA} + \vec{AE} = \vec{TA} + \vec{AC} + \vec{CE} = -\frac{1}{3}(\vec{AB} + \vec{AF}) + (\vec{AB} + \vec{AD}) - \vec{AF}$

$[\vec{f}_3]_e = [\vec{TC}]_e = (\frac{2}{3}, 1, -\frac{1}{3})$

$\vec{TC} = \vec{TA} + \vec{AC} = -\frac{1}{3}(\vec{AB} + \vec{AF}) + \vec{AB} + \vec{AD}$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1/3 & -4/3 & -1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/3 \\ 0 \\ 1/3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} *$

$x = -\frac{1}{3}x' + \frac{2}{3}y' + \frac{2}{3}z' + \frac{1}{3} \Rightarrow x' = -3x + 2y' + 2z' + 1 = -3x + 2x - 2y - 2z - 2x + 4y + 2z + 1$
 $y = y' + z' \cdot (-1/3) \Rightarrow y' = x - y - z$
 $x - z = 2y' + z' \Rightarrow z' = -x + 2y + z$

$[Ae] : A(0, 0, 0), B(1, 0, 0), C(1, 1, 0), D(0, 1, 0), E(1, 1, -1), F(0, 0, 1)$

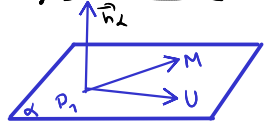
$\Rightarrow [Tf] : A(1, 0, 0), B(-2, 1, -1), C(0, 0, 1), D(3, -1, 2), E(0, 1, 0), F(1, -1, 1)$

3. [15п] Дате су тачке

$$P_1(1, 1, 1), \quad U(2, 1, -1), \quad M(-1, 0, 2), \quad P_2(1, 1, -1), \quad A(-1, -1, 1), \quad J(-2, 4, 2).$$

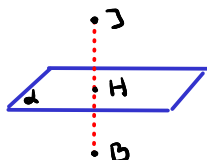
Ако је B тачка симетрична тачки J у односу на раван α одређену тачкама P_1, U и M , а C тачка симетрична тачки J у односу на праву p која садржи тачке P_2 и A , одредити дужину дужи BC .

1) РАВАН α



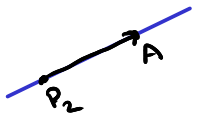
$$\begin{aligned} P_1(1, 1, 1) &\in \alpha \\ \vec{P_1U} &\subset \alpha \Rightarrow \vec{n}_\alpha \perp \vec{P_1U} = (1, 0, -2) \\ \vec{P_1M} &\subset \alpha \Rightarrow \vec{n}_\alpha \perp \vec{P_1M} = (-2, -1, 1) \\ \Rightarrow \vec{n}_\alpha &= \vec{P_1U} \times \vec{P_1M} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & -2 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (-2, 3, -1) \\ \alpha: -2(x-1) + 3(y-1) - 1(z-1) &= 0 \\ \alpha: -2x + 3y - z &= 0 \end{aligned}$$

2) ТАЧКА B



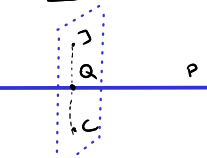
$$\begin{aligned} * \text{н т.д. } J &\in n, n \perp \alpha \Rightarrow \vec{n} = \vec{n}_\alpha = (-2, 3, -1) \\ * H &= n \cap \alpha: 4t + 4 + 9t + 12 + t - 2 = 0 \\ 14t + 14 &= 0 \Rightarrow t = -1 \Rightarrow H(0, 1, 3) \\ * J: t &= 0, H: t = -1 \Rightarrow B: t = -2 \Rightarrow \boxed{B(2, -2, 4)} \end{aligned}$$

3) ПРАВА p



$$\begin{aligned} P_2(1, 1, -1) &\in p \\ \vec{P} = \vec{P_2A} &= (-2, -2, 2) \parallel (-1, -1, 1) \\ \Rightarrow \begin{cases} x = -\lambda + 1 \\ y = -\lambda + 1 \\ z = \lambda - 1 \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

4) ТАЧКА C

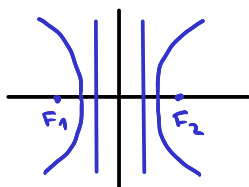
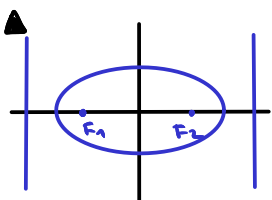


$$\begin{aligned} * B \text{ т.д. } J &\in p, p \perp p \Rightarrow \vec{n}_p = \vec{P} \Rightarrow p: -(x+2) - (y-4) + (z-2) = 0 \\ p: -x - y + z &= 0 \\ * Q &= p \cap \alpha \\ \lambda - 1 + \lambda - 1 + \lambda - 1 &= 0 \Rightarrow \lambda = 1 \Rightarrow Q(0, 0, 0) \\ * J(-2, 4, 2), Q(0, 0, 0) &\Rightarrow \boxed{C(2, -4, -2)} \end{aligned}$$

5) ДУЖИНА BC

$$|BC| = |\vec{BC}| = \|(0, -2, -6)\| = \sqrt{0 + 4 + 36} = \sqrt{40} = \boxed{2\sqrt{10}}$$

4. [14п] Одредити једначину криве другог реда чија једна директриса има једначину $d: y = x - 1$, а жиже су јој тачке $F_1(-1, 3)$ и $F_2(1, 1)$.



$$\begin{aligned} d: x - y - 1 &= 0 \Rightarrow F_d(x, y) = x - y - 1 \\ F_d(F_1) &= -1 - 3 - 1 = -5 < 0 \\ F_d(F_2) &= 1 - 1 - 1 = -1 < 0 \\ \Rightarrow F_2 \text{ и } d &\text{ у ПАРУ} \end{aligned}$$

F_1 и F_2 са исте стране d
 $\Rightarrow$ ЕЛИПСА

$$* \text{центар } \mathcal{E} \text{ је } O = S(F_1F_2) \Rightarrow \boxed{O(0, 2)}$$

$$* \text{ексцентрицитет } c = d(F_2, O) = \sqrt{(1-0)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{2}$$

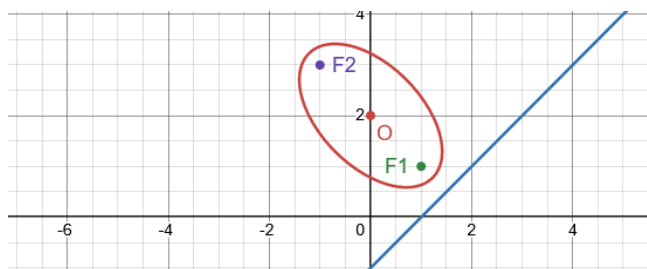
$$* \text{директриса } \frac{a^2}{c} = d(O, d) = \frac{|0 - 2 - 1|}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} \Rightarrow a^2 = \frac{3}{\sqrt{2}} c = 3 \Rightarrow a = \sqrt{3}$$

$$* \text{ексцентрицитет } e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}} < 1 \quad (\text{н ово даје елипсу})$$

$$* M(x, y) \in \mathcal{E} \text{ произв } \Rightarrow \mathcal{E}: \frac{d(M, F_2)}{d(M, d)} = e$$

$$\Rightarrow \mathcal{E}: \frac{\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2}}{\frac{|x-y-1|}{\sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{2}{3}} \quad /^2 \Rightarrow \frac{2((x-1)^2 + (y-1)^2)}{(x-y-1)^2} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{E}: 3(x-1)^2 + 3(y-1)^2 = (x-y-1)^2}$$



5. Дата је права $p : \frac{x-1}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{2}$.

а) [7п] Одредити једначину површи $\mathcal{P}$ настале ротацијом праве p око Oz -осе. Која површ је у питању?

б) [7п] Круг добијен у пресеку $\mathcal{P}$ са Oxy -равни написати као пресек две сфере полупречника $\frac{\sqrt{21}}{2}$.

▲ а)

$$R_{O_z, \alpha} : \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

* $M(1, t, 2t-1) \in p$ произвољна $\Rightarrow M' = R_{O_z, \alpha}(M) \in \mathcal{P}$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ t \\ 2t-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha - t \sin \alpha \\ \sin \alpha + t \cos \alpha \\ 2t-1 \end{bmatrix} \Rightarrow t = \frac{z'+1}{2}$$

$$x'^2 + y'^2 = \cos^2 \alpha - 2t \sin \alpha \cos \alpha + t^2 \sin^2 \alpha + \sin^2 \alpha + 2t \sin \alpha \cos \alpha + t^2 \cos^2 \alpha$$

$$= 1 + t^2 = 1 + \left(\frac{z'+1}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{P}: x^2 + y^2 - \frac{(z+1)^2}{4} = 1}$$

једногранны хиперболоид

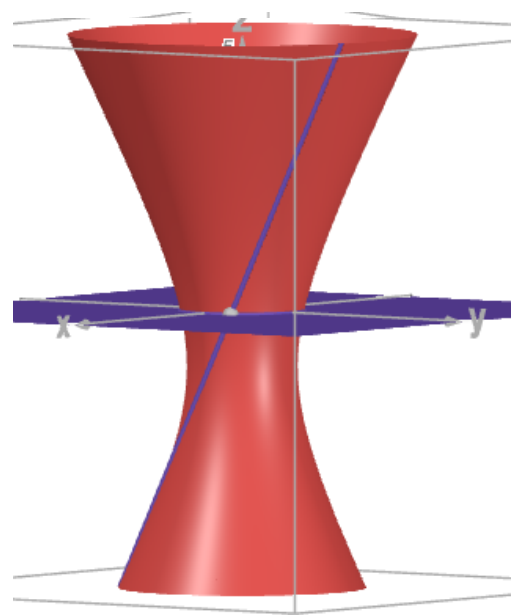
б) $\mathcal{K} = \mathcal{P} \cap O_{xy}$

$$x^2 + y^2 - \frac{(z+1)^2}{4} = 1$$

$$z = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - \frac{1}{4} = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{K}: x^2 + y^2 = \frac{5}{4}, z = 0}$$



$\mathcal{K} = S_1 \cap S_2$: можемо приметити и по ч да круг $\mathcal{K}$

настане ротацијом $p \cap O_{xy} = A(1, \frac{1}{2}, 0)$ око O_z -осе

$\Rightarrow$ центри сфера су на O_z -оси

$$\Rightarrow C(0, 0, t)$$

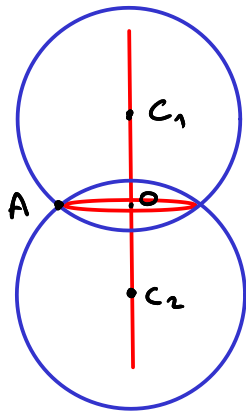
$$\text{Како } A \in \mathcal{K} \subset S_{1/2} \Rightarrow d(C, A) = R$$

$$\Rightarrow \sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + t^2} = \frac{\sqrt{21}}{2} \quad |^2$$

$$\Rightarrow \frac{5}{4} + t^2 = \frac{21}{4} \Rightarrow t^2 = 4 \Rightarrow t = \pm 2$$

$$\Rightarrow C_1(0, 0, 2), C_2(0, 0, -2)$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} S_1: x^2 + y^2 + (z-2)^2 &= \frac{21}{4} \\ S_2: x^2 + y^2 + (z+2)^2 &= \frac{21}{4} \end{aligned}}$$



Аналитичка геометрија (Геометрија 1)
СЕПТЕМБАР 2 - 27.10.2025. године
Време рада: 135мин. Срећно!



1. Нека је $\triangle ABC$ троугао и тачке P и Q такве да је $\overrightarrow{AP} = 3\overrightarrow{PB}$ и $\overrightarrow{BQ} = -3\overrightarrow{QC}$, а тачка R пресек правих AQ и PC .
 - а) [8п] Израчунати однос у ком права AC дели дуж RB .
 - б) [6п] Уколико је $A(1,0)$, $B(5,0)$ и $C(2,3)$, израчунати површину троугла $\triangle APR$.
2. Дате су тачке $P(1,1)$ и $D(1,-1)$, као и права $s: x + 2y - 1 = 0$.
 - а) [7п] Одредити праву d која садржи тачку D и нормална је на праву s , а затим одредити једначине обе симетрале углова које граде праве d и s .
 - б) [7п] Одредити једначину параболе која садржи тачку P и којој је права s оса симетрије, а права d директриса.
3. Дате су права $l: \frac{x}{6} = \frac{y+4}{2} = \frac{z}{5}$ и сфере $S_1: (x+3)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 1$ и $S_2: x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 4$.
 - а) [5п] Одредити формуле свих хомотетија којима се сфера S_1 пресликава на сферу S_2 .
 - б) [9п] Одредити једначине равни које садрже праву l и додирују сферу S_2 .
4. [16п] Површ $\mathcal{P}: 2x^2 - y^2 + z^2 + 4xy + 4x - 8y + 4z + 6 = 0$ изометријском трансформацијом свести на канонски облик и написати формулу те трансформације. Која површ је у питању?
5. [12] Марсовци Пум и Пај су слетели на планету Земљу ($R = 6371km$), редом у градове Монтевидео ($30^\circ S, 59^\circ W$) и Санкт Петербург ($60^\circ N, 31^\circ E$). Одредити приближно растојање између Марсоваца Пум и Пај.

Аналитичка геометрија (Геометрија 1)
СЕПТЕМБАР 2 - 27.10.2025. године
Време рада: 135мин. Срећно!



1. Нека је $\triangle ABC$ троугао и тачке P и Q такве да је $\overrightarrow{AP} = 3\overrightarrow{PB}$ и $\overrightarrow{BQ} = -3\overrightarrow{QC}$, а тачка R пресек правих AQ и PC .
 - а) [8п] Израчунати однос у ком права AC дели дуж RB .
 - б) [6п] Уколико је $A(1,0)$, $B(5,0)$ и $C(2,3)$, израчунати површину троугла $\triangle APR$.
2. Дате су тачке $P(1,1)$ и $D(1,-1)$, као и права $s: x + 2y - 1 = 0$.
 - а) [7п] Одредити праву d која садржи тачку D и нормална је на праву s , а затим одредити једначине обе симетрале углова које граде праве d и s .
 - б) [7п] Одредити једначину параболе која садржи тачку P и којој је права s оса симетрије, а права d директриса.
3. Дате су права $l: \frac{x}{6} = \frac{y+4}{2} = \frac{z}{5}$ и сфере $S_1: (x+3)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 1$ и $S_2: x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 4$.
 - а) [5п] Одредити формуле свих хомотетија којима се сфера S_1 пресликава на сферу S_2 .
 - б) [9п] Одредити једначине равни које садрже праву l и додирују сферу S_2 .
4. [16п] Површ $\mathcal{P}: 2x^2 - y^2 + z^2 + 4xy + 4x - 8y + 4z + 6 = 0$ изометријском трансформацијом свести на канонски облик и написати формулу те трансформације. Која површ је у питању?
5. [12] Марсовци Пум и Пај су слетели на планету Земљу ($R = 6371km$), редом у градове Монтевидео ($30^\circ S, 59^\circ W$) и Санкт Петербург ($60^\circ N, 31^\circ E$). Одредити приближно растојање између Марсоваца Пум и Пај.



1. Нека је $\triangle ABC$ троугао и тачке P и Q такве да је $\vec{AP} = 3\vec{PB}$ и $\vec{BQ} = -3\vec{QC}$, а тачка R пресек правих AQ и PC .

а) [8п] Израчунати однос у ком права AC дели дуж RB .

б) [6п] Уколико је $A(1,0)$, $B(5,0)$ и $C(2,3)$, израчунати површину троугла $\triangle APR$.

а) Означимо са X пресечну тачку AC и RB

P, C, R колин. $\langle \frac{\vec{AP}}{\vec{PB}} \cdot \frac{\vec{BC}}{\vec{CA}} \cdot \frac{\vec{QR}}{\vec{RA}} \rangle = -1 \Rightarrow \frac{\vec{QR}}{\vec{RA}} = -\frac{1}{6}$

AX, BQ, RP конк. $\langle \frac{\vec{AP}}{\vec{PB}} \cdot \frac{\vec{BQ}}{\vec{QR}} \cdot \frac{\vec{RQ}}{\vec{QA}} \rangle = 1 \Rightarrow \frac{\vec{BQ}}{\vec{QR}} = \frac{5}{3}$

б) Означимо коорд. $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ и $R(x_3, y_3)$.

$\vec{AP} = 3\vec{PB} \Rightarrow (x_1 - 1, y_1) = 3(5 - x_1, -y_1) \Rightarrow x_1 - 1 = 15 - 3x_1, y_1 = -3y_1 \Rightarrow P(4, 0)$

$\vec{BQ} = -3\vec{QC} \Rightarrow (x_2 - 5, y_2) = -3(2 - x_2, 3 - y_2) \Rightarrow x_2 - 5 = -6 + 3x_2, y_2 = -9 + 3y_2 \Rightarrow Q(1/2, 9/2)$

$\Rightarrow \vec{QA} = 5\vec{RQ} \Rightarrow (1/2, -9/2) = 5(x_3 - 1/2, y_3 - 9/2) \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{5}{2} - 5x_3, -\frac{9}{2} = \frac{45}{2} - 5y_3 \Rightarrow R(2/5, 27/5)$

$P_{\triangle APR} = \frac{1}{2} \|\vec{AP} \times \vec{AR}\| = \frac{1}{2} \left\| \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 27/5 \\ -3/5 & 27/5 & 0 \end{vmatrix} \right\| = \frac{1}{2} \left\| (0, 0, \frac{81}{5}) \right\| = \frac{81}{10}$

2. Дате су тачке $P(1,1)$ и $D(1,-1)$, као и права $s: x + 2y - 1 = 0$.

а) [7п] Одредити праву d која садржи тачку D и нормална је на праву s , а затим одредити једначине обе симетрале углова које граде праве d и s .

б) [7п] Одредити једначину параболе која садржи тачку P и којој је права s оса симетрије, а права d директриса.

а) $s: x + 2y - 1 = 0 \Rightarrow \vec{n}_s = (1, 2)$

$d \perp s \Rightarrow \vec{d} = \vec{n}_s, D \in d \Rightarrow d: \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} \Rightarrow d: 2x - y - 3 = 0$

Означимо симетрале Δ_1 и $\Delta_2 \Rightarrow$ произв. $M \in \Delta_{1/2} \Rightarrow d(M, s) = d(M, d)$

$\Rightarrow \frac{|x+2y-1|}{\sqrt{5}} = \frac{|2x-y-3|}{\sqrt{5}} \Rightarrow x+2y-1 = \pm(2x-y-3)$

$\Rightarrow \Delta_1: -x+3y+2=0, \Delta_2: 3x+y-4=0$

б) Нека је $F(x_0, y_0)$ жижка параболе $\mathcal{P}$

1) $F \in s \Rightarrow x_0 + 2y_0 - 1 = 0 \Rightarrow x_0 = 1 - 2y_0$

2) $P \in \mathcal{P} \Rightarrow d(P, F) = d(P, d) \Rightarrow \sqrt{(1-2y_0-1)^2 + (y_0-1)^2} = \frac{|2-1-3|}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$

$\Rightarrow 5[4y_0^2 + y_0^2 - 2y_0 + 1] = 4 \Rightarrow 25y_0^2 - 10y_0 + 1 = 0 \Rightarrow (5y_0 - 1)^2 = 0 \Rightarrow y_0 = 1/5$

$\Rightarrow x_0 = 3/5$

$\Rightarrow F(3/5, 1/5)$

$M(x, y) \in \mathcal{P}$ произв. $\Rightarrow \mathcal{P}: d(M, F) = d(M, d) \Rightarrow \mathcal{P}: \sqrt{(x-3/5)^2 + (y-1/5)^2} = \frac{|2x-y-3|}{\sqrt{5}}$

$\Rightarrow \mathcal{P}: 5((x-3/5)^2 + (y-1/5)^2) = (2x-y-3)^2$

3. Дате су права $l: \frac{x}{6} = \frac{y+4}{2} = \frac{z}{5}$ и сфере $S_1: (x+3)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 1$ и $S_2: x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 4$.

а) [5п] Одредити формуле свих хомотетија којима се сфера S_1 пресликава на сферу S_2 .

б) [9п] Одредити једначине равни које садрже праву l и додирују сферу S_2 .

а) $S_1: C_1(-3, 2, 3), r_1 = 1 \mapsto S_2: C_2(0, 0, 1), r_2 = 2 \Rightarrow |C_1 C_2| = 2$

$k_1 = -2, C_1 \mapsto C_2 \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{bmatrix} \Rightarrow \chi_{A_1, -2}: \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix}$

$k_2 = 2, C_1 \mapsto C_2 \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \chi_{A_2, 2}: \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 \\ -4 \\ -5 \end{bmatrix}$

6) Нека је тражена равна $\alpha: Ax + By + Cz + D = 0$

1) $L(0, -4, 0) \in \ell \subset \alpha \Rightarrow -4B + D = 0 \Rightarrow D = 4B \Rightarrow D = -12A - 10C$

2) $\ell \subset \alpha \Rightarrow \vec{n}_\alpha \perp \vec{\ell} = (6, 2, 5) \Rightarrow 6A + 2B + 5C = 0 \Rightarrow B = -3A - \frac{5}{2}C$

3) α додирне $S_2 \Rightarrow d(C_2, \alpha) = r_2 \Rightarrow \frac{|C + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 2 \quad /^2$

$\Rightarrow (-12A - 9C)^2 = 4(A^2 + 9A^2 + 15AC + \frac{25}{4}C^2 + C^2)$

$144A^2 + 216AC + 81C^2 = 40A^2 + 60AC + 25C^2$

$104A^2 + 156AC + 52C^2 = 0 \quad /: 52C^2 \neq 0$

због би иначе $\vec{n}_\alpha$ био $\vec{0}$

$2(\frac{A}{C})^2 + 3(\frac{A}{C}) + 1 = 0$

$t = \frac{A}{C} \Rightarrow 2t^2 + 3t + 1 = 0 \Rightarrow t_{1/2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{4} = \frac{-3 \pm 1}{4} \rightarrow -1 = \frac{A}{C} \rightarrow -\frac{1}{2} = \frac{A}{C}$

I $C = -A \Rightarrow B = -\frac{1}{2}A \Rightarrow D = -2A$ $\xrightarrow{\text{нпр } A=2} \alpha_1: 2x - y - 2z - 4 = 0$

II $C = -2A \Rightarrow B = 2A \Rightarrow D = 8A$ $\xrightarrow{\text{нпр } A=1} \alpha_2: x + 2y - 2z + 8 = 0$

4. [16п] Површ $P: 2x^2 - y^2 + z^2 + 4xy + 4x - 8y + 4z + 6 = 0$ изометријском трансформацијом свести на канонски облик и написати формулу те трансформације. Која површ је у питању?

$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & -4 & 2 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \varphi_B(\lambda) = \dots = -(\lambda+2)(\lambda-3)(\lambda-1)$

$\lambda_1 = -2 \Rightarrow (B + 2E)u = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ c \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{matrix} b = -2a \\ c = 0 \end{matrix} \Rightarrow u_{-2} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} \\ -2/\sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix}$

$\lambda_2 = 3 \Rightarrow (B - 3E)u = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ c \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{matrix} a = 2b \\ c = 0 \end{matrix} \Rightarrow u_3 = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} & 0 \\ -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{5}}(x' + 2y'), y = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2x' + y'), z = z'$

$S': \frac{2}{5}(x'^2 + 4x'y' + 4y'^2) - \frac{1}{5}(4x'^2 - 4x'y' + y'^2) + z'^2 + \frac{4}{5}(-2x'^2 - 3x'y' + 2y'^2) + \frac{4}{\sqrt{5}}(x' + 2y') - \frac{8}{\sqrt{5}}(-2x' + y') + 4z' + 6 = 0$

$\Rightarrow S': -2x'^2 + 3y'^2 + z'^2 + 4\sqrt{5}x' + 4z' + 6 = 0$

$S': -2(x' - \sqrt{5})^2 + 10 + 3y'^2 + (z' + 2)^2 - 4 + 6 = 0$

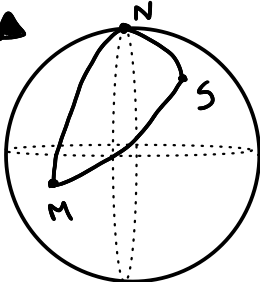
$S'': -2x''^2 + 3y''^2 + z''^2 = -12 \quad /: -12$

$S'': \frac{x''^2}{6} - \frac{y''^2}{4} - \frac{z''^2}{12} = 1$ **двограни хиперболоид**

смена $\begin{cases} x'' = x' - \sqrt{5} \\ y'' = y' \\ z'' = z' + 2 \end{cases}$
 $x = \frac{1}{\sqrt{5}}(x'' + 2y'' + \sqrt{5})$
 $y = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2x'' + y'' - 2\sqrt{5})$
 $z = z'' - 2$

формуле трансформ.

5. [12] Марсовци Пум и Пај су слетели на планету Земљу ($R = 6371 \text{ km}$), редом у градове Монтевидео ($30^\circ \text{S}, 59^\circ \text{W}$) и Санкт Петербург ($60^\circ \text{N}, 31^\circ \text{E}$). Одредити приближно растојање између Марсоваца Пум и Пај.



Означимо са М и S локације Монтевидео и Санкт Пет. Претпоставимо да је полупречник 1 и N северни пол.

M: $\varphi_M = -30^\circ, \theta_M = -59^\circ$ S: $\varphi_S = 60^\circ, \theta_S = 31^\circ$, N: $\varphi_N = 90^\circ$

$\cos \widehat{MS} = \cos \widehat{NM} \cos \widehat{NS} + \sin \widehat{NM} \sin \widehat{NS} \cos \angle MNS$

$\widehat{NM} = \varphi_N - \varphi_M = 120^\circ, \widehat{NS} = \varphi_N - \varphi_S = 30^\circ, \angle MNS = |\theta_M - \theta_S| = 90^\circ$

$\Rightarrow \cos \widehat{MS} = \cos 120^\circ \cos 30^\circ + \sin 120^\circ \sin 30^\circ \cdot \underline{\cos 90^\circ = 0}$

$\cos \widehat{MS} = (-\frac{1}{2}) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 0 = -\frac{\sqrt{3}}{4}$

Применом хомотетије, на Земљи добијамо

$\Rightarrow \widehat{MS} = R \arccos(-\frac{\sqrt{3}}{4}) = 6371 \arccos(-\frac{\sqrt{3}}{4}) \text{ km}$

Аналитичка геометрија (Геометрија 1)
СЕПТЕМБАР 3 - 06.11.2025. године
Време рада: 135мин. Срећно!



- Нека је $ABCD$ ромб чија је дужина странице a и пресечна тачка дијагонала AC и BD је O . Нека је M тачка за коју важи $\vec{MA} \circ \vec{MC} + \vec{MB} \circ \vec{MD} = d^2$, где је d дати позитиван реалан број.
 - [6п] Доказати да је тежиште скупа тачака $\{A, B, C, D\}$ тачка O , као и да је $2\|\vec{MO}\|^2 = a^2 + d^2$.
 - [8п] Израчунати $\|\vec{MA}\|^2 + \|\vec{MB}\|^2 + \|\vec{MC}\|^2 + \|\vec{MD}\|^2$ помоћу датих бројева a и d .
- Дате су права $p : \frac{x+1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{2}$ и тачка $C(0, 1, 4)$.
 - [9п] Одредити координате тачака A и B које припадају правој p тако да $\triangle ABC$ буде једнакокраки троугао са основицом AB дужине 12.
 - [4п] Одредити једначину висине $\triangle ABC$ из темена C као и дужину те висине.
 - [2п] Одредити површину $\triangle ABC$ помоћу векторског израза за површину троугла, а затим коришћењем дужине основице AB и висине из темена C . Проверити да су резултати једнаки.
- [15п] Изометријском трансформацијом свести криву $K: 3x^2 + 8xy + 9y^2 + 2x - y + 1 = 0$ на канонски облик. Која крива је у питању?
- [14п] Одредити једначину кружног конуса чија је оса права $o : \frac{x+1}{4} = \frac{y+1}{0} = \frac{z+1}{3}$, чији врх припада равни $\alpha : x + 2y - z + 1 = 0$ и који садржи тачку $M(1, 1, 1)$.
- На јединичној сфери дате су тачке $A(0, 0, 1)$ и $B(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$.
 - [5п] Одредити тачку C тако да сферни троугао ABC буде једнакокрак, где је $\widehat{AB} = \widehat{AC}$ и $\angle BAC = \frac{\pi}{2}$.
 - [7п] Одредити све странице и углове сферног троугла ABC , као и његову површину.

Аналитичка геометрија (Геометрија 1)
СЕПТЕМБАР 3 - 06.11.2025. године
Време рада: 135мин. Срећно!



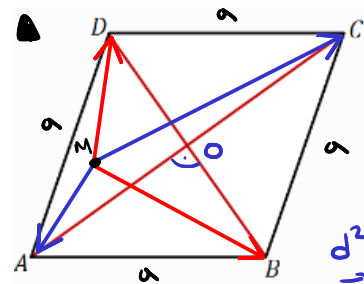
- Нека је $ABCD$ ромб чија је дужина странице a и пресечна тачка дијагонала AC и BD је O . Нека је M тачка за коју важи $\vec{MA} \circ \vec{MC} + \vec{MB} \circ \vec{MD} = d^2$, где је d дати позитиван реалан број.
 - [6п] Доказати да је тежиште скупа тачака $\{A, B, C, D\}$ тачка O , као и да је $2\|\vec{MO}\|^2 = a^2 + d^2$.
 - [8п] Израчунати $\|\vec{MA}\|^2 + \|\vec{MB}\|^2 + \|\vec{MC}\|^2 + \|\vec{MD}\|^2$ помоћу датих бројева a и d .
- Дате су права $p : \frac{x+1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{2}$ и тачка $C(0, 1, 4)$.
 - [9п] Одредити координате тачака A и B које припадају правој p тако да $\triangle ABC$ буде једнакокраки троугао са основицом AB дужине 12.
 - [4п] Одредити једначину висине $\triangle ABC$ из темена C као и дужину те висине.
 - [2п] Одредити површину $\triangle ABC$ помоћу векторског израза за површину троугла, а затим коришћењем дужине основице AB и висине из темена C . Проверити да су резултати једнаки.
- [15п] Изометријском трансформацијом свести криву $K: 3x^2 + 8xy + 9y^2 + 2x - y + 1 = 0$ на канонски облик. Која крива је у питању?
- [14п] Одредити једначину кружног конуса чија је оса права $o : \frac{x+1}{4} = \frac{y+1}{0} = \frac{z+1}{3}$, чији врх припада равни $\alpha : x + 2y - z + 1 = 0$ и који садржи тачку $M(1, 1, 1)$.
- На јединичној сфери дате су тачке $A(0, 0, 1)$ и $B(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$.
 - [5п] Одредити тачку C тако да сферни троугао ABC буде једнакокрак, где је $\widehat{AB} = \widehat{AC}$ и $\angle BAC = \frac{\pi}{2}$.
 - [7п] Одредити све странице и углове сферног троугла ABC , као и његову површину.



1. Нека је $ABCD$ ромб чија је дужина странице a и пресечна тачка дијагонала AC и BD је O . Нека је M тачка за коју важи $\vec{MA} \cdot \vec{MC} + \vec{MB} \cdot \vec{MD} = d^2$, где је d дати позитиван реалан број.

а) [6п] Доказати да је тежиште скупа тачака $\{A, B, C, D\}$ тачка O , као и да је $2\|\vec{MO}\|^2 = a^2 + d^2$.

б) [8п] Израчунати $\|\vec{MA}\|^2 + \|\vec{MB}\|^2 + \|\vec{MC}\|^2 + \|\vec{MD}\|^2$ помоћу датих бројева a и d .



а) O тежиште $ABCD \Leftrightarrow (\forall O') \vec{O'O} = \frac{1}{4}(\vec{O'A} + \vec{O'B} + \vec{O'C} + \vec{O'D})$

$$\vec{O'O} = \frac{1}{4}(\vec{O'O} + \vec{O'A} + \vec{O'O} + \vec{O'B} + \vec{O'O} + \vec{O'C} + \vec{O'O} + \vec{O'D})$$

$$= \frac{1}{4}(\vec{O'O} + \vec{O'A} + \vec{O'O} + \vec{O'B} + \vec{O'O} + \vec{O'C} + \vec{O'O} + \vec{O'D}) = \vec{O'O} \checkmark$$

$\Rightarrow O$ је тежиште $ABCD$

$$d^2 = \vec{MA} \cdot \vec{MC} + \vec{MB} \cdot \vec{MD} = (\vec{MO} + \vec{OA}) \cdot (\vec{MO} + \vec{OC}) + (\vec{MO} + \vec{OB}) \cdot (\vec{MO} + \vec{OD})$$

$$= \|\vec{MO}\|^2 + \vec{MO} \cdot \vec{OC} + \vec{OA} \cdot \vec{MO} + \vec{OA} \cdot \vec{OC} + \|\vec{MO}\|^2 + \vec{MO} \cdot \vec{OD} + \vec{OB} \cdot \vec{MO} + \vec{OB} \cdot \vec{OD}$$

$$\vec{OC} = -\vec{OA} \quad \vec{OD} = -\vec{OB} \Rightarrow 2\|\vec{MO}\|^2 - (\|\vec{OA}\|^2 + \|\vec{OB}\|^2) = 2\|\vec{MO}\|^2 - a^2 \Rightarrow 2\|\vec{MO}\|^2 = a^2 + d^2$$

$b = a^2$ (ПИТАГОРА)

$$\|\vec{MA}\|^2 + \|\vec{MB}\|^2 + \|\vec{MC}\|^2 + \|\vec{MD}\|^2 = \vec{MA} \cdot \vec{MA} + \vec{MB} \cdot \vec{MB} + \vec{MC} \cdot \vec{MC} + \vec{MD} \cdot \vec{MD}$$

$$= (\vec{MA} + \vec{MC}) \cdot (\vec{MA} + \vec{MC}) - 2\vec{MA} \cdot \vec{MC} + (\vec{MB} + \vec{MD}) \cdot (\vec{MB} + \vec{MD}) - 2\vec{MB} \cdot \vec{MD} = \textcircled{*}$$

$$+ \vec{MA} + \vec{MC} = \vec{MO} + \vec{OA} + \vec{MO} + \vec{OC} = 2\vec{MO}, \quad \vec{MB} + \vec{MD} = \vec{MO} + \vec{OB} + \vec{MO} + \vec{OD} = 2\vec{MO} \quad \checkmark$$

$$\textcircled{*} = 2\vec{MO} \cdot 2\vec{MO} - 2(\vec{MA} \cdot \vec{MC} + \vec{MB} \cdot \vec{MD}) + 2\vec{MO} \cdot 2\vec{MO}$$

$$= 8\|\vec{MO}\|^2 - 2d^2 \stackrel{\textcircled{*}}{=} 4(a^2 + d^2) - 2d^2 = \boxed{4a^2 + 2d^2}$$

2. Дате су права $p: \frac{x+1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{2}$ и тачка $C(0, 1, 4)$. $\Rightarrow p: x = 2t-1, y = t, z = 2t+1, t \in \mathbb{R}$

а) [9п] Одредити координате тачака A и B које припадају правој p тако да $\triangle ABC$ буде једнакокраки троугао са основицом AB дужине 12.

б) [4п] Одредити једначину висине $\triangle ABC$ из темена C као и дужину те висине.

в) [2п] Одредити површину $\triangle ABC$ помоћу векторског израза за површину троугла, а затим коришћењем дужине основице AB и висине из темена C . Проверити да су резултати једнаки.

а) $A, B \in p \Rightarrow A(2t_1-1, t_1, 2t_1+1), B(2t_2-1, t_2, 2t_2+1)$ за неке $t_{1/2}$

$$1) 12 = AB = d(A, B) = \sqrt{(2t_1-2t_2)^2 + (t_1-t_2)^2 + (2t_1-2t_2)^2} = \sqrt{9(t_1-t_2)^2} \quad \checkmark$$

$$\Rightarrow 144 = 9(t_1-t_2)^2 \Rightarrow t_1-t_2 = \pm 4 \Rightarrow t_1 = 4+t_2 \quad \begin{matrix} \text{свеједно } \pm 4 \\ \text{јер ће само} \\ \text{ЗАМЕНИТИ } A \text{ и } B \end{matrix}$$

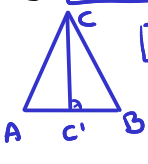
$$2) d(A, C) = d(B, C) \Rightarrow \sqrt{(2t_1-1)^2 + (t_1-1)^2 + (2t_1-3)^2} = \sqrt{(2t_2-1)^2 + (t_2-1)^2 + (2t_2-3)^2}$$

$$\Rightarrow 9t_1^2 - 18t_1 + 11 = 9t_2^2 - 18t_2 + 11 \quad \text{/:9}$$

$$t_1^2 - 2t_1 = t_2^2 - 2t_2 \xrightarrow{+1} 16 + 8t_2 + t_2^2 - 8 - 2t_2 = t_2^2 - 2t_2$$

$$\Rightarrow t_2 = -1 \Rightarrow t_1 = 3 \Rightarrow \boxed{A(5, 3, 7), B(-3, -1, -1)}$$

б) **I НАЧИН** $\triangle ABC$ једнакокрак $\Rightarrow C' = S(AB) \Rightarrow \underline{C'(1, 1, 3)}$



II НАЧИН C' пројекција C на ПРАВУ $p = AB$

$$1) \alpha \text{ т.д } C \in \alpha, \alpha \perp p \Rightarrow \vec{n}_\alpha = \vec{p} = (2, 1, 2)$$

$$\Rightarrow \alpha: 2(x-0) + 1(y-1) + 2(z-4) = 0 \Rightarrow \alpha: 2x + y + 2z - 9 = 0$$

$$2) p \cap \alpha: 2(2t-1) + t + 2(2t+1) - 9 = 0 \Rightarrow 9t - 9 = 0 \Rightarrow \underline{t = 1}$$

$$\Rightarrow \underline{C'(1, 1, 3)} \quad \underline{C(0, 1, 4)} \Rightarrow \left[h_c: \frac{x}{1} = \frac{y-1}{0} = \frac{z-4}{-1} \right]$$

$$h_c = \|\vec{CC'}\| = \|(1, 0, -1)\| = \sqrt{2}$$

$$\textcircled{в)} P = \frac{1}{2} \|\vec{AB} \times \vec{AC}\| = \frac{1}{2} \sqrt{4^2 + 16^2 + 4^2} = \frac{1}{2} \sqrt{16 \cdot 18} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 \sqrt{2} = \boxed{6\sqrt{2}}$$

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -8 & -4 & -8 \\ -5 & -2 & -3 \end{vmatrix} = (-4, 16, -4) \quad P = \frac{c \cdot h_c}{2} = \frac{12 \cdot \sqrt{2}}{2} = \boxed{6\sqrt{2}} \quad \checkmark$$

3. [15п] Изометријском трансформацијом свести криву $K: 3x^2 + 8xy + 9y^2 + 2x - y + 1 = 0$ на канонски облик. Која крива је у питању?

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 4 & 9 & -1/2 \\ 1 & -1/2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 9 \end{bmatrix} \Rightarrow \varphi_B(\lambda) = (3-\lambda)(9-\lambda) - 16 = \lambda^2 - 12\lambda + 11 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 11$$

$$\dots \varphi_1 = \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right), \varphi_{11} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2x' + y') \\ y = \frac{1}{\sqrt{5}}(x' + 2y') \end{cases}$$

$$\Rightarrow \mathcal{K}' : \frac{3}{5}(4x'^2 - 4x'y' + y'^2) + \frac{8}{5}(-2x'^2 - 3x'y' + 2y'^2) + \frac{9}{5}(x'^2 + 4x'y' + 4y'^2) + \frac{2}{\sqrt{5}}(-2x' + y') - \frac{1}{\sqrt{5}}(x' + 2y') + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \mathcal{K}' : x'^2 + 11y'^2 - \sqrt{5}x' + 1 = 0 \Rightarrow \mathcal{K}' : \left(x' - \frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 + 11y'^2 = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x'' = x' - \frac{\sqrt{5}}{2} \\ y'' = y' \end{cases} \Rightarrow \mathcal{K}'' : \frac{x''^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} + \frac{y''^2}{\left(\frac{1}{2\sqrt{11}}\right)^2} = 1 \Rightarrow \text{еллипса}$$

4. [14п] Одредити једначину кружног конуса чија је оса права $o : \frac{x+1}{4} = \frac{y+1}{0} = \frac{z+1}{3}$, чији врх припада равни $\alpha : x + 2y - z + 1 = 0$ и који садржи тачку $M(1, 1, 1)$.

1) Врх конуса $V = \alpha \cap o$:

$$\begin{cases} x = 4t - 1 \\ y = -1 \\ z = 3t - 1 \end{cases}, t \in \mathbb{R} \rightarrow \begin{cases} 4t - 1 - 2 - 3t + 1 + 1 = 0 \\ \Rightarrow t - 1 = 0 \\ \Rightarrow t = 1 \end{cases} \Rightarrow V(3, -1, 2)$$

$$2) \varphi = \angle(O, VM) \Rightarrow \cos \varphi = \frac{|\vec{O} \cdot \vec{VM}|}{\|\vec{O}\| \cdot \|\vec{VM}\|} = \frac{|-8 + 0 - 3|}{\sqrt{25} \cdot \sqrt{9}} = \frac{11}{15}$$

$$\vec{O} = (4, 0, 3), \vec{VM} = (-2, 2, -1)$$

$$3) N(x, y, z) \in \mathcal{K} \text{ пројекција} \Rightarrow \mathcal{K} : \angle(O, VN) = \arccos \frac{11}{15} = \varphi$$

$$\Rightarrow \frac{11}{15} = \cos \varphi = \frac{|(4, 0, 3) \cdot (x-3, y+1, z-2)|}{5 \sqrt{(x-3)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2}} = \frac{|4(x-3) + 3(z-2)|}{5 \sqrt{(x-3)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2}}$$

$$\Rightarrow \mathcal{K} : 121[(x-3)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2] = 9(4x + 3z - 18)^2$$

5. На јединичној сфери дате су тачке $A(0, 0, 1)$ и $B(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$.

а) [5п] Одредити тачку C тако да сферни троугао ABC буде једнакокрак, где је $\widehat{AB} = \widehat{AC}$ и $\angle BAC = \frac{\pi}{2}$.

б) [7п] Одредити све стране и углове сферног троугла ABC , као и његову површину.

$$A(0, 0, 1) \Rightarrow A : \varphi_A = \pi/2, \theta_A - \text{недеф.}$$

$$B(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) = (\cos \theta_B \cos \varphi_B, \sin \theta_B \cos \varphi_B, \sin \theta_B \sin \varphi_B) \Rightarrow \begin{cases} \varphi_B = \pi/4 \\ \theta_B = \pi/2 \end{cases}$$

$$\widehat{AB} = \varphi_A - \varphi_B = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

$$\widehat{AC} = \varphi_A - \varphi_C = \frac{\pi}{2} - \varphi_C \Rightarrow \varphi_C = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{Нека је } \theta_C : \varphi_C = \frac{\pi}{4}, \theta_C = 0$$

$$\angle BAC = \frac{\pi}{2} = |\theta_B - \theta_C| = |\frac{\pi}{2} - \theta_C| \Rightarrow \theta_C = 0 \quad \checkmark \quad \theta_C = \pi$$

$$\Rightarrow b = c = \frac{\pi}{4}, a = \frac{\pi}{2}$$

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \alpha \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6}}{4} \cos \alpha$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{3}$$

$$b = c \Rightarrow B = \alpha : \cos b = \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos B$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cos B \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6}}{4} \cos B$$

$$\Rightarrow \cos B = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow B = \alpha = \arccos \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$P = \alpha + B + \alpha - \pi = 2\arccos \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{\pi}{2}$$

Аналитичка геометрија (Геометрија 1)
ДЕЦЕМБАР ПС - 28.12.2025. године
Време рада: 135мин. Срећно!



- Нека су O и H центар описаног круга и ортоцентар оштроуглог троугла ABC , редом.
 - [6п] Ако постоје, одредити реалне бројеве α , β и γ такве да је $\overrightarrow{OA_1} = \alpha \overrightarrow{AH}$, $\overrightarrow{OB_1} = \beta \overrightarrow{BH}$ и $\overrightarrow{OC_1} = \gamma \overrightarrow{CH}$, при чему су тачке A_1 , B_1 и C_1 средишта страница BC , AC и AB , редом.
 - [5п] Ако су T_1 , T_2 и T_3 тежишта троуглова HBC , HCA и HAB , редом, доказати да важи $\overrightarrow{AT_1} + \overrightarrow{BT_2} + \overrightarrow{CT_3} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$.
 - [5п] Ако је P површина троугла ABH и тачке D и E такве да је $\overrightarrow{OD} = -7\overrightarrow{OB_1}$ и $\overrightarrow{OE} = 8\overrightarrow{A_1E}$, изразити површину троугла ODE у функцији од P .
- Дате су тачка $T(0, 2, 3)$, права $p: \frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{1}$ и раван $\alpha: x - 3y + 4z + 2025 = 0$.
 - [7п] Одредити једначину равни β која садржи праву p и нормална је на раван α .
 - [7п] Одредити једначину праве l која садржи тачку T , паралелна је равни α и сече праву p .
- [15п] Одредити геометријско место тачака из којих се хипербола $H: 9x^2 - 16y^2 = 144$ види под правим углом.
- [13п] Површ $x^2 + 2y^2 + z^2 - 2xy - 2yz = 1$ изометријском трансформацијом свести на канонски облик и написати формуле те трансформације. Која површ је у питању?
- [12] Одредити растојање између градова Отава ($45^\circ N, 75^\circ W$) и Кејптаун ($45^\circ S, 15^\circ E$), ако се зна да је полупречник планете Земље приближно $R = 6371 km$.

Аналитичка геометрија (Геометрија 1)
ДЕЦЕМБАР ПС - 28.12.2025. године
Време рада: 135мин. Срећно!



- Нека су O и H центар описаног круга и ортоцентар оштроуглог троугла ABC , редом.
 - [6п] Ако постоје, одредити реалне бројеве α , β и γ такве да је $\overrightarrow{OA_1} = \alpha \overrightarrow{AH}$, $\overrightarrow{OB_1} = \beta \overrightarrow{BH}$ и $\overrightarrow{OC_1} = \gamma \overrightarrow{CH}$, при чему су тачке A_1 , B_1 и C_1 средишта страница BC , AC и AB , редом.
 - [5п] Ако су T_1 , T_2 и T_3 тежишта троуглова HBC , HCA и HAB , редом, доказати да важи $\overrightarrow{AT_1} + \overrightarrow{BT_2} + \overrightarrow{CT_3} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$.
 - [5п] Ако је P површина троугла ABH и тачке D и E такве да је $\overrightarrow{OD} = -7\overrightarrow{OB_1}$ и $\overrightarrow{OE} = 8\overrightarrow{A_1E}$, изразити површину троугла ODE у функцији од P .
- Дате су тачка $T(0, 2, 3)$, права $p: \frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{1}$ и раван $\alpha: x - 3y + 4z + 2025 = 0$.
 - [7п] Одредити једначину равни β која садржи праву p и нормална је на раван α .
 - [7п] Одредити једначину праве l која садржи тачку T , паралелна је равни α и сече праву p .
- [15п] Одредити геометријско место тачака из којих се хипербола $H: 9x^2 - 16y^2 = 144$ види под правим углом.
- [13п] Површ $x^2 + 2y^2 + z^2 - 2xy - 2yz = 1$ изометријском трансформацијом свести на канонски облик и написати формуле те трансформације. Која површ је у питању?
- [12] Одредити растојање између градова Отава ($45^\circ N, 75^\circ W$) и Кејптаун ($45^\circ S, 15^\circ E$), ако се зна да је полупречник планете Земље приближно $R = 6371 km$.

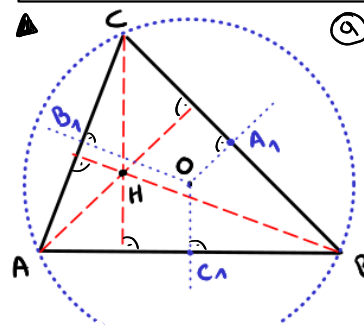


1. Нека су O и H центар описаног круга и ортоцентар оштроуглог троугла ABC , редом.

а) [6п] Ако постоје, одредити реалне бројеве α , β и γ такве да је $\vec{OA_1} = \alpha \vec{AH}$, $\vec{OB_1} = \beta \vec{BH}$ и $\vec{OC_1} = \gamma \vec{CH}$, при чему су тачке A_1 , B_1 и C_1 средишта страница BC , AC и AB , редом.

б) [5п] Ако су T_1 , T_2 и T_3 тежишта троуглова HBC , HCA и HAB , редом, доказати да важи $\vec{AT_1} + \vec{BT_2} + \vec{CT_3} = \frac{2}{3}(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC})$.

в) [5п] Ако је P површина троугла ABH и тачке D и E такве да је $\vec{OD} = -7\vec{OB_1}$ и $\vec{OE} = 8\vec{A_1E}$, изразити површину троугла ODE у функцији од P .



а) Како је $AH \perp BC$ (висина) и $OA_1 \perp BC$ (симетрала странице)

$\Rightarrow AH \parallel OA_1 \Rightarrow (\exists \alpha) \vec{OA_1} = \alpha \vec{AH}$. Слично, $\vec{OB_1} = \beta \vec{BH}$, $\vec{OC_1} = \gamma \vec{CH}$.

Позитно, $\vec{A_1B_1} = \vec{A_1C} + \vec{CB_1} = \frac{1}{2} \vec{BC} + \frac{1}{2} \vec{CA} = \frac{1}{2} (\vec{BC} + \vec{CA}) = \frac{1}{2} \vec{BA}$

$\Rightarrow \vec{A_1O} + \vec{OB_1} = \vec{A_1B_1} = \frac{1}{2} \vec{BA} = \frac{1}{2} (\vec{BH} + \vec{HA})$

$\Rightarrow -\alpha \vec{AH} + \beta \vec{BH} = \frac{1}{2} \vec{BH} + \frac{1}{2} \vec{HA} \Rightarrow \beta = \frac{1}{2}, \alpha = \frac{1}{2}$ (због су $\vec{AH}$ и $\vec{BH}$ линеарно независни)

Слично, $\vec{A_1C_1} = \frac{1}{2} \vec{CA} \Rightarrow \gamma = \frac{1}{2} = \alpha \Rightarrow \boxed{\vec{OA_1} = \frac{1}{2} \vec{AH}, \vec{OB_1} = \frac{1}{2} \vec{BH}, \vec{OC_1} = \frac{1}{2} \vec{CH}}$

б) T_1 тежиште $\triangle HBC \Rightarrow \vec{AT_1} = \frac{1}{3} (\vec{AH} + \vec{AB} + \vec{AC})$ T_3 тежиште $\triangle HAB$

T_2 тежиште $\triangle HCA \Rightarrow \vec{BT_2} = \frac{1}{3} (\vec{BH} + \vec{BC} + \vec{BA}) \Rightarrow \vec{CT_3} = \frac{1}{3} (\vec{CH} + \vec{CA} + \vec{CB})$

$\Rightarrow \vec{AT_1} + \vec{BT_2} + \vec{CT_3} = \frac{1}{3} (\vec{AH} + \vec{AB} + \vec{AC} + \vec{BH} + \vec{BC} + \vec{BA} + \vec{CH} + \vec{CA} + \vec{CB}) = \frac{1}{3} (2\vec{OA_1} + 2\vec{OB_1} + 2\vec{OC_1})$

в) $P = P_{ABH} = \frac{1}{2} \|\vec{HA} \times \vec{HB}\| = \frac{1}{2} \|(-2)\vec{OA_1} \times (-2)\vec{OB_1}\| = 2 \|\vec{OA_1} \times \vec{OB_1}\| = \frac{1}{3} (\vec{OB_1} + \vec{OC_1} + \vec{OA_1} + \vec{OC_1} + \vec{OA_1} + \vec{OB_1})$

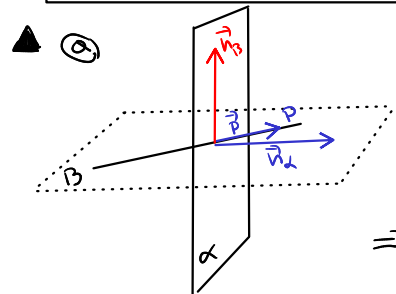
$\vec{OD} = -7\vec{OB_1}$, $\vec{OE} = 8\vec{A_1E} = 8\vec{A_1O} + 8\vec{OE} \Rightarrow \vec{OE} = \frac{8}{7} \vec{OA_1}$

$P_{ODE} = \frac{1}{2} \|\vec{OD} \times \vec{OE}\| = \frac{1}{2} \|-7\vec{OB_1} \times \frac{8}{7} \vec{OA_1}\| = 4 \|\vec{OA_1} \times \vec{OB_1}\| \Rightarrow \boxed{P_{ODE} = 2P}$ (због $\vec{OA_1} = \frac{1}{2}(\vec{OB_1} + \vec{OC_1})$ и слично $\vec{OB_1}$ и $\vec{OC_1}$)

2. Дате су тачка $T(0, 2, 3)$, права $p: \frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{1}$ и раван $\alpha: x - 3y + 4z + 2025 = 0$.

а) [7п] Одредити једначину равни β која садржи праву p и нормална је на раван α .

б) [7п] Одредити једначину праве l која садржи тачку T , паралелна је равни α и сече праву p .



$\beta \perp \alpha$, $\beta \perp p$

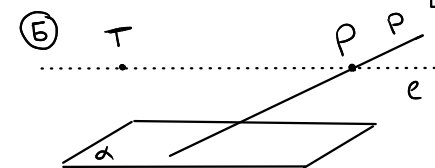
1) $P(1, 2, 3) \in p \subset \beta \Rightarrow P \in \beta$ ✓

2) $p \subset \beta \Rightarrow \vec{n}_\beta \perp \vec{p} = (3, 2, 1)$

3) $\beta \perp \alpha \Rightarrow \vec{n}_\beta \perp \vec{n}_\alpha = (1, -3, 4)$

$\Rightarrow \beta: -1(x-1) + 1(y-2) + 1(z-3) = 0$

$\boxed{\beta: -x + y + z - 4 = 0}$



$P(3t+1, 2t+2, t+3) \in p$ произвољна

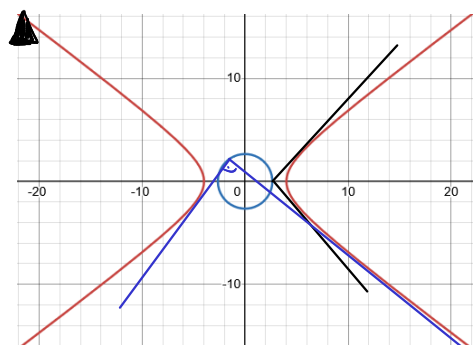
$l = PT$ за $P \perp \alpha$, $\vec{PT} \parallel \alpha \Rightarrow T \in l$, l сече p , $l \parallel \alpha$

$\vec{PT} = (-3t-1, -2t, -t)$

$0 = \vec{PT} \cdot \vec{n}_\alpha = (-3t-1, -2t, -t) \cdot (1, -3, 4) = -3t-1+6t-4t \Rightarrow t = -1$

$\Rightarrow P(-2, 0, 2)$, $\vec{e} = \vec{PT} = (2, 2, 1) \Rightarrow \boxed{l: \frac{x}{2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{1}}$

3. [15п] Одредити геометријско место тачака из којих се хипербола $H: 9x^2 - 16y^2 = 144$ види под правим углом.



$M(x_0, y_0)$ произвољна, $l: y = kx + n$ ТАНГЕНТА

1) l ТАНГЕНТА НА $H: 9x^2 - 16y^2 = 144 \Leftrightarrow \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$

$\Rightarrow l$ има једну пресечну тачку са H

$\Rightarrow 9x^2 - 16(kx+n)^2 = 144$

$\Rightarrow 9x^2 - 16k^2x^2 - 32kxn - 16n^2 = 144$

$\Rightarrow (9-16k^2)x^2 - 32kxn - 16n^2 - 144 = 0$

l ТАНГ. НА $H \Rightarrow 0 = D = (32kn)^2 + 4(9-16k^2) \cdot 16(n^2+9)$

$$\Rightarrow 16 \cdot 64 K^2 n^2 + 64 (9n^2 + 81 - 16K^2 n^2 - 144K^2) = 0 \quad / : 64$$

$$\Rightarrow 16K^2 n^2 + 9n^2 + 81 - 16K^2 n^2 - 144K^2 = 0 \quad + \text{услов додира}$$

$$\Rightarrow 144K^2 - 81 = 9n^2 \quad / : 9 \Rightarrow 16K^2 - 9 = n^2 \quad a^2 K^2 - b^2 = n^2$$

⊗ Н се види под правим углом из М $\Leftrightarrow$ тангенте из М на Н су метјубно ортогоналне

$$2) M(x_0, y_0) \in t \Rightarrow y_0 = Kx_0 + n \Rightarrow n = y_0 - Kx_0$$

$$3) t \perp t_1 \text{ на } H \Rightarrow 16K^2 - 9 = (y_0 - Kx_0)^2 = y_0^2 - 2Kx_0y_0 + K^2x_0^2$$

$$\Rightarrow (16 - x_0^2)K^2 + 2x_0y_0K - (9 + y_0^2) = 0$$

$$t_1 \perp t_2 \Leftrightarrow -1 = K_1 \cdot K_2 \stackrel{C/A}{=} \frac{-9 - y_0^2}{16 - x_0^2} \Leftrightarrow x_0^2 - 16 = -9 - y_0^2$$

$$\Leftrightarrow x_0^2 + y_0^2 = 7 \Leftrightarrow M \in \mathbb{R}(0, \sqrt{7}) \Rightarrow \text{ГМТ је круг } \mathbb{R}$$

4. [13п] Површ $x^2 + 2y^2 + z^2 - 2xy - 2yz = 1$ изометријском трансформацијом свести на канонски облик и написати формуле те трансформације. Која површ је у питању?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \varphi_B(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ \lambda-1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 1-\lambda \\ -1 & 2-\lambda & -2 \\ \lambda-1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (\lambda-1)(2-2+3\lambda-\lambda^2) = -\lambda(\lambda-1)(\lambda-3)$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 0$$

$$B \varphi = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{aligned} a - b &= 0 \\ -a + 2b - c &= 0 \\ -b + c &= 0 \end{aligned}$$

$$a = b, c = b$$

$$\Rightarrow \varphi_0 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2 = 1$$

$$(B - E) \varphi = 0$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{aligned} -b &= 0 \\ -a + b - c &= 0 \\ -b &= 0 \end{aligned}$$

$$b = 0 \Rightarrow a = -c$$

$$\Rightarrow \varphi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_3 = 3$$

$$(B - 3E) \varphi = 0$$

$$\begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{aligned} -2a - b &= 0 \\ -a - b - c &= 0 \\ -b - 2c &= 0 \end{aligned}$$

$$b = -2c \Rightarrow a = c$$

$$\Rightarrow \varphi_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

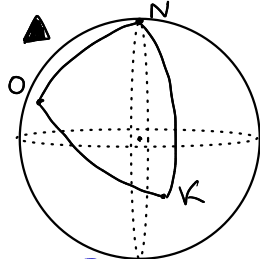
$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$$

$$A' = R^T A R = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 3/\sqrt{6} & -\sqrt{6} & 3/\sqrt{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathcal{S}': y'^2 + 3z'^2 - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{\mathcal{S}': y'^2 + 3z'^2 = 1} \text{ елиптички цилиндар}$$

5. [12] Одредити растојање између градова Отава ($45^\circ N, 75^\circ W$) и Кејптаун ($45^\circ S, 15^\circ E$), ако се зна да је полупречник планете Земље приближно $R = 6371 \text{ km}$.



Означимо са О и К локације Отаве и Кејптауна. Претпоставимо да је $R = 1$ и N северни пол.

О: $\varphi_0 = 45^\circ$, $\theta_0 = -75^\circ$, К: $\varphi_K = -45^\circ$, $\theta_K = 15^\circ$, N: $\varphi_N = 90^\circ$.
Косинусна теорема за сферни триаголник ONK

$$\Rightarrow \cos \widehat{OK} = \cos \widehat{NO} \cdot \cos \widehat{NK} + \sin \widehat{NO} \cdot \sin \widehat{NK} \cdot \cos \angle ONK$$

$$\widehat{NO} = \varphi_N - \varphi_0 = 45^\circ = \frac{\pi}{4}, \quad \widehat{NK} = \varphi_N - \varphi_K = 135^\circ = \frac{3\pi}{4}, \quad \angle ONK = |\theta_0 - \theta_K| = 90^\circ = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \cos \widehat{OK} = \cos \frac{\pi}{4} \cdot \cos \frac{3\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{4} \cdot \sin \frac{3\pi}{4} \cdot \cos \frac{\pi}{2} = 0$$

$$\cos \widehat{OK} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 0 = -\frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{OK} = \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$$

Применом хомотетије, на Земљи

$$\Rightarrow \widehat{OK} = 6371 \cdot \frac{2\pi}{3} \text{ km} = \frac{12742}{3} \pi \text{ km}$$

Аналитичка геометрија (Геометрија 1)
ЈАНУАР 1 - 14. 2. 2026. године
Време рада: 135мин. Срећно!



1. Нека су $A(-1, -2, 7)$, $B(5, 0, -4)$, $D(0, 1, 3)$ и $D_1(-3, -1, -2)$ четири темена паралелоипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$.
 - а) [4п] Израчунати координате преосталих темена паралелоипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$.
 - б) [6п] Израчунати запремину паралелоипеда и висину која одговара пљосни $ADD_1 A_1$.
 - ц) [5п] Одредити угао између правих BC и DD_1 и дужину пројекције вектора $\overrightarrow{DD_1}$ на вектор $\overrightarrow{BC}$.
2. Дате су тачка $M(-1, 1, 1)$ и права $p: y = 0, x - z + 1 = 0$.
 - а) [7п] Одредити једначину нормале n на праву p која садржи тачку M .
 - б) [7п] Одредити једначину равни која садржи нормалу n и нормална је на раван Oxy .
3. [14п] Изометријском трансформацијом свести криву $\mathcal{K}: 3x^2 + 3y^2 + 2xy - 2x - 4y - 9 = 0$ на канонски облик и написати формуле те трансформације. Која крива је у питању и колики је њен ексцентрицитет?
4. [14п] Нека је $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + \frac{9}{4}z^2 - 3xz + 6x - y - 7z + 5 = 0\}$ и $\mathcal{C}$ цилиндар чије су изводнице паралелне правој $p: \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{4} = \frac{z}{2}$, а који садржи параболу $y = x^2, z = 2$. Доказати да је $S = \mathcal{C}$.
5. а) [6п] Одредити формуле афиног пресликавања простора које представља централну симетрију S_T у односу на тачку $T(-2, 1, -3)$. Одредити слику σ површи $x^2 + 8x + y^2 - 4y + z^2 + 12z + 55 = 0$ при централној симетрији S_T и доказати да је σ јединична сфера.
б) [7п] Сферни троугао ABC на сфери σ (из дела а)) има два једнака угла $\alpha = \beta = \frac{\pi}{6}$ и трећи угао $\gamma = \frac{3\pi}{4}$. Израчунати површину и ивице тог троугла.

Аналитичка геометрија (Геометрија 1)
ЈАНУАР 1 - 14. 2. 2026. године
Време рада: 135мин. Срећно!



1. Нека су $A(-1, -2, 7)$, $B(5, 0, -4)$, $D(0, 1, 3)$ и $D_1(-3, -1, -2)$ четири темена паралелоипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$.
 - а) [4п] Израчунати координате преосталих темена паралелоипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$.
 - б) [6п] Израчунати запремину паралелоипеда и висину која одговара пљосни $ADD_1 A_1$.
 - ц) [5п] Одредити угао између правих BC и DD_1 и дужину пројекције вектора $\overrightarrow{DD_1}$ на вектор $\overrightarrow{BC}$.
2. Дате су тачка $M(-1, 1, 1)$ и права $p: y = 0, x - z + 1 = 0$.
 - а) [7п] Одредити једначину нормале n на праву p која садржи тачку M .
 - б) [7п] Одредити једначину равни која садржи нормалу n и нормална је на раван Oxy .
3. [14п] Изометријском трансформацијом свести криву $\mathcal{K}: 3x^2 + 3y^2 + 2xy - 2x - 4y - 9 = 0$ на канонски облик и написати формуле те трансформације. Која крива је у питању и колики је њен ексцентрицитет?
4. [14п] Нека је $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + \frac{9}{4}z^2 - 3xz + 6x - y - 7z + 5 = 0\}$ и $\mathcal{C}$ цилиндар чије су изводнице паралелне правој $p: \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{4} = \frac{z}{2}$, а који садржи параболу $y = x^2, z = 2$. Доказати да је $S = \mathcal{C}$.
5. а) [6п] Одредити формуле афиног пресликавања простора које представља централну симетрију S_T у односу на тачку $T(-2, 1, -3)$. Одредити слику σ површи $x^2 + 8x + y^2 - 4y + z^2 + 12z + 55 = 0$ при централној симетрији S_T и доказати да је σ јединична сфера.
б) [7п] Сферни троугао ABC на сфери σ (из дела а)) има два једнака угла $\alpha = \beta = \frac{\pi}{6}$ и трећи угао $\gamma = \frac{3\pi}{4}$. Израчунати површину и ивице тог троугла.



1. Нека су $A(-1, -2, 7)$, $B(5, 0, -4)$, $D(0, 1, 3)$ и $D_1(-3, -1, -2)$ четири темена паралелоипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$.
- а) [4п] Израчунати координате преосталих темена паралелоипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$.
- б) [6п] Израчунати запремину паралелоипеда и висину која одговара плосни $ADD_1 A_1$.
- в) [5п] Одредити угао између правих BC и DD_1 и дужину пројекције вектора $\overrightarrow{DD_1}$ на вектор $\overrightarrow{BC}$.

а) $ABCD$ ПАРАЛЕЛОГРАМ $\Rightarrow \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$, $C = (x_c, y_c, z_c)$
 $\Rightarrow (1, 3, -4) = (x_c - 5, y_c, z_c + 4) \Rightarrow C(6, 3, -8)$
 $ADD_1 A_1$ ПАРАЛЕЛОГРАМ $\Rightarrow \overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{DD_1}$, $A_1 = (x_{A_1}, y_{A_1}, z_{A_1})$
 $\Rightarrow (x_{A_1} + 1, y_{A_1} + 2, z_{A_1} - 7) = (-3, -2, -5) \Rightarrow A_1(-4, -4, 2)$
 $AB B_1 A_1$ ПАРАЛЕЛОГРАМ $\Rightarrow \overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{BB_1}$, $B_1 = (x_{B_1}, y_{B_1}, z_{B_1})$
 $\Rightarrow (-3, -2, -5) = (x_{B_1} - 5, y_{B_1}, z_{B_1} + 4) \Rightarrow B_1(2, -2, -9)$
 $BCC_1 B_1$ ПАРАЛЕЛОГРАМ $\Rightarrow \overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{CC_1}$, $C_1 = (x_{C_1}, y_{C_1}, z_{C_1})$
 $\Rightarrow (-3, -2, -5) = (x_{C_1} - 6, y_{C_1} - 3, z_{C_1} + 8) \Rightarrow C_1(3, 1, -13)$

б) $V = |[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AA_1}]| = |-181| = 181$

$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AA_1}] = \begin{vmatrix} 6 & 2 & -11 \\ 1 & 3 & -4 \\ -3 & -2 & -5 \end{vmatrix} = -90 + 24 + 22 - 99 - 48 + 10 = -181$

$V = B \cdot H \Rightarrow H = \frac{V}{B} = \frac{181}{\sqrt{867}} = \frac{181}{17\sqrt{3}} = \frac{181\sqrt{3}}{51}$

$B = P_{ADD_1 A_1} = \|\overrightarrow{AD} \times \overrightarrow{AA_1}\| = \left\| \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 3 & -4 \\ -3 & -2 & -5 \end{vmatrix} \right\| = \|(23, 17, 7)\| = \sqrt{529 + 289 + 49} = \sqrt{867}$

в) $\cos \Delta(BC, DD_1) = \frac{|\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{DD_1}|}{\|\overrightarrow{BC}\| \cdot \|\overrightarrow{DD_1}\|} = \frac{|-3 - 6 + 20|}{\sqrt{26} \cdot \sqrt{38}} = \frac{11}{\sqrt{26} \cdot \sqrt{38}}$
 $\overrightarrow{BC} = (1, 3, -4)$
 $\overrightarrow{DD_1} = (-3, -2, -5)$
 $\Rightarrow \Delta(BC, DD_1) = \arccos \frac{11}{\sqrt{26} \sqrt{38}}$

ОЗНАЧИМО $\vec{u} = \overrightarrow{DD_1}$, $\vec{x} = \overrightarrow{BC}$ и $\vec{u}_1$ пројекцијом $\vec{u}$ на $\vec{x}$.
 $\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$, $\vec{u}_1 = \lambda \vec{x}$, $\vec{u}_2 \perp \vec{x} \Rightarrow \vec{u} = \lambda \vec{x} + \vec{u}_2$ / $\circ \vec{x}$
 $\Rightarrow \vec{u}_1 = \frac{\overrightarrow{DD_1} \cdot \overrightarrow{BC}}{\|\overrightarrow{BC}\|^2} \overrightarrow{BC} = \frac{11}{26} \overrightarrow{BC}$
 $\Rightarrow \|\vec{u}_1\| = \frac{11}{26} \cdot \|\overrightarrow{BC}\| = \frac{11}{26} \cdot \sqrt{26} \Rightarrow \|\vec{u}_1\| = \frac{11\sqrt{26}}{26}$

2. Дате су тачка $M(-1, 1, 1)$ и права $p: y = 0, x - z + 1 = 0$.

- а) [7п] Одредити једначину нормале n на праву p која садржи тачку M .
- б) [7п] Одредити једначину равни која садржи нормалу n и нормална је на раван Oxy .

а) α т.н. $M \in \alpha$, $\alpha \perp p: \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = t + 1 \end{cases}, t \in \mathbb{R} \Rightarrow \vec{v}_\alpha = \vec{p} = (1, 0, 1)$
 $\Rightarrow \alpha: 1(x+1) + 0(y-1) + 1(z-1) = 0 \Rightarrow \alpha: x + z = 0$
 2) $N = p \cap \alpha: t + t + 1 = 0 \Rightarrow t = -\frac{1}{2} \Rightarrow N(-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$
 3) $n = MN \Rightarrow \vec{n} = \overrightarrow{MN} = (\frac{1}{2}, -1, -\frac{1}{2}) \parallel (1, -2, -1)$
 $\Rightarrow n: \frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-1}{-1}$

б) 1) $M(-1, 1, 1) \in n \subset \beta$ ✓
 2) $n \subset \beta \Rightarrow \vec{v}_\beta \perp \vec{n} = (1, -2, -1)$
 3) $\beta \perp Oxy: z = 0 \Rightarrow \vec{v}_\beta \perp \vec{v}_{Oxy} = (0, 0, 1)$
 $\Rightarrow \vec{v}_\beta = \vec{v}_{Oxy} \times \vec{n} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = (2, 1, 0) \checkmark$

$$\Rightarrow B: 2(x+1) + 1(y-1) + 0(z-1) = 0 \Rightarrow B: 2x + y + 1 = 0$$

3. [14п] Изометријском трансформацијом свести криву $K: 3x^2 + 3y^2 + 2xy - 2x - 4y - 9 = 0$ на канонски облик и написати формуле те трансформације. Која крива је у питању и колики је њен ексцентрицитет?

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \\ -1 & -2 & -9 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \varphi_B(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)^2 - 1^2 = (3-\lambda-1)(3-\lambda+1) = (2-\lambda)(4-\lambda) \Rightarrow \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 4$$

$$\Rightarrow \dots \Rightarrow U_2 = (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}), U_4 = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y') \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}(-x' + y') \end{cases} \Rightarrow \mathcal{K}': \frac{3}{2}(x'^2 + 2x'y' + y'^2) + \frac{3}{2}(x'^2 - 2x'y' + y'^2) + \frac{2}{2}(-x'^2 + y'^2) - \frac{2}{\sqrt{2}}(x' + y') - \frac{4}{\sqrt{2}}(-x' + y') - 9 = 0$$

$$\Rightarrow \mathcal{K}': 2x'^2 + 4y'^2 + \sqrt{2}x' - 3\sqrt{2}y' - 9 = 0 \quad | :2$$

$$\mathcal{K}': x'^2 + \frac{\sqrt{2}}{2}x' + \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 + 2(y'^2 - \frac{3\sqrt{2}}{4}y' + \left(\frac{3\sqrt{2}}{8}\right)^2) - 2 \cdot \left(\frac{3\sqrt{2}}{8}\right)^2 - \frac{9}{2} = 0$$

$$\mathcal{K}': \left(x' + \frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 + 2\left(y' - \frac{3\sqrt{2}}{8}\right)^2 - \frac{1}{8} - \frac{9}{16} - \frac{9}{2} = 0$$

$$\begin{cases} x'' = x' + \frac{\sqrt{2}}{4} \\ y'' = y' - \frac{3\sqrt{2}}{8} \end{cases} \Rightarrow \mathcal{K}'': x''^2 + 2y''^2 = \frac{83}{16} \Rightarrow \mathcal{K}'': \frac{x''^2}{\frac{83}{16}} + \frac{y''^2}{\frac{83}{32}} = 1 \quad \begin{matrix} a^2 = \frac{83}{16} \\ b^2 = \frac{83}{32} \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \text{еллипса}$$

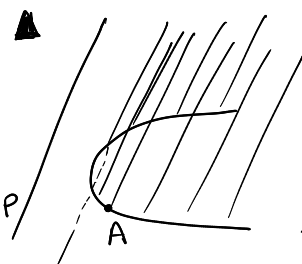
$$c^2 = a^2 - b^2 = \frac{83}{32} \Rightarrow c = \frac{\sqrt{83}}{4\sqrt{2}}$$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\frac{\sqrt{83}}{4\sqrt{2}}}{\frac{\sqrt{83}}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

формуле:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x'' - \frac{\sqrt{2}}{4} + y'' + \frac{3\sqrt{2}}{8}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x'' + y'' + \frac{\sqrt{2}}{8}\right) \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-x'' + \frac{\sqrt{2}}{4} + y'' + \frac{3\sqrt{2}}{8}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-x'' + y'' + \frac{5\sqrt{2}}{8}\right) \end{cases}$$

4. [14п] Нека је $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + \frac{9}{4}z^2 - 3xz + 6x - y - 7z + 5 = 0\}$ и C цилиндар чије су изводнице паралелне правој $p: \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{4} = \frac{z}{2}$, а који садржи параболу $y = x^2, z = 2$. Доказати да је $S = C$.



$A(x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{P}$ произв. $\Rightarrow y_0 = x_0^2, z_0 = 2$

$i: \frac{x-x_0}{3} = \frac{y-y_0}{4} = \frac{z-z_0}{2} \in \mathbb{C}$ произвољна изводница $\parallel p$

$$\Rightarrow x_0 = x - 3t, y_0 = y - 4t, z_0 = z - 2t, t \in \mathbb{R}$$

1) $z_0 = 2 \Rightarrow z - 2t = 2 \Rightarrow t = \frac{z}{2} - 1 \Rightarrow \begin{cases} x_0 = x - \frac{3z}{2} + 3 \\ y_0 = y - 2z + 4 \\ z_0 = 2 \end{cases}$

2) $y_0 = x_0^2 \Rightarrow \mathcal{C}: y - 2z + 4 = \left(x - \frac{3z}{2} + 3\right)^2$

$$\Rightarrow \mathcal{C}: y - 2z + 4 = x^2 + \frac{9}{4}z^2 + 9 - 3xz + 6x - 9z = 0$$

$$\Rightarrow \mathcal{C}: x^2 + \frac{9}{4}z^2 - 3xz + 6x - y - 7z + 5 = 0 \Rightarrow \mathcal{C} = S$$

5. а) [6п] Одредити формуле афиног пресликавања простора које представља централну симетрију S_T у односу на тачку $T(-2, 1, -3)$. Одредити слику σ површи $x^2 + 8x + y^2 - 4y + z^2 + 12z + 55 = 0$ при централној симетрији S_T и доказати да је σ јединична сфера.
- б) [7п] Сферни троугао ABC на сфери σ (из дела а)) има два једнака угла $\alpha = \beta = \frac{\pi}{6}$ и трећи угао $\gamma = \frac{3\pi}{4}$. Израчунати површину и ивице тог троугла.

а) $\vec{TM} = -\vec{TM} \Rightarrow (x'+2, y'-1, z'+3) = (-2-x, 1-y, -3-z)$

$$\Rightarrow S_T: \begin{cases} x' = -x-4 \\ y' = -y+2 \\ z' = -z-6 \end{cases} \rightarrow S: (x+4)^2 + (y-2)^2 + (z+6)^2 = 1$$

$$C(-4, 2, -6), r=1 \xrightarrow{S_T} C'(0, 0, 0), r'=1$$

$$\sigma = S_T(S): x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

б) $\alpha = \beta = \pi/6, \gamma = 3\pi/4 \Rightarrow P = \alpha + \beta + \gamma - \pi = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} + \frac{3\pi}{4} - \pi = \frac{\pi}{12}$

$$-\cos \alpha = \cos \beta \cos \gamma - \sin \beta \sin \gamma \cos \alpha$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \alpha \quad | \cdot 4$$

$$\sqrt{2} \cos \alpha = -\sqrt{6} + 2\sqrt{3}$$

$$a = b = arccos(\sqrt{6} - \sqrt{3})$$

$$-\cos \gamma = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cos c \quad | \cdot 4$$

$$\cos c = 3 - 2\sqrt{2}$$

$$c = arccos(3 - 2\sqrt{2})$$

cos α = cos β = $\sqrt{3}/2$
sin α = sin β = $1/2$
cos γ = $-\sqrt{2}/2$
sin γ = $\sqrt{2}/2$

Аналитичка геометрија (Геометрија 1)
ЈАНУАР 2 - 06.03.2026. године
Време рада: 135мин. Срећно!



- Дате су две праве пирамиде са истом основом, квадратом $ABCD$ ивице a , и врховима E и F са супротних страна основе $ABCD$. Нека је $\vec{A}_{xyz}$ позитивно оријентисан ортонормирани репер са почетком у тачки A и координатним векторима $\vec{AB}$ и $\vec{AD}$ који представљају позитивне правце оса x и y , редом. Уколико је висина пирамиде са врхом E једнака a , а висина пирамиде са врхом F једнака $2a$:
 - [6п] Израчунати координате свих темена у обе пирамиде.
 - [5п] Доказати да угао између правих AE и CF не зависи од дужине a .
 - [4п] Наћи координате тачке S која представља пресек праве EF и симетрале угла $\angle EAF$.
- Дате су права $d: 2x - y + 1 = 0$ и тачке $F_1(1, 0)$ и $F_2(-1, 1)$:
 - [11п] Одредити једначину криве другог реда чија је једна од директриса права d , а жижe су јој тачке F_1 и F_2 .
 - [3п] Одредити једначину геометријског места тачака које су подједнако удаљене од тачке F_1 и праве d . Која крива је у питању?
- [14п] Одредити бар једно афино пресликавање простора којим се круг $k: (x-1)^2 + (y+3)^2 = 4, z = 1$ пресликава на елипсу $\mathcal{E}: 4x^2 + 9y^2 = 36, z = 0$. Одредити слику равни $\alpha: x + y + z = 0$ при том пресликавању.
- [16п] Изометријском трансформацијом свести површ $\mathcal{P}: x^2 + y^2 - 2z^2 + 2xy + 3x - 4z + 5 = 0$ на канонски облик. Која површ је у питању?
- [12] Одредити растојање између градова Београд ($45^\circ N, 20^\circ E$) и Сантјаго ($30^\circ S, 70^\circ W$), ако се зна да је полупречник планете Земље приближно $R = 6371 km$.

Аналитичка геометрија (Геометрија 1)
ЈАНУАР 2 - 06.03.2026. године
Време рада: 135мин. Срећно!

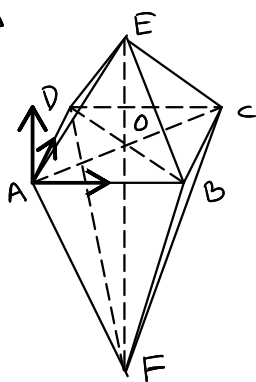


- Дате су две праве пирамиде са истом основом, квадратом $ABCD$ ивице a , и врховима E и F са супротних страна основе $ABCD$. Нека је $\vec{A}_{xyz}$ позитивно оријентисан ортонормирани репер са почетком у тачки A и координатним векторима $\vec{AB}$ и $\vec{AD}$ који представљају позитивне правце оса x и y , редом. Уколико је висина пирамиде са врхом E једнака a , а висина пирамиде са врхом F једнака $2a$:
 - [6п] Израчунати координате свих темена у обе пирамиде.
 - [5п] Доказати да угао између правих AE и CF не зависи од дужине a .
 - [4п] Наћи координате тачке S која представља пресек праве EF и симетрале угла $\angle EAF$.
- Дате су права $d: 2x - y + 1 = 0$ и тачке $F_1(1, 0)$ и $F_2(-1, 1)$:
 - [11п] Одредити једначину криве другог реда чија је једна од директриса права d , а жижe су јој тачке F_1 и F_2 .
 - [3п] Одредити једначину геометријског места тачака које су подједнако удаљене од тачке F_1 и праве d . Која крива је у питању?
- [14п] Одредити бар једно афино пресликавање простора којим се круг $k: (x-1)^2 + (y+3)^2 = 4, z = 1$ пресликава на елипсу $\mathcal{E}: 4x^2 + 9y^2 = 36, z = 0$. Одредити слику равни $\alpha: x + y + z = 0$ при том пресликавању.
- [16п] Изометријском трансформацијом свести површ $\mathcal{P}: x^2 + y^2 - 2z^2 + 2xy + 3x - 4z + 5 = 0$ на канонски облик. Која површ је у питању?
- [12] Одредити растојање између градова Београд ($45^\circ N, 20^\circ E$) и Сантјаго ($30^\circ S, 70^\circ W$), ако се зна да је полупречник планете Земље приближно $R = 6371 km$.



1. Дате су две праве пирамиде са истом основом, квадратом $ABCD$ ивице a , и врховима E и F са супротних страна основе $ABCD$. Нека је A_{xyz} позитивно оријентисан ортонормирани репер са почетком у тачки A и координатним векторима $\vec{AB}$ и $\vec{AD}$ који представљају позитивне правце оса x и y , редом. Уколико је висина пирамиде са врхом E једнака a , а висина пирамиде са врхом F једнака $2a$:

- а) [6п] Израчунати координате свих темена у обе пирамиде.
 б) [5п] Доказати да угао између правих AE и CF не зависи од дужине a .
 в) [4п] Наћи координате тачке S која представља пресек праве EF и симетрале угла $\angle EAF$.



а) $\vec{e}_1 = \frac{\vec{AB}}{\|\vec{AB}\|} = \frac{\vec{AB}}{a}$, $\vec{e}_2 = \frac{\vec{AD}}{\|\vec{AD}\|} = \frac{\vec{AD}}{a}$, $\vec{e}_3 = \vec{e}_1 \times \vec{e}_2 \Rightarrow A(0,0,0)$

$[B]_{Ae} = [\vec{AB}]_e = (a, 0, 0)$, $[C]_{Ae} = [\vec{AC}]_e = [\vec{AB} + \vec{AD}]_e = (a, a, 0)$

$[D]_{Ae} = [\vec{AD}]_e = (0, a, 0)$, $[\vec{AO}]_e = [\frac{1}{2}\vec{AC}]_e = (\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, 0)$

$\vec{OE} \parallel \vec{e}_3 \Rightarrow [\vec{OE}]_e = (0, 0, a)$

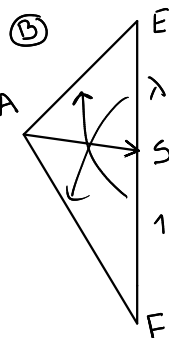
$[E]_{Ae} = [\vec{AE}]_e = [\vec{AO} + \vec{OE}]_e = (\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, a)$

$[F]_{Ae} = [\vec{AF}]_e = [\vec{AO} + \vec{OF}]_e = [\vec{AO} - 2\vec{OE}]_e = (\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, -2a)$

$\Rightarrow A(0,0,0), B(a,0,0), C(a,a,0), D(0,a,0), E(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, a), F(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, -2a)$

б) $\cos \angle(AE, CF) = \frac{|\vec{AE} \cdot \vec{CF}|}{\|\vec{AE}\| \cdot \|\vec{CF}\|} = \frac{|(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, a) \cdot (-\frac{a}{2}, -\frac{a}{2}, -2a)|}{\sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4} + a^2} \cdot \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4} + 4a^2}} = \frac{\frac{5a^2}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{3a}{\sqrt{2}}} = \frac{5}{3\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{9}$

$\Rightarrow \angle(AE, CF) = \arccos(\frac{5\sqrt{3}}{9}) \Rightarrow$ не зависи од a



в) $\frac{\vec{ES}}{\vec{SF}} = \frac{\|\vec{AE}\|}{\|\vec{AF}\|} = \frac{\|(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, a)\|}{\|(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, -2a)\|} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{2}}}{\frac{3a}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \lambda$

$\vec{AS} = \frac{1}{\lambda+1} \vec{AE} + \frac{\lambda}{\lambda+1} \vec{AF} = \frac{3}{\sqrt{3}+3} \vec{AE} + \frac{\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} \vec{AF}$

$[S]_{Ae} = [\vec{AS}]_e = (\frac{3}{3+\sqrt{3}})(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, a) + \frac{\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, -2a)$

$\Rightarrow S(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, \frac{3-2\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}a) \Rightarrow S(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, \frac{5-3\sqrt{3}}{2}a)$

2. Дате су права $d: 2x - y + 1 = 0$ и тачке $F_1(1,0)$ и $F_2(-1,1)$:

- а) [11п] Одредити једначину криве другог реда чија је једна од директриса права d , а жиже су јој тачке F_1 и F_2 .
 б) [3п] Одредити једначину геометријског места тачака које су подједнако удаљене од тачке F_1 и праве d . Која крива је у питању?

а) $f_d(x,y) = 2x - y + 1 \Rightarrow f_d(F_1) = 3 > 0 \Rightarrow F_1$ и F_2 са супр. страна d
 $f_d(F_2) = -2 < 0 \Rightarrow$ хипербола, F_2 и d на р

1) центар χ је $C = S(F_1, F_2) \Rightarrow C(0, \frac{1}{2})$

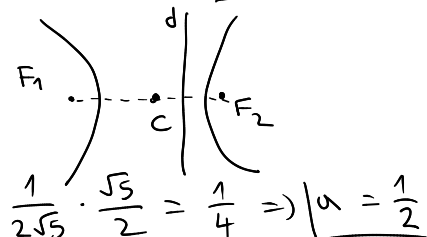
2) $\kappa = d(C, F_1) = \sqrt{1^2 + (-\frac{1}{2})^2} = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$

3) директриса $\frac{a^2}{c} = d(C, d) = \frac{|2 \cdot 0 - \frac{1}{2} + 1|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{2\sqrt{5}}$

4) $e = \frac{c}{a} = \frac{\frac{\sqrt{5}}{2}}{\frac{1}{2\sqrt{5}}} = \sqrt{5}$

* $M(x,y) \in \chi$ понав. $\Rightarrow \chi: \frac{d(M, F_2)}{d(M, d)} = e \Rightarrow \chi: \frac{\sqrt{(x+1)^2 + (y-1)^2}}{\frac{|2x-y+1|}{\sqrt{5}}} = \sqrt{5}$

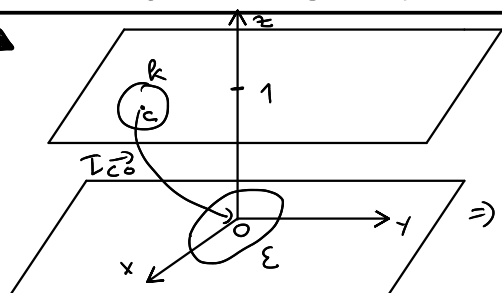
$\chi: (x+1)^2 + (y-1)^2 = (2x-y+1)^2$



Б) $M(x, y) \in \mathcal{U}$ произв. $\Rightarrow \mathcal{U}: d(M, F_1) = d(M, d) \Rightarrow$ ПАРАБОЛА ($e=1$)

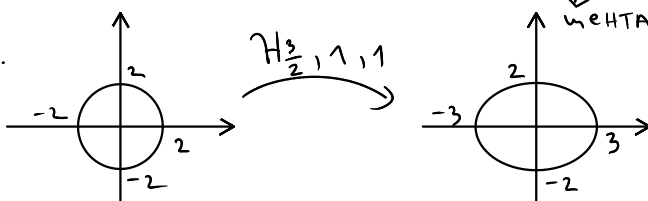
$$\Rightarrow \mathcal{S}: \sqrt{(x-1)^2 + y^2} = \frac{|2x-y+1|}{\sqrt{5}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathcal{S}: 5(x-1)^2 + 5y^2 = (2x-y+1)^2}$$

3. [14п] Одредити бар једно афине пресликавање простора којим се круг $k: (x-1)^2 + (y+3)^2 = 4, z=1$ пресликава на елипсу $\mathcal{E}: 4x^2 + 9y^2 = 36, z=0$. Одредити слику равни $\alpha: x+y+z=0$ при том пресликавању.



$$k: C(1, -3, 1), r=2 \rightarrow \mathcal{E}: \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1, z=0$$

↓
ЦЕНТАР $O(0, 0, 0)$



$$\Rightarrow f = H_{\frac{2}{3}, 1, 1} \circ T_{C0}, \quad C0 = (-1, 3, -1)$$

$$T_{C0}: \begin{cases} x' = x - 1 \\ y' = y + 3 \\ z' = z - 1 \end{cases}, \quad H_{\frac{2}{3}, 1, 1}: \begin{cases} x'' = \frac{2}{3}x' \\ y'' = y' \\ z'' = z' \end{cases} \Rightarrow f: \begin{cases} x'' = \frac{2}{3}(x-1) \\ y'' = y+3 \\ z'' = z-1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2}x'' + 1 \\ y = y'' - 3 \\ z = z'' + 1 \end{cases}$$

$$\alpha: x+y+z=0 \xrightarrow{f} \alpha'': \frac{2}{3}x'' + 1 + y'' - 3 + z'' + 1 = 0 \quad / \cdot 3$$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha'': 2x + 3y + 3z - 3 = 0}$$

4. [16п] Изометријском трансформацијом свести површ $P: x^2 + y^2 - 2z^2 + 2xy + 3x - 4z + 5 = 0$ на канонски облик. Која површ је у питању?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3/2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 3/2 & 0 & -2 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \varphi_B(\lambda) = \dots = -(\lambda+2)\lambda(\lambda-2)$$

$$\Rightarrow \dots U_{-2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, U_0 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}, U_2 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{S}': \frac{1}{2}(x'^2 + 2x'y' + y'^2) + \frac{1}{2}(x'^2 - 2x'y' + y'^2) - 2z'^2 - x'^2 + y'^2 + \frac{3}{\sqrt{2}}(x' + y') - 4z' + 5 = 0$$

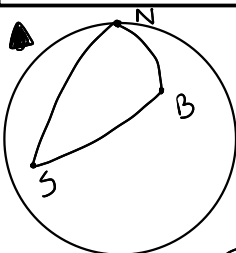
$$\mathcal{S}': 2y'^2 - 2z'^2 + \frac{3\sqrt{2}}{2}x' + \frac{3\sqrt{2}}{2}y' - 4z' + 5 = 0$$

$$\mathcal{S}': 2(y' + \frac{3\sqrt{2}}{8})^2 - \frac{9}{16} - 2(z' + 1)^2 + 2 + \frac{3\sqrt{2}}{2}x' + 5 = 0$$

$$\mathcal{S}': 2(\underbrace{y' + \frac{3\sqrt{2}}{8}}_{y''})^2 - 2(\underbrace{z' + 1}_{z''})^2 = -\frac{3\sqrt{2}}{2}x' - \frac{103}{16} = \frac{3\sqrt{2}}{2}(\underbrace{-x' - \frac{103}{24\sqrt{2}}}_{x''}) \quad / : 2$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{S}'': y''^2 - z''^2 = \frac{3\sqrt{2}}{4}x''} \quad \text{ХИПЕРБОЛИЧКИ ПАРАБОЛОИД}$$

5. [12] Одредити растојање између градова Београд ($45^\circ N, 20^\circ E$) и Сантјаго ($30^\circ S, 70^\circ W$), ако се зна да је полупречник планете Земље приближно $R = 6371 km$.



$$B: \varphi_B = 45^\circ, \theta_B = 20^\circ, \quad S: \varphi_S = -30^\circ, \theta_S = -70^\circ, \quad N: \varphi_N = 90^\circ \text{ северни пол}$$

Претпоставимо да је $R = 1$:
КОСИНУСНА ТЕОРЕМА ЗА СФЕРНИ ТРОУГЛО ΔBSN :

$$\cos \widehat{BS} = \cos \widehat{NB} \cdot \cos \widehat{NS} + \sin \widehat{NB} \sin \widehat{NS} \cdot \cos \angle BNS$$

$$\widehat{NB} = \varphi_N - \varphi_B = \frac{\pi}{4}, \quad \widehat{NS} = \varphi_N - \varphi_S = \frac{2\pi}{3}, \quad \angle BNS = |\theta_B - \theta_S| = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \cos \widehat{BS} = \cos \frac{\pi}{4} \cos \frac{2\pi}{3} + \sin \frac{\pi}{4} \sin \frac{2\pi}{3} \cos \frac{\pi}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{-1}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{4}$$

Применом хомотетије, на Земљи

$$\Rightarrow \boxed{\widehat{BS} = 6371 \cdot \arccos(-\frac{\sqrt{2}}{4})}$$

Аналитичка геометрија - колоквијум (20.04.2024.)

групе: 103 и 104

Презиме и име

Индекс

Поени

/

Обавезно прочитати!

У току теста није дозвољено коришћење литературе, мобилних телефона, окретање, а све врсте покушаја варања биће ригорозно санкционисане. Решења задатака су реални бројеви које треба уписати у за то предвиђене кућице. Поени предвиђени за задатак (3 по задатку) освајају се уколико су све кућице у оквиру тог задатка исправно попуњене. Време предвиђено за рад је 90 минута! Срећан рад!

1	Нека су A, B, C и D некопланарне, X тежиште троугла ABC и Y таква да је $\overrightarrow{CY} = -4\overrightarrow{DY}$. Тада је $\overrightarrow{XY} = \boxed{-\frac{1}{3}} \overrightarrow{AB} + \boxed{-\frac{2}{15}} \overrightarrow{AC} + \boxed{\frac{4}{5}} \overrightarrow{AD}$
2	Нека је ABC троугао, P и Q такве да је $\overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{PB}$ и $\overrightarrow{BQ} = -4\overrightarrow{CQ}$. Ако се AC и PQ секу у тачки R, тада је $AC : RC = \boxed{5}.$
3	Нека је S пресек праве BC и симетрале унутрашњег угла код темена A троугла ABC. Ако је $\ \overrightarrow{AB}\ = 4$, $\ \overrightarrow{AC}\ = 5$ и $\ \overrightarrow{BC}\ = 6$, тада је $\overrightarrow{BS} = \boxed{\frac{4}{9}} \overrightarrow{BC}.$
4	Нека је троугао $\triangle ABC$ површине P. Нека су тачке A_1, B_1 и C_1 такве да важи $\overrightarrow{CA_1} = 2\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC_1} = \overrightarrow{CB}$ и $\overrightarrow{AB_1} = 3\overrightarrow{BA}$. Тада је површина $\triangle A_1B_1C_1$ једнака $\boxed{18} P$
5	Нека је $ABCD$ паралелограм, E средиште BC, F средиште DC и G таква да је $\overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{GD}$. Координатни систем Axy има координатни почетак у тачки A и координатне векторе $\vec{e}_1 = \overrightarrow{AB}$ и $\vec{e}_2 = \overrightarrow{AD}$. Нови координатни систем $Ex'y'$ има координатни почетак у тачки E и координатне векторе $\vec{f}_1 = \overrightarrow{EF}$ и $\vec{f}_2 = \overrightarrow{EG}$. Веза између старих и нових координата је: $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

6	Дат је правоугли паралелопипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ ивица $AB = 2$, $AD = 1$, $AA_1 = 3$. Угао измађу мимоилазних правих AC и BD_1 је $\arccos \frac{3}{\sqrt{70}}$
7	Ортогонална пројекција тачке $A(1, 3)$ на праву која садржи тачку $B(4, 2)$ и паралелна је правој $p : x - 2y + 7 = 0$ је тачка са координатама $\left(\begin{array}{ c } \hline 2 \\ \hline \end{array} , \begin{array}{ c } \hline 1 \\ \hline \end{array} \right)$
8	Круг полупречника r додирује праву $5x + 12y - 18 = 0$. Ако је центар $C(x_C, y_C)$ тог круга пресек правих $3x - 4y + 14 = 0$ и $4x + 7y - 43 = 0$, онда је $(y_C + x_C) \cdot r$ једнако 28
9	Ако се праве $p : \frac{x - \lambda}{1} = \frac{y - 1}{2} = \frac{z + 2}{0}$ и $q : \frac{x + 1}{2} = \frac{y + \lambda}{1} = \frac{z + 1}{1}$ секу, онда параметар $\lambda \in \mathbb{R}$ мора бити $\lambda = \begin{array}{ c } \hline -4 \\ \hline \end{array}$
10	Раван која садржи праву $p : x = y = z$ и нормална је на раван $\alpha : x + 4y + 3 = 0$ има једначину $\begin{array}{ c } \hline 4 \\ \hline \end{array} x + \begin{array}{ c } \hline -1 \\ \hline \end{array} y - 3z + \begin{array}{ c } \hline 0 \\ \hline \end{array} = 0$

Аналитичка геометрија - колоквијум (20.04.2024.)

групе: 103 и 104

Презиме и име

Индекс

Поени

/

Обавезно прочитати!

У току теста није дозвољено коришћење литературе, мобилних телефона, окретање, а све врсте покушаја варања биће ригорозно санкционисане. Решења задатака су реални бројеви које треба уписати у за то предвиђене кућице. Поени предвиђени за задатак (3 по задатку) освајају се уколико су све кућице у оквиру тог задатка исправно попуњене. Време предвиђено за рад је 90 минута! Срећан рад!

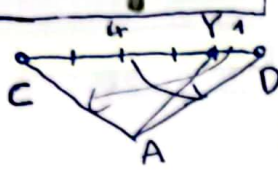
1	Нека су A, B, C и D некопланарне, X тежиште троугла ABC и Y таква да је $\overrightarrow{BY} = -3\overrightarrow{DY}$. Тада је $\overrightarrow{XY} = \boxed{-\frac{1}{12}} \overrightarrow{AB} + \boxed{-\frac{1}{3}} \overrightarrow{AC} + \boxed{\frac{3}{4}} \overrightarrow{AD}$
2	Нека је ABC троугао, P и Q такве да је $\overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{PB}$ и $\overrightarrow{BQ} = -4\overrightarrow{CQ}$. Ако се AC и PQ секу у тачки R, тада је $AC : RA = \boxed{\frac{5}{6}}.$
3	Нека је S пресек праве BC и симетрале унутрашњег угла код темена A троугла ABC. Ако је $\ \overrightarrow{AB}\ = 7$, $\ \overrightarrow{AC}\ = 3$ и $\ \overrightarrow{BC}\ = 6$, тада је $\overrightarrow{BS} = \boxed{\frac{7}{10}} \overrightarrow{BC}.$
4	Нека је троугао $\triangle ABC$ површине P. Нека су тачке A_1, B_1 и C_1 такве да важи $\overrightarrow{CA_1} = 3\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC_1} = \overrightarrow{CB}$ и $\overrightarrow{AB_1} = 3\overrightarrow{BA}$. Тада је површина $\triangle A_1B_1C_1$ једнака $\boxed{23} P$
5	Нека је $ABCD$ паралелограм, G средиште BC, F средиште DC и E таква да је $\overrightarrow{ED} = 2\overrightarrow{AE}$. Координатни систем Axy има координатни почетак у тачки A и координатне векторе $\vec{e}_1 = \overrightarrow{AB}$ и $\vec{e}_2 = \overrightarrow{AD}$. Нови координатни систем $Ex'y'$ има координатни почетак у тачки E и координатне векторе $\vec{f}_1 = \overrightarrow{EF}$ и $\vec{f}_2 = \overrightarrow{EG}$. Веза између старих и нових координата је: $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$

6	Дат је правоугли паралелопипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ ивица $AB = 3$, $AD = 2$, $AA_1 = 1$. Угао измађу мимоилазних правих AC и BD_1 је $\arccos \frac{5}{\sqrt{13}\sqrt{14}}$
7	Ортогонална пројекција тачке $A(1,3)$ на праву која садржи тачку $B(9,2)$ и паралелна је правој $p : x - 2y + 7 = 0$ је тачка са координатама $\left(3, -1 \right)$
8	Круг полупречника r додирује праву $5x + 12y - 18 = 0$. Ако је центар $C(x_C, y_C)$ тог круга пресек правих $3x - 4y + 14 = 0$ и $4x + 7y - 43 = 0$, онда је $(y_C + r) \cdot x_C$ једнако 18
9	Ако се праве $p : \frac{x+4}{1} = \frac{y+\lambda}{2} = \frac{z+2}{0}$ и $q : \frac{x-\lambda}{2} = \frac{y-4}{1} = \frac{z+1}{1}$ секу, онда параметар $\lambda \in \mathbb{R}$ мора бити $\lambda = -1$
10	Раван која садржи праву $p : x = y = z$ и нормална је на раван $\alpha : 2x + 5y + 1 = 0$ има једначину $5x + -2y - 3z + 0 = 0$



1) X тежиште $\triangle ABC$, Y т.д. $\vec{CY} = -4\vec{DY}$

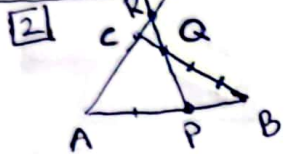
$$\vec{AX} = \frac{1}{3}(\vec{AA} + \vec{AB} + \vec{AC}) = \frac{1}{3}\vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{AC}$$



$$\Rightarrow \vec{AY} = \frac{1}{5}\vec{AC} + \frac{4}{5}\vec{AD}$$

$$\vec{XY} = \vec{XA} + \vec{AY} = -\frac{1}{3}\vec{AB} - \frac{1}{3}\vec{AC} + \frac{1}{5}\vec{AC} + \frac{4}{5}\vec{AD}$$

$$= \left[-\frac{1}{3}\right]\vec{AB} + \left[-\frac{2}{15}\right]\vec{AC} + \left[\frac{4}{5}\right]\vec{AD}$$

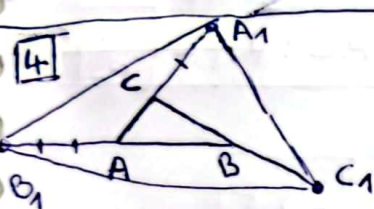


$$\vec{AP} = 2\vec{PB}, \vec{BQ} = -4\vec{CQ}$$

P ∈ AB, Q ∈ BC, R ∈ CA коллинеарне

$$\Leftrightarrow \frac{\vec{AP}}{\vec{PB}} \cdot \frac{\vec{BQ}}{\vec{QC}} \cdot \frac{\vec{CR}}{\vec{RA}} = -1 \Leftrightarrow 2 \cdot 3 \cdot \frac{\vec{CR}}{\vec{RA}} = -1$$

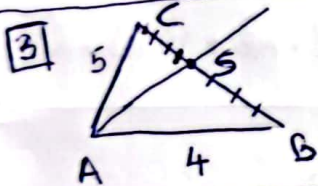
$$\Rightarrow \vec{CR} = -\frac{1}{6}\vec{RA} \Rightarrow \vec{AC} = \vec{AR} + \vec{RC} = -6\vec{RC} + \vec{RC} = -5\vec{RC} \Rightarrow \frac{AC}{RC} = \boxed{5}$$



$$P_{\triangle A_1B_1C_1} = \frac{1}{2} \|\vec{A_1B_1} \times \vec{A_1C_1}\| = \frac{1}{2} \|(\vec{A_1A} + \vec{AB_1}) \times (\vec{A_1C} + \vec{CC_1})\|$$

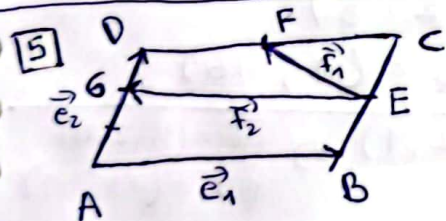
$$= \frac{1}{2} \|(-3\vec{AC} - 3\vec{AB}) \times (-2\vec{AC} + 2(\vec{CA} + \vec{AB}))\|$$

$$= \frac{1}{2} \|-6\vec{AC} \times \vec{AB} + 12\vec{AB} \times \vec{AC}\| = \boxed{18} \left[\frac{1}{2} \|\vec{AB} \times \vec{AC}\| \right]$$



$$2.5 \Rightarrow BS : CS = 4 : 5$$

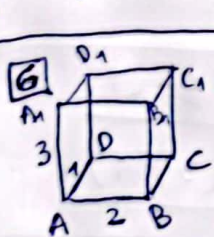
$$\Rightarrow \vec{BS} = \left[\frac{4}{9}\right]\vec{BC}$$



$$[\vec{E}]_{Ae} = [\vec{AE}]_e = [\vec{AB} + \vec{BE}]_e = (1, 1/2)$$

$$[\vec{F_1}]_e = [\vec{EF}]_e = [\vec{EC} + \vec{CF}]_e = (-1/2, 1/2)$$

$$[\vec{F_2}]_e = [\vec{EG}]_e = [\frac{1}{2}\vec{e_2} - \vec{e_1} - \frac{1}{3}\vec{e_2}]_e = (-1, 1/6)$$



$$\gamma \text{ OHБ } \vec{e_1} = \frac{\vec{AB}}{2}, \vec{e_2} = \vec{AD}, \vec{e_3} = \frac{\vec{AA_1}}{3}$$

$$\vec{AC} = (2, 1, 0)$$

$$\Rightarrow A(0,0,0), C(2,1,0), B(2,0,0), D_1(0,1,3) \Rightarrow \vec{BD_1} = (-2, 1, 3)$$

$$\cos \angle(A\vec{C}, B\vec{D_1}) = \frac{|\vec{AC} \cdot \vec{BD_1}|}{\|\vec{AC}\| \|\vec{BD_1}\|} = \frac{|1 - 3|}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{14}} = \left[\frac{3}{\sqrt{70}}\right]$$

7) ℓ т.д. $B(4,2) \in \ell$, $\ell \parallel p: x - 2y + 7 = 0 \Rightarrow \ell: x - 2y = 0 \Rightarrow \vec{n}_\ell = (1, -2)$
 n т.д. $A(1,3) \in n$, $n \perp \ell \Rightarrow n: 2x + y - 5 = 0 \Rightarrow \vec{n}_n = (2, 1)$

$$A' = n \cap \ell: \begin{cases} x - 2y = 0 \\ 2x + y - 5 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 5y - 5 = 0 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow x = 2$$

$$\boxed{A'(2, 1)}$$

8) $C: 3x - 4y + 14 = 0$
 $4x + 7y - 43 = 0 \Rightarrow C(2, 5)$, $\alpha: 5x + 12y - 18 = 0$

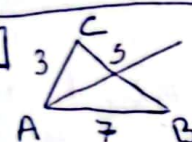
$r = d(C, \alpha) = \frac{|10 + 60 - 18|}{\sqrt{5^2 + 12^2}} = \frac{52}{13} = 4 \Rightarrow (y_c + x_c) \cdot r = (5 + 2) \cdot 4 = 28$

9) $P: \begin{cases} x = t + \lambda \\ y = 2t + 1 \\ z = -2 \end{cases}$ $\alpha: \begin{cases} x = 2\lambda - 1 \\ y = \lambda - 1 \\ z = \lambda - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t + \lambda = -3 \\ 2t + \lambda = -2 \end{cases} \Rightarrow t = 1 \Rightarrow \lambda = -4$

10) $O(0,0,0) \in P \subset \beta$
 $\vec{n}_\beta = \vec{p} \times \vec{n}_\alpha \Rightarrow \vec{n}_\beta = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \end{vmatrix} = (-4, 1, 3) \parallel (4, -1, -3)$
 $\Rightarrow \beta: 4x - y - 3z + 0 = 0$

1) $\vec{AX} = \frac{1}{3}(\vec{AB} + \vec{AC})$  $\Rightarrow \vec{AY} = \frac{1}{4}\vec{AB} + \frac{3}{4}\vec{AD}$ ГРУПА 2
 $\Rightarrow \vec{XY} = \vec{XA} + \vec{AY} = -\frac{1}{3}\vec{AB} - \frac{1}{3}\vec{AC} + \frac{1}{4}\vec{AB} + \frac{3}{4}\vec{AD} = \left[-\frac{1}{12}\right]\vec{AB} + \left[-\frac{1}{3}\right]\vec{AC} + \left[\frac{3}{4}\right]\vec{AD}$

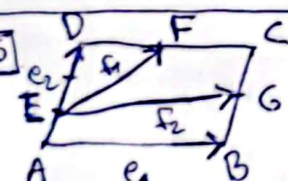
2) ГРУПА 1 $\Rightarrow \vec{CR} = -\frac{1}{6}\vec{RA} \Rightarrow \vec{AC} = \vec{AR} + \vec{RC} = \vec{AR} - \frac{1}{6}\vec{AR} = \frac{5}{6}\vec{AR} \Rightarrow AC:RA = \frac{5}{6}$

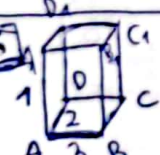
3)  $BS:CS = 7:3 \Rightarrow \vec{BS} = \frac{7}{10}\vec{BC}$



$\Rightarrow AC:RA = \frac{5}{6}$

$P_{OAB, C_1} = \frac{1}{2} \|\vec{AB}_1 \times \vec{AC}_1\| = \frac{1}{2} \|(\vec{AB}_1 + \vec{AB}_1) \times (\vec{AC}_1 + \vec{CC}_1)\|$ 23 P
 $= \frac{1}{2} \|(-4\vec{AC} - 3\vec{AB}) \times (-3\vec{AC} + 2(\vec{CA} + \vec{AB}))\| = \frac{1}{2} \|-8\vec{AC} \times \vec{AB} + 15\vec{AB} \times \vec{AC}\|$

5)  $[E]_{Ae} = [\vec{AE}]_e = (0, 1/3)$
 $[\vec{F}_1]_e = [\vec{EF}]_e = [\vec{ED} + \vec{DF}]_e = (\frac{1}{2}, \frac{2}{3})$
 $[\vec{F}_2]_e = [\vec{EG}]_e = [-\frac{1}{3}\vec{e}_2 + \vec{e}_1 + \frac{1}{2}\vec{e}_2]_e = (1, 1/6)$

6)  $A(0,0,0), C(3,2,0), B(3,0,0), D_1(0,2,1) \Rightarrow \vec{AC} = (3,2,0)$
 $\vec{BD}_1 = (-3,2,1)$
 $\cos \angle(AC, BD_1) = \frac{1 \cdot 9 + 4 \cdot 1}{\sqrt{13} \sqrt{14}} = \frac{5}{\sqrt{182}}$

7) $\ell \perp \alpha, B(9,2) \in \ell, \ell \parallel p: x - 2y + 7 = 0 \Rightarrow \ell: x - 2y - 5 = 0$
 $A' = \ell \cap n, n: 2x + y - 5 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x - 2y - 5 = 0 \\ 2x + y - 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \end{cases} \Rightarrow A'(3, -1)$

8) ГРУПА 1 $\Rightarrow C(2,5), r = 4 \Rightarrow (y_c + x_c) \cdot r = (5 + 2) \cdot 4 = 28$

9) $\begin{cases} t - 4 = 2\lambda + \lambda \\ 2t - \lambda = \lambda + 4 \\ -2 = \lambda - 1 \end{cases} \Rightarrow \lambda = -1$

$\begin{cases} t - \lambda = 2 \\ 2t - \lambda = 3 \end{cases} \Rightarrow \lambda = -1$

10) $O(0,0,0) \in P \subset \beta$ $\checkmark$
 $\vec{n}_\beta = \vec{p} \times \vec{n}_\alpha = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \end{vmatrix} = (-5, 2, 3) \parallel (5, -2, -3)$

$\Rightarrow \beta: 5x - 2y - 3z + 0 = 0$

Аналитичка геометрија - колоквијум (13.06.2024.)

групе: 103 и 104

Презиме и име

Индекс

Поени

/

Обавезно прочитати!

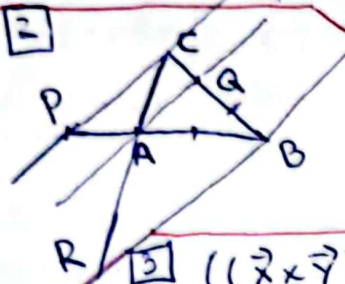
У току теста није дозвољено коришћење литературе, мобилних телефона, окретање, а све врсте покушаја варања биће ригорозно санкционисане. Решења задатака су реални бројеви које треба уписати у за то предвиђене кућице. Поени предвиђени за задатак (3 по задатку) освајају се уколико су све кућице у оквиру тог задатка исправно попуњене. Време предвиђено за рад је 90 минута! Срећан рад!

1	Нека је T тежиште тетраедра $ABCD$, а S средиште дужи AD . Тада је $\vec{ST} = \boxed{-\frac{1}{4}} \vec{BA} + \boxed{\frac{1}{4}} \vec{BC} + \boxed{-\frac{1}{4}} \vec{BD}$
2	Нека је ABC троугао, и P и Q такве да је $\vec{AP} = \frac{1}{3}\vec{BP}$ и $\vec{BQ} = -2\vec{CQ}$. Ако је R тачка праве AC таква да су AQ , CP и BR паралелне, тада је $\vec{CR} : \vec{AR} = \boxed{\frac{3}{2}}$
3	Ако је $\vec{x} \circ \vec{y} = 2023$, $\vec{x} \circ \vec{z} = 2024$ и $\vec{y} \circ \vec{z} = 2025$, тада је $((\vec{x} \times \vec{y}) \times \vec{z}) \times \vec{x} = \boxed{-2024} \vec{x} \times \vec{y} + \boxed{0} \vec{x} \times \vec{z} + \boxed{0} \vec{y} \times \vec{z}$
4	Ако су $A(1, 1, 1)$, $B(2, 3, 0)$ и $C(4, -1, 4)$ темена троугла, онда је његова површина једнака $\boxed{\sqrt{29}}$
5	Нека је $ABCD$ квадрат са центром O . Координатни систем Axy има координатни почетак у тачки A и координатне векторе $\vec{e}_1 = \vec{AB}$ и $\vec{e}_2 = \vec{AD}$. Нови координатни систем $Cx'y'$ има координатни почетак у тачки C и координатне векторе $\vec{f}_1 = \vec{CD}$ и $\vec{f}_2 = \vec{CO}$. Веза између старих и нових координата је: $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

6	Дата је коцка $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ ивице 2. Угао између праве AC_1 и равни BDC_1 је $\arcsin \frac{1}{3}$
7	Ортоцентар троугла $\triangle ABC$ чија су темена $A(1,1)$, $B(-1,-2)$ и $C(1,0)$ је тачка $H \left(\begin{bmatrix} 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \end{bmatrix} \right)$
8	Број заједничких тангенти кружница $(x-5)^2 + (y-4)^2 = 4$ и $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$ једнак је 4
9	Подножје нормале из тачке $A(1,2,3)$ на раван $\alpha : 2x + y + 2z + 17 = 0$ је тачка $B \left(\begin{bmatrix} -5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \end{bmatrix} \right)$
10	Раван која садржи праву $p : \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z+3}{3}$ и паралелна је равни $\alpha : x-4y+z-3=0$ има једначину $\begin{bmatrix} -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 4 \end{bmatrix} y - z + \begin{bmatrix} -2 \end{bmatrix} = 0$

1) $\vec{BT} = \frac{1}{4}(\vec{BA} + \vec{BC} + \vec{BD})$, $\vec{BS} = \frac{1}{2}(\vec{BA} + \vec{BD})$

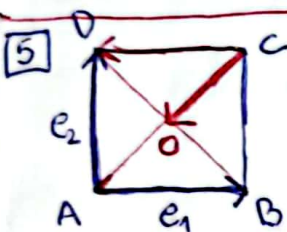
$\vec{ST} = \vec{SB} + \vec{BT} = -\frac{1}{2}\vec{BA} - \frac{1}{2}\vec{BD} + \frac{1}{4}\vec{BA} + \frac{1}{4}\vec{BC} + \frac{1}{4}\vec{BD}$
 $\vec{ST} = \boxed{-\frac{1}{4}}\vec{BA} + \boxed{\frac{1}{4}}\vec{BC} + \boxed{-\frac{1}{4}}\vec{BD}$



AQ, CP, BR паралелне $\Leftrightarrow \left(\frac{\vec{BQ}}{\vec{CQ}}\right) \cdot \left(\frac{\vec{CR}}{\vec{AR}}\right) \cdot \left(\frac{\vec{AP}}{\vec{PB}}\right) = 1$
 $\Rightarrow \frac{\vec{CR}}{\vec{RA}} = -\frac{3}{2} \Rightarrow \frac{\vec{CP}}{\vec{AR}} = \boxed{\frac{3}{2}}$

3) $((\vec{x} \times \vec{y}) \times \vec{z}) \times \vec{x} = ((\vec{x} \cdot \vec{z})\vec{y} - (\vec{y} \cdot \vec{z})\vec{x}) \times \vec{x} = (\vec{x} \cdot \vec{z})\vec{y} \times \vec{x}$
 $= 2024 \vec{y} \times \vec{x} = \boxed{-2024} \vec{x} \times \vec{y} + \boxed{0} \vec{x} \times \vec{z} + \boxed{0} \vec{y} \times \vec{z}$

4) $P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \|\vec{AB} \times \vec{AC}\| = \frac{1}{2} \left\| \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 3 \end{vmatrix} \right\| = \frac{1}{2} \|(4, -6, -8)\| = \frac{1}{2} \sqrt{116} = \frac{2\sqrt{29}}{2}$

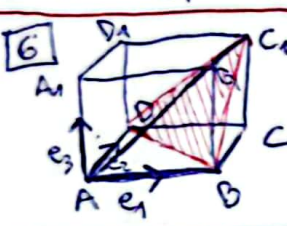


$[\vec{F}_1]_e = [\vec{CO}]_e = [-\vec{e}_1]_e = (-1, 0)$

$[\vec{F}_2]_e = [\vec{CO}]_e = [-\frac{1}{2}\vec{AC}]_e = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$

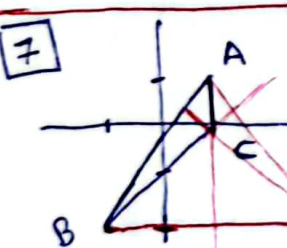
$[\vec{c}]_e = [\vec{AC}]_e = [\vec{AB} + \vec{AO}]_e = (1, 1)$

$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1/2 \\ 0 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$



A(0,0,0) C1(2,2,2) B(2,0,0) D(0,2,0), α раван BDC
 $\vec{AC}_1 = (2, 2, 2)$, $\vec{n}_\alpha = \vec{BD} \times \vec{BC}_1 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = (4, 4, -4)$

$\sin \angle(AC_1, BDC) = \frac{|\vec{AC}_1 \cdot \vec{n}_\alpha|}{\|\vec{AC}_1\| \|\vec{n}_\alpha\|} = \frac{8}{2\sqrt{3} \cdot 4\sqrt{3}} = \frac{1}{3} \Rightarrow \angle(AC_1, BDC) = \arcsin \frac{1}{3}$



h_c т.д. $C \in h_c$, $h_c \perp AB$, $\vec{AB} = (-2, -3) \Rightarrow \vec{h}_c = (3, -2)$
 $\Rightarrow h_c: \frac{x-1}{3} = \frac{y-0}{-2} \Rightarrow 3y = -2x + 2 \Rightarrow h_c: 2x + 3y = 2$

AC: $x=1 \Rightarrow h_b$ т.д. $B \in h_b$, $h_b \perp AC \Rightarrow h_b: y = -2$

$H = h_b \cap h_c: \begin{matrix} y = -2 \\ 2x + 3y = 2 \end{matrix} \Rightarrow y = -2 \quad 2x = 8 \quad x = 4 \Rightarrow H(4, -2)$

8) $C_1(5, 4), r_1 = 2$, $C_2(1, 1), r_2 = 1$

$d(C_1, C_2) = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5 > r_1 + r_2 = 3 \Rightarrow$ 4 заједничке танг.

9) n т.д. $A \in n$, $n \perp \alpha \Rightarrow \vec{n} = \vec{n}_\alpha = (2, 1, 2) \Rightarrow n: x = 2t + 1$

$y = t + 2, t \in \mathbb{R}$
 $z = 2t + 3$

$B = n \cap \alpha: 4t + 2 + t + 2 + 4t + 6 + 17 = 0 \Rightarrow 9t = -27 \Rightarrow t = -3$
 $\Rightarrow B(-5, -1, -3)$

10) $P(1, 0, -3) \in P \subset \beta$, $\beta \parallel \alpha \Rightarrow \vec{n}_\beta = \vec{n}_\alpha = (1, -4, 1)$

$\beta: 1(x-1) - 4(y-0) + 1(z+3) = 0$
 $\beta: x - 4y + z + 2 = 0$

$\Rightarrow \beta: \boxed{-1}x + \boxed{4}y - \boxed{1}z + \boxed{2} = 0$

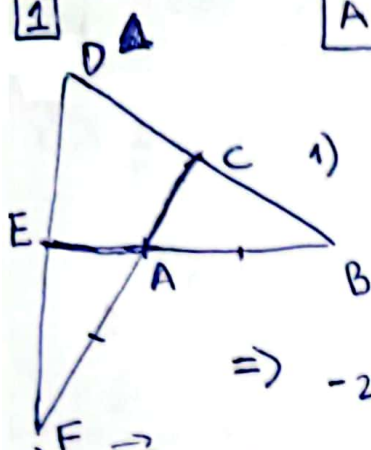
Аналитичка геометрија (Геометрија 1)**ЈУН 1 - 13.06.2024. године****Време рада: 135мин. Срећно!**

1. [9п] Нека је ABC троугао у еуклидској равни и тачке D и E такве да је $\overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{AE} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. Одредити тачку F на правој AC такву да су тачке D , E и F колинеарне и изразити вектор $\overrightarrow{AF}$ као линеарну комбинацију вектора $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{BE}$. Ако је P површина троугла ABC , изразити површину троугла CDF и површину четвороугла $ACDE$ у функцији од P .
2. [9п] Одредити координате тачака A , B и C у односу на афини репер Oxy у равни, ако је A централно симетрична тачка тачки $(0, -1)$ у односу на тачку $(1, 0)$, B је слика тачке $(\frac{3}{2}, -\frac{3\sqrt{3}}{2})$ при ротацији око координатног почетка за 60° у позитивном математичком смеру и C је слика тачке $(4, 4)$ при хомотетији са коефицијентом -2 у односу на тачку $(3, 4)$. Ако у односу на нови афини репер $O'x'y'$ те исте тачке имају координате $A(1, 0)$, $B(0, 1)$ и $C(1, 1)$, изразити координате (x, y) произвољне тачке M у реперу Oxy помоћу координата (x', y') те исте тачке у новом реперу $O'x'y'$.
3. [8п] Свести криву другог реда $4x^2 - 4xy + y^2 + 3x + 2y - 7 = 0$ на канонски облик изометријском трансформацијом координата и написати формуле те трансформације. Која је то крива?
4. [8п] Одредити вредност параметра λ тако да се праве $p: \frac{x-2}{3} = \frac{y+4}{5} = \frac{z-1}{-2}$ и $q: x = 2t - \lambda, y = t + 3, z = -5, t \in \mathbb{R}$ секу, као и координате пресечне тачке правих p и q . Затим одредити једначине сфера полупречника λ које су уписане у конус $x^2 + y^2 - z^2 = 0$.
5. [6п] Сферни троугао ABC на јединичној сфери у сферној геометрији има углове $\alpha = \frac{\pi}{3}$, $\beta = \frac{2\pi}{3}$ и површину $P = \frac{\pi}{6}$. Израчунати ивице тог троугла.

Аналитичка геометрија (Геометрија 1)**ЈУН 1 - 13.06.2024. године****Време рада: 135мин. Срећно!**

1. [9п] Нека је ABC троугао у еуклидској равни и тачке D и E такве да је $\overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{AE} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. Одредити тачку F на правој AC такву да су тачке D , E и F колинеарне и изразити вектор $\overrightarrow{AF}$ као линеарну комбинацију вектора $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{BE}$. Ако је P површина троугла ABC , изразити површину троугла CDF и површину четвороугла $ACDE$ у функцији од P .
2. [9п] Одредити координате тачака A , B и C у односу на афини репер Oxy у равни, ако је A централно симетрична тачка тачки $(0, -1)$ у односу на тачку $(1, 0)$, B је слика тачке $(\frac{3}{2}, -\frac{3\sqrt{3}}{2})$ при ротацији око координатног почетка за 60° у позитивном математичком смеру и C је слика тачке $(4, 4)$ при хомотетији са коефицијентом -2 у односу на тачку $(3, 4)$. Ако у односу на нови афини репер $O'x'y'$ те исте тачке имају координате $A(1, 0)$, $B(0, 1)$ и $C(1, 1)$, изразити координате (x, y) произвољне тачке M у реперу Oxy помоћу координата (x', y') те исте тачке у новом реперу $O'x'y'$.
3. [8п] Свести криву другог реда $4x^2 - 4xy + y^2 + 3x + 2y - 7 = 0$ на канонски облик изометријском трансформацијом координата и написати формуле те трансформације. Која је то крива?
4. [8п] Одредити вредност параметра λ тако да се праве $p: \frac{x-2}{3} = \frac{y+4}{5} = \frac{z-1}{-2}$ и $q: x = 2t - \lambda, y = t + 3, z = -5, t \in \mathbb{R}$ секу, као и координате пресечне тачке правих p и q . Затим одредити једначине сфера полупречника λ које су уписане у конус $x^2 + y^2 - z^2 = 0$.
5. [6п] Сферни троугао ABC на јединичној сфери у сферној геометрији има углове $\alpha = \frac{\pi}{3}$, $\beta = \frac{2\pi}{3}$ и површину $P = \frac{\pi}{6}$. Израчунати ивице тог троугла.

1



АГ-Г1-ЗУН1-2024

$$\vec{BD} = 2\vec{DC}, \vec{AE} = -\frac{1}{2}\vec{AB}$$

1) D, E, F коллинеарне $\Leftrightarrow$ Менелова

$$\frac{\vec{BD}}{\vec{DC}} \cdot \frac{\vec{CF}}{\vec{FA}} \cdot \frac{\vec{AE}}{\vec{EB}} = -1$$

$$\vec{BD} = \vec{BC} + \vec{CD} = \frac{1}{2}\vec{BD} + \vec{CD} \Rightarrow \frac{1}{2}\vec{BD} = \vec{CD} \Rightarrow \vec{BD} = -2\vec{DC}$$

$$\vec{AE} = \vec{AB} + \vec{BE} = -2\vec{AE} - \vec{EB} \Rightarrow 3\vec{AE} = -\vec{EB} \Rightarrow \vec{AE} = -\frac{1}{3}\vec{EB}$$

$$\Rightarrow -2 \cdot \frac{\vec{CF}}{\vec{FA}} \cdot \frac{-1}{3} = -1 \Rightarrow \vec{CF} = -\frac{3}{2}\vec{FA}$$

2) $\vec{AF}$ као лич. комбинац. $\vec{CD}$ и $\vec{BE}$:

$$\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC} \Rightarrow -\frac{1}{2}\vec{AF} = -\frac{2}{3}\vec{BE} + \vec{CD} \quad (/ \cdot (-2))$$

$$\Rightarrow \vec{AF} = \frac{4}{3}\vec{BE} - 2\vec{CD}$$

Тоднос се виде са слике а може и да се срачуна

$$3) P_{\Delta CDF} = \frac{1}{2} \|\vec{CD} \times \vec{CF}\| = \frac{1}{2} \|\vec{CB} \times 3\vec{CA}\| = 3 \cdot \frac{1}{2} \|\vec{CB} \times \vec{CA}\| = 3P$$

$$P_{\Delta AEF} = \frac{1}{2} \|\vec{AE} \times \vec{AF}\| = \frac{1}{2} \|\vec{AB} \times (-2\vec{AC})\| = \frac{1}{2} \|\vec{AB} \times \vec{AC}\| = P$$

$$P_{\Delta CDE} = P_{\Delta CDF} - P_{\Delta AEF} = 3P - P = 2P$$

2) Означимо $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$

$$M(0, -1), N(1, 0), P(\frac{3}{2}, -\frac{3\sqrt{3}}{2}), Q(4, 4), R(3, 4), O(0, 0)$$

$$1) A = S_N(M) \Rightarrow \vec{NA} = -\vec{NM} \Rightarrow (x_1 - 1, y_1) = (1, 1) \Rightarrow x_1 = 2, y_1 = 1$$

$$\vec{NM} = \vec{NA} \Rightarrow (0, -1) \rightarrow (1, 0) \rightarrow A(2, 1)$$

$$2) B = R_{0, \pi/3}(P) \Rightarrow \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3/2 \\ -3\sqrt{3}/2 \end{bmatrix} \Rightarrow B(3, 0)$$

$$3) C = \chi_{R, -2}(Q) \Rightarrow \vec{RC} = -2\vec{RQ} \Rightarrow (x_3 - 3, y_3 - 4) = -2(1, 0)$$

$$\Rightarrow x_3 = 1, y_3 = 4 \Rightarrow C(1, 4)$$

$$\vec{CQ} = \vec{CR} + \vec{RQ}$$

$$O_{xy}: A(2, 1), B(3, 0), C(1, 4) \quad O_{x'y'}: A(1, 0), B(0, 1), C(1, 1)$$

$$\text{веза координата} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}$$

$$A: \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix} \Rightarrow a + e = 2, c + f = 1$$

$$B: \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix} \Rightarrow b + e = 3, d + f = 0$$

$$C: \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix} \Rightarrow a + b + e = 1, c + d + f = 4$$

$$a = 2 - e, b = 3 - e \Rightarrow 2 - e + 3 - e + e = 1 \Rightarrow e = 4, a = -2, b = -1$$

$$c = 1 - f, d = -f \Rightarrow 1 - f - f + f = 4 \Rightarrow f = -3, c = 4, d = 3$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix}$$

3) $\mathcal{K}: 4x^2 - 4xy + y^2 + 3x + 2y - 7 = 0$



$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 3/2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 3/2 & 1 & -7 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$, $\varphi_B(\lambda) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -2 \\ -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda = \lambda(\lambda - 5)$

$\lambda_1 = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow b = 2a \Rightarrow \varphi_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}$, $\varphi_2 \perp \varphi_1 \Rightarrow \varphi_2 = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} \\ -1/\sqrt{5} \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{5}}(x' + 2y')$, $y = \frac{1}{\sqrt{5}}(2x' - y')$

$\Rightarrow \mathcal{K}': \frac{4}{5}(x'^2 + 4x'y' + 4y'^2) - \frac{4}{5}(2x'^2 + 3x'y' - 2y'^2) + \frac{1}{5}(4x'^2 - 4x'y' + y'^2) + \frac{3}{5}(x' + 2y') + \frac{2}{5}(2x' - y') - 7 = 0$

$\Rightarrow \mathcal{K}': 5y'^2 + \frac{7}{\sqrt{5}}x' + \frac{4}{\sqrt{5}}y' - 7 = 0 \Rightarrow 5(y' + \frac{2}{5\sqrt{5}})^2 = -\frac{7}{\sqrt{5}}x' + 7 + \frac{4}{25}$

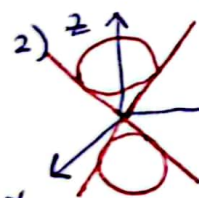
$\Rightarrow \mathcal{K}': 5(y' + \frac{2}{5\sqrt{5}})^2 = -\frac{7}{\sqrt{5}}(x' - \frac{179}{25} \cdot \frac{\sqrt{5}}{7})$

$x'' = x' - \frac{179\sqrt{5}}{175}$, $y'' = y' + \frac{2}{5\sqrt{5}} \Rightarrow \mathcal{K}'': 5y''^2 = -\frac{7}{\sqrt{5}}x''$ ПАРАБОЛА

ФОРМУЛЕ $x = \frac{1}{\sqrt{5}}x' + \frac{2}{\sqrt{5}}y' = \frac{1}{\sqrt{5}}x'' + \frac{179}{175} + \frac{2}{\sqrt{5}}y'' - \frac{4}{25} = \frac{1}{\sqrt{5}}x'' + \frac{2}{\sqrt{5}}y'' + \frac{151}{175}$

$y = \frac{2}{\sqrt{5}}x' - \frac{1}{\sqrt{5}}y' = \frac{2}{\sqrt{5}}x'' + \frac{358}{175} - \frac{1}{\sqrt{5}}y'' + \frac{2}{25} = \frac{2}{\sqrt{5}}x'' - \frac{1}{\sqrt{5}}y'' + \frac{372}{175}$

4) $P: x = 3\lambda + 2$, $x = 2t - \lambda$, $3\lambda + 2 = 2t - \lambda \Rightarrow \lambda = 5$
 $Y = 5\lambda - 4$, $Y = t + 3 \Rightarrow 5\lambda - 4 = t + 3 \Rightarrow t = 8$
 $z = -2\lambda + 1$, $z = -5$, $-2\lambda + 1 = -5 \Rightarrow \lambda = 3$



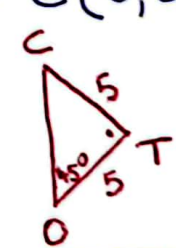
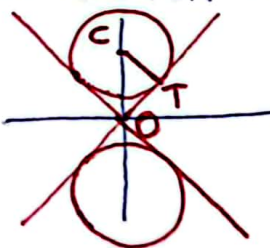
ОСА КОНУСА ЈЕ Oz -ОСА

ЦЕНТАР C СФЕРЕ ЈЕ НА ОСИ КОНУСА $\Rightarrow C(0, 0, m)$

ПОСМАТРАЈМО ПРЕСЕК У Oyz РАВНИ:

ДОБИЈАМО $\|\vec{OC}\| = d(O, C) = 5\sqrt{2}$

$\Rightarrow C_1(0, 0, 5\sqrt{2})$, $C_2(0, 0, -5\sqrt{2})$



$\Rightarrow S_1: x^2 + y^2 + (z - 5\sqrt{2})^2 = 25$, $S_2: x^2 + y^2 + (z + 5\sqrt{2})^2 = 25$

5) $\alpha = \pi/3$, $\beta = 2\pi/3$, $\rho = \pi/6 \Rightarrow \gamma = \pi + \rho - \alpha - \beta \Rightarrow \gamma = \pi/6$

1) $-\cos \alpha = \cos \beta \cos \gamma - \sin \beta \sin \gamma \cos \alpha \Rightarrow -\frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} \cos \alpha$

$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{4} \cos \alpha = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{2 - \sqrt{3}}{4} \Rightarrow \alpha = \arccos \frac{2 - \sqrt{3}}{\sqrt{3}}$

2) $-\cos \beta = \cos \alpha \cos \gamma - \sin \alpha \sin \gamma \cos \beta \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} \cos \beta$

$\frac{\sqrt{3}}{4} \cos \beta = \frac{\sqrt{3} - 2}{4} \Rightarrow \beta = \arccos \frac{\sqrt{3} - 2}{\sqrt{3}}$

3) $-\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}(-\frac{1}{2}) - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \gamma \Rightarrow \gamma = \arccos \frac{2\sqrt{3} - 1}{3}$

Аналитичка геометрија (Геометрија 1)

ЈУН 2 - 05.07.2024. године

Време рада: 135мин. Срећно!



1. [8п] Нека је CC_1 тежишна дуж троугла ABC и P тачка за коју важи $\overrightarrow{CP} = 3\overrightarrow{PC_1}$. Ако је тачка Q пресек правих AP и BC , одредити односе $BQ : BC$ и $AP : AQ$.
2. Дате су праве $p : \frac{x-1}{0} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+2}{-1}$ и $q : \frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{0}$ и сфера $\sigma : (x-7)^2 + (y-5)^2 + z^2 = 16$.
 - а) [5п] Одредити једначину заједничке нормале као и растојање мимоилазних правих p и q .
 - б) [3п] На правој p наћи тачку A која је најближа сфери σ .
3. [8п] Одредити једначину параболе која садржи тачку $A(-1, 0)$, права $d : 2x - y + 2 + 2\sqrt{5} = 0$ је њена директриса и права $o : x + 2y - 3 = 0$ јој је оса симетрије.
4. [8п] Одредити формуле афиног пресликавања простора које представља композицију ротације око праве $p : y = 0, z = 0$ за угао $\varphi = \frac{\pi}{3}$ и рефлексije у односу на раван $\alpha : x = 0$. Шта је слика сфере $\sigma : x^2 + y^2 - 2y + z^2 = 0$ при овом пресликавању?
5. а) [4п] Одредити једначину кружног цилиндра који додирује сфере $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ и $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 1$.
б) [4п] Круг који се добије ротацијом тачке $A(1, 1, 1)$ око осе цилиндра из дела а) написати као пресек две сфере полупречника 3.

Аналитичка геометрија (Геометрија 1)

ЈУН 2 - 05.07.2024. године

Време рада: 135мин. Срећно!



1. [8п] Нека је CC_1 тежишна дуж троугла ABC и P тачка за коју важи $\overrightarrow{CP} = 3\overrightarrow{PC_1}$. Ако је тачка Q пресек правих AP и BC , одредити односе $BQ : BC$ и $AP : AQ$.
2. Дате су праве $p : \frac{x-1}{0} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+2}{-1}$ и $q : \frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{0}$ и сфера $\sigma : (x-7)^2 + (y-5)^2 + z^2 = 16$.
 - а) [5п] Одредити једначину заједничке нормале као и растојање мимоилазних правих p и q .
 - б) [3п] На правој p наћи тачку A која је најближа сфери σ .
3. [8п] Одредити једначину параболе која садржи тачку $A(-1, 0)$, права $d : 2x - y + 2 + 2\sqrt{5} = 0$ је њена директриса и права $o : x + 2y - 3 = 0$ јој је оса симетрије.
4. [8п] Одредити формуле афиног пресликавања простора које представља композицију ротације око праве $p : y = 0, z = 0$ за угао $\varphi = \frac{\pi}{3}$ и рефлексije у односу на раван $\alpha : x = 0$. Шта је слика сфере $\sigma : x^2 + y^2 - 2y + z^2 = 0$ при овом пресликавању?
5. а) [4п] Одредити једначину кружног цилиндра који додирује сфере $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ и $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 1$.
б) [4п] Круг који се добије ротацијом тачке $A(1, 1, 1)$ око осе цилиндра из дела а) написати као пресек две сфере полупречника 3.

Аналитичка геометрија (Геометрија 1)

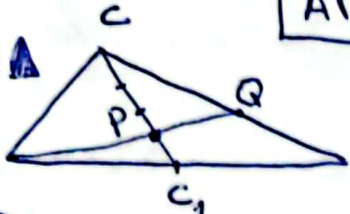
ЈУН 2 - 05.07.2024. године

Време рада: 135мин. Срећно!



1. [8п] Нека је CC_1 тежишна дуж троугла ABC и P тачка за коју важи $\overrightarrow{CP} = 3\overrightarrow{PC_1}$. Ако је тачка Q пресек правих AP и BC , одредити односе $BQ : BC$ и $AP : AQ$.
2. Дате су праве $p : \frac{x-1}{0} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+2}{-1}$ и $q : \frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{0}$ и сфера $\sigma : (x-7)^2 + (y-5)^2 + z^2 = 16$.
 - а) [5п] Одредити једначину заједничке нормале као и растојање мимоилазних правих p и q .
 - б) [3п] На правој p наћи тачку A која је најближа сфери σ .
3. [8п] Одредити једначину параболе која садржи тачку $A(-1, 0)$, права $d : 2x - y + 2 + 2\sqrt{5} = 0$ је њена директриса и права $o : x + 2y - 3 = 0$ јој је оса симетрије.
4. [8п] Одредити формуле афиног пресликавања простора које представља композицију ротације око праве $p : y = 0, z = 0$ за угао $\varphi = \frac{\pi}{3}$ и рефлексije у односу на раван $\alpha : x = 0$. Шта је слика сфере $\sigma : x^2 + y^2 - 2y + z^2 = 0$ при овом пресликавању?
5. а) [4п] Одредити једначину кружног цилиндра који додирује сфере $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ и $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 1$.
б) [4п] Круг који се добије ротацијом тачке $A(1, 1, 1)$ око осе цилиндра из дела а) написати као пресек две сфере полупречника 3.

1



II НАЧИН

$$\vec{AP} = \alpha \vec{AQ}, \vec{BQ} = \beta \vec{BC}$$

$$\vec{AP} = \alpha \vec{AQ} = \alpha (\vec{AB} + \vec{BQ}) = \alpha (\vec{AB} + \beta (\vec{BA} + \vec{AC}))$$

$$= (\alpha - \alpha\beta) \vec{AB} + \alpha\beta \vec{AC}$$

$$\vec{AP} = \vec{AC_1} + \vec{C_1P} = \frac{1}{2} \vec{AB} + \frac{1}{4} \vec{C_1C} = \frac{1}{2} \vec{AB} + \frac{1}{4} (\vec{C_1A} + \vec{AC}) = \frac{3}{8} \vec{AB} + \frac{1}{4} \vec{AC}$$

$$\Rightarrow (\alpha - \alpha\beta - \frac{3}{8}) \vec{AB} + (\alpha\beta - \frac{1}{4}) \vec{AC} = \vec{0}$$

$\vec{AB}$ и $\vec{AC}$ ЛИНЕАРНО НЕЗАВИСНИ

$$\Rightarrow \alpha - \alpha\beta = \frac{3}{8} \quad \alpha\beta = \frac{1}{4} \Rightarrow \alpha = \frac{5}{8} \quad \beta = \frac{2}{5}$$

$$\Rightarrow \vec{AP} = \frac{5}{8} \vec{AQ} \quad \vec{BQ} = \frac{2}{5} \vec{BC}$$

$$\boxed{BQ : BC = 2 : 5}$$

$$\boxed{AP : AQ = 5 : 8}$$

II НАЧИН ΔBCC_1

$Q \in BC, P \in CC_1, A \in C_1B$
КОЛИНЕАРНЕ

МЕНЕЛАЈ

$$\frac{\vec{BQ}}{\vec{QC}} \cdot \frac{\vec{CP}}{\vec{PC_1}} \cdot \frac{\vec{C_1A}}{\vec{AB}} = -1 \Rightarrow \frac{\vec{BQ}}{\vec{QC}} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{BQ}{BC} = \frac{2}{5}$$

ΔAQB

$P \in AQ, C \in QB, C_1 \in BA$
КОЛИНЕАРНЕ

МЕНЕЛАЈ

$$\frac{\vec{AP}}{\vec{PQ}} \cdot \frac{\vec{QC}}{\vec{CB}} \cdot \frac{\vec{BC_1}}{\vec{C_1A}} = -1 \Rightarrow \frac{\vec{AP}}{\vec{PQ}} = \frac{5}{3} \Rightarrow \frac{AP}{AQ} = \frac{5}{8}$$

2

a) $P: x=1, y=t+1, z=-t-2, t \in \mathbb{R}$
 $Q: x=\Delta-2, y=\Delta+1, z=1, \Delta \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \vec{PQ} = (\Delta-3, \Delta-t, t+3), \Delta, t \in \mathbb{R}, \vec{P} = (0, 1, -1), \vec{Q} = (1, 1, 0)$$

1) $\vec{PQ} \cdot \vec{P} = 0 \Rightarrow \Delta - t - t - 3 = 0 \Rightarrow \Delta - 2t = 3 \quad 1-2 \quad 3t = -3 \Rightarrow \boxed{t = -1}$

2) $\vec{PQ} \cdot \vec{Q} = 0 \Rightarrow \Delta - 3 + \Delta - t = 0 \Rightarrow 2\Delta - t = 3 \quad t^+$

$$\boxed{\Delta = 1}$$

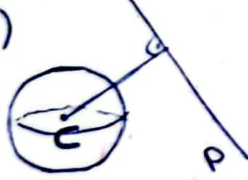
$$\Rightarrow P(1, 0, -1), Q(-1, 2, 1), \vec{PQ} = (-2, 2, 2) \parallel (-1, 1, 1)$$

ЗАЈЕДНИЧКА НОРМАЛА

$$n = \vec{PQ} : \frac{x-1}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{1}$$

$$d(P, Q) = \|\vec{PQ}\| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 2^2} = \boxed{2\sqrt{3}}$$

б)



НАЈБОЛИЖА ТАЧКА ЈЕ ПОДНОЖЈЕ НОРМАЛЕ

из центРА СФЕРЕ С НА ПРАВУ P, $C(7, 5, 0)$

$$P(1, t+1, -t-2) \in P \text{ произв} \Rightarrow \vec{CP} = (-6, t-4, -t-2)$$

$$\vec{CP} \cdot \vec{P} = 0 \Rightarrow t-4 + t+2 = 0 \Rightarrow t = 1$$

$$\Rightarrow \text{ТАЧКА } \boxed{A(1, 2, -3)} \in P \text{ је НАЈБОЛИЖА } \sigma: (x-7)^2 + (y-5)^2 + z^2 = 16$$

3) Нека је $F(x_0, y_0)$ жижа σ , $d: 2x - y + 2 + 2\sqrt{5} = 0$, $\sigma: x + 2y - 3 = 0$

1) $F(x_0, y_0) \in \sigma \Rightarrow x_0 = 3 - 2y_0 \Rightarrow F(3 - 2y_0, y_0), A(-1, 0)$

2) $d(A, F) = d(A, d) \Rightarrow \sqrt{(4 - 2y_0)^2 + y_0^2} = \frac{|1 - 2 - 0 + 2 + 2\sqrt{5}|}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$

$$\Rightarrow 16 - 16y_0 + 4y_0^2 + y_0^2 = 4$$

$$5y_0^2 - 16y_0 + 12 = 0 \Rightarrow y_0 = \frac{16 \pm \sqrt{256 - 240}}{10} = \frac{16 \pm 4}{10} \rightarrow \begin{matrix} 2 \\ 6/5 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow F_1(-1, 2), F_2(3/5, 6/5) \Rightarrow \text{ИМА ДВА РЕШЕЊА}$$

I) $M(x, y) \in \sigma_1$ произв. $\Rightarrow \sigma_1: d(M, F_1) = d(M, d)$

$$\sqrt{(x+1)^2 + (y-2)^2} = \frac{|2x - y + 2 + 2\sqrt{5}|}{\sqrt{5}} \Rightarrow \sigma_1: (x+1)^2 + (y-2)^2 = \frac{(2x - y + 2 + 2\sqrt{5})^2}{5}$$

II)

$$\sigma_2: d(M, F_2) = d(M, d) \Rightarrow \sigma_2: (x - \frac{3}{5})^2 + (y - \frac{6}{5})^2 = \frac{(2x - y + 2 + 2\sqrt{5})^2}{5}$$



4) $P: y=0, z=0, \varphi = \pi/3, \alpha: x=0$

$$R_{P, \varphi}: \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$\vec{n}_\alpha = (1, 0, 0)$ јединични, α пролази кроз координатну осу x

$$\Rightarrow [S_\alpha] = I_3 - 2 \vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\alpha^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow S_\alpha: \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \Rightarrow [R_{P, \varphi} \circ S_\alpha] = [R_{P, \varphi}] [S_\alpha] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow R_{P, \varphi} \circ S_\alpha: \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

овде је $R_{P, \varphi} \circ S_\alpha = S_\alpha \circ R_{P, \varphi}$ па је свеједно кајим редоследом

* пошто је у питању изометрија,

сфера се слика у сферу истог полупр, а центар у центар

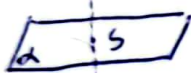
$$\sigma: x^2 + (y-1)^2 + z^2 = 1 \Rightarrow R=1, C(0, 1, 0)$$

$$C' = R_{P, \varphi} \circ S_\alpha(C) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{bmatrix} \Rightarrow C'(0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$$

$$\Rightarrow \sigma \mapsto \sigma': x^2 + (y - \frac{1}{2})^2 + (z - \frac{\sqrt{3}}{2})^2 = 1$$

II начин за S_α :

1) h т.д. $M \in h, h \perp \alpha \Rightarrow h: \begin{matrix} x = t + x_0 \\ y = y_0 \\ z = z_0 \end{matrix}, t \in \mathbb{R}$
 $M(x_0, y_0, z_0)$
 $\vec{n} = \vec{n}_\alpha = (1, 0, 0)$



2) $S = h \cap \alpha \Rightarrow t + x_0 = 0 \Rightarrow t = -x_0 \Rightarrow S(0, y_0, z_0)$

3) $[M'] = 2[S] - [M] = (0, 2y_0, 2z_0) - (x_0, y_0, z_0) = (-x_0, y_0, z_0)$

$C_1(0, 0, 0), C_2(1, 1, -2), R_1 = R_2 = 1$

оса цилиндра је $CC_1C_2: \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-2}$
 $\Rightarrow \ell$ кружни цилиндар са осом CC_1 и $R=1$

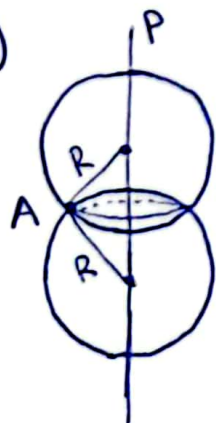
$M(x, y, z) \in \ell$ произв. $\Rightarrow \ell: d(M, C_1C_2) = R=1$

$$\ell: \frac{\|\vec{C}_1M \times \vec{C}_1C_2\|}{\|\vec{C}_1C_2\|} = 1 \Rightarrow \ell: (-2y-z)^2 + (2x+z)^2 + (x-y)^2 = 6$$

$$\vec{C}_1M \times \vec{C}_1C_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (-2y-z, 2x+z, x-y)$$

$A(1, 1, 1)$

Б)



$C(t, t, -2t) \in P$ произв. $\Rightarrow d(C, A) = 3$

$$\sqrt{(t-1)^2 + (t-1)^2 + (-2t-1)^2} = 3 \quad /^2$$

$$t^2 - 2t + 1 + t^2 - 2t + 1 + 4t^2 + 4t + 1 = 9$$

$$6t^2 = 6 \Rightarrow t_1 = -1 \quad t_2 = 1$$

$C_1(1, 1, -2) \quad C_2(-1, -1, 2)$

$$S_1: (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 9$$

$$S_2: (x+1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 9$$

Аналитичка геометрија (Геометрија 1)
СЕПТЕМБАР 1 - 07.09.2024. године
Време рада: 135мин. Срећно!



- [7п] Дат је правоугаоник $ABCD$ и тачка E таква да је $\overrightarrow{AE} = \frac{5}{8}\overrightarrow{AC}$. Ако је тачка F пресек правих DE и AB , одредити однос $AF : FB$.
- [9п] Дате су праве $p : \frac{x}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{2}$ и $q : \frac{x-1}{3} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z+1}{3}$ и раван $\alpha : x + y + z = 2024$. Одредити једначину праве r која је паралелна равни α и сече праве p и q у тачкама чије је растојање једнако $\sqrt{14}$.
- [9п] Изометријском трансформацијом свести криву $\mathcal{K} : 15x^2 + 8y^2 + 24xy + 44x + 32y + 20 = 0$ на канонски облик и одредити њене жиже у (x, y) -координатама. Која крива је у питању?
- [8п] Одредити једначину површи која је геометријско место тачака подједнако удаљених од равни $\alpha : 2x - 2y + z + 6 = 0$ и праве $p : \begin{cases} x - 2y + 10 = 0 \\ x + z + 2 = 0 \end{cases}$.
- [7п] Одредити (приближно) растојање између два места на планети Марс која су дата са A : 45° јужне географске ширине, 90° источне географске дужине и B : 30° северне географске ширине, 60° источне географске дужине. Претпоставити да је Марс сфера полупречника $R = 3390km$.

Аналитичка геометрија (Геометрија 1)
СЕПТЕМБАР 1 - 07.09.2024. године
Време рада: 135мин. Срећно!



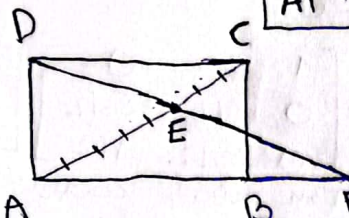
- [7п] Дат је правоугаоник $ABCD$ и тачка E таква да је $\overrightarrow{AE} = \frac{5}{8}\overrightarrow{AC}$. Ако је тачка F пресек правих DE и AB , одредити однос $AF : FB$.
- [9п] Дате су праве $p : \frac{x}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{2}$ и $q : \frac{x-1}{3} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z+1}{3}$ и раван $\alpha : x + y + z = 2024$. Одредити једначину праве r која је паралелна равни α и сече праве p и q у тачкама чије је растојање једнако $\sqrt{14}$.
- [9п] Изометријском трансформацијом свести криву $\mathcal{K} : 15x^2 + 8y^2 + 24xy + 44x + 32y + 20 = 0$ на канонски облик и одредити њене жиже у (x, y) -координатама. Која крива је у питању?
- [8п] Одредити једначину површи која је геометријско место тачака подједнако удаљених од равни $\alpha : 2x - 2y + z + 6 = 0$ и праве $p : \begin{cases} x - 2y + 10 = 0 \\ x + z + 2 = 0 \end{cases}$.
- [7п] Одредити (приближно) растојање између два места на планети Марс која су дата са A : 45° јужне географске ширине, 90° источне географске дужине и B : 30° северне географске ширине, 60° источне географске дужине. Претпоставити да је Марс сфера полупречника $R = 3390km$.

Аналитичка геометрија (Геометрија 1)
СЕПТЕМБАР 1 - 07.09.2024. године
Време рада: 135мин. Срећно!



- [7п] Дат је правоугаоник $ABCD$ и тачка E таква да је $\overrightarrow{AE} = \frac{5}{8}\overrightarrow{AC}$. Ако је тачка F пресек правих DE и AB , одредити однос $AF : FB$.
- [9п] Дате су праве $p : \frac{x}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{2}$ и $q : \frac{x-1}{3} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z+1}{3}$ и раван $\alpha : x + y + z = 2024$. Одредити једначину праве r која је паралелна равни α и сече праве p и q у тачкама чије је растојање једнако $\sqrt{14}$.
- [9п] Изометријском трансформацијом свести криву $\mathcal{K} : 15x^2 + 8y^2 + 24xy + 44x + 32y + 20 = 0$ на канонски облик и одредити њене жиже у (x, y) -координатама. Која крива је у питању?
- [8п] Одредити једначину површи која је геометријско место тачака подједнако удаљених од равни $\alpha : 2x - 2y + z + 6 = 0$ и праве $p : \begin{cases} x - 2y + 10 = 0 \\ x + z + 2 = 0 \end{cases}$.
- [7п] Одредити (приближно) растојање између два места на планети Марс која су дата са A : 45° јужне географске ширине, 90° источне географске дужине и B : 30° северне географске ширине, 60° источне географске дужине. Претпоставити да је Марс сфера полупречника $R = 3390km$.

1



Друге стране, $\vec{DF} = \vec{DA} + \vec{AF} = -\vec{AD} + \beta \vec{AB}$ па изједначавајемо

$$\Rightarrow (1 - \frac{3}{8}\alpha)\vec{AD} + (\frac{5}{8}\alpha - \beta)\vec{AB} = \vec{0}, \vec{AB}, \vec{AD} \text{ лнн. нез} \Rightarrow \alpha = \frac{8}{3} \Rightarrow \beta = \frac{5}{3}$$

$$\Rightarrow \vec{AF} = \frac{5}{3}\vec{AB} = \frac{5}{3}\vec{AF} + \frac{5}{3}\vec{FB} \Rightarrow -\frac{2}{3}\vec{AF} = \frac{5}{3}\vec{FB} \Rightarrow \frac{AF}{FB} = \frac{5}{2}$$

2) $P(t, t+1, 2t+2) \in \rho$ произв, $Q(3\Delta+1, -2\Delta+3, 3\Delta-1) \in \rho$ произв.

$\rho = PQ$ (овим смо обезбедили да ρ сине праве ρ и ρ)

1) $\rho \parallel \alpha \Rightarrow \vec{n}_\alpha \circ \vec{PQ} = 0 \Leftrightarrow (1, 1, 1) \circ (3\Delta - t + 1, -2\Delta - t + 2, 3\Delta - 2t - 3) = 0$

$$\Rightarrow 3\Delta - t + 1 - 2\Delta - t + 2 + 3\Delta - 2t - 3 = 0 \Rightarrow 4\Delta - 4t = 0 \Rightarrow \Delta = t$$

$$\Rightarrow \vec{PQ} = (2t+1, -3t+2, t-3)$$

2) $d(P, Q) = \sqrt{14} \Rightarrow 14 = \|\vec{PQ}\|^2 = (2t+1)^2 + (-3t+2)^2 + (t-3)^2$ $14t(t-1)=0$

$$\Rightarrow 14 = 4t^2 + 4t + 1 + 9t^2 - 12t + 4 + t^2 - 6t + 9 \Rightarrow 14t^2 - 14t = 0$$

$$\Rightarrow t_1 = 0, t_2 = 1 \Rightarrow P_1(0, 1, 2), \vec{P_1Q_1} = (1, 2, -3) \vee P_2(1, 2, 4), \vec{P_2Q_2} = (3, -1, -2)$$

$$\Rightarrow \rho_1 = P_1Q_1: \frac{x}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{-3}, \rho_2 = P_2Q_2: \frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-4}{-2}$$

3

$A = \begin{bmatrix} 15 & 12 & 22 \\ 12 & 8 & 16 \\ 22 & 16 & 20 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 15 & 12 \\ 12 & 8 \end{bmatrix} \Rightarrow \varphi_B(\lambda) = \begin{vmatrix} 15-\lambda & 12 \\ 12 & 8-\lambda \end{vmatrix}$

$$= \lambda^2 - 23\lambda - 24 = (\lambda+1)(\lambda-24)$$

$\Rightarrow \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 24$

$\lambda = -1 \Rightarrow \begin{bmatrix} 16 & 12 \\ 12 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \vec{0} \Rightarrow 4a + 3b = 0 \Rightarrow a = -\frac{3}{4}b$

$$\Rightarrow \vec{u}_1 = \begin{bmatrix} -3/5 \\ 4/5 \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{u}_2 = \begin{bmatrix} 4/5 \\ 3/5 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3/5 & 4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{3}{5}x' + \frac{4}{5}y' \\ y = \frac{4}{5}x' + \frac{3}{5}y' \end{cases}$$

$$\mathcal{K}': \frac{15}{25}(9x'^2 - 24x'y' + 16y'^2) + \frac{8}{25}(16x'^2 + 24x'y' + 9y'^2) + \frac{24}{25}(-12x'^2 + 7x'y' + 12y'^2) + \frac{44}{5}(-3x' + 4y') + \frac{32}{5}(4x' + 3y') + 20 = 0$$

$$\mathcal{K}': -x'^2 + 24y'^2 - \frac{4}{5}x' + \frac{272}{5}y' + 20 = 0$$

$$\mathcal{K}': -(x' + \frac{2}{5})^2 + \frac{4}{25} + 24(y' + \frac{17}{15})^2 - \frac{289}{225} + 20 = 0$$

$$\mathcal{K}': 24(\underbrace{y' + \frac{17}{15}}_{x''})^2 - (\underbrace{x' + \frac{2}{5}}_{y''})^2 = \frac{2312 - 1500 - 12}{75} = \frac{800}{75} = \frac{32}{3}$$

$$\begin{cases} x'' = y' + \frac{17}{15} \\ y'' = x' + \frac{2}{5} \end{cases}$$

$$y'' : 24 x''^2 - y''^2 = \frac{32}{3} \quad / : \frac{32}{3}$$

$$\Rightarrow \boxed{y'' : \frac{x''^2}{\frac{4}{9}} - \frac{y''^2}{\frac{32}{3}} = 1} \Rightarrow \text{ХИПЕРБОЛА}$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{96}{9}} = \frac{10}{3} \Rightarrow F_1''(\frac{10}{3}, 0), F_2''(-\frac{10}{3}, 0)$$

формуле

$$x = -\frac{3}{5}(y'' - \frac{2}{5}) + \frac{4}{5}(x'' - \frac{17}{15}) = \frac{4}{5}x'' - \frac{3}{5}y'' - \frac{2}{3} \Rightarrow F_1(2, 1)$$

$$y = \frac{4}{5}(y'' - \frac{2}{5}) + \frac{3}{5}(x'' - \frac{17}{15}) = \frac{3}{5}x'' + \frac{4}{5}y'' - 1 \Rightarrow F_2(-\frac{10}{3}, -3)$$

$$[4] \alpha: 2x - 2y + z + 6 = 0, \quad p: \begin{cases} x - 2y + 10 = 0 \\ x + z + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow p: \begin{cases} x = 2t - 10 \\ y = t, t \in \mathbb{R} \\ z = -2t + 8 \end{cases}$$

$$M(x, y, z) \text{ проиЗВ} \Rightarrow \rho: d(M, \alpha) = d(M, p) = \frac{\|\vec{PM} \times \vec{P}\|}{\|\vec{P}\|}$$

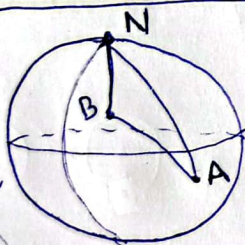
$$d(M, \alpha) = \frac{|2x - 2y + z + 6|}{\sqrt{4 + 1 + 1}} = \frac{|2x - 2y + z + 6|}{3}$$

$$\vec{PM} \times \vec{P} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x+10 & y & z-8 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (-2y - z + 8, 2z + 2x + 4, x - 2y + 10)$$

$$\Rightarrow \rho: \frac{|2x - 2y + z + 6|}{3} = \frac{\sqrt{(2y + z - 8)^2 + 4(z + x + 2)^2 + (x - 2y + 10)^2}}{\sqrt{4 + 1 + 1}}$$

$$\rho: (2x - 2y + z + 6)^2 = (2y + z - 8)^2 + 4(x + z + 2)^2 + (x - 2y + 10)^2$$

[5]



$$A: \varphi_A = -\frac{\pi}{4}, \theta_A = \frac{\pi}{2} \quad B: \varphi_B = \frac{\pi}{6}, \theta_B = \frac{\pi}{3}$$

II НАЧУН претн да је R=1

$$\cos \widehat{AB} = \cos \widehat{NA} \cos \widehat{NB} + \sin \widehat{NA} \sin \widehat{NB} \cos \Delta ANB$$

$$\widehat{NA} = \varphi_N - \varphi_A = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} \quad \widehat{NB} = \varphi_N - \varphi_B = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$$

$$\Delta ANB = |\theta_A - \theta_B| = |\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}| = \frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow \cos \widehat{AB} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{3\sqrt{2}}{8} = \frac{\sqrt{2}}{8}$$

за R=3390

$\Rightarrow$

$$\widehat{AB} = 3390 \arccos \frac{\sqrt{2}}{8}$$

II НАЧУН

$$\text{претн да је } R=1 \Rightarrow (x, y, z) = (\cos \varphi \cos \theta, \cos \varphi \sin \theta, \sin \varphi)$$

$$\Rightarrow A(\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 0, \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 1, -\frac{\sqrt{2}}{2}) \Rightarrow A(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$$

$$B(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}) \Rightarrow B(\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{2})$$

$$\cos \angle AOB = \vec{OA} \cdot \vec{OB} = \frac{3\sqrt{2}}{8} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{8}$$

$$\Rightarrow \widehat{AB} = 3390 \arccos \frac{\sqrt{2}}{8}$$

† пошто су "лепи" углови можемо радити преко ДЕКАРТОВИХ координата

Аналитичка геометрија (Геометрија 1)
СЕПТЕМБАР 2 - 27.09.2024. године
Време рада: 135мин. Срећно!



- [8п] Дат је квадрат $ABCD$. Нека је тачка E таква да важи $\overrightarrow{DE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{DB}$. Нека је тачка F пресек правих CB и AE , а тачка G пресек правих AB и CE . Израчунати површине троуглова AEC и BFG у односу на површину квадрата $ABCD$.
- [8п] Одредити једначину криве другог реда чија једна директриса има једначину $d: x + 2y + 2 = 0$, а жиже су јој тачке $F_1(2, 0)$ и $F_2(0, -4)$. Која крива је у питању?
- [8п] Дате су равни $\alpha: x - 2y + z - 3 = 0$ и $\beta: 2y + 4z = 0$, као и тачка $P(0, 2, -1)$.
 - [4п] Одредити једначину праве p која садржи тачку P , паралелна је равни α и садржана је у равни β .
 - [4п] Одредити формуле рефлексије у односу на раван α . Шта је слика праве p при тој рефлексији?
- [9п] Површ $P: 3x^2 + 3z^2 + 4xy + 8xz + 4yz - 3z = 0$ изометријском трансформацијом свести на канонски облик и написати формулу те трансформације. Која површ је у питању?
- [7п] На јединичној сфери дате су тачке $A(0, 0, 1)$ и $B(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{1}{2})$. Одредити тачку C тако да сферни троугао ABC буде једнакокрак, где је $\widehat{AB} = \widehat{AC}$ и $\angle BAC = \frac{\pi}{2}$. Одредити потом све стране и углове сферног троугла ABC , као и његову површину.

Аналитичка геометрија (Геометрија 1)
СЕПТЕМБАР 2 - 27.09.2024. године
Време рада: 135мин. Срећно!

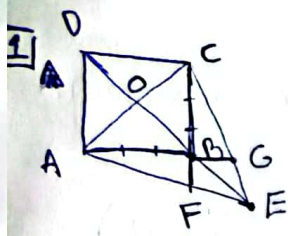


- [8п] Дат је квадрат $ABCD$. Нека је тачка E таква да важи $\overrightarrow{DE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{DB}$. Нека је тачка F пресек правих CB и AE , а тачка G пресек правих AB и CE . Израчунати површине троуглова AEC и BFG у односу на површину квадрата $ABCD$.
- [8п] Одредити једначину криве другог реда чија једна директриса има једначину $d: x + 2y + 2 = 0$, а жиже су јој тачке $F_1(2, 0)$ и $F_2(0, -4)$. Која крива је у питању?
- [8п] Дате су равни $\alpha: x - 2y + z - 3 = 0$ и $\beta: 2y + 4z = 0$, као и тачка $P(0, 2, -1)$.
 - [4п] Одредити једначину праве p која садржи тачку P , паралелна је равни α и садржана је у равни β .
 - [4п] Одредити формуле рефлексије у односу на раван α . Шта је слика праве p при тој рефлексији?
- [9п] Површ $P: 3x^2 + 3z^2 + 4xy + 8xz + 4yz - 3z = 0$ изометријском трансформацијом свести на канонски облик и написати формулу те трансформације. Која површ је у питању?
- [7п] На јединичној сфери дате су тачке $A(0, 0, 1)$ и $B(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{1}{2})$. Одредити тачку C тако да сферни троугао ABC буде једнакокрак, где је $\widehat{AB} = \widehat{AC}$ и $\angle BAC = \frac{\pi}{2}$. Одредити потом све стране и углове сферног троугла ABC , као и његову површину.

Аналитичка геометрија (Геометрија 1)
СЕПТЕМБАР 2 - 27.09.2024. године
Време рада: 135мин. Срећно!



- [8п] Дат је квадрат $ABCD$. Нека је тачка E таква да важи $\overrightarrow{DE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{DB}$. Нека је тачка F пресек правих CB и AE , а тачка G пресек правих AB и CE . Израчунати површине троуглова AEC и BFG у односу на површину квадрата $ABCD$.
- [8п] Одредити једначину криве другог реда чија једна директриса има једначину $d: x + 2y + 2 = 0$, а жиже су јој тачке $F_1(2, 0)$ и $F_2(0, -4)$. Која крива је у питању?
- [8п] Дате су равни $\alpha: x - 2y + z - 3 = 0$ и $\beta: 2y + 4z = 0$, као и тачка $P(0, 2, -1)$.
 - [4п] Одредити једначину праве p која садржи тачку P , паралелна је равни α и садржана је у равни β .
 - [4п] Одредити формуле рефлексије у односу на раван α . Шта је слика праве p при тој рефлексији?
- [9п] Површ $P: 3x^2 + 3z^2 + 4xy + 8xz + 4yz - 3z = 0$ изометријском трансформацијом свести на канонски облик и написати формулу те трансформације. Која површ је у питању?
- [7п] На јединичној сфери дате су тачке $A(0, 0, 1)$ и $B(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{1}{2})$. Одредити тачку C тако да сферни троугао ABC буде једнакокрак, где је $\widehat{AB} = \widehat{AC}$ и $\angle BAC = \frac{\pi}{2}$. Одредити потом све стране и углове сферног троугла ABC , као и његову површину.



$O = AC \cap BD$

$\triangle BOC$
 EO, FO, CO
 коллинеарне

$\triangle AOB$
 EO, FO, AO
 коллинеарне

Означимо са $P = P_{ABCD} = \|\vec{AB} \times \vec{AD}\|$, $\vec{OE} = \frac{3}{2} \vec{OB}$

$$P_{AEFC} = \frac{1}{2} \|\vec{AE} \times \vec{AC}\| = \frac{1}{2} \|(\vec{AB} + \vec{BE}) \times (\vec{AB} + \vec{BC})\|$$

$$= \frac{1}{2} \|(\vec{AB} + \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OB})) \times (\vec{AB} + \vec{BC})\| = \frac{1}{2} \|(\frac{3}{2}\vec{AB} - \frac{1}{2}\vec{AD}) \times (\vec{AB} + \vec{AD})\|$$

$$= \frac{1}{2} \|\frac{3}{2}\vec{AB} \times \vec{AD} - \frac{1}{2}\vec{AD} \times \vec{AB}\| = \frac{1}{2} \|2\vec{AB} \times \vec{AD}\| = \boxed{P}$$

Методом $\begin{pmatrix} \vec{BE} \\ \vec{EO} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vec{OA} \\ \vec{AC} \end{pmatrix} \cdot \frac{\vec{CF}}{\vec{FB}} = -1 \Rightarrow \vec{CF} = -4\vec{FB}$
 $\Rightarrow \vec{BF} = -\frac{1}{3}\vec{BC} = -\frac{1}{3}\vec{AD}$

Методом $\begin{pmatrix} \vec{AG} \\ \vec{GB} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vec{BE} \\ \vec{EO} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vec{OC} \\ \vec{CA} \end{pmatrix} = -1 \Rightarrow \vec{AG} = -4\vec{GB}$
 $\Rightarrow \vec{BG} = \frac{1}{3}\vec{AB}$

$P_{ABFG} = \frac{1}{2} \|\vec{BF} \times \vec{BG}\| = \frac{1}{2} \|\frac{1}{3}\vec{AD} \times \frac{1}{3}\vec{AB}\| = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{9} \|\vec{AB} \times \vec{AD}\| = \boxed{\frac{P}{18}}$

2) $F_d(x, y) = x + 2y + 2$, $F_d(F_1) = F_d(2, 0) = 4 \Rightarrow F_1$ и F_2 са супр. страна d
 $F_d(F_2) = F_d(0, -4) = -6 \Rightarrow$ ХИПЕРБОЛА, F_1 и d ПАР

ЦЕНТАР: $O = S(F_1, F_2) \Rightarrow O(1, -2)$

ЕКСЦЕНТР: $c = d(O, F_1) = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{5} > 1$

$\frac{a^2}{c} = d(O, d) = \frac{|1 \cdot (-4) + 2|}{\sqrt{1+4}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow a^2 = c \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = 1 \Rightarrow a = 1$

$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{1} = \boxed{\sqrt{5}}$ Нека је $M(x, y) \in X$ произв. $\Rightarrow \frac{d(M, F_1)}{d(M, d)} = e$

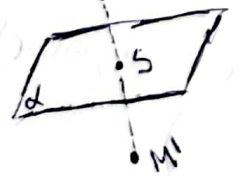
$\Rightarrow X: \frac{\sqrt{(x-2)^2 + y^2}}{|x+2y+2|} = \sqrt{5} \Rightarrow \boxed{X: (x-2)^2 + y^2 = (x+2y+2)^2}$
ХИПЕРБОЛА

3) $\alpha: x - 2y + z - 3 = 0$, $\beta: y + 2z = 0$, $P(0, 2, -1)$

а) $P \notin \alpha$, $P \in \beta$, $P \parallel \alpha \Rightarrow \vec{P} \perp \vec{n}_\alpha = (1, -2, 1) \Rightarrow \vec{P} = \vec{n}_\alpha \times \vec{n}_\beta = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (-5, -2, 1)$
 $P \in \beta \Rightarrow \vec{P} \perp \vec{n}_\beta = (0, 1, 2)$

$\Rightarrow \boxed{P: \frac{x}{5} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{-1}}$

б) $M(x_0, y_0, z_0)$ 1) $n \perp \alpha$, $n \perp \beta \Rightarrow n: y = -2x + y_0, z = x + z_0$



2) $S = n \cap \alpha: x + x_0 + 4x - 2y_0 + x + z_0 - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{3 - x_0 + 2y_0 - z_0}{6}$
 $\Rightarrow S(\frac{5x_0 + 2y_0 - z_0 + 3}{6}, \frac{x_0 + y_0 + z_0 - 3}{3}, \frac{-x_0 + 2y_0 + 5z_0 + 3}{6})$

3) $[M'] = 2[S] - [M] \Rightarrow S_\alpha: \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/3 & 2/3 & -1/3 \\ 2/3 & -1/3 & 2/3 \\ -1/3 & 2/3 & 2/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

$S_\alpha(P) = P'(\frac{8}{3}, \frac{-10}{3}, \frac{5}{3})$

$Q(-5, 0, 0) \in P$

$\Rightarrow S_\alpha(Q) = (-\frac{7}{3}, \frac{-16}{3}, \frac{8}{3})Q'$

$\Rightarrow S_\alpha(P) = P' = P'Q', P'Q' = (-5, -2, 1)$

$\Rightarrow P': \frac{x - \frac{8}{3}}{-5} = \frac{y + \frac{10}{3}}{-2} = \frac{z - \frac{5}{3}}{1}$

$P \parallel \alpha \Rightarrow P' \parallel \alpha$
 па $\vec{P'} = \vec{P}$
 (т.е. могли смо без Q)

4) $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & -312 \\ 0 & 0 & -312 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ $\varphi_B(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & 4 \\ 2 & -\lambda & 2 \\ 4 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix}$

$\dots = -(\lambda+1)^2(\lambda-8)$

$\lambda_1 = \lambda_2 = -1 \Rightarrow \dots \Rightarrow f_1 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} \\ -2/\sqrt{5} \\ 0 \end{bmatrix}$ $f_2 = \begin{bmatrix} 4/3\sqrt{5} \\ 2/3\sqrt{5} \\ -5/3\sqrt{5} \end{bmatrix}$, $\lambda_3 = 8 \Rightarrow f_3 = \begin{bmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ 2/3 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} & 4/3\sqrt{5} & 2/3 \\ -2/\sqrt{5} & 2/3\sqrt{5} & 1/3 \\ 0 & -5/3\sqrt{5} & 2/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} \Rightarrow A' = R^T A R = \dots = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \sqrt{5}/2 \\ 0 & 0 & 8 & -1 \\ 0 & \sqrt{5}/2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

НОРА $f_2 \perp f_1 \Rightarrow 2a+b+2c=0$ и $a-2b=0 \Rightarrow f_2 = (4, 2, -5)$

$\Rightarrow S': -x'^2 - y'^2 + 8z'^2 + \sqrt{5}y' - 2z' = 0$

$S': -x'^2 - (y' - \frac{\sqrt{5}}{2})^2 + 8(z' - \frac{1}{8})^2 + \frac{5}{4} - \frac{1}{8} = 0 \quad / -1$

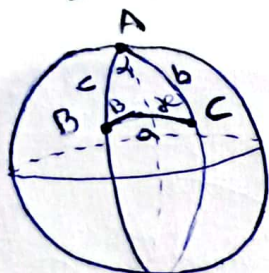
$\Rightarrow S'': x''^2 + y''^2 - 8z''^2 = 9/8 \Rightarrow \text{једногради хиперболоиди}$

5) $A(0, 0, 1)$, $B(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{1}{2})$, $\widehat{AB} = \widehat{AC}$, $\angle BAC = \pi/2$

$x = R \cos \theta \cos \varphi$
 $y = R \sin \theta \cos \varphi$, $R=1 \Rightarrow$
 $z = R \sin \theta$

$A: \varphi_A = \frac{\pi}{2}$, θ_A недеф.

$B: \varphi_B = \frac{\pi}{6}$, $\theta_B = 0$



$\widehat{AB} = \varphi_A - \varphi_B = \frac{\pi}{3} = \widehat{AC} \Rightarrow \varphi_C = \frac{\pi}{6}$

$\angle BAC = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \theta_C = \pm \frac{\pi}{2} \Rightarrow$ нека је $C: \theta_C = \pi/2$

$\Rightarrow A(0, 0, 1), B(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{1}{2}), C(0, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$

$\cos \alpha = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha = \frac{1}{4} \Rightarrow \alpha = \arccos \frac{1}{4}$, $b=c=\frac{\pi}{3}$
 $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $B = \alpha$ јер $b=c$
 $\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \frac{\sqrt{15}}{4}$

$\cos c = \cos \alpha \cos b + \sin \alpha \sin b \cos \beta$

$\frac{1}{2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{15}}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \beta$

$\frac{3}{8} = \frac{3\sqrt{5}}{8} \cos \beta \Rightarrow \cos \beta = \frac{1}{\sqrt{5}} = \cos \beta$

$P = \alpha + \beta + \beta - \pi = 2 \arccos \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{\pi}{2} \Rightarrow \beta = \beta = \arccos \frac{1}{\sqrt{5}}$

Показује се за 4) *:

$\lambda_1 = \lambda_2 = -1 \Rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = 0$

$\Rightarrow 2a + b + 2c = 0 \Rightarrow b = -2a - 2c$

$\varphi = \begin{bmatrix} a \\ -2a-2c \\ c \end{bmatrix} = \alpha \left(\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$

Како f_1 и f_2 нису ортогонални, уместо f_2 узимамо други с.в. $\perp f_1$
 $\tilde{f}_2 = (a, b, c)$ т.д. $2a + b + 2c = 0$ (с.в.)

$f_1 \perp \tilde{f}_2 = 0 \Rightarrow a - 2b = 0 \Rightarrow a = 2b$

$\Rightarrow c = -\frac{5}{2}b$

$\Rightarrow \tilde{f}_2 = \begin{bmatrix} 2b \\ b \\ -5/2b \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ -5 \end{bmatrix}$ па нормирамо

Аналитичка геометрија - колоквијум (19.04.2023.)

Презиме и име	Индекс	Поени
	/	

Обавезно прочитати!

У току теста није дозвољено коришћење литературе, окретање, нити постављање питања дежурном, а све врсте покушаја варања биће ригорозно санкционисане. Решења задатака су реални бројеви које треба уписати у за то предвиђене кућице. Поени предвиђени за задатак (3 по задатку) освајају се уколико су све кућице у оквиру тог задатка исправно попуњене. **Време предвиђено за рад је 90 минута! Срећан рад!**

1 	Нека је T тежиште тетраедра $ABCD$, а S тежиште троугла ABD. Тада је $\overrightarrow{ST} = \boxed{-\frac{1}{12}} \overrightarrow{AB} + \boxed{\frac{1}{4}} \overrightarrow{AC} + \boxed{-\frac{1}{12}} \overrightarrow{AD}$
2 	Нека је ABC троугао, и P и Q такве да је $\overrightarrow{CB} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BP}$ и $\overrightarrow{CA} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{CQ}$. Ако је R тачка праве AB таква да су AP, BQ и CR у прамену, тада је $\overrightarrow{AR} : \overrightarrow{RB} = \boxed{\frac{1}{3}}.$
3 	Ако су $\vec{a}$ и $\vec{b}$ вектори такви да је $\ \vec{b}\ = 2$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{3}$ и $\vec{a} \circ (2\vec{a} - \vec{b}) = 6$, онда је $\ \vec{a}\ = \boxed{2}$
4 	Ако су $A(0, 0, 0)$, $B(1, 2, 3)$, $C(2, 1, -9)$ и $D(2, 0, 2)$ темена тетраедра, онда је његова запремина једнака $\boxed{8}$
5 	Дат је правилни октаедар $ABCDEFGF$. Афини репер $Axyz$ има координатне векторе $\vec{e}_1 = \overrightarrow{AB}$, $\vec{e}_2 = \overrightarrow{AD}$, $\vec{e}_3 = \overrightarrow{AE}$, а репер $Cx'y'z'$ координатне векторе $\vec{f}_1 = \overrightarrow{CB}$, $\vec{f}_2 = \overrightarrow{CE}$, $\vec{f}_3 = \overrightarrow{CF}$. Веза између старих и нових координата је: $\begin{aligned} x &= \boxed{0} x' + \boxed{-1} y' + \boxed{0} z' + \boxed{1} \\ y &= \boxed{-1} x' + \boxed{-1} y' + \boxed{0} z' + \boxed{1} \\ z &= \boxed{0} x' + \boxed{1} y' + \boxed{-1} z' + \boxed{0} \end{aligned}$

6	Дат је правоугли паралелопипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ ивица $AB = 2$, $AD = 1$, $AA_1 = 2$. Растојање мимоилазних правих AC и BD_1 је $\frac{2}{3}$
7	Нека су тачке $A(4, \frac{\pi}{3})$ и $B(3, \frac{5\pi}{6})$ дате њиховим поларним координатама. Растојање тачака A и B је 5
8	Права p која садржи пресек правих $a : x - y + 2 = 0$ и $b : -2x + y + 1 = 0$ и нормална је на праву $c : 3x - y + 2023 = 0$ има једначину $p : \frac{x + \boxed{-3}}{3} = \frac{y - \boxed{5}}{\boxed{-1}}.$
9	Тачка C која је симетрична тачки $B(2, 0, 6)$ у односу на раван $\alpha : x + y + z - 2 = 0$ има координате $C \left(\boxed{-2}, \boxed{-4}, \boxed{2} \right)$
10	Раван која садржи праву $p : x - y + z + 1 = 0$, $x + y - z + 1 = 0$ и нормална је на раван $\alpha : 2x - y + 5z - 3 = 0$ има једначину $\boxed{3}x + \boxed{1}y - z + \boxed{3} = 0$

Аналитичка геометрија - колоквијум (19.04.2023.)

Презиме и име

Индекс

Поени

Обавезно прочитати!

У току теста није дозвољено коришћење литературе, окретање, нити постављање питања дежурном, а све врсте покушаја варања биће ригорозно санкционисане. Решења задатака су реални бројеви које треба уписати у за то предвиђене кућице. Поени предвиђени за задатак (3 по задатку) освајају се уколико су све кућице у оквиру тог задатка исправно попуњене. **Време предвиђено за рад је 90 минута! Срећан рад!**

1 	Нека је T тежиште тетраедра $ABCD$, а S тежиште троугла ABC. Тада је $\overrightarrow{ST} = \boxed{-\frac{1}{12}} \overrightarrow{AB} + \boxed{-\frac{1}{12}} \overrightarrow{AC} + \boxed{\frac{1}{4}} \overrightarrow{AD}$
2 	Нека је ABC троугао, и P и Q такве да је $\overrightarrow{CB} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{BP}$ и $\overrightarrow{CA} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{CQ}$. Ако је R тачка праве AB таква да су AP, BQ и CR у прамену, тада је $\overrightarrow{AR} : \overrightarrow{RB} = \boxed{\frac{4}{9}}.$
3 	Ако су $\vec{a}$ и $\vec{b}$ вектори такви да је $\ \vec{b}\ = 8$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{3}$ и $\vec{a} \circ (3\vec{a} - 2\vec{b}) = 3$, онда је $\ \vec{a}\ = \boxed{3}$
4 	Ако су $A(0, 0, 0)$, $B(1, 2, 3)$, $C(2, 1, -9)$ и $D(1, 0, 1)$ темена тетраедра, онда је његова запремина једнака $\boxed{4}$
5 	Дат је правилни октаедар $ABCDEFG$. Афини репер $Axyz$ има координатне векторе $\vec{e}_1 = \overrightarrow{AB}$, $\vec{e}_2 = \overrightarrow{AD}$, $\vec{e}_3 = \overrightarrow{AE}$, а репер $Cx'y'z'$ координатне векторе $\vec{f}_1 = \overrightarrow{CE}$, $\vec{f}_2 = \overrightarrow{CD}$, $\vec{f}_3 = \overrightarrow{CF}$. Веза између старих и нових координата је: $\begin{aligned} x &= \boxed{-1} x' + \boxed{-1} y' + \boxed{0} z' + \boxed{1} \\ y &= \boxed{-1} x' + \boxed{0} y' + \boxed{0} z' + \boxed{1} \\ z &= \boxed{1} x' + \boxed{0} y' + \boxed{-1} z' + \boxed{0} \end{aligned}$

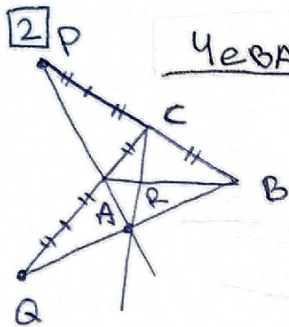
6	Дат је правоугли паралелопипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ ивица $AB = 2$, $AD = 1$, $AA_1 = 4$. Растојање мимоилазних правих AC и BD_1 је $\frac{\sqrt{6}}{3}$
7	Нека су тачке $A(12, \frac{\pi}{6})$ и $B(5, \frac{2\pi}{3})$ дате њиховим поларним координатама. Растојање тачака A и B је 13
8	Права p која садржи пресек правих $a : x + y + 2 = 0$ и $b : -2x - y - 5 = 0$ и нормална је на праву $c : 3x + y + 2023 = 0$ има једначину $p : \frac{x + 3}{3} = \frac{y - 1}{1}$
9	Тачка C која је подножје нормале из тачке $B(2, 0, 6)$ на раван $\alpha : x + y + z - 2 = 0$ има координате $C \left(0, -2, 4 \right)$
10	Раван која садржи праву $p : y - 2z - 2 = 0$, $x = 1$ и нормална је на раван $\alpha : x + y - z + 1 = 0$ има једначину $3x - y + 2z - 1 = 0$

1) Т тежиште ABCD, S тежиште ABC

$$\Rightarrow \vec{AT} = \frac{1}{4} (\vec{AA} + \vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AD}) \quad , \quad \vec{AS} = \frac{1}{3} (\vec{AA} + \vec{AB} + \vec{AC})$$

$$\vec{ST} = \vec{SA} + \vec{AT} = -\frac{1}{3}\vec{AB} - \frac{1}{3}\vec{AC} + \frac{1}{4}\vec{AB} + \frac{1}{4}\vec{AC} + \frac{1}{4}\vec{AD}$$

$$= \boxed{-\frac{1}{12}} \vec{AB} + \boxed{-\frac{1}{12}} \vec{AC} + \boxed{\frac{1}{4}} \vec{AD}$$



ЧЕБА $\frac{\vec{AP}}{\vec{RB}} \cdot \frac{\vec{BP}}{\vec{PC}} \cdot \frac{\vec{CQ}}{\vec{QA}} = 1$ $\vec{CB} = -\frac{1}{3}\vec{BP}$, $\vec{CA} = -\frac{1}{3}\vec{CQ}$

$$\vec{BP} = \vec{BC} + \vec{CP} = \frac{1}{3}\vec{BP} - \vec{PC} \Rightarrow \frac{2}{3}\vec{BP} = -\vec{PC} \Rightarrow \frac{\vec{BP}}{\vec{PC}} = \boxed{-\frac{3}{2}}$$

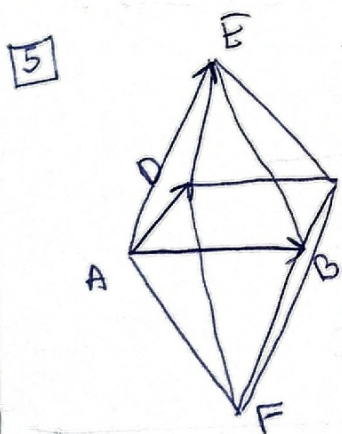
$$\vec{CQ} = \vec{CA} + \vec{AQ} = -\frac{1}{3}\vec{QC} - \vec{QA} \Rightarrow \frac{2}{3}\vec{CQ} = -\vec{QA} \Rightarrow \frac{\vec{CQ}}{\vec{QA}} = \boxed{-\frac{3}{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{\vec{AP}}{\vec{RB}} \cdot \frac{-3}{2} \cdot \frac{-3}{2} = 1 \Rightarrow \frac{\vec{AP}}{\vec{RB}} = \boxed{\frac{4}{9}}$$

3) $3 = \vec{a} \cdot (3\vec{a} - 2\vec{b}) = 3\|\vec{a}\|^2 - 2\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) = 3\|\vec{a}\|^2 - 8\|\vec{a}\|$

$$3\|\vec{a}\|^2 - 8\|\vec{a}\| - 3 = 0 \Rightarrow \|\vec{a}\|_{1/2} = \frac{8 \pm \sqrt{64+36}}{6} = \frac{8 \pm 10}{6} \xrightarrow{-1/3} \boxed{3}$$

4) $V_{\text{тетр. ABCD}} = \frac{1}{6} |[\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}]| = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -9 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -11 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} |-24| = \boxed{4}$



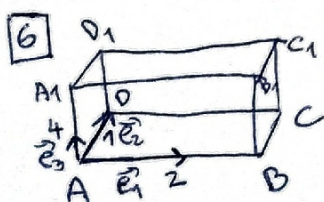
$$[\vec{e}]_{Ae} = [\vec{AC}]_e = (1, 1, 0)$$

$$[\vec{f}_1]_e = [\vec{CE}]_e = [\vec{CA} + \vec{AE}]_e = (-1, -1, 1)$$

$$[\vec{f}_2]_e = [\vec{CD}]_e = [-\vec{AB}]_e = (-1, 0, 0)$$

$$[\vec{f}_3]_e = [\vec{CF}]_e = [-\vec{AE}]_e = (0, 0, -1)$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$



A(0,0,0) B(2,0,0)
C(2,1,0) D1(0,1,4)

$$d(AC, BD_1) = \frac{|[\vec{AC}, \vec{BD}_1, \vec{AB}]|}{\|\vec{AC} \times \vec{BD}_1\|} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{|2 \cdot 4|}{\sqrt{4^2 + (-8)^2 + 4^2}}$$

$$= \frac{8}{\sqrt{96}} = \frac{8}{4\sqrt{6}} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \boxed{\frac{\sqrt{6}}{3}}$$

7 $A(r_A, \phi_A), B(r_B, \phi_B)$

$d(A, B) = \sqrt{r_A^2 + r_B^2 - 2r_A r_B \cos(\phi_A - \phi_B)}$ (*)

$A(12, \frac{\pi}{6}), B(5, \frac{2\pi}{3}) \Rightarrow d(A, B) = \sqrt{12^2 + 5^2 - 2 \cdot 12 \cdot 5 \cos(\frac{\pi}{6} - \frac{2\pi}{3})} = \sqrt{169} = 13$

8 $a \cap b: \begin{cases} x+y+2=0 \\ -2x-y-5=0 \end{cases} +$

$-x-3=0 \Rightarrow \begin{cases} x=-3 \\ y=1 \end{cases}$

$c: 3x+y+2023=0$

$\vec{n}_c = (3, 1) = \vec{p}$

$\Rightarrow P: \frac{x+3}{3} = \frac{y-1}{1}$

9 $B(2, 0, 6)$

$B'(0, -2, 4)$

$B''(-2, -4, 2)$

$\alpha: x+y+z-2=0$

1) $n \perp \alpha, B \in n \Rightarrow n: \begin{cases} x=t+2 \\ y=t \\ z=t+6 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

2) $B' = n \cap \alpha: t+2+t+t+6-2=0 \Rightarrow t=-2$

$B'(0, -2, 4) \quad B''(-2, -4, 2)$

$C(0, -2, 4)$

10 $P: \begin{cases} x=1 \\ y-2z-2=0 \end{cases}$

$\Rightarrow P: \begin{cases} x=1 \\ y=2t+2 \\ z=t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \Rightarrow \vec{p} = (0, 2, 1)$

$P(1, 2, 0) \in P \subset \beta \checkmark$

$\alpha: x+y-z+1=0$

$P \subset \beta \Rightarrow \vec{n}_P \perp \vec{p}$

$\beta \perp \alpha \Rightarrow \vec{n}_\beta \perp \vec{n}_\alpha$

$\vec{n}_\beta = \vec{p} \times \vec{n}_\alpha = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-3, 1, -2) \parallel (3, -1, 2) = \vec{n}_\beta$

$P(1, 2, 0) \in \beta$

$\vec{n}_\beta = (3, -1, 2)$

$\Rightarrow \beta: 3(x-1) - 1(y-2) + 2(z-0) = 0$

$\beta: 3x - y + 2z - 1 = 0$

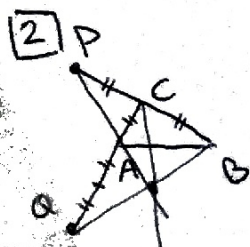
АГ (Г1) - КОЛОКВИУМ

II ГРУПА

1 Т тешките ABCD, S теш. ABD

$\Rightarrow \vec{AT} = \frac{1}{4}(\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AD}), \vec{AS} = \frac{1}{3}(\vec{AB} + \vec{AD})$

$\vec{ST} = \vec{SA} + \vec{AT} = -\frac{1}{12}\vec{AB} + \frac{1}{4}\vec{AC} + \frac{-1}{12}\vec{AD}$



$\frac{\vec{AR}}{\vec{RB}} \cdot \frac{\vec{BP}}{\vec{PC}} \cdot \frac{\vec{CA}}{\vec{QA}} = 1 \quad \vec{CB} = -\frac{1}{2}\vec{BP}, \vec{CA} = -\frac{1}{3}\vec{AQ} \checkmark$

може и са слике или као прва група

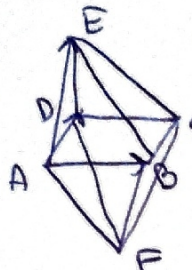
$\Rightarrow 3 \frac{\vec{AR}}{\vec{RB}} = 1 \Rightarrow \frac{\vec{AR}}{\vec{RB}} = \frac{1}{3}$

$$3) \vec{a} \cdot (2\vec{a} - \vec{b}) = 2\|\vec{a}\|^2 - \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) = 2\|\vec{a}\|^2 - \|\vec{a}\|$$

$$\Rightarrow 2\|\vec{a}\|^2 - \|\vec{a}\| - 6 = 0 \Rightarrow \|\vec{a}\|_{1/2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+48}}{4} = \frac{1 \pm 7}{4} \rightarrow -3/2 \rightarrow \boxed{2}$$

$$4) V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} 48 = \boxed{8}$$

→ 2 ПУТА ДЕТЕРМИНАНТА ИЗ I ГРУПЕ

5) 

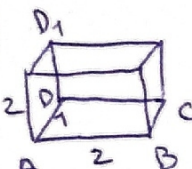
$$[C] = [AC]_e = (1, 1, 0)$$

$$[F_1] = [CB]_e = [-AD]_e = (0, -1, 0)$$

$$[F_2] = [CE]_e = [CA + AE]_e = (-1, -1, 1)$$

$$[F_3] = [CF]_e = [-AE]_e = (0, 0, -1)$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

6) 

$$A(0,0,0) \quad B(2,0,0)$$

$$C(2,1,0) \quad D_1(0,1,2)$$

$$d(AC, BD_1) = \frac{|[\vec{AC}, \vec{BD_1}, \vec{AB}]|}{\|\vec{AC} \times \vec{BD_1}\|} = \frac{1 \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{\| \begin{bmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \|} = \frac{|2 \cdot 2|}{\sqrt{2^2 + (-4)^2 + 4^2}} = \frac{4}{6} = \boxed{\frac{2}{3}}$$

7) $A(4, \frac{\pi}{3}), B(3, \frac{5\pi}{6})$

$$d(A, B) = \sqrt{4^2 + 3^2 - 2 \cdot 4 \cdot 3 \cos(\frac{\pi}{3} - \frac{5\pi}{6})} = \sqrt{25} = \boxed{5}$$

8) $a: x - y + 2 = 0$
 $b: -2x + y + 1 = 0$

$$\begin{aligned} -x + 3 &= 0 \Rightarrow \boxed{x=3} \\ y &= 5 \end{aligned}$$

$$c: 3x - y + 2023 = 0$$

$$\vec{n}_c = (3, -1) = \vec{p}$$

$$\Rightarrow P: \frac{x + \boxed{-3}}{3} = \frac{y - \boxed{5}}{\boxed{1}}$$

9) из группы I $\Rightarrow C = B''(-2, -4, 2)$

10) $P: \begin{cases} x - y + z + 1 = 0 \\ x + y - z + 1 = 0 \end{cases}$

$$x = -1 \quad P: -y + z = 0 \Rightarrow P: y = t, z = t, t \in \mathbb{R} \Rightarrow \begin{cases} P(-1, 0, 0) \in P \\ P(0, 1, 1) \end{cases}$$

$$\alpha: 2x - y + 5z - 3 = 0$$

$$\vec{n}_\beta = \vec{n}_\alpha \times \vec{p} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-6, -2, 2) \parallel (3, 1, -1) = \vec{n}_\beta \checkmark$$

$$\Rightarrow \beta: 3(x+1) + 1 \cdot y - 1 \cdot z = 0$$

$$\beta: \boxed{3}x + \boxed{1}y - z + \boxed{3} = 0$$

Аналитичка геометрија - колоквијум (13.06.2023.)

Презиме и име

Индекс

Поени

 /

Обавезно прочитати!

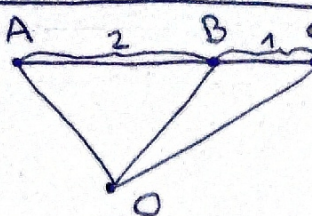
У току теста није дозвољено коришћење литературе, окретање, нити постављање питања дежурном, а све врсте покушаја варања биће ригорозно санкционисане. Решења задатака су реални бројеви које треба уписати у за то предвиђене кућице. Поени предвиђени за задатак (3 по задатку) освајају се уколико су све кућице у оквиру тог задатка исправно попуњене. **Време предвиђено за рад је 90 минута! Срећан рад!**

1 	Нека су A, B, C и O различите тачке такве да је $\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{BC}$. Тада је $\overrightarrow{OC} = \boxed{-\frac{1}{2}} \overrightarrow{OA} + \boxed{\frac{3}{2}} \overrightarrow{OB}$
2 	Нека је ABC троугао, и P и Q такве да је $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{PB}$ и $\overrightarrow{BQ} = -\frac{2}{5}\overrightarrow{CQ}$. Ако се AQ и CP секу у тачки R, тада је $AR : QR = \boxed{\frac{7}{15}}.$
3 	Нека су $\vec{a}$ и $\vec{b}$ вектори такви да је $\ \vec{a}\ = \ \vec{b}\ = 1$ и $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{3}$. Ако је $\vec{c} \perp \vec{a} \times \vec{b}$ и такав да је $\vec{c} \circ \vec{a} = 8$ и $\vec{b} \circ \vec{c} = 7$, тада је $\vec{c} = \boxed{6} \vec{a} + \boxed{4} \vec{b}$
4 	Ако су $A(0,0)$, $B(1,2)$ и $C(2,1)$ темена троугла, онда је његова површина једнака $\boxed{\frac{3}{2}}$
5 	Квадар $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ има дужине ивица $AB = 2$, $AD = 1$ и $AA_1 = 3$, а тачка E је средиште ивице $C_1 D_1$. У координатном систему $Axyz$ базни вектори су јединични вектори $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ и $\vec{e}_3$ истог правца и смера редом као вектори $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AA_1}$. У координатном систему $B_1 x' y' z'$ базни вектори су $\vec{f}_1 = \overrightarrow{B_1 C}$, $\vec{f}_2 = \overrightarrow{B_1 C_1}$, $\vec{f}_3 = \overrightarrow{B_1 E}$. Веза између старих и нових координата је: $\begin{aligned} x &= \boxed{0} x' + \boxed{0} y' + \boxed{-1} z' + \boxed{2} \\ y &= \boxed{1} x' + \boxed{1} y' + \boxed{1} z' + \boxed{0} \\ z &= \boxed{-3} x' + \boxed{0} y' + \boxed{0} z' + \boxed{3} \end{aligned}$

6	Врх тетраедра је теме коцке ивице 2, а темена основе су средишта страна (пљосни) коцке које не садрже врх. Запремина тетраедра је $\frac{2}{3}$
7	Тачка симетрична тачки $(1, 2)$ у односу на праву $p : x + y + 1 = 0$ има координате $(-3, -2)$
8	Једначине тангенти из тачке $A(-6, 8)$ на круг $k : (x + 8)^2 + (y - 4)^2 = 4$ су $p : \frac{x - 6}{0} = \frac{y - 2}{5}, \quad q : \frac{x - 2}{4} = \frac{y - 14}{3}.$
9	За неко $\lambda \in \mathbb{R}$, пресечна тачка правих $p : \frac{x - 3}{\lambda} = \frac{y + 2}{2} = \frac{z - 1}{1}$ и $q : 2x + y - z = 1, 3x - y = 1$ има координате $(1, 2, 3)$
10	Раван која садржи праву $p : \frac{x - 1}{1} = \frac{y - 2}{2} = \frac{z + 3}{3}$ и паралелна је правој $q : \frac{x - 2}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z + 1}{3}$ има једначину $3x + 0y - z - 6 = 0$

АГ - Г1 - ПОПРАВНИ КОЛОКВИЈУМ

1 $\vec{AC} = 3\vec{BC}$

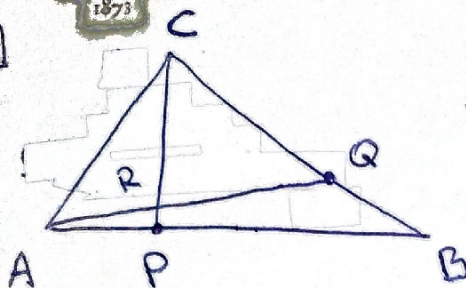


$$\vec{AB} = \vec{AC} + \vec{CB} = 3\vec{BC} - \vec{BC} = 2\vec{BC}$$

$$\vec{OB} = \frac{1}{3} \vec{OA} + \frac{2}{3} \vec{OC} \quad | \cdot \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \vec{OC} = \left[-\frac{1}{2} \right] \vec{OA} + \left[\frac{3}{2} \right] \vec{OB}$$

2



ΔABQ

Менелай

C, P, R коллинеарне

$$\frac{\vec{AP}}{\vec{PB}} \cdot \frac{\vec{BQ}}{\vec{CQ}} \cdot \frac{\vec{QR}}{\vec{RA}} = -1$$

$$\vec{BC} = \vec{BQ} + \vec{QC} = -\frac{2}{5} \vec{CQ} - \vec{CQ} = -\frac{7}{5} \vec{CQ}$$

$$\Rightarrow \frac{\vec{QR}}{\vec{RA}} = \frac{15}{7} \Rightarrow \vec{RA} = \frac{7}{15} \vec{QR} \Rightarrow \boxed{AR:QR = \frac{7}{15}}$$

3 $\vec{c} \perp \vec{a} \times \vec{b} \Rightarrow \vec{c}$ се налази у равни разан. са $\vec{a}$ и $\vec{b}$
 $\Rightarrow \vec{c} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b}$

1) $8 = \vec{c} \cdot \vec{a} = \alpha \|\vec{a}\|^2 + \beta \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \alpha + \frac{1}{2} \beta = 8$

2) $7 = \vec{b} \cdot \vec{c} = \frac{1}{2} \alpha + \beta = 7 \Rightarrow \beta = 7 - \frac{\alpha}{2}$

$$\boxed{\beta = 7 - 3 = 4}$$

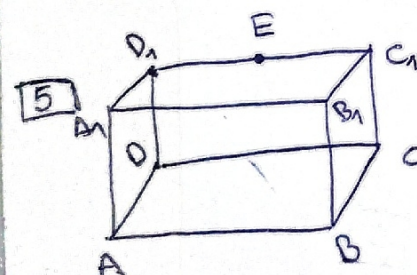
$$\alpha + \frac{7}{2} - \frac{\alpha}{4} = 8 \Rightarrow \frac{3}{4} \alpha = \frac{9}{2} \Rightarrow \boxed{\alpha = 6}$$

4 $\vec{AB} = (1, 2) \rightsquigarrow (1, 2, 0)$
 $\vec{AC} = (2, 1) \rightsquigarrow (2, 1, 0)$

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, -3)$$

$$P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \|\vec{AB} \times \vec{AC}\| = \boxed{3/2}$$

$$\vec{AB} = 2\vec{e}_1, \vec{AD} = \vec{e}_2, \vec{AA}_1 = 3\vec{e}_3$$



$$[B_1]_{Ae} = [\vec{AB}_1]_e = [\vec{AB} + \vec{AA}_1]_e = \boxed{(2, 0, 3)}$$

$$[F_1]_{Ae} = [\vec{B_1C}]_{Ae} = [\vec{B_1B} + \vec{BC}]_{Ae} = \boxed{(0, 1, -3)}$$

$$[F_2]_{Ae} = [\vec{B_1C_1}]_{Ae} = \boxed{(0, 1, 0)}, [F_3]_{Ae} = [\vec{B_1E}]_{Ae} = \left[\frac{1}{2} \vec{B_1C_1} + \frac{1}{2} \vec{B_1B} \right]_{Ae} = \boxed{(-1, 1, 0)}$$

6 у ренеру Ae, $\vec{AB} = \vec{e}_1, \vec{AD} = 2\vec{e}_2, \vec{AA}_1 = 2\vec{e}_3$
 $\Rightarrow A(0, 0, 0)$

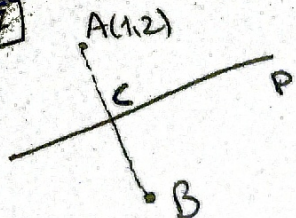
$$[E]_{Ae} = [\vec{AE}]_e = [\vec{AB} + \frac{1}{2}(\vec{BC} + \vec{BB_1})]_e = (2, 1, 1)$$

Аналогно, $F(1, 2, 1), G(1, 1, 2)$

$$V = \frac{1}{6} |[\vec{AE}, \vec{AF}, \vec{AG}]| = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \frac{4}{6} = \boxed{\frac{2}{3}}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 8 + 1 + 1 = 4$$

7



$$P: x+y+1=0$$

$$n \perp \Delta A \in n, n \perp P \Rightarrow n: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} \Leftrightarrow x-y=-1$$

$$P \cap n: \begin{cases} x+y+1=0 \\ x-y+1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=0 \end{cases}$$

$$A(1,2)$$

$$C(-1,0)$$

$$B(-3,-2)$$

8) $A \in \ell \Rightarrow \ell: \frac{x+6}{a} = \frac{y-8}{b}$

$$C(-8,4) \Rightarrow \ell: bx - ay + 6b + 8a = 0$$

$$2) d(C, \ell) = \frac{|-8b - 4a + 6b + 8a|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \Leftrightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \ell_1: \frac{x-6}{0} = \frac{y-2}{5} \\ \ell_2: \frac{x-2}{4} = \frac{y-14}{3} \end{cases}$$

$$(t=-6) \Rightarrow a=0$$

$$\vec{\ell} = (0,1)$$

$$(\lambda=2)$$

$$\ell_1: \begin{cases} x=-6 \\ y=t+8 \end{cases}$$

$$\checkmark a = \frac{4}{3}b$$

$$\vec{\ell} = (4,3)$$

$$\ell_2: \begin{cases} x=4\lambda-6 \\ y=3\lambda+8 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 2\sqrt{a^2+b^2} &= |4a-2b| = 2|2a-b| \\ a^2+b^2 &= 4a^2-4ab+b^2 \\ 3a^2-4ab &= 0 = a(3a-4b) \end{aligned}$$

9

$$P: \begin{cases} x=\lambda t+3 \\ y=2t-2 \\ z=t+1 \end{cases}$$

$$Q: \begin{cases} 2x+y-z=1 \\ 3x-y=1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} 2\lambda t + t &= -2 \quad | \cdot 3 \\ 3\lambda t - 2t &= -10 \quad | \cdot (-2) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow P \cap Q = (1, 2, 3)$$

$$\begin{aligned} 2\lambda t + 6 + 2t - 2 - t - 1 &= 1 \\ 3\lambda t + 9 - 2t + 2 &= 1 \end{aligned}$$

$$7t = 14$$

$$t=2$$

$$4\lambda + 2 = -2 \Rightarrow \lambda = -1$$

10) $P(1,2,-3) \in P \subset \alpha$

$$\vec{n}_\alpha = \vec{P} \times \vec{Q} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = (3, 0, -1)$$

$$\Rightarrow \alpha: 3(x-1) + 0(y-2) - (z+3) = 0$$

$$\alpha: 3x + 0y - z + (-6) = 0$$

Аналитичка геометрија (Геометрија 1)

ЈУН 1 - 13.06.2023. године

Време рада: 135мин. Срећно!



- Дат је паралелограм $ABCD$. Тачка O је пресек дијагонала AC и BD , K средиште странице AB и L средиште странице BC .
 - [3п] Доказати да је O тежиште троугла DKL .
 - [3п] Репер Axy има координатне векторе $\vec{e}_1 = \vec{AB}$ и $\vec{e}_2 = \vec{AD}$, а репер $Ox'y'$ координатне векторе $\vec{f}_1 = \vec{OK}$ и $\vec{f}_2 = \vec{OL}$. Одредити везу координата (x, y) и (x', y') .
- [9п] Криву $K : 2x^2 + 2xy + 2y^2 + 4x + 2y - 4 = 0$ изометријском трансформацијом свести на канонски облик и написати формулу те трансформације. Која крива је у питању?
- Дате су тачка $A(0, 0, 7)$, права $p : x + 2 = y + 2 = z - 1$ и раван $\alpha : x + 2y + 3z + 1 = 0$.
 - [4п] Одредити једначину праве q која садржи тачку A , сече праву p и паралелна је равни α .
 - [6п] Одредити формуле рефлексије у односу на раван α . Шта је слика праве p при тој рефлексији?
- [8п] Одредити једначину цилиндра C који садржи пресек равни $\alpha : x + y - z + 1 = 0$ и $\beta : 5x - 4y + z + 2 = 0$, као и круг k који се налази у равни $\gamma : x + y + z = 3$, има полупречник $\sqrt{2}$ и центар у тачки $C(1, 1, 1)$.
- [7п] На јединичној сфери одредити растојање између тачака $A(30^\circ S, 135^\circ W)$ и $B(60^\circ N, 45^\circ E)$.

Аналитичка геометрија (Геометрија 1)

ЈУН 1 - 13.06.2023. године

Време рада: 135мин. Срећно!



- Дат је паралелограм $ABCD$. Тачка O је пресек дијагонала AC и BD , K средиште странице AB и L средиште странице BC .
 - [3п] Доказати да је O тежиште троугла DKL .
 - [3п] Репер Axy има координатне векторе $\vec{e}_1 = \vec{AB}$ и $\vec{e}_2 = \vec{AD}$, а репер $Ox'y'$ координатне векторе $\vec{f}_1 = \vec{OK}$ и $\vec{f}_2 = \vec{OL}$. Одредити везу координата (x, y) и (x', y') .
- [9п] Криву $K : 2x^2 + 2xy + 2y^2 + 4x + 2y - 4 = 0$ изометријском трансформацијом свести на канонски облик и написати формулу те трансформације. Која крива је у питању?
- Дате су тачка $A(0, 0, 7)$, права $p : x + 2 = y + 2 = z - 1$ и раван $\alpha : x + 2y + 3z + 1 = 0$.
 - [4п] Одредити једначину праве q која садржи тачку A , сече праву p и паралелна је равни α .
 - [6п] Одредити формуле рефлексије у односу на раван α . Шта је слика праве p при тој рефлексији?
- [8п] Одредити једначину цилиндра C који садржи пресек равни $\alpha : x + y - z + 1 = 0$ и $\beta : 5x - 4y + z + 2 = 0$, као и круг k који се налази у равни $\gamma : x + y + z = 3$, има полупречник $\sqrt{2}$ и центар у тачки $C(1, 1, 1)$.
- [7п] На јединичној сфери одредити растојање између тачака $A(30^\circ S, 135^\circ W)$ и $B(60^\circ N, 45^\circ E)$.

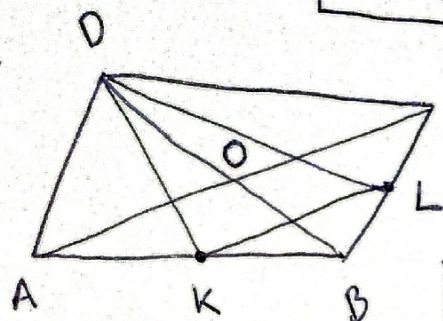
Аналитичка геометрија (Геометрија 1)

ЈУН 1 - 13.06.2023. године

Време рада: 135мин. Срећно!



- Дат је паралелограм $ABCD$. Тачка O је пресек дијагонала AC и BD , K средиште странице AB и L средиште странице BC .
 - [3п] Доказати да је O тежиште троугла DKL .
 - [3п] Репер Axy има координатне векторе $\vec{e}_1 = \vec{AB}$ и $\vec{e}_2 = \vec{AD}$, а репер $Ox'y'$ координатне векторе $\vec{f}_1 = \vec{OK}$ и $\vec{f}_2 = \vec{OL}$. Одредити везу координата (x, y) и (x', y') .
- [9п] Криву $K : 2x^2 + 2xy + 2y^2 + 4x + 2y - 4 = 0$ изометријском трансформацијом свести на канонски облик и написати формулу те трансформације. Која крива је у питању?
- Дате су тачка $A(0, 0, 7)$, права $p : x + 2 = y + 2 = z - 1$ и раван $\alpha : x + 2y + 3z + 1 = 0$.
 - [4п] Одредити једначину праве q која садржи тачку A , сече праву p и паралелна је равни α .
 - [6п] Одредити формуле рефлексије у односу на раван α . Шта је слика праве p при тој рефлексији?
- [8п] Одредити једначину цилиндра C који садржи пресек равни $\alpha : x + y - z + 1 = 0$ и $\beta : 5x - 4y + z + 2 = 0$, као и круг k који се налази у равни $\gamma : x + y + z = 3$, има полупречник $\sqrt{2}$ и центар у тачки $C(1, 1, 1)$.
- [7п] На јединичној сфери одредити растојање између тачака $A(30^\circ S, 135^\circ W)$ и $B(60^\circ N, 45^\circ E)$.



а) О тежиште ΔDKL ?

$\Leftrightarrow \vec{SO} = \frac{1}{3}(\vec{SD} + \vec{SK} + \vec{SL})$ за било које S
Узмимо $HP S \equiv B$ (или A или C слично)

$$\frac{1}{3}(\vec{BD} + \vec{BK} + \vec{BL}) = \frac{1}{3}(\vec{BC} + \vec{CD} + \frac{1}{2}\vec{BA} + \frac{1}{2}\vec{BC})$$

$$= \frac{1}{3}(\frac{3}{2}\vec{BC} + \frac{3}{2}\vec{BA}) = \frac{1}{2}\vec{BC} + \frac{1}{2}\vec{BA} = \boxed{\vec{BO}}$$

б) $[O]_{Ae} = [\vec{AO}]_e = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

$[\vec{f}_1]_e = [\vec{OK}]_e = (0, -\frac{1}{2})$

$[\vec{f}_2]_e = [\vec{OL}]_e = (\frac{1}{2}, 0)$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 \\ -1/2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

2) $K: 2x^2 + 2xy + 2y^2 + 4x + 2y - 4 = 0$

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

* $\varphi_B(\lambda) = \det(B - \lambda E) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = (\lambda-1)(\lambda-3) = 0$

* $\lambda_1 = 1$

* $\lambda_2 = 3$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

$a+b=0 \Rightarrow b=-a$

$-a+b=0$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{u}_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})}$$

$$\boxed{\vec{u}_2 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y') \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}(-x' + y') \end{cases}$$

$$\Rightarrow K': (x'^2 + 2x'y' + y'^2) + (y'^2 - x'^2) + (x'^2 - 2x'y' + y'^2) + 2\sqrt{2}(x' + y') + \sqrt{2}(-x' + y') - 4 = 0$$

$$K': x'^2 + 3y'^2 + \sqrt{2}x' + 3\sqrt{2}y' - 4 = 0$$

$$K': (x' + \frac{1}{\sqrt{2}})^2 - \frac{1}{2} + 3(y' + \frac{1}{\sqrt{2}})^2 - \frac{3}{2} - 4 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x'' = x' + \frac{1}{\sqrt{2}} \\ y'' = y' + \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

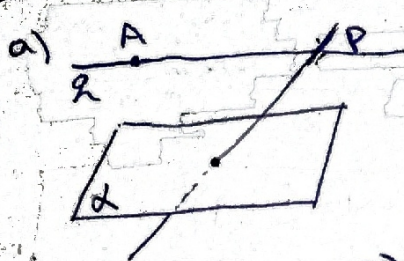
$$\Rightarrow K'': x''^2 + 3y''^2 = 6 \Leftrightarrow K'': \frac{x''^2}{6} + \frac{y''^2}{2} = 1 \Rightarrow \boxed{\text{елипса}}$$

ТРАНСФОРМАЦИЈА:

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y') = \frac{1}{\sqrt{2}}(x'' - \frac{1}{\sqrt{2}} + y'' - \frac{1}{\sqrt{2}}) \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2}}x'' + \frac{1}{\sqrt{2}}y'' - 1$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{2}}(-x' + y') = \frac{1}{\sqrt{2}}(-x'' + \frac{1}{\sqrt{2}} + y'' - \frac{1}{\sqrt{2}}) \Rightarrow y = -\frac{1}{\sqrt{2}}x'' + \frac{1}{\sqrt{2}}y''$$

3) $A(0,0,7)$, $P: \frac{x+2}{1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-1}{1}$, $\alpha: x+2y+3z+1=0$



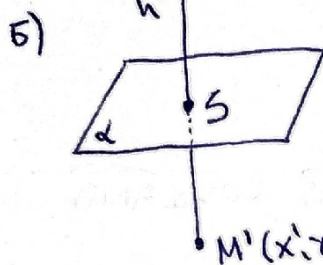
$P(t-2, t-2, t+1)$, $t \in \mathbb{R} \Rightarrow r = AP$

$r \parallel \alpha \Leftrightarrow \vec{r} \cdot \vec{n}_\alpha = 0 \Leftrightarrow (t-2, t-2, t-6) \cdot (1, 2, 3) = 0$

$\Leftrightarrow t-2+2t-4+3t-18=0 \Leftrightarrow 6t=24 \Leftrightarrow t=4$

$\Rightarrow \vec{r} = \vec{AP} = (2, 2, -2) \parallel (1, 1, -1)$

$r: \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-7}{-1}$



$x = \lambda + x_0$
 $n: y = 2\lambda + y_0, \lambda \in \mathbb{R}$
 $z = 3\lambda + z_0$

$S = \alpha \cap n \Rightarrow \lambda + x_0 + 4\lambda + 2y_0 + 9\lambda + 3z_0 + 1 = 0$

$\Rightarrow \lambda = \frac{-x_0 - 2y_0 - 3z_0 - 1}{14}$

$\Rightarrow S \left(\frac{13x_0 - 2y_0 - 3z_0 - 1}{14}, \frac{-x_0 + 5y_0 - 3z_0 - 1}{7}, \frac{-3x_0 - 6y_0 + 5z_0 - 3}{14} \right)$

$[S] = \frac{[M] + [M']}{2}$

$\Rightarrow [M'] = 2[S] - [M]$

$S_2: \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 6 & -2 & -3 \\ -2 & 3 & -6 \\ -3 & -6 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}$

* СЛУЧА ПРАВЕ P? $P \cap \alpha: t-2+2t-4+3t+3+1=0 \Rightarrow 6t-2=0 \Rightarrow t=\frac{1}{3}$

$P \cap \alpha = B(-\frac{5}{3}, -\frac{5}{3}, \frac{4}{3})$, $S_\alpha(B) = B$

$t=2 \Rightarrow C(0,0,3) \in P$, $S_\alpha(C) = D(-\frac{10}{7}, -\frac{20}{7}, -\frac{9}{7})$

$S_\alpha(P) = P' = BD: \frac{x+5/3}{1} = \frac{y+5/3}{-5} = \frac{z-4/3}{-11}$

$\vec{BD} = \left(\frac{-30+35}{21}, \frac{-60+35}{21}, \frac{-27-28}{21} \right) \parallel (5, -25, -55) \parallel (1, -5, -11)$

4) $P = \alpha \cap \beta: \begin{cases} x+y-z+1=0 \\ 5x-4y+z+2=0 \end{cases} + \begin{cases} x+y-z+1=0 \\ 6x-3y+3=0 \end{cases} \Rightarrow P: \begin{cases} x=t, t \in \mathbb{R} \\ y=2t+1 \\ z=3t+2 \end{cases} \Rightarrow \vec{P} = (1, 2, 3)$

$K: (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 2$, $x+y+z=3$ (КАКО $C \in \mathbb{R} \Rightarrow$ КРУГ K JE ПРЕСЕК СФЕРЕ И РАВНИНЕ)

КАКО JE $P \cap \mathbb{R} = (0, 1, 2) \in K \Rightarrow$ ЗАДАТАК ИМА РЕШЕЊЕ

НЕКА JE $A(x_0, y_0, z_0) \in K$ ПРОИЗВ. ТАЧКА $\Rightarrow$ ИЗВОДНИЦА ШИЛИНДРА $\mathbb{R}$

JE $i: \frac{x-x_0}{1} = \frac{y-y_0}{2} = \frac{z-z_0}{3}$ 1) $A \in \mathbb{R} \Rightarrow x-t+y-2t+z-3t=3$

$\Rightarrow t = \frac{x+y+z-3}{6}$

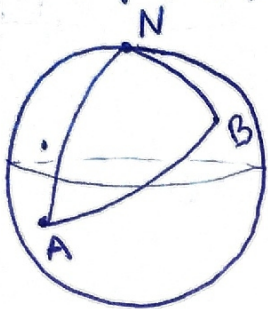
$\Rightarrow i: \begin{cases} x_0 = x-t \\ y_0 = y-2t \\ z_0 = z-3t \end{cases}$

$$\Rightarrow x_0 = \frac{5x - y - z + 3}{6}, y_0 = \frac{-x + 2y - z + 3}{3}, z_0 = \frac{-x - y + z + 3}{2}$$

$$2) A \in S \Rightarrow \mathcal{L}: \left(\frac{5x - y - z - 3}{6} \right)^2 + \left(\frac{-x + 2y - z}{3} \right)^2 + \left(\frac{-x - y + z + 1}{2} \right)^2 = 2/36$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{L}: (5x - y - z - 3)^2 + 4(-x + 2y - z)^2 + 9(-x - y + z + 1)^2 = 72}$$

$$[5] \quad A(30^\circ S, 135^\circ W), B(60^\circ N, 45^\circ E)$$



$$A: \varphi_A = -\frac{\pi}{6}, \theta_A = -\frac{3\pi}{4}$$

$$B: \varphi_B = \frac{\pi}{3}, \theta_B = \frac{\pi}{4}$$

$$\cos \widehat{AB} = \cos \widehat{NA} \cos \widehat{NB} + \sin \widehat{NA} \sin \widehat{NB} \cos \angle ANB$$

$$\widehat{NA} = \varphi_N - \varphi_A = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}$$

$$\widehat{NB} = \varphi_N - \varphi_B = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$$

$$\angle ANB = |\theta_A - \theta_B| = \left| -\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4} \right| = \pi!$$

$\Rightarrow A, B, N$ су на великом кругу $\Rightarrow$ не може овако јер немамо сферни троугао.

Најлакше је по дефиницији

$$\widehat{AB} = \angle AOB$$

јер је јединична сфера

$$\begin{aligned} x &= \cos \varphi \cos \theta \\ y &= \cos \varphi \sin \theta \\ z &= \sin \varphi \end{aligned}$$

$$\Rightarrow A \left(\cos -\frac{\pi}{6} \cos -\frac{3\pi}{4}, \cos -\frac{\pi}{6} \sin -\frac{3\pi}{4}, \sin -\frac{\pi}{6} \right)$$

$$A \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{-\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2} \right) \Rightarrow \boxed{A \left(-\frac{\sqrt{6}}{4}, -\frac{\sqrt{6}}{4}, -\frac{1}{2} \right)}$$

$$\Rightarrow B \left(\cos \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4}, \cos \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4}, \sin \frac{\pi}{3} \right)$$

$$B \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \Rightarrow \boxed{B \left(\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right)}$$

$$\cos \widehat{AB} = \cos \angle AOB = \cos (\vec{OA}, \vec{OB}) = \frac{\vec{OA} \cdot \vec{OB}}{\|\vec{OA}\| \|\vec{OB}\|} = \vec{OA} \cdot \vec{OB}$$

$$\Rightarrow \cos \widehat{AB} = \left(-\frac{\sqrt{6}}{4}, -\frac{\sqrt{6}}{4}, -\frac{1}{2} \right) \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = -\frac{\sqrt{12}}{16} - \frac{\sqrt{12}}{16} - \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$= \frac{-8\sqrt{3}}{16} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \widehat{AB} = \arccos -\frac{\sqrt{3}}{2} = \boxed{\frac{5\pi}{6}}$$

Аналитичка геометрија (Геометрија 1)**ЈУН 2 - 30.06.2023. године****Време рада: 135мин. Срећно!**

1. [7п] Дат је троугао ABC . Нека тачка D припада страници AB , а тачка E страници AC , тако да је $\frac{\vec{AD}}{\vec{DB}} = \frac{1}{4}$ и $\frac{\vec{AE}}{\vec{EC}} = \frac{3}{5}$. Уколико се дужи DC и BE секу у тачки F , у ком односу тачка F дели дуж DC ? Изразити вектор $\vec{BF}$ као линеарну комбинацију вектора $\vec{BD}$ и $\vec{BC}$.
2. Дата је коцка $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ ивице a . Нека је тачка S средиште странице BB_1 , а Q средиште странице $D_1 C_1$.
 - а) [4п] Доказати да је угао између вектора $\vec{DS}$ и $\vec{AQ}$ прав.
 - б) [4п] Одредити растојање између мимоилазних правих DS и AQ .
3. Дате су тачке $A(-3, -3)$ и $B(0, -3)$, као и праве $p: x - y - 2 = 0$ и $q: x + y + 2 = 0$
 - а) [3п] Одредити тачку B' која је симетрична тачки B у односу на праву q .
 - б) [7п] Одредити једначину криве другог реда која садржи тачке A и B и којој су праве p и q осе симетрије. Која крива је у питању?
4. [7п] Одредити формуле ротације око тачке $S(1, 2)$ за угао $\phi = \frac{\pi}{3}$. Шта је слика круга $k: (x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 9$ при том пресликавању?
5. [8п] Одредити једначину конуса чији је врх тачка $V(1, -2, 3)$ и који садржи елипсу $\mathcal{E}: 2x^2 + 3y^2 = 1, z = 0$.

Аналитичка геометрија (Геометрија 1)**ЈУН 2 - 30.06.2023. године****Време рада: 135мин. Срећно!**

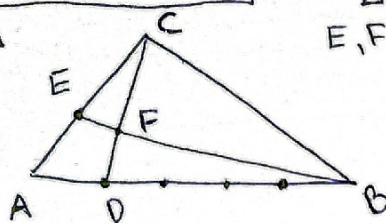
1. [7п] Дат је троугао ABC . Нека тачка D припада страници AB , а тачка E страници AC , тако да је $\frac{\vec{AD}}{\vec{DB}} = \frac{1}{4}$ и $\frac{\vec{AE}}{\vec{EC}} = \frac{3}{5}$. Уколико се дужи DC и BE секу у тачки F , у ком односу тачка F дели дуж DC ? Изразити вектор $\vec{BF}$ као линеарну комбинацију вектора $\vec{BD}$ и $\vec{BC}$.
2. Дата је коцка $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ ивице a . Нека је тачка S средиште странице BB_1 , а Q средиште странице $D_1 C_1$.
 - а) [4п] Доказати да је угао између вектора $\vec{DS}$ и $\vec{AQ}$ прав.
 - б) [4п] Одредити растојање између мимоилазних правих DS и AQ .
3. Дате су тачке $A(-3, -3)$ и $B(0, -3)$, као и праве $p: x - y - 2 = 0$ и $q: x + y + 2 = 0$
 - а) [3п] Одредити тачку B' која је симетрична тачки B у односу на праву q .
 - б) [7п] Одредити једначину криве другог реда која садржи тачке A и B и којој су праве p и q осе симетрије. Која крива је у питању?
4. [7п] Одредити формуле ротације око тачке $S(1, 2)$ за угао $\phi = \frac{\pi}{3}$. Шта је слика круга $k: (x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 9$ при том пресликавању?
5. [8п] Одредити једначину конуса чији је врх тачка $V(1, -2, 3)$ и који садржи елипсу $\mathcal{E}: 2x^2 + 3y^2 = 1, z = 0$.

Аналитичка геометрија (Геометрија 1)**ЈУН 2 - 30.06.2023. године****Време рада: 135мин. Срећно!**

1. [7п] Дат је троугао ABC . Нека тачка D припада страници AB , а тачка E страници AC , тако да је $\frac{\vec{AD}}{\vec{DB}} = \frac{1}{4}$ и $\frac{\vec{AE}}{\vec{EC}} = \frac{3}{5}$. Уколико се дужи DC и BE секу у тачки F , у ком односу тачка F дели дуж DC ? Изразити вектор $\vec{BF}$ као линеарну комбинацију вектора $\vec{BD}$ и $\vec{BC}$.
2. Дата је коцка $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ ивице a . Нека је тачка S средиште странице BB_1 , а Q средиште странице $D_1 C_1$.
 - а) [4п] Доказати да је угао између вектора $\vec{DS}$ и $\vec{AQ}$ прав.
 - б) [4п] Одредити растојање између мимоилазних правих DS и AQ .
3. Дате су тачке $A(-3, -3)$ и $B(0, -3)$, као и праве $p: x - y - 2 = 0$ и $q: x + y + 2 = 0$
 - а) [3п] Одредити тачку B' која је симетрична тачки B у односу на праву q .
 - б) [7п] Одредити једначину криве другог реда која садржи тачке A и B и којој су праве p и q осе симетрије. Која крива је у питању?
4. [7п] Одредити формуле ротације око тачке $S(1, 2)$ за угао $\phi = \frac{\pi}{3}$. Шта је слика круга $k: (x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 9$ при том пресликавању?
5. [8п] Одредити једначину конуса чији је врх тачка $V(1, -2, 3)$ и који садржи елипсу $\mathcal{E}: 2x^2 + 3y^2 = 1, z = 0$.



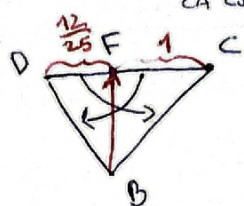
1) $\triangle ABC$ т.д. $\frac{AD}{DB} = \frac{1}{4}$ и $\frac{AE}{EC} = \frac{3}{5}$, $DC \cap BE = \{F\}$.
У ком односу F дели DC? $\vec{BF} = \alpha \vec{BD} + \beta \vec{BC}$?



$\triangle ADC$ меншас
E, F, B колли

$$\left(\frac{\vec{AB}}{\vec{BD}} \right) \cdot \frac{\vec{DF}}{\vec{FC}} \cdot \left(\frac{\vec{CE}}{\vec{EA}} \right) = -1$$

$$\Rightarrow \frac{\vec{DF}}{\vec{FC}} = \frac{12}{25}$$



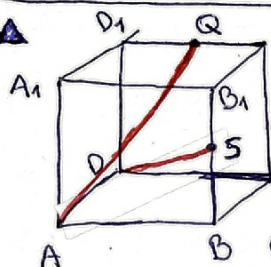
$$\vec{BF} = \frac{1}{\frac{12}{25} + 1} \vec{BD} + \frac{\frac{12}{25}}{\frac{12}{25} + 1} \vec{BC}$$

$$\Rightarrow \vec{BF} = \frac{25}{37} \vec{BD} + \frac{12}{37} \vec{BC}$$

2) Кошкa $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ и висина a . $S = S(BD_1)$ и $Q = S(D_1 C_1)$.

а) $\angle(\vec{DS}, \vec{AQ}) = ?$ б) $d(DS, AQ) = ?$

Посматрајмо оне $\vec{e}_1 = \frac{\vec{AB}}{a}$, $\vec{e}_2 = \frac{\vec{AD}}{a}$, $\vec{e}_3 = \frac{\vec{AA}_1}{a}$



$$\Rightarrow A(0,0,0), Q(\frac{a}{2}, a, a), D(0, a, 0), S(a, 0, \frac{a}{2})$$

$$\Rightarrow \vec{AQ} = (\frac{a}{2}, a, a), \vec{DS} = (a, -a, \frac{a}{2}), \vec{AD} = (0, a, 0)$$

$$\vec{AQ} \cdot \vec{DS} = \frac{a^2}{2} - a^2 + \frac{a^2}{2} = 0 \Rightarrow \vec{AQ} \perp \vec{DS}$$

$$б) d(DS, AQ) = \frac{|\vec{DS} \cdot \vec{AQ} \cdot \vec{AD}|}{\|\vec{DS} \times \vec{AQ}\|} = \frac{|\frac{a}{2} - a \frac{a}{2} + \frac{a^2}{2}|}{\|\vec{DS}\| \cdot \|\vec{AQ}\|} = \frac{|a(-1)^{2+3} \cdot (a^2 - \frac{a^2}{4})|}{(\sqrt{2a^2 + \frac{a^2}{4}})^2} = \frac{\frac{3a^3}{4}}{\frac{9a^2}{4}} = \frac{a}{3}$$

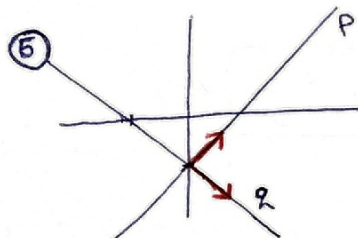
3) $A(-3, -3)$, $B(0, -3)$, $P: x - y - 2 = 0$, $Q: x + y + 2 = 0$

а) B' сим. B у одн. Q б) крива садржи A и B а P и Q осе сим.

а) 1) н т.д. $B \in n$, $n \perp Q \Rightarrow n: x = t$
 $y = t - 3, t \in \mathbb{R}$

$$2) B_0 = n \cap Q: t + t - 3 + 2 = 0 \Rightarrow t = 1/2 \Rightarrow B_0(\frac{1}{2}, -\frac{5}{2})$$

$$3) B(0, -3), B_0(\frac{1}{2}, -\frac{5}{2}) \Rightarrow B'(1, -2)$$



Бирамо нову коорд систем т.д. Q буде x' -оса,
P буде y' -оса и $P \cap Q = O'$ нову коорд почетак

$$P \cap Q = O'(0, -2), \vec{f}_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}), \vec{f}_2 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathcal{K}: \frac{x'^2}{a^2} + \mu \frac{y'^2}{b^2} = 1, \mu \in \{\pm 1\}, A(-3, 3) \mapsto A'(-\sqrt{2}, -2\sqrt{2}), B \mapsto B'(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$$

$$1) A' \in \mathcal{K} \Rightarrow \frac{2}{a^2} + \mu \frac{8}{b^2} = 1 \Leftrightarrow 2b^2 + 8\mu a^2 = a^2 b^2 \quad | -2 \quad -3b^2 - 15\mu a^2 = 0$$

$$2) B' \in \mathcal{K} \Rightarrow \frac{1}{2a^2} + \mu \frac{1}{2b^2} = 1 \Leftrightarrow b^2 + \mu a^2 = 2a^2 b^2 \quad | + \quad b^2 = -5\mu a^2 \Rightarrow \mu = -1$$

$$5a^2 - a^2 = 10a^4 \quad | :a^2$$

$$a^2 = \frac{2}{5} \Rightarrow b^2 = 2$$

$$\Rightarrow \text{хипербола} \quad \frac{x'^2}{b^2} - \frac{y'^2}{a^2} = 1$$

$$\Rightarrow X': \frac{5x'^2}{2} - \frac{y'^2}{2} = 1 \Leftrightarrow 5x'^2 - y'^2 = 2$$

$$\Rightarrow X: 5\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(x-y-2)\right)^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(x+y+2)\right)^2 = 2 \quad | \cdot 2$$

$$X: 5(x-y-2)^2 - (x+y+2)^2 = 4 \quad \Leftrightarrow$$

$$X: x^2 - 3xy + y^2 - 6x + 4y + 3 = 0$$

4) ПОТАШИЈА ОКО $S(1,2)$ ЗА $\varphi = \pi/3$? СЛУКА $R: (x-4)^2 + (y-2)^2 = 9$

$$R_{S,\varphi} = L_{\vec{OS}} \circ R_{O,\varphi} \circ L_{\vec{SO}}, \quad \vec{SO} = (-1,-2), \quad \vec{OS} = (1,2), \quad \cos \pi/3 = 1/2, \quad \sin \pi/3 = \sqrt{3}/2$$

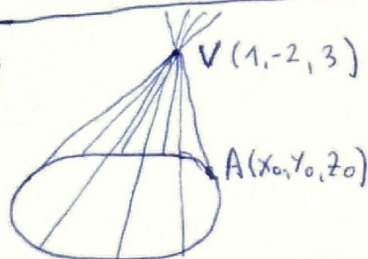
$$[R_{S,\varphi}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 & -\frac{1}{2} + \sqrt{3} \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 & -\sqrt{3}/2 - 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 & 1/2 + \sqrt{3} \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 & 1 - \sqrt{3}/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow R_{S,\pi/3}: \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/2 + \sqrt{3} \\ 1 - \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}$$

2) R се слика у R' истог полупречника, $C(4,2) \mapsto C'(\frac{5}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2} + 2)$

$$\Rightarrow R': \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y - 2 - \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 9$$

5) КОНУС СА ВРХОМ $V(1,-2,3)$ КОЈИ САДРЖИ $\mathcal{E}: 2x^2 + 3y^2 = 1, z=0$.



Нека је $A(x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{E}$ произв.

$\Rightarrow$ произвољна изводница конуса је права VA

$$\Rightarrow t: \frac{x-1}{x_0-1} = \frac{y+2}{y_0+2} = \frac{z-3}{z_0-3} = t$$

$$\Rightarrow x_0 = \frac{x-1}{t} + 1 = \frac{3x-3}{3-z} + 1 = \frac{3x-z}{3-z}$$

$$y_0 = \frac{y+2}{t} - 2 = \frac{3y+6}{3-z} - 2 = \frac{3y+2z}{3-z}$$

$$z_0 = \frac{z-3}{t} + 3 = \frac{3z-9}{3-z} + 3 = 0$$

$$1) A \in \mathcal{E} \Rightarrow z_0 = 0 \Rightarrow \frac{z-3}{t} = -3 \Rightarrow z-3 = -3t \Rightarrow t = \frac{3-z}{3} \quad \textcircled{*}$$

$$2) A \in \mathcal{E} \Rightarrow 2x_0^2 + 3y_0^2 = 1$$

$$\Rightarrow 2\left(\frac{3x-z}{3-z}\right)^2 + 3\left(\frac{3y+2z}{3-z}\right)^2 = 1 \quad | (z-3)^2$$

$$Y: 2(3x-z)^2 + 3(3y+2z)^2 = (z-3)^2$$

Аналитичка геометрија (Геометрија 1)
СЕПТЕМБАР 1 - 08.09.2023. године
Време рада: 135мин. Срећно!



1. [10п] Дат је паралелограм $ABCD$ и тачке E, F и G такве да $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{FD}$, $\overrightarrow{DE} = 3\overrightarrow{EC}$ и $\overrightarrow{BG} = 2\overrightarrow{BD}$. Ако је тачка X пресек CB и GE , а Y пресек AB и GF , доказати да су праве AC , EF и XY конкурентне.
2. [7п] Дате су мимоилазне праве $p: \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+2}{2}$ и $q: \frac{x-2}{3} = \frac{y}{-2} = \frac{z+2}{2}$.
Одредити једначину равни α која је подједнако удаљена од правих p и q .
3. [8п] Одредити све параболе које имају директрису $x + y + 1 = 0$ и садрже тачке $A(3,0)$ и $B(7,0)$.
4. [8п] Одредити формулу афине трансформације простора која представља композицију симетрије у односу на праву $p: \frac{x}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{1}$ и хомотетије са центром у $S(1,3,1)$ и коефицијентом 2.
5. [7п] Одредити једначину конуса $\mathcal{K}$ са врхом $V(1,4,6)$ који додирује сферу $\sigma: x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 6z + 1 = 0$.
Која крива је у пресеку конуса $\mathcal{K}$ и Oxy -равни?

Аналитичка геометрија (Геометрија 1)
СЕПТЕМБАР 1 - 08.09.2023. године
Време рада: 135мин. Срећно!



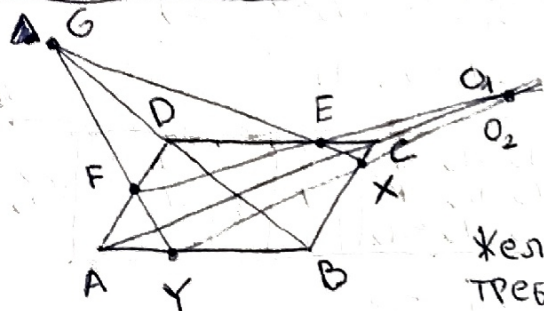
1. [10п] Дат је паралелограм $ABCD$ и тачке E, F и G такве да $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{FD}$, $\overrightarrow{DE} = 3\overrightarrow{EC}$ и $\overrightarrow{BG} = 2\overrightarrow{BD}$. Ако је тачка X пресек CB и GE , а Y пресек AB и GF , доказати да су праве AC , EF и XY конкурентне.
2. [7п] Дате су мимоилазне праве $p: \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+2}{2}$ и $q: \frac{x-2}{3} = \frac{y}{-2} = \frac{z+2}{2}$.
Одредити једначину равни α која је подједнако удаљена од правих p и q .
3. [8п] Одредити све параболе које имају директрису $x + y + 1 = 0$ и садрже тачке $A(3,0)$ и $B(7,0)$.
4. [8п] Одредити формулу афине трансформације простора која представља композицију симетрије у односу на праву $p: \frac{x}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{1}$ и хомотетије са центром у $S(1,3,1)$ и коефицијентом 2.
5. [7п] Одредити једначину конуса $\mathcal{K}$ са врхом $V(1,4,6)$ који додирује сферу $\sigma: x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 6z + 1 = 0$.
Која крива је у пресеку конуса $\mathcal{K}$ и Oxy -равни?

Аналитичка геометрија (Геометрија 1)
СЕПТЕМБАР 1 - 08.09.2023. године
Време рада: 135мин. Срећно!



1. [10п] Дат је паралелограм $ABCD$ и тачке E, F и G такве да $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{FD}$, $\overrightarrow{DE} = 3\overrightarrow{EC}$ и $\overrightarrow{BG} = 2\overrightarrow{BD}$. Ако је тачка X пресек CB и GE , а Y пресек AB и GF , доказати да су праве AC , EF и XY конкурентне.
2. [7п] Дате су мимоилазне праве $p: \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+2}{2}$ и $q: \frac{x-2}{3} = \frac{y}{-2} = \frac{z+2}{2}$.
Одредити једначину равни α која је подједнако удаљена од правих p и q .
3. [8п] Одредити све параболе које имају директрису $x + y + 1 = 0$ и садрже тачке $A(3,0)$ и $B(7,0)$.
4. [8п] Одредити формулу афине трансформације простора која представља композицију симетрије у односу на праву $p: \frac{x}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{1}$ и хомотетије са центром у $S(1,3,1)$ и коефицијентом 2.
5. [7п] Одредити једначину конуса $\mathcal{K}$ са врхом $V(1,4,6)$ који додирује сферу $\sigma: x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 6z + 1 = 0$.
Која крива је у пресеку конуса $\mathcal{K}$ и Oxy -равни?

1) ABCD ПАРАЛЕЛОГРАМ, E, F и G т.д. $\vec{AF} = \vec{FD}$, $\vec{DE} = 3\vec{EC}$, $\vec{BG} = 2\vec{GD}$. Ако је $X = CB \cap GE$, $Y = AB \cap GF$ ДОКАЗАТИ ДА СУ AC, EF и XY КОНКУРЕНТНЕ.



Нека је $EF \cap AC = O_1$ и $XY \cap AC = O_2$.
Доказујемо да је $O_1 \equiv O_2$:

ΔACD Менелаж $\frac{\vec{AO_1}}{\vec{O_1C}} \cdot \frac{\vec{CE}}{\vec{EO}} \cdot \frac{\vec{OF}}{\vec{FA}} = -1 \Rightarrow \frac{\vec{AO_1}}{\vec{O_1C}} = -3$

Желимо исто за ΔACB и Y, X, O_2 . За то нам треба у ком односу X и Y деле BC и AB

① ΔABD , Y, F, G коллин $\Rightarrow \frac{\vec{AY}}{\vec{YB}} \cdot \frac{\vec{BG}}{\vec{GD}} \cdot \frac{\vec{DF}}{\vec{FA}} = -1 \Rightarrow \frac{\vec{AY}}{\vec{YB}} = \frac{1}{2}$

② ΔBDC , G, E, X коллин $\Rightarrow \frac{\vec{BX}}{\vec{XC}} \cdot \frac{\vec{CE}}{\vec{ED}} \cdot \frac{\vec{DG}}{\vec{GB}} = -1 \Rightarrow \frac{\vec{BX}}{\vec{XC}} = 6$

$\Rightarrow \frac{\vec{AO_2}}{\vec{O_2C}} \cdot \frac{\vec{CX}}{\vec{XB}} \cdot \frac{\vec{BY}}{\vec{YA}} = -1 \Rightarrow \frac{\vec{AO_2}}{\vec{O_2C}} = -3$

①, ② $\Rightarrow O_1 \equiv O_2 \Rightarrow AC, EF$ и XY КОНКУРЕНТНЕ

2) $P: \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+2}{2}$, $Q: \frac{x-2}{3} = \frac{y}{-2} = \frac{z+2}{2}$. НАћи X ПОЈЕДИНАКО УДАЉЕНУ ОД P и Q .

① $\alpha \parallel P \Rightarrow \vec{n}_\alpha = \vec{P} \times \vec{Q} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & -2 & 2 \end{vmatrix} = (8, 4, -8) \parallel (2, 1, -2)$

$\Rightarrow \alpha: 2x + y - 2z + D = 0$

$P(1, -2, -2) \in P$
 $Q(2, 0, -2) \in Q$

② $d(P, \alpha) = d(Q, \alpha) \Leftrightarrow d(P, \alpha) = d(Q, \alpha)$

$\Rightarrow \frac{|2-2+4+D|}{\sqrt{9}} = \frac{|4+0+4+D|}{\sqrt{9}} \Rightarrow 14+D = |8+D|$

$4+D = 8+D$

$4+D = -8-D$

$20 = -12 \Rightarrow D = -6$

$\Rightarrow \alpha: 2x + y - 2z - 6 = 0$

3) Све ПАРАБОЛЕ с ДИРЕКТР. $d: x+y+1=0$ и САОРЖЕ $A(3,0)$ и $B(7,0)$.

$d: x+y+1=0$ ДИРЕКТРИСА, НЕКА ЈЕ $F(\alpha, \beta)$ ЖИЖА, $M(x, y)$ ПРОИЗВ. ТАЧКА ПАРАБОЛЕ

$\Rightarrow S: d(M, F) = d(M, d) \Rightarrow S: \sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2} = \frac{|x+y+1|}{\sqrt{1+1}}$

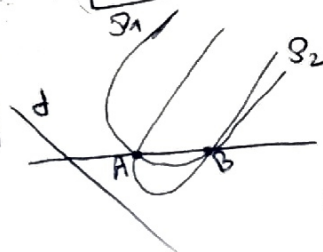
$\Rightarrow S: 2(x-\alpha)^2 + 2(y-\beta)^2 = (x+y+1)^2 \rightarrow$ ЈНА ПРОИЗВ. ПАРАБОЛЕ С ДИРЕКТРИСОМ d

① $A(3,0) \in S \Rightarrow 2(3-\alpha)^2 + 2\beta^2 = 16 \Rightarrow \alpha^2 - 6\alpha + \beta^2 = -1 \xrightarrow{+9} 8\alpha = 16$

② $B(7,0) \in S \Rightarrow 2(7-\alpha)^2 + 2\beta^2 = 64 \Rightarrow \alpha^2 - 14\alpha + \beta^2 = -17 \xrightarrow{+49} \alpha = 2$

$\Rightarrow \beta^2 = -1 - 4 + 12 = 7 \Rightarrow \beta = \pm\sqrt{7}$

$\Rightarrow S_1: 2(x-2)^2 + 2(y-\sqrt{7})^2 = (x+y+1)^2$
 $S_2: 2(x-2)^2 + 2(y+\sqrt{7})^2 = (x+y+1)^2$



4) $\sigma_P, P: \frac{x}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{1}, X_{5,2}, S(1,3,1) \Rightarrow \sigma_P \circ X_{5,2} = ?$

1) $\alpha \perp \sigma_P \Rightarrow \alpha \perp P$
 $\alpha: 1(x-x_0) + 2(y-y_0) + z-z_0 = 0$
 $\alpha: x + 2y + z - x_0 - 2y_0 - z_0 = 0$
 2) $N = P \cap \alpha, P: \begin{matrix} x=t \\ y=2t+1 \\ z=t \end{matrix} \in P$
 $\Rightarrow t + 4t + 2 + t - x_0 - 2y_0 - z_0 = 0$
 $t = \frac{1}{6}(x_0 + 2y_0 + z_0 - 2)$
 $\Rightarrow P \cap \alpha = N\left(\frac{1}{6}(x_0 + 2y_0 + z_0 - 2), \frac{1}{3}(x_0 + 2y_0 + z_0 + 1), \frac{1}{6}(x_0 + 2y_0 + z_0 - 2)\right)$

3) $[N] = \frac{[M] + [M']}{2} \Rightarrow [M'] = 2[N] - [M] \Rightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2/3 & 2/3 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 2/3 & -2/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2/3 \\ 2/3 \\ -2/3 \end{bmatrix}$

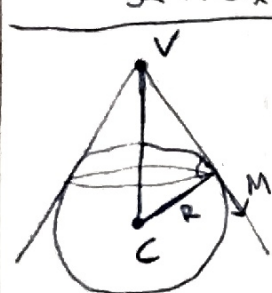
II) $X_{5,2}: \vec{SM'} = 2\vec{SM}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} x'-1 \\ y'-3 \\ z'-1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x-1 \\ y-3 \\ z-1 \end{pmatrix} \Rightarrow X_{5,2}: \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}$

$[\sigma_P \circ X_{5,2}] = [\sigma_P] \cdot [X_{5,2}] = \begin{bmatrix} -2/3 & 2/3 & 1/3 & -2/3 \\ 2/3 & 1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 1/3 & 2/3 & -2/3 & -2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4/3 & 4/3 & 2/3 & -7/3 \\ 4/3 & 2/3 & 4/3 & -5/3 \\ 2/3 & 4/3 & -4/3 & -7/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \sigma_P \circ X_{5,2}: \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \left(\begin{bmatrix} -4 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -7 \\ -5 \\ -7 \end{bmatrix} \right)$

5) $\mathcal{U}$ CA PRXOM $V(1,4,6)$ u DOBUKJE $\sigma: (x-1)^2 + y^2 + (z-3)^2 = 9$
 $\mathcal{U} \cap O_{xy} = ? \Rightarrow C(1,0,3), R=3$



$M(x,y,z) \in \mathcal{U}$ ПРХУЗВ $\Rightarrow VM = R$ је изводилица
 $\Rightarrow \mathcal{U}: d(C,z) = R \Leftrightarrow \frac{\|\vec{VC} \times \vec{VM}\|}{\|\vec{VM}\|} = 3$

$\vec{VC} \times \vec{VM} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & -4 & -3 \\ x-1 & y-4 & z-6 \end{vmatrix} = (3y-4z+12, -3(x-1), 4(x-1))$

$\Rightarrow \mathcal{U}: \frac{\sqrt{(3y-4z+12)^2 + 25(x-1)^2}}{\sqrt{(x-1)^2 + (y-4)^2 + (z-6)^2}} = 3 / ^2$

$\Rightarrow \mathcal{U}: (3y-4z+12)^2 + 16(x-1)^2 = 9(y-4)^2 + 9(z-6)^2$

$\mathcal{U} \cap O_{xy} \Leftrightarrow \mathcal{U} \cap z=0$

$\Rightarrow (3y+12)^2 + 16(x-1)^2 = 9(y-4)^2 + 9 \cdot 36$

$9y^2 + 72y + 144 + 16x^2 - 32x + 16 = 9y^2 - 72y + 144 + 324$

$16(x-1)^2 = -144y + 324 = -9 \cdot 16y + 9 \cdot 36$

$16(x-1)^2 = -36(4y-9) \quad / :4$

$\Rightarrow \mathcal{P}: 4(x-1)^2 = -9(4y-9)$

ПАРАБОЛА

Аналитичка геометрија (Геометрија 1)
СЕПТЕМБАР 2 - 26.09.2023. године
Време рада: 135мин. Срећно!



1. [8п] Дат је правоугаоник $ABCD$ са страницама $\|AB\| = 2$ и $\|AD\| = 1$. Нека је k описан круг око тог правоугаоника, права која садржи средишта страница AB и CD сече тај круг у тачкама K и L (тачка K је ближа страници AB). Нека је репер A_e задат тачком A и базом $e = (\vec{e}_1, \vec{e}_2) = (\vec{AB}, \vec{AD})$, а репер S_f тачком S , која је средиште странице BC , и базом $f = (\vec{f}_1, \vec{f}_2) = (\vec{SK}, \vec{SL})$. Изразити векторе базе f преко вектора базе e , а потом написати формуле трансформација координата.
2. [8п] Одредити једначину криве другог реда чије су директрисе задате са $d_1: x + y - 2 = 0$ и $d_2: 3x + 3y - 4 = 0$, а једна жижа је $F(2, 1)$. Која крива је у питању?
3. [6п] Одредити једначину праве p , ако се зна да она садржи тачку $P(-1, 2, 1)$, сече праву $q: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+2}{3}$ и паралелна је равни $\alpha: 2x + 3y + z + 2023 = 0$.
4. [10п] Површ $\mathcal{P}: 2x^2 + 2z^2 - 2xz + 2x + 3y + 2z + 2 = 0$ изометријском трансформацијом свести на канонски облик и написати формулу те трансформације. Која површ је у питању?
5. [8п] На јединичној сфери дате су тачке $A(\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{3}}{2})$, B и $C(0, 0, 1)$ тако да је ABC правоугли сферни троуга са правим углом $\angle BCA = \frac{\pi}{2}$ и страницом $\widehat{BC} = \frac{\pi}{3}$. Одредити површину тог сферног троугла.

Аналитичка геометрија (Геометрија 1)
СЕПТЕМБАР 2 - 26.09.2023. године
Време рада: 135мин. Срећно!



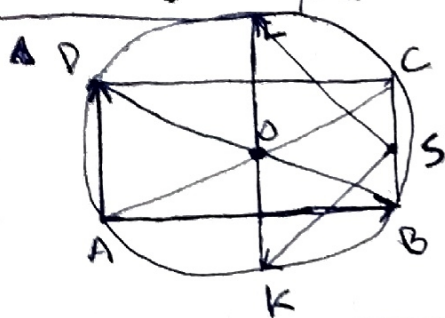
1. [8п] Дат је правоугаоник $ABCD$ са страницама $\|AB\| = 2$ и $\|AD\| = 1$. Нека је k описан круг око тог правоугаоника, права која садржи средишта страница AB и CD сече тај круг у тачкама K и L (тачка K је ближа страници AB). Нека је репер A_e задат тачком A и базом $e = (\vec{e}_1, \vec{e}_2) = (\vec{AB}, \vec{AD})$, а репер S_f тачком S , која је средиште странице BC , и базом $f = (\vec{f}_1, \vec{f}_2) = (\vec{SK}, \vec{SL})$. Изразити векторе базе f преко вектора базе e , а потом написати формуле трансформација координата.
2. [8п] Одредити једначину криве другог реда чије су директрисе задате са $d_1: x + y - 2 = 0$ и $d_2: 3x + 3y - 4 = 0$, а једна жижа је $F(2, 1)$. Која крива је у питању?
3. [6п] Одредити једначину праве p , ако се зна да она садржи тачку $P(-1, 2, 1)$, сече праву $q: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+2}{3}$ и паралелна је равни $\alpha: 2x + 3y + z + 2023 = 0$.
4. [10п] Површ $\mathcal{P}: 2x^2 + 2z^2 - 2xz + 2x + 3y + 2z + 2 = 0$ изометријском трансформацијом свести на канонски облик и написати формулу те трансформације. Која површ је у питању?
5. [8п] На јединичној сфери дате су тачке $A(\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{3}}{2})$, B и $C(0, 0, 1)$ тако да је ABC правоугли сферни троуга са правим углом $\angle BCA = \frac{\pi}{2}$ и страницом $\widehat{BC} = \frac{\pi}{3}$. Одредити површину тог сферног троугла.

Аналитичка геометрија (Геометрија 1)
СЕПТЕМБАР 2 - 26.09.2023. године
Време рада: 135мин. Срећно!



1. [8п] Дат је правоугаоник $ABCD$ са страницама $\|AB\| = 2$ и $\|AD\| = 1$. Нека је k описан круг око тог правоугаоника, права која садржи средишта страница AB и CD сече тај круг у тачкама K и L (тачка K је ближа страници AB). Нека је репер A_e задат тачком A и базом $e = (\vec{e}_1, \vec{e}_2) = (\vec{AB}, \vec{AD})$, а репер S_f тачком S , која је средиште странице BC , и базом $f = (\vec{f}_1, \vec{f}_2) = (\vec{SK}, \vec{SL})$. Изразити векторе базе f преко вектора базе e , а потом написати формуле трансформација координата.
2. [8п] Одредити једначину криве другог реда чије су директрисе задате са $d_1: x + y - 2 = 0$ и $d_2: 3x + 3y - 4 = 0$, а једна жижа је $F(2, 1)$. Која крива је у питању?
3. [6п] Одредити једначину праве p , ако се зна да она садржи тачку $P(-1, 2, 1)$, сече праву $q: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+2}{3}$ и паралелна је равни $\alpha: 2x + 3y + z + 2023 = 0$.
4. [10п] Површ $\mathcal{P}: 2x^2 + 2z^2 - 2xz + 2x + 3y + 2z + 2 = 0$ изометријском трансформацијом свести на канонски облик и написати формулу те трансформације. Која површ је у питању?
5. [8п] На јединичној сфери дате су тачке $A(\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{3}}{2})$, B и $C(0, 0, 1)$ тако да је ABC правоугли сферни троуга са правим углом $\angle BCA = \frac{\pi}{2}$ и страницом $\widehat{BC} = \frac{\pi}{3}$. Одредити површину тог сферног троугла.

1) ABCD ПРАВОУГ, AB=2, AD=1. R ОПИСАН КРУГ ОКО ABCD
 $\Delta_{AB} \cap R = \{K, L\}$. Ae ca $\vec{e}_1 = \vec{AB}$, $\vec{e}_2 = \vec{AD}$ и РЕДЕР СР ДАТ СА
 $S = S(BC)$, $\vec{F}_1 = \vec{SK}$, $\vec{F}_2 = \vec{SL}$. ФОРМУЛЕ ТРАНСФ. КООРДИНАТА?



KL || AD $\Rightarrow \vec{OL}, \vec{OK}$ су истог ПРАВИЦА КАО ЈЕД. ВЕКТОР $\vec{AD}$

$$[S]_{Ae} = [A\vec{S}]_e = [\vec{AB} + \vec{BS}]_e = [e_1 + \frac{1}{2}e_2] = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

$$[\vec{F}_1]_e = [S\vec{K}]_e = [SO + \vec{OK}]_e = [-\frac{1}{2}\vec{AB} - \|\vec{OK}\| \cdot \vec{AD}]_e = [-\frac{1}{2}e_1 - \frac{\sqrt{5}}{2}e_2] = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -\sqrt{5}/2 \end{pmatrix} \text{ јер је } \|\vec{OK}\| = \frac{R}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

АНАЛОГНО, $[\vec{F}_2]_e = [SO + \vec{OL}] = \dots = \begin{pmatrix} -1/2 \\ \sqrt{5}/2 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 & -1/2 \\ -\sqrt{5}/2 & \sqrt{5}/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \end{bmatrix} \text{ или } \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1/\sqrt{5} \\ -1 & 1/\sqrt{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 + 1/2\sqrt{5} \\ 1 - 1/2\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

2) КРУГА II РЕДА СА ДИРЕКТР. $d_1: x+y-2=0$, $d_2: 3x+3y-4=0$ и ЖИХОМ F(2,1)

Ж: $\frac{d(M, F)}{d(M, d)} = e$ ОСТАЈЕ ДА ОПРЕДИМО e КАО И КОЈОЈ ДИРЕКТРИСИ
 ОДГОВАРА ЖИХА F(2,1)

$$d(F, d_1) = \frac{|2+1-2|}{\sqrt{1+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{3}{3\sqrt{2}} < d(M, d_2) = \frac{|16+3-4|}{\sqrt{9+9}} = \frac{5}{3\sqrt{2}} \Rightarrow (F, d_1) \text{ је ПАР}$$

ТРАЖИМО e: ЗА ТО НАМ ТРЕБА И ОСА G

$$G \perp d_1, F \in G \Rightarrow G: \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{1} \Rightarrow G: x-y-1=0$$

$$\left. \begin{aligned} D_1 &= G \cap d_1: \begin{cases} x-y-1=0 \\ x+y-2=0 \end{cases} \Rightarrow D_1(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}) \\ D_2 &= G \cap d_2: \begin{cases} x-y-1=0 \\ 3x+3y-4=0 \end{cases} \Rightarrow D_2(\frac{7}{6}, \frac{1}{6}) \end{aligned} \right\} \Rightarrow C = S(D_1, D_2) = (\frac{4}{3}, \frac{1}{3})$$

$$\textcircled{*} \frac{a}{e} = d(C, d_1) = \frac{|\frac{4}{3} + \frac{1}{3} - 2|}{\sqrt{2}} = \frac{1}{3\sqrt{2}} \Rightarrow \boxed{e = 3\sqrt{2}a} \quad \boxed{e = \frac{c}{a}}$$

$$\textcircled{*} c = d(C, F) = \sqrt{(\frac{2}{3})^2 + (\frac{2}{3})^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3} = c \quad \left. \begin{aligned} 3\sqrt{2}a &= \frac{2\sqrt{2}}{3a} \Rightarrow 9a^2 = 2 \\ &\Rightarrow a = \frac{\sqrt{2}}{3} \end{aligned} \right\} \Rightarrow e = \frac{c}{a} = \frac{2\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{3}} = 2 \Rightarrow \boxed{e=2}$$

$$\Rightarrow \text{Ж: } 2 = e = \frac{d(M, F)}{d(M, d_1)} = \frac{\sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2}}{\frac{|x+y-2|}{\sqrt{2}}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\text{Ж: } (x-2)^2 + (y-1)^2 = 2(x+y-2)^2}, \quad e=2 > 1 \Rightarrow \text{ХИПЕРБОЛА}$$

3) Р.Т.Д P(-1,2,1) ∈ P, P сече α: $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+2}{3}$, P || α: $2x+3y+z+2023=0$

УРАЂЕНО НА ТРИ НАЧИНА НА ВЕЖБАМА, ЕВО ЈЕДНОГ:

Q(2t+1, 2t-2, 3t-2) ∈ α ПРОИЗВОДНА
 P=PQ ЗА Q Т.Д $\vec{PQ} = (2t+2, 2t-4, 3t-3) \parallel \alpha, \vec{n}_\alpha = (2, 3, 1)$
 $\Rightarrow \vec{PQ} \cdot \vec{n}_\alpha = 0 \Rightarrow 4t+4+6t-12+3t-3=0 \Rightarrow 13t=11 \Rightarrow t = \frac{11}{13}$
 $\Rightarrow \vec{PQ} = (\frac{48}{13}, -\frac{30}{13}, -\frac{6}{13}) \parallel (8, -5, -1)$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} P(-1, 2, 1) \in P \\ \vec{P} = \vec{PQ} \parallel (8, -5, -1) \end{aligned} \right\} \Rightarrow P: \frac{x+1}{8} = \frac{y-2}{-5} = \frac{z-1}{-1}$$

$$y: 2x^2 + 2z^2 - 2xz + 2x + 3y + 2z + 2 = 0$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & 3/2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \varphi_B(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & -1 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ -1 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda [(2-\lambda)^2 - 1] = -\lambda(\lambda-1)(\lambda-3)$$

$$\lambda_1 = 1 \Rightarrow \vec{u}_1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \lambda_2 = 0 \Rightarrow \vec{u}_2 = (0, 1, 0), \lambda_3 = 3 \Rightarrow \vec{u}_3 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' - z') \\ y = y' \\ z = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + z') \end{cases}$$

$$\Rightarrow x'^2 - 2x'z' + z'^2 + x'^2 + 2x'z' + z'^2 - x'^2 + z'^2 + \sqrt{2}(x' - z') + 3y' + \sqrt{2}(x' + z') + 2 = 0$$

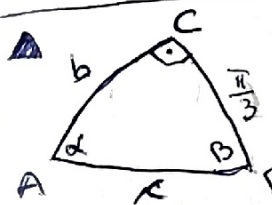
$$S': x'^2 + 3z'^2 + 2\sqrt{2}x' + 3y' + 2 = 0 \Leftrightarrow S': \underbrace{(x' + \sqrt{2})^2}_{x''} + 3 \underbrace{z'^2}_{z''} = \underbrace{-3y'}_{y''}$$

$$\Rightarrow f: \begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}(x'' - \sqrt{2} - z'') \\ y = -y'' \\ z = \frac{\sqrt{2}}{2}(x'' - \sqrt{2} + z'') \end{cases}$$

$$\Rightarrow S'': x''^2 + 3z''^2 = 3y''$$

ЕЛЛИПТИЧКИ ПАРАБОЛОИД

5) $A\left(\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), B, C(0, 0, 1)$ т.д. $\triangle ABC$ прав. $\angle BCA = \frac{\pi}{2}$ и $\widehat{BC} = \pi/3 \Rightarrow P = ?$



$$1) \cos b = \cos \widehat{AC} = \cos \angle(\vec{OA}, \vec{OC}) = \frac{\vec{OA} \cdot \vec{OC}}{\|\vec{OA}\| \|\vec{OC}\|} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \boxed{b = \frac{\pi}{6}}$$

$$2) \text{КОСИНУША } (\text{Т}) \Rightarrow \cos \kappa = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \varphi$$

$$\Rightarrow \cos \kappa = \cos \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \boxed{\kappa = \arccos \frac{\sqrt{3}}{4}}$$

ИМАМО СВЕ ТРИ СТРАНИЦЕ, ФАКЕ УГЛОВИ α И β :

$$3) \text{СИНУША } (\text{Т}) \Rightarrow \frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin c}{\sin \varphi} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{\sin a \cdot \sin \varphi}{\sin c} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 1}{\frac{\sqrt{13}}{4}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}}$$

$$\sin^2 c = 1 - \cos^2 c = 1 - \frac{3}{16} = \frac{13}{16} \Rightarrow \boxed{\sin c = \frac{\sqrt{13}}{4}} \Rightarrow \boxed{\alpha = \arcsin \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}}}$$

$$4) \text{СИНУША } (\text{Т}) \quad \frac{\sin b}{\sin \beta} = \frac{\sin c}{\sin \varphi} \Rightarrow \sin \beta = \frac{\sin b \sin \varphi}{\sin c} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 1}{\frac{\sqrt{13}}{4}} = \frac{2}{\sqrt{13}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\beta = \arcsin \frac{2}{\sqrt{13}}}$$

$$P = \alpha + \beta + \varphi - \pi = \arcsin \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}} + \arcsin \frac{2}{\sqrt{13}} - \frac{\pi}{2}$$