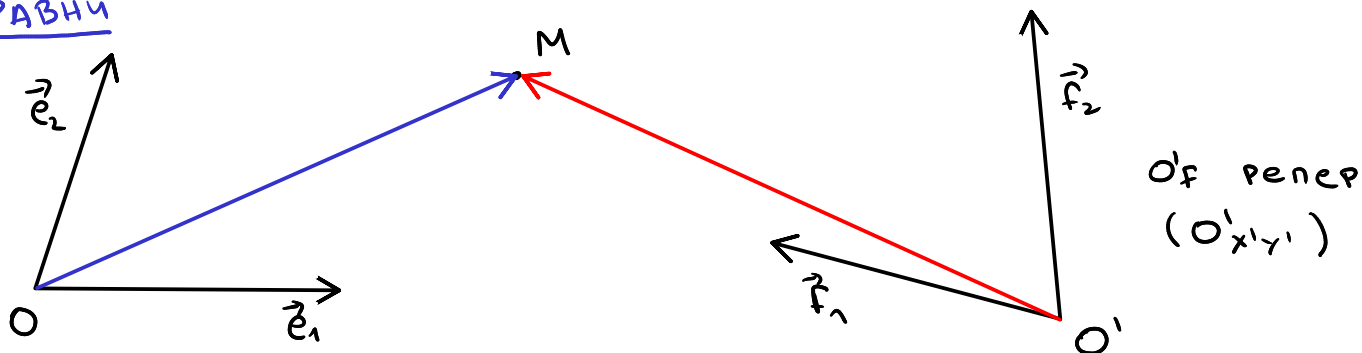


3 Трансформације координата

У РАВНИ



Oe репер (Ox, y)

$$\left. \begin{aligned} [M]_{oe} &= [\vec{OM}]_e = [x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2]_e = (x, y) \\ [M]_{o'f} &= [\vec{O'M}]_f = [x'\vec{f}_1 + y'\vec{f}_2]_f = (x', y') \end{aligned} \right\} \text{ЗНАЧИМА НАС ВЕЗА ОБИХ КООРДИНАТА}$$

$$[\vec{f}_1]_e = [a_{11}\vec{e}_1 + a_{21}\vec{e}_2]_e = (a_{11}, a_{21})$$

$$[\vec{f}_2]_e = [a_{12}\vec{e}_1 + a_{22}\vec{e}_2]_e = (a_{12}, a_{22})$$

$$[O']_{oe} = [\vec{OO'}]_e = [a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2]_e = (a, b)$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \Leftrightarrow \underline{X = C X' + A}$$

$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$
 $[\vec{f}_1]_e$ $[\vec{f}_2]_e$ $[O']_{oe}$

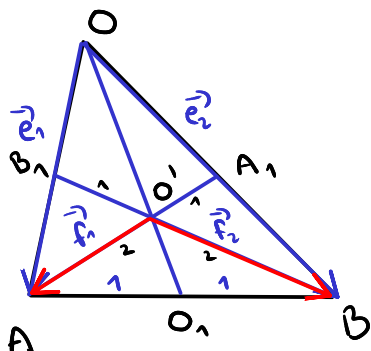
$$C_{ef} = C_{fe}^{-1}$$

МАТРИЦА ПРЕЛАСКА
 $C_{ef} = C$ СА Е НА F

$$* X = C X' + A \Rightarrow C X' = X - A \Rightarrow X' = C^{-1} X - C^{-1} A$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = C^{-1} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - C^{-1} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

3.1. Тежиште троугла OAB је тачка O' . У равни троугла изабрана су два афина репера: репер Oxy са почетком у тачки O и координатним векторима $\vec{e}_1 = \vec{OA}$ и $\vec{e}_2 = \vec{OB}$ и репер $O'x'y'$ са почетком у тачки O' и координатним векторима $\vec{f}_1 = \vec{O'A}$ и $\vec{f}_2 = \vec{O'B}$. Одредити везу координата (x, y) и (x', y') као и координате средишта страница троугла OAB у односу на репер $O'x'y'$.



$$[O']_{oe} = [\vec{OO'}]_e = \left[\frac{1}{3}\vec{e}_1 + \frac{1}{3}\vec{e}_2 \right]_e = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right)$$

$$O' \text{ тежиште } \triangle OAB \Rightarrow \vec{OO'} = \frac{1}{3} (\vec{OO} + \vec{OA} + \vec{OB})$$

$$[\vec{f}_1]_e = [\vec{O'A}]_e = [\vec{OO} + \vec{OA}]_e = \left[-\frac{1}{3}\vec{e}_1 - \frac{1}{3}\vec{e}_2 + \vec{e}_1 \right]_e = \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3} \right)$$

$$[\vec{f}_2]_e = [\vec{O'B}]_e = [\vec{OO} + \vec{OB}]_e = \left[-\frac{1}{3}\vec{e}_1 - \frac{1}{3}\vec{e}_2 + \vec{e}_2 \right]_e = \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right)$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/3 \\ 1/3 \end{bmatrix} \quad (*)$$

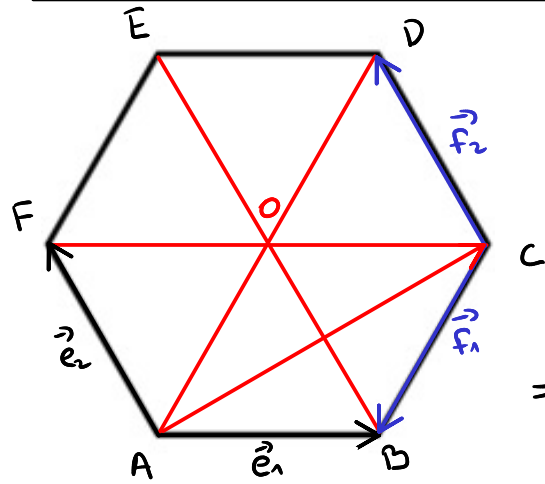
$$* C = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow C^{-1} = \frac{1}{\det C} \text{adj}(C) \Rightarrow C = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$[O_1]_{O_1 F} = [O_1^T O_1]_F \stackrel{(1.4)}{=} [\frac{1}{2} O_1^T A + \frac{1}{2} O_1^T B]_F = [\frac{1}{2} \vec{F}_1 + \frac{1}{2} \vec{F}_2]_F = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$$

$$[A_1]_{O_1 F} = [O_1^T A_1]_F \stackrel{(1.3)}{=} [\frac{1}{2} A O_1^T]_F = [-\frac{1}{2} O_1^T A]_F = (-\frac{1}{2}, 0)$$

$$[B_1]_{O_1 F} = [O_1^T B_1]_F \stackrel{(1.3)}{=} [\frac{1}{2} B O_1^T]_F = [-\frac{1}{2} O_1^T B]_F = (0, -\frac{1}{2})$$

3.2. Нека је $ABCDEF$ правилан шестоугао. Репер Axy има координатне векторе $\vec{e}_1 = \vec{AB}$, $\vec{e}_2 = \vec{AF}$, а репер $Cx'y'$ координатне векторе $\vec{f}_1 = \vec{CB}$, $\vec{f}_2 = \vec{CD}$. Одредити формуле које представљају везу координата (x, y) и (x', y') , њима инверзне формуле, као и координате темена шестоугла у оба репера.



$$[C]_{Ae} = [A^T C]_e = [\vec{AB} + \vec{BO} + \vec{OC}]_e = [2\vec{e}_1 + \vec{e}_2]_e = (2, 1)$$

$$[\vec{f}_1]_e = [C^T B]_e = [C^T A + \vec{AB}]_e = [-2\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_1]_e = (-1, -1)$$

$$[\vec{f}_2]_e = [C^T D]_e = (0, 1)$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow C^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

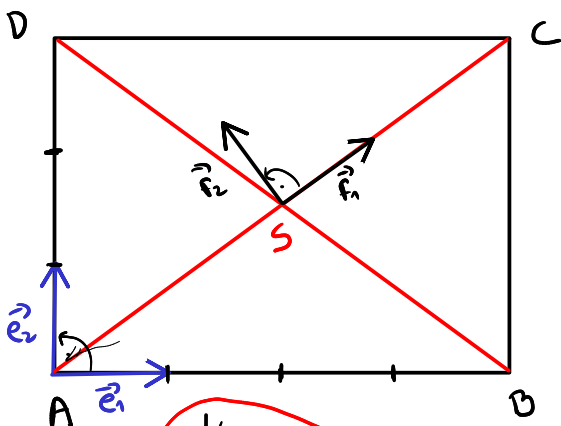
$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$[Ae]_{(x,y)} A(0,0), B(1,0), C(2,1), D(2,2), E(1,2), F(0,1)$

$[C_F]_{(x',y')} A(2,1), B(1,0), C(0,0), D(0,1), E(1,2), F(2,2)$

↓ ПРОВЕРА ФОРМУЛА: $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \checkmark$ $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

3.3. Дат је правоугаоник $ABCD$ чије ивице имају дужине $AB = 4, BC = 3$, а тачка S је центар тог правоугаоника. Дата су два ортонормирана репера, исте оријентације: репер Axy има x осу у правцу вектора $\vec{AB}$ и y осу у правцу вектора $\vec{AD}$, а репер $Sx'y'$ има x' осу у правцу вектора $\vec{SC}$. Одредити везу координата (x, y) и (x', y') , као и координате темена правоугаоника у оба координатна репера.



ОРТОНОРМИРАНИ РЕПЕР
($\Rightarrow$ ОРТОГОНАЛНИ И НОРМИРАНИ
(ПРАВОУГЛНИ) (ВЕКТОРИ ДУЖИНЕ 1))

$$\vec{e}_1 = \frac{1}{4} \vec{AB} \Rightarrow \vec{AB} = 4\vec{e}_1, \vec{AD} = 3\vec{e}_2$$

$$[S]_{Ae} = [A^T S]_e = [\frac{1}{2} (\vec{AB} + \vec{BC})]_e = (2, 3/2)$$

$$[\vec{f}_1]_e = \frac{\vec{SC}}{\|\vec{SC}\|} = \frac{\vec{AC}}{\|\vec{AC}\|} = \frac{4\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2}{5} = (\frac{4}{5}, \frac{3}{5})$$

$$\cos \alpha = \frac{4}{5} \quad \sin \alpha = \frac{3}{5}$$

$$\Rightarrow [\vec{f}_2]_e = [\cos(\alpha + \frac{\pi}{2}), \sin(\alpha + \frac{\pi}{2})]_e = (-\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/5 & -3/5 \\ 3/5 & 4/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 3/2 \end{bmatrix}$$

C је ортогонална матрица $\Rightarrow C^{-1} = C^T = \begin{bmatrix} 4/5 & 3/5 \\ -3/5 & 4/5 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/5 & 3/5 \\ -3/5 & 4/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5/2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Матрица преласка
са ортонорм. базе
на ортонорм. базу
је ортогонална
тј. $C \cdot C^T = E$
 $\Rightarrow C^{-1} = C^T$

Ae $A(0,0), B(4,0), C(4,3), D(0,3)$

Sf $A: \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5/2 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A(-\frac{5}{2}, 0)$

$B: \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/5 & 3/5 \\ -3/5 & 4/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5/2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16/5 \\ -12/5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5/2 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow B(\frac{7}{10}, -\frac{12}{5})$

и аналогно за $C(\frac{5}{2}, 0)$ и $D(-\frac{7}{10}, \frac{12}{5})$

3.4. Дате су координате тачака $A(2,1), B(3,0)$ и $C(1,4)$ у односу на афини репер Oxy у равни. У односу на нови афини репер $O'x'y'$ те исте тачке имају координате $A(1,6), B(1,9)$ и $C(3,1)$. Изразити координате (x,y) произвољне тачке M у реперу Oxy помоћу координата (x',y') те исте тачке у новом реперу $O'x'y'$.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}$$

$A \mapsto A': \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix} \Rightarrow a + 6b + e = 2, c + 6d + f = 1$

$B \mapsto B': \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix} \Rightarrow a + 9b + e = 3, c + 9d + f = 0$

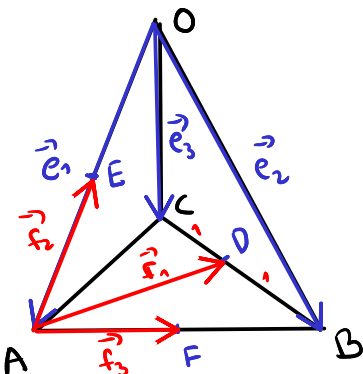
$C \mapsto C': \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix} \Rightarrow 3a + b + e = 1, 3c + d + f = 4$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 2/3 & -1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1/3 \\ 7/3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{rcl} a + 6b + e = 2 & c + 6d + f = 1 \\ 3b = 1 & 3d = -1 \\ 2a - 5b = -1 & 2c - 5d = 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} b = 1/3 & d = -1/3 \\ 2a = \frac{2}{3} \Rightarrow a = \frac{1}{3} & 2c = 4/3 \Rightarrow c = 2/3 \\ e = -1/3 & f = 1 - \frac{2}{3} \times 2 \Rightarrow f = 7/3 \end{array}$$

3.5. Дат је тетраедар $OABC$. Афини репер $Oxyz$ има почетак у темену O , а координатни вектори су $\vec{e}_1 = \vec{OA}, \vec{e}_2 = \vec{OB}$ и $\vec{e}_3 = \vec{OC}$. Афини репер $Ax'y'z'$ има почетак у темену A тетраедра, а његови координатни вектори су $\vec{f}_1 = \vec{AD}, \vec{f}_2 = \vec{AE}$ и $\vec{f}_3 = \vec{AF}$, где су D, E и F средишта ивица BC, OA и AB . Изразити координате (x,y,z) произвољне тачке M у реперу $Oxyz$ помоћу координата (x',y',z') исте тачке у реперу $Ax'y'z'$. Одредити инверзне формуле као и координате темена тетраедра у односу на репер $Ax'y'z'$.



$$[A]_{Oe} = [OA]_e = [\vec{e}_1]_e = (1, 0, 0)$$

$$[\vec{f}_1]_e = [AD]_e = [AO + OD]_e \stackrel{1.4}{=} [-\vec{e}_1 + \frac{1}{2}\vec{e}_2 + \frac{1}{2}\vec{e}_3] = (-1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$$

$$[\vec{f}_2]_e = [\frac{1}{2}AO]_e = (-\frac{1}{2}, 0, 0)$$

$$[\vec{f}_3]_e = [AO + OF]_e \stackrel{1.4}{=} [-\vec{e}_1 + \frac{1}{2}\vec{e}_1 + \frac{1}{2}\vec{e}_2]_e = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$x = -x' - \frac{1}{2}y' - \frac{1}{2}z' + 1$$

$$y = \frac{1}{2}x' + \frac{1}{2}z'$$

$$z = \frac{1}{2}x'$$

$$\Rightarrow x' = 2z$$

$$y = z + \frac{1}{2} z' \Rightarrow z' = 2y - 2z$$

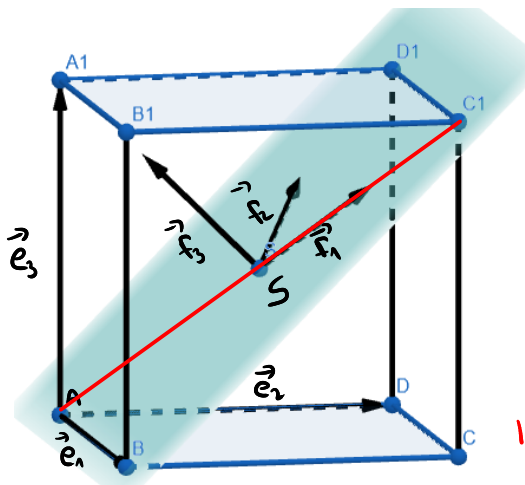
$$x = -2z - \frac{1}{2} y' + z - y + 1 \Rightarrow y' = -2x - 2y - 2z + 2$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -2 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (*)$$

Oe $O(0,0,0)$, $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$, $C(0,0,1)$

Af $(*) \Rightarrow O(0,2,0)$, $A(0,0,0)$, $B(0,0,2)$, $C(2,0,-2)$

3.6. Дата је коцка $ABCA_1B_1C_1D_1$ ивице 1, са центром S . Ортонормирани репер $Axyz$ има базне векторе $\vec{e}_1 = \vec{AB}$, $\vec{e}_2 = \vec{AD}$, $\vec{e}_3 = \vec{AA_1}$. У ортонормираном реперу $Sx'y'z'$, исте оријентације, дијагонална раван ABC_1D_1 има једначину $z' = 0$, тачка C_1 је на позитивном делу x' осе, а тачка D_1 има позитивну x' и y' координату. Одредити формуле трансформација координата и координате темена коцке у оба репера.



$z' = 0 \Rightarrow Sx'y'$ РАВАН $\Rightarrow \vec{f}_1 \wedge \vec{f}_2 \perp ABC_1D_1$
 C_1 у поз. делу x' осе $\Rightarrow \vec{f}_1 = \frac{\vec{SC_1}}{\|\vec{SC_1}\|}$

$$[S]_{Ae} = [AS]_e = \left[\frac{1}{2} \vec{AC_1} \right]_e$$

$$= \left[\frac{1}{2} (\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CC_1}) \right]_e = \left[\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \right]_e$$

$$[\vec{f}_1]_e = \left[\frac{\vec{AC_1}}{\|\vec{AC_1}\|} \right]_e = \left[\frac{\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3}{\sqrt{3}} \right]_e = \left[\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right]_e$$

$$\|\vec{AC_1}\| = \sqrt{\|\vec{e}_1\|^2 + \|\vec{e}_2\|^2 + \|\vec{e}_3\|^2} = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$$

$\vec{f}_3 \perp ABC_1D_1 \Rightarrow \vec{f}_3 \perp \vec{AB}, \vec{f}_3 \perp \vec{AC_1} \Rightarrow [\vec{f}_3]_e = \left[\frac{\vec{AB} \times \vec{AC_1}}{\|\vec{AB} \times \vec{AC_1}\|} \right]_e = \left[\frac{\vec{e}_3 - \vec{e}_2}{\sqrt{2}} \right]_e$

$\vec{AB} \times \vec{AC_1} = \vec{e}_1 \times (\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3) = \vec{e}_3 - \vec{e}_2$

$$\Rightarrow [\vec{f}_3]_e = \left[\left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right]_e$$

$$\Rightarrow \vec{f}_2 = \vec{f}_3 \times \vec{f}_1 = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \end{vmatrix} = \left[\left(-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}} \right) \right]_e$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

ВАЖИ $C^{-1} = C^T$ због
Ортонормираних репера

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (*)$$

Ae $A(0,0,0)$, $B(1,0,0)$, $C(1,1,0)$, $D(0,1,0)$
 $A_1(0,0,1)$, $B_1(1,0,1)$, $C_1(1,1,1)$, $D_1(0,1,1)$

Sf добијено координате користити $(*)$