

2.5. Наћи вектор $\vec{x}$ ако је $\vec{x} \cdot \vec{a} = \alpha$, $\vec{x} \cdot \vec{b} = \beta$, $\vec{x} \cdot \vec{c} = \gamma$, при чему су $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ некопланарни вектори, а $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ задати ненула скалари.

$$(\vec{x} \cdot \vec{a}) \cdot \beta = \alpha \beta = \alpha \cdot (\vec{x} \cdot \vec{b})$$

$$\vec{x} \cdot (\beta \vec{a}) = \vec{x} \cdot (\alpha \vec{b})$$

$$\vec{x} \cdot (\beta \vec{a} - \alpha \vec{b}) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{x} \perp \beta \vec{a} - \alpha \vec{b}}$$

$$(\vec{x} \cdot \vec{a}) \cdot \gamma = \alpha \gamma = \alpha \cdot (\vec{x} \cdot \vec{c})$$

$$\vec{x} \cdot (\gamma \vec{a}) = \vec{x} \cdot (\alpha \vec{c})$$

$$\vec{x} \cdot (\gamma \vec{a} - \alpha \vec{c}) = 0$$

$$\boxed{\vec{x} \perp \gamma \vec{a} - \alpha \vec{c}}$$

Да ли су $\beta \vec{a} - \alpha \vec{b}$ и $\gamma \vec{a} - \alpha \vec{c}$ неколинеарни?

$$(\beta \vec{a} - \alpha \vec{b}) \times (\gamma \vec{a} - \alpha \vec{c}) \neq \vec{0}?$$

$$\beta \gamma \underbrace{\vec{a} \times \vec{a}}_{=\vec{0}} - \alpha \beta \vec{a} \times \vec{c} - \alpha \gamma \vec{b} \times \vec{a} + \alpha^2 \vec{b} \times \vec{c} \neq \vec{0} \quad / \cdot \vec{a}$$

$$- \alpha \beta \underbrace{[\vec{a}, \vec{c}, \vec{a}]}_{=0} - \alpha \gamma \underbrace{[\vec{b}, \vec{a}, \vec{a}]}_{=0} + \alpha^2 [\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}] \neq 0?$$

$$\underbrace{\alpha^2}_{\neq 0} \underbrace{[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]}_{\neq 0 \text{ неколинеарни}} \neq 0 \quad \checkmark$$

$$\Rightarrow \vec{x} = \lambda (\beta \vec{a} - \alpha \vec{b}) \times (\gamma \vec{a} - \alpha \vec{c}) \quad / \cdot \vec{a}$$

$$\alpha = \vec{x} \cdot \vec{a} = \lambda \cdot \alpha^2 [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda = \frac{1}{\alpha [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]}}$$

$$\vec{x} = \frac{1}{\alpha [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]} (-\alpha \beta \vec{a} \times \vec{c} - \alpha \gamma \vec{b} \times \vec{a} + \alpha^2 \vec{b} \times \vec{c})$$

$$\boxed{\vec{x} = \frac{1}{[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]} (\gamma \vec{a} \times \vec{b} + \alpha \vec{b} \times \vec{c} + \beta \vec{c} \times \vec{a})}$$

2.6. Одредити вектор $\vec{x}$ ако важи $\vec{u} \cdot \vec{x} = \alpha$, $\vec{u} \times \vec{x} = \vec{v}$.

$$\vec{v} \times \vec{u} = (\vec{u} \times \vec{x}) \times \vec{u} = (\vec{u} \cdot \vec{u}) \vec{x} - (\vec{x} \cdot \vec{u}) \vec{u} = \|\vec{u}\|^2 \vec{x} - \alpha \vec{u}$$

$$\|\vec{u}\|^2 \vec{x} = \alpha \vec{u} + \vec{v} \times \vec{u}$$

$$1) \|\vec{u}\| \neq 0 \Rightarrow \boxed{\vec{x} = \frac{1}{\|\vec{u}\|^2} (\alpha \vec{u} + \vec{v} \times \vec{u})}$$

$$2) \|\vec{u}\| = 0 \Rightarrow \underline{\vec{u} = \vec{0}} \Rightarrow 0 = \alpha, \quad \vec{v} = \vec{0}$$

2.1) $\alpha \neq 0$ и $\vec{v} \neq \vec{0} \Rightarrow$ нема решења

2.2) $\underline{\alpha = 0}$ и $\underline{\vec{v} = \vec{0}} \Rightarrow \boxed{\forall \vec{x} \in V}$

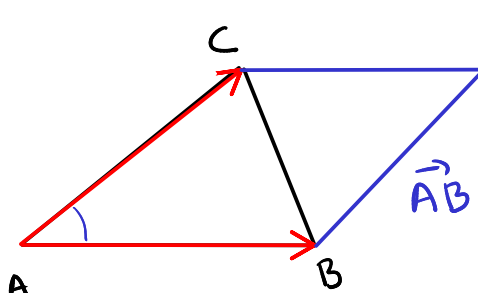
* Векторски и мешовити производ у $\mathbb{R}^3$

$$\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k} \\ \vec{a} = (a_1, a_2, a_3), \quad \vec{b} = (b_1, b_2, b_3), \quad \vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1)$$

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

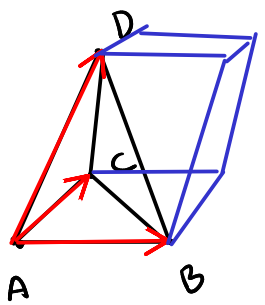
2.7. Ако су $A(0, 1, 1)$, $B(2, 3, 5)$, $C(3, 1, 4)$ темена троугла, израчунати његову површину.



$$\vec{AB} = "B - A" = (2, 2, 4) \\ \vec{AC} = "C - A" = (3, 0, 3) \\ \vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 3 \end{vmatrix} = (6, 6, -6) \\ \|\vec{AB} \times \vec{AC}\| = \sqrt{6^2 + 6^2 + 6^2} = 6\sqrt{3}$$

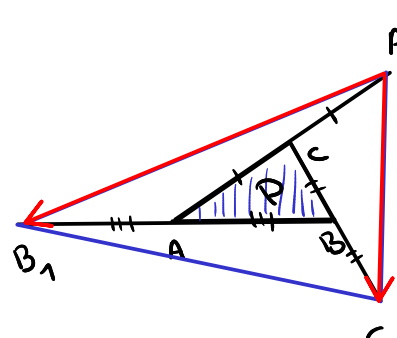
$$P_{\square} = \|\vec{AB} \times \vec{AC}\| = 6\sqrt{3}, \quad P_{\Delta} = \frac{1}{2} \|\vec{AB} \times \vec{AC}\| = 3\sqrt{3}$$

2.8. Ако су $A(0, 1, 1)$, $B(1, 2, 6)$, $C(0, 1, 2)$ и $D(2, 0, 2)$ темена тетраедра, израчунати његову запремину.



$$\vec{AB} = (1, 1, 5), \quad \vec{AC} = (0, 0, 1), \quad \vec{AD} = (2, -1, 1) \\ V_{\text{паралелепипеда}} = |[\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}]| = 3 \\ V_{\text{тетраедра}} = \frac{1}{6} |[\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}]| = \frac{1}{2} \\ [\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}] = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 3$$

2.9. Дат је троугао ABC површине P . Нека су тачке A_1, B_1, C_1 такве да важи $\vec{CA_1} = \vec{AC}$, $\vec{BC_1} = \vec{CB}$, $\vec{AB_1} = \vec{BA}$. Колика је површина троугла $A_1B_1C_1$?

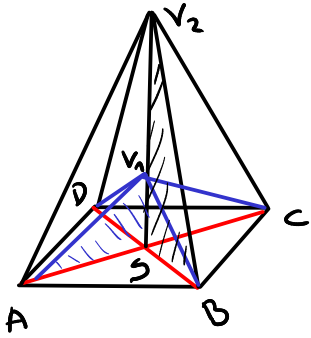


$$P = P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \|\vec{AB} \times \vec{AC}\| \\ P_{\Delta A_1B_1C_1} = \frac{1}{2} \|\vec{A_1B_1} \times \vec{A_1C_1}\| \\ = \frac{1}{2} \|(\vec{A_1A} + \vec{AB_1}) \times (\vec{A_1C} + \vec{CC_1})\| \\ = \frac{1}{2} \|(-2\vec{AC} - \vec{AB}) \times (-\vec{AC} + 2\vec{CB})\| \\ = \frac{1}{2} \|(-2\vec{AC} - \vec{AB}) \times (-3\vec{AC} + 2\vec{AB})\| = \frac{1}{2} \|-4\vec{AC} \times \vec{AB} + 3\vec{AB} \times \vec{AC}\|$$

$\vec{CB} = \vec{CA} + \vec{AB} = -\vec{AC} + \vec{AB}$

$$= \frac{1}{2} \| 4 \vec{AB} \times \vec{AC} + 3 \vec{AB} \times \vec{AC} \| = 7 \cdot \frac{1}{2} \| \vec{AB} \times \vec{AC} \| = \boxed{7P}$$

2.10. Дате су две праве пирамиде са истом основом, квадратом $ABCD$ ивице a . Нека су V_1 и V_2 врхови датих пирамида и угао између правих AV_1 и BV_2 једнак $\frac{\pi}{4}$. Ако је висина једне пирамиде једнака a одредити висину друге пирамиде.



$$\angle(AV_1, BV_2) = \frac{\pi}{4}, \quad \|\vec{AB}\| = \|\vec{AD}\| = a, \quad \|\vec{SV}_1\| = a$$

$$\begin{aligned} \vec{AV}_1 \circ \vec{BV}_2 &= (\vec{AS} + \vec{SV}_1) \circ (\vec{BS} + \vec{SV}_2) \\ &= \underbrace{\vec{AS} \circ \vec{BS}}_{=0} + \underbrace{\vec{AS} \circ \vec{SV}_2}_{=0} + \underbrace{\vec{SV}_1 \circ \vec{BS}}_{=0} + \vec{SV}_1 \circ \vec{SV}_2 \\ &= \vec{SV}_1 \circ \vec{SV}_2 = \|\vec{SV}_1\| \cdot \|\vec{SV}_2\| \cdot \cos 0 = a \cdot \|\vec{SV}_2\| \end{aligned}$$

$$\vec{AV}_1 \circ \vec{BV}_2 = \|\vec{AV}_1\| \cdot \|\vec{BV}_2\| \cdot \cos \angle(\vec{AV}_1, \vec{BV}_2) = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \cdot \|\vec{BV}_2\| \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\begin{aligned} \|\vec{AS}\|^2 &= \vec{AS} \circ \vec{AS} = \frac{1}{2} \vec{AC} \circ \frac{1}{2} \vec{AC} = \frac{1}{4} (\vec{AB} + \vec{BC}) \circ (\vec{AB} + \vec{BC}) \\ &= \frac{1}{4} (\|\vec{AB}\|^2 + \|\vec{BC}\|^2) = \frac{1}{4} (a^2 + a^2) = \frac{a^2}{2} \Rightarrow \|\vec{AS}\| = \frac{a}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

$$\|\vec{AV}_1\|^2 = \|\vec{AS}\|^2 + \|\vec{SV}_1\|^2 = \frac{a^2}{2} + a^2 = \frac{3a^2}{2} \Rightarrow \|\vec{AV}_1\| = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow a \cdot \|\vec{SV}_2\| = \vec{AV}_1 \circ \vec{BV}_2 = \frac{a\sqrt{3}}{2} \|\vec{BV}_2\| \Rightarrow \|\vec{SV}_2\| = \frac{\sqrt{3}}{2} \|\vec{BV}_2\|$$

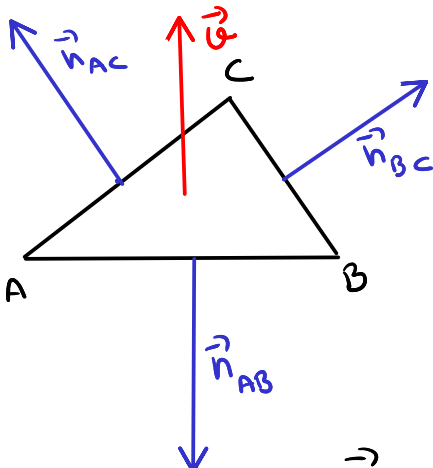
Питагора
 $\triangle BS V_2$

$$\|\vec{BV}_2\|^2 = \|\vec{BS}\|^2 + \|\vec{SV}_2\|^2 = \frac{a^2}{2} + \frac{3}{4} \|\vec{BV}_2\|^2$$

$$\frac{1}{4} \|\vec{BV}_2\|^2 = \frac{a^2}{2} \Rightarrow \|\vec{BV}_2\|^2 = 2a^2 \Rightarrow \|\vec{BV}_2\| = a\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \|\vec{SV}_2\| = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a\sqrt{2} \Rightarrow \|\vec{SV}_2\| = \frac{a\sqrt{6}}{2}$$

2.11. Нека је ABC произвољан троугао у равни. Доказати да је збир три вектора који су спољашње нормале на ивице троугла, а чији је интензитет једнак дужини одговарајуће ивице, једнак нули.



$$\vec{n}_{AB} \perp \vec{AB}, \quad \|\vec{n}_{AB}\| = \|\vec{AB}\|$$

и аналогно за остале стране

Нека је $\vec{u}$ јединични вектор нормалан на равни ABC

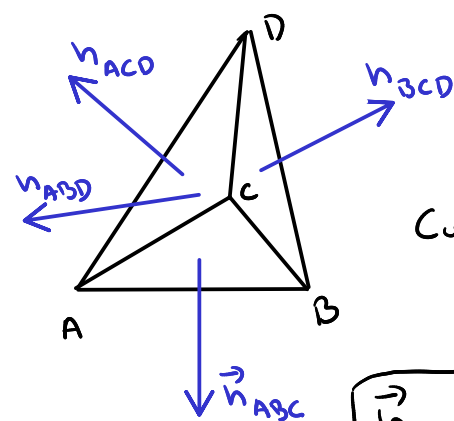
$$\vec{n}_{AB} \perp \vec{AB}, \quad \vec{u} \Rightarrow \vec{n}_{AB} = \vec{AB} \times \vec{u}$$

$$\|\vec{n}_{AB}\| = \|\vec{AB} \times \vec{u}\| = \|\vec{AB}\| \cdot \underbrace{\|\vec{u}\|}_{=1} \cdot \underbrace{\sin \frac{\pi}{2}}_{=1} = \|\vec{AB}\| \checkmark$$

$$\text{Аналогно } \Rightarrow \vec{n}_{BC} = \vec{BC} \times \vec{u}, \quad \vec{n}_{AC} = \vec{CA} \times \vec{u}$$

$$\begin{aligned} \vec{n}_{AB} + \vec{n}_{BC} + \vec{n}_{AC} &= \vec{AB} \times \vec{u} + \vec{BC} \times \vec{u} + \vec{CA} \times \vec{u} \\ &= (\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA}) \times \vec{u} = \vec{0} \times \vec{u} = \vec{0} \end{aligned}$$

2.12. Нека је $ABCD$ тетраедар. Доказати да је збир четири вектора који су спољашње нормале на пљосни тетраедра, а интензитет им је једнак површини одговарајуће пљосни, једнак нули.



$$\vec{n}_{ABC} = \frac{1}{2} \vec{AC} \times \vec{AB}$$

$$\|\vec{n}_{ABC}\| = \frac{1}{2} \|\vec{AC} \times \vec{AB}\| = P_{\triangle ABC} \quad \checkmark$$

Слично, $\vec{n}_{ACD} = \frac{1}{2} \vec{AD} \times \vec{AC}$, $\vec{n}_{BCD} = \frac{1}{2} \vec{BC} \times \vec{BD}$

$$\vec{n}_{ABD} = \frac{1}{2} \vec{BD} \times \vec{BA}$$

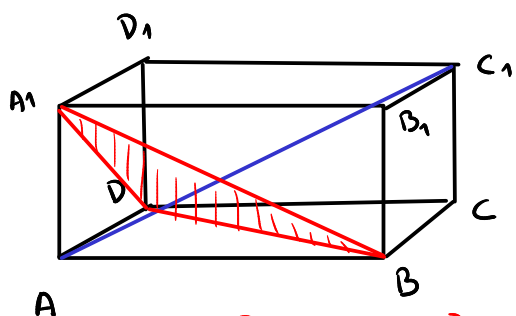
$$\vec{n}_{ABC} + \vec{n}_{ACD} + \vec{n}_{BCD} + \vec{n}_{ABD}$$

$$= \frac{1}{2} \vec{AC} \times \vec{AB} + \frac{1}{2} \vec{AD} \times \vec{AC} + \frac{1}{2} \vec{BC} \times \vec{BD} + \frac{1}{2} \vec{BD} \times \vec{BA}$$

$$= \frac{1}{2} \vec{AC} \times (\vec{AB} - \vec{AD}) + \frac{1}{2} \vec{BD} \times (\vec{BA} - \vec{BC})$$

$$= \frac{1}{2} \vec{AC} \times \vec{DB} + \frac{1}{2} \vec{BD} \times \vec{CA} = \frac{1}{2} \vec{AC} \times \vec{DB} + \frac{1}{2} \vec{DB} \times \vec{AC} = \vec{0}$$

2.13. Ако је у правоуглом паралелепипеду $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ дијагонала AC_1 нормална на раван која садржи тачке A_1, B, D доказати да је тај паралелепипед коцка.



Доказујемо $\|\vec{AB}\| = \|\vec{BC}\| = \|\vec{AA}_1\|$.

$AC_1 \perp \text{PABAN } A_1BD$
 $\Rightarrow \vec{AC}_1 \perp \vec{A_1B}$ и $\vec{AC}_1 \perp \vec{A_1D}$

1) $0 = \vec{AC}_1 \cdot \vec{A_1B}$
 $= (\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CC}_1) \cdot (\vec{A_1A} + \vec{AB})$

$$= \underbrace{\vec{AB} \cdot \vec{A_1A}}_{=0} + \vec{AB} \cdot \vec{AB} + \underbrace{\vec{BC} \cdot \vec{A_1A}}_{=0} + \underbrace{\vec{BC} \cdot \vec{AB}}_{=0} + \underbrace{\vec{CC}_1 \cdot \vec{A_1A}}_{=0} + \underbrace{\vec{CC}_1 \cdot \vec{AB}}_{=0}$$

$$\Rightarrow 0 = \|\vec{AB}\|^2 - \|\vec{AA}_1\|^2 \Rightarrow \boxed{\|\vec{AB}\| = \|\vec{AA}_1\|}$$

2) $0 = \vec{AC}_1 \cdot \vec{A_1D} = (\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CC}_1) \cdot (\vec{A_1A} + \vec{AD})$

$$0 = \|\vec{BC}\|^2 - \|\vec{AA}_1\|^2 \Rightarrow \boxed{\|\vec{BC}\| = \|\vec{AA}_1\|}$$

2.14. Ако су A, B, C фиксиране неколинеарне тачке и P произвољна тачка, доказати да је $\vec{PA} \times \vec{AB} = \vec{PB} \times \vec{BC} = \vec{PC} \times \vec{CA}$ ако и само је P тежиште троугла ABC .

$$\vec{PA} \times \vec{AB} = \vec{PA} \times (\vec{AP} + \vec{PB}) = \underbrace{\vec{PA} \times \vec{AP}}_{=0} + \vec{PA} \times \vec{PB} = \vec{PA} \times \vec{PB}$$

Аналогно, $\vec{PB} \times \vec{BC} = \vec{PB} \times \vec{PC}$, $\vec{PC} \times \vec{CA} = \vec{PC} \times \vec{PA}$

Доказујемо:

$$\vec{PA} \times \vec{PB} = \vec{PB} \times \vec{PC} = \vec{PC} \times \vec{PA} \Leftrightarrow P \text{ тежиште } \triangle ABC$$

$\boxed{\Leftarrow}$ Означимо са T тежиште $\triangle ABC \Rightarrow \vec{OT} = \frac{1}{3}(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC})$

Претп. да је $P \equiv T$.

$$\Rightarrow \vec{O} = \vec{PT} = \frac{1}{3}(\vec{PA} + \vec{PB} + \vec{PC}) \Rightarrow \vec{PB} = -\vec{PA} - \vec{PC} \quad (*)$$

$$\vec{PA} \times \vec{PB} \stackrel{(*)}{=} \vec{PA} \times (-\vec{PA} - \vec{PC}) = -\vec{PA} \times \vec{PC} = \vec{PC} \times \vec{PA} \quad \checkmark$$

$$\vec{PB} \times \vec{PC} \stackrel{(*)}{=} (-\vec{PA} - \vec{PC}) \times \vec{PC} = -\vec{PA} \times \vec{PC} = \vec{PC} \times \vec{PA}$$

$$\Rightarrow \vec{PA} \times \vec{PB} = \vec{PC} \times \vec{PA} = \vec{PB} \times \vec{PC}$$

$\boxed{\Rightarrow}$ Знамо $\vec{PA} \times \vec{PB} \stackrel{1}{=} \vec{PB} \times \vec{PC} \stackrel{2}{=} \vec{PC} \times \vec{PA}$

Показујемо да је $P \equiv T$.

$$* \vec{PA} \times \vec{PB} \stackrel{1}{=} \vec{PB} \times \vec{PC}$$

$$\vec{PA} \times \vec{PB} - \vec{PB} \times \vec{PC} = \vec{0}$$

$$\vec{PA} \times \vec{PB} + \underbrace{\vec{PB} \times \vec{PB}}_{=\vec{0}} + \vec{PC} \times \vec{PB} = \vec{0}$$

$$\frac{1}{3}(\vec{PA} + \vec{PB} + \vec{PC}) \times \vec{PB} = \vec{0}$$

$$\boxed{\vec{PT} \times \vec{PB} = \vec{0}}$$

$$* \vec{PB} \times \vec{PC} \stackrel{2}{=} \vec{PC} \times \vec{PA}$$

$$\frac{1}{3}(\vec{PA} + \vec{PB} + \vec{PC}) \times \vec{PC} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{PT} \times \vec{PC} = \vec{0}}$$

$$* \vec{PA} \times \vec{PB} \stackrel{3}{=} \vec{PC} \times \vec{PA}$$

$$\frac{1}{3}(\vec{PA} + \vec{PB} + \vec{PC}) \times \vec{PA} = \vec{0}$$

$$\boxed{\vec{PT} \times \vec{PA} = \vec{0}}$$

$\Rightarrow \vec{PT}$ колинеаран са $\vec{PA}$, $\vec{PB}$ и $\vec{PC}$ или $\vec{PT} = \vec{0}$

$\Downarrow$
A, B, C, T колинеарне $\Downarrow \Rightarrow \vec{PT} = \vec{0}$

$\Rightarrow$ P тежиште $\triangle ABC$