

Универзитет у Београду  
Математички факултет

# АНАЛИТИЧКА ГЕОМЕТРИЈА

## (ГЕОМЕТРИЈА 1)

— рокови —

# Рокови школске 2023/2024 године

## Аналитичка геометрија (Геометрија 1)

СЕПТЕМБАР 2 - 27.09.2024. године

Време рада: 135мин. Срећно!



- [8п] Дат је квадрат  $ABCD$ . Нека је тачка  $E$  таква да важи  $\overrightarrow{DE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{DB}$ . Нека је тачка  $F$  пресек правих  $CB$  и  $AE$ , а тачка  $G$  пресек правих  $AB$  и  $CE$ . Израчунати површине троуглова  $AEC$  и  $BFG$  у односу на површину квадрата  $ABCD$ .
- [8п] Одредити једначину криве другог реда чија једна директриса има једначину  $d: x + 2y + 2 = 0$ , а жиже су јој тачке  $F_1(2, 0)$  и  $F_2(0, -4)$ . Која крива је у питању?
- [8п] Дате су равни  $\alpha: x - 2y + z - 3 = 0$  и  $\beta: 2y + 4z = 0$ , као и тачка  $P(0, 2, -1)$ .
  - [4п] Одредити једначину праве  $p$  која садржи тачку  $P$ , паралелна је равни  $\alpha$  и садржана је у равни  $\beta$ .
  - [4п] Одредити формуле рефлексије у односу на раван  $\alpha$ . Шта је слика праве  $p$  при тој рефлексији?
- [9п] Површ  $P: 3x^2 + 3z^2 + 4xy + 8xz + 4yz - 3z = 0$  изометријском трансформацијом свести на канонски облик и написати формулу те трансформације. Која површ је у питању?
- [7п] На јединичној сфери дате су тачке  $A(0, 0, 1)$  и  $B(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{1}{2})$ . Одредити тачку  $C$  тако да сферни троугао  $ABC$  буде једнакокрак, где је  $AB = AC$  и  $\angle BAC = \frac{\pi}{2}$ . Одредити потом све стране и углове сферног троугла  $ABC$ , као и његову површину.

## Аналитичка геометрија (Геометрија 1)

СЕПТЕМБАР 1 - 07.09.2024. године

Време рада: 135мин. Срећно!



- [7п] Дат је правоугаоник  $ABCD$  и тачка  $E$  таква да је  $\overrightarrow{AE} = \frac{5}{8}\overrightarrow{AC}$ . Ако је тачка  $F$  пресек правих  $DE$  и  $AB$ , одредити однос  $AF:FB$ .
- [9п] Дате су праве  $p: \frac{x}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{2}$  и  $q: \frac{x-1}{3} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z+1}{3}$  и раван  $\alpha: x + y + z = 2024$ . Одредити једначину праве  $r$  која је паралелна равни  $\alpha$  и сече праве  $p$  и  $q$  у тачкама чије је растојање једнако  $\sqrt{14}$ .
- [9п] Изометријском трансформацијом свести криву  $K: 15x^2 + 8y^2 + 24xy + 44x + 32y + 20 = 0$  на канонски облик и одредити њене жиже у  $(x, y)$ -координатама. Која крива је у питању?
- [8п] Одредити једначину површи која је геометријско место тачака подједнако удаљених од равни  $\alpha: 2x - 2y + z + 6 = 0$  и праве  $p: \begin{cases} x - 2y + 10 = 0 \\ x + z + 2 = 0 \end{cases}$ .
- [7п] Одредити (приближно) растојање између два места на планети Марс која су дата са  $A: 45^\circ$  јужне географске ширине,  $90^\circ$  источне географске дужине и  $B: 30^\circ$  северне географске ширине,  $60^\circ$  источне географске дужине. Претпоставити да је Марс сфера полупречника  $R = 3390km$ .

## Аналитичка геометрија (Геометрија 1)

ЈУН 2 - 05.07.2024. године

Време рада: 135мин. Срећно!



- [8п] Нека је  $CC_1$  тежишна дуж троугла  $ABC$  и  $P$  тачка за коју важи  $\overrightarrow{CP} = 3\overrightarrow{PC_1}$ . Ако је тачка  $Q$  пресек правих  $AP$  и  $BC$ , одредити односе  $BQ:BC$  и  $AP:AQ$ .
- Дате су праве  $p: \frac{x-1}{0} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+2}{-1}$ ,  $q: \frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{0}$  и сфера  $\sigma: (x-7)^2 + (y-5)^2 + z^2 = 16$ .
  - [5п] Одредити једначину заједничке нормале као и растојање мимоилазних правих  $p$  и  $q$ .
  - [3п] На правој  $p$  наћи тачку  $A$  која је најближа сфери  $\sigma$ .
- [8п] Одредити једначину параболе која садржи тачку  $A(-1, 0)$ , права  $d: 2x - y + 2 + 2\sqrt{5} = 0$  је њена директриса и права  $o: x + 2y - 3 = 0$  јој је оса симетрије.
- [8п] Одредити формуле афиног пресликавања простора које представља композицију ротације око праве  $p: y = 0, z = 0$  за угао  $\varphi = \frac{\pi}{3}$  и рефлексије у односу на раван  $\alpha: x = 0$ . Шта је слика сфере  $\sigma: x^2 + y^2 - 2y + z^2 = 0$  при овом пресликавању?
- (а) [4п] Одредити једначину кружног цилиндра који додирује сфере  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  и  $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 1$ .

- (б) [4п] Круг који се добије ротацијом тачке  $A(1, 1, 1)$  око осе цилиндра из дела (а) написати као пресек две сфере полупречника 3.

### Аналитичка геометрија (Геометрија 1)

ЈУН 1 - 13.06.2024. године

Време рада: 135мин. Срећно!



- [9п] Нека је  $ABC$  троугао у еуклидској равни и тачке  $D$  и  $E$  такве да је  $\overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{BC}$  и  $\overrightarrow{AE} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ . Одредити тачку  $F$  на правој  $AC$  такву да су тачке  $D$ ,  $E$  и  $F$  колинеарне и изразити вектор  $\overrightarrow{AF}$  као линеарну комбинацију вектора  $\overrightarrow{CD}$  и  $\overrightarrow{BE}$ . Ако је  $P$  површина троугла  $ABC$ , изразити површину троугла  $CDF$  и површину четвороугла  $ACDE$  у функцији од  $P$ .
- [9п] Одредити координате тачака  $A$ ,  $B$  и  $C$  у односу на афини репер  $Oxy$  у равни, ако је  $A$  централно симетрична тачка тачки  $(0, -1)$  у односу на тачку  $(1, 0)$ ,  $B$  је слика тачке  $(\frac{3}{2}, \frac{-3\sqrt{3}}{2})$  при ротацији око координатног почетка за  $60^\circ$  у позитивном математичком смеру и  $C$  је слика тачке  $(4, 4)$  при хомотетији са коефицијентом  $-2$  у односу на тачку  $(3, 4)$ . Ако у односу на нови афини репер  $O'x'y'$  те исте тачке имају координате  $A(1, 0)$ ,  $B(0, 1)$  и  $C(1, 1)$ , изразити координате  $(x, y)$  произвољне тачке  $M$  у реперу  $Oxy$  помоћу координата  $(x', y')$  те исте тачке у новом реперу  $O'x'y'$ .
- [8п] Свести криву другог реда  $4x^2 - 4xy + y^2 + 3x + 2y - 7 = 0$  на канонски облик изометријском трансформацијом координата и написати формуле те трансформације. Која је то крива?
- [8п] Одредити вредност параметра  $\lambda$  тако да се праве  $p: \frac{x-2}{3} = \frac{y+4}{5} = \frac{z-1}{-2}$  и  $q: x = 2t - \lambda, y = t + 3, z = -5, t \in \mathbb{R}$  секу, као и координате пресечне тачке правих  $p$  и  $q$ . Затим одредити једначине сфера полупречника  $\lambda$  које су уписане у конус  $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ .
- [6п] Сферни троугао  $ABC$  на јединичној сфери у сферној геометрији има углове  $\alpha = \frac{\pi}{3}$ ,  $\beta = \frac{2\pi}{3}$  и површину  $P = \frac{\pi}{6}$ . Израчунати ивице тог троугла.

## Рокови школске 2022/2023 године

### Аналитичка геометрија (Геометрија 1)

СЕПТЕМБАР 2 - 26.09.2023. године

Време рада: 135мин. Срећно!



- [8п] Дат је правоугаоник  $ABCD$  са страницама  $\|AB\| = 2$  и  $\|AD\| = 1$ . Нека је  $k$  описан круг око тог правоугаоника, права која садржи средишта страница  $AB$  и  $CD$  сече тај круг у тачкама  $K$  и  $L$  (тачка  $K$  је ближа страници  $AB$ ). Нека је репер  $A_e$  задат тачком  $A$  и базом  $e = (\vec{e}_1, \vec{e}_2) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$ , а репер  $S_f$  тачком  $S$ , која је средиште странице  $BC$ , и базом  $f = (\vec{f}_1, \vec{f}_2) = (\overrightarrow{SK}, \overrightarrow{SL})$ . Изразити векторе базе  $f$  преко вектора базе  $e$ , а потом написати формуле трансформација координата.
- [8п] Одредити једначину криве другог реда чије су директрисе задате са  $d_1: x + y - 2 = 0$  и  $d_2: 3x + 3y - 4 = 0$ , а једна жижа је  $F(2, 1)$ . Која крива је у питању?
- [6п] Одредити једначину праве  $p$ , ако се зна да она садржи тачку  $P(-1, 2, 1)$ , сече праву  $q: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+2}{3}$  и паралелна је равни  $\alpha: 2x + 3y + z + 2023 = 0$ .
- [10п] Површ  $\mathcal{P}: 2x^2 + 2z^2 - 2xz + 2x + 3y + 2z + 2 = 0$  изометријском трансформацијом свести на канонски облик и написати формулу те трансформације. Која површ је у питању?
- [8п] На јединичној сфери дате су тачке  $A(\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ ,  $B$  и  $C(0, 0, 1)$  тако да је  $ABC$  правоугли сферни троуга са правим углом  $\angle BCA = \frac{\pi}{2}$  и страницом  $BC = \frac{\pi}{3}$ . Одредити површину тог сферног троугла.

### Аналитичка геометрија (Геометрија 1)

СЕПТЕМБАР 1 - 08.09.2023. године

Време рада: 135мин. Срећно!



- [10п] Дат је паралелограм  $ABCD$  и тачке  $E, F$  и  $G$  такве да  $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{FD}$ ,  $\overrightarrow{DE} = 3\overrightarrow{EC}$  и  $\overrightarrow{BG} = 2\overrightarrow{BD}$ . Ако је тачка  $X$  пресек  $CB$  и  $GE$ , а  $Y$  пресек  $AB$  и  $GF$ , доказати да су праве  $AC$ ,  $EF$  и  $XY$  конкурентне.
- [7п] Дате су мимоилазне праве  $p: \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+2}{2}$  и  $q: \frac{x-2}{3} = \frac{y}{-2} = \frac{z+2}{2}$ . Одредити једначину равни  $\alpha$  која је подједнако удаљена од правих  $p$  и  $q$ .
- [8п] Одредити све параболе које имају директрису  $x + y + 1 = 0$  и садрже тачке  $A(3, 0)$  и  $B(7, 0)$ .

4. [8п] Одредити формулу афине трансформације простора која представља композицију симетрије у односу на праву  $p: \frac{x}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{1}$  и хомотетије са центром у  $S(1, 3, 1)$  и коефицијентом 2.
5. [7п] Одредити једначину конуса  $\mathcal{K}$  са врхом  $V(1, 4, 6)$  који додирује сферу  $\sigma: x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 6z + 1 = 0$ . Која крива је у пресеку конуса  $\mathcal{K}$  и  $Oxy$ -равни?

### Аналитичка геометрија (Геометрија 1)

ЈУН 2 - 30.06.2023. године

Време рада: 135мин. Срећно!



1. [7п] Дат је троугао  $ABC$ . Нека тачка  $D$  припада страници  $AB$ , а тачка  $E$  страници  $AC$ , тако да је  $\frac{\vec{AD}}{\vec{DB}} = \frac{1}{4}$  и  $\frac{\vec{AE}}{\vec{EC}} = \frac{3}{5}$ . Уколико се дужи  $DC$  и  $BE$  секу у тачки  $F$ , у ком односу тачка  $F$  дели дуж  $DC$ ? Изразити вектор  $\vec{BF}$  као линеарну комбинацију вектора  $\vec{BD}$  и  $\vec{BC}$ .
2. Дата је коцка  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  ивице  $a$ . Нека је тачка  $S$  средиште странице  $BB_1$ , а  $Q$  средиште странице  $D_1 C_1$ .
- а) [4п] Доказати да је угао између вектора  $\vec{DS}$  и  $\vec{AQ}$  прав.
- б) [4п] Одредити растојање између мимоилазних правих  $DS$  и  $AQ$ .
3. Дате су тачке  $A(-3, -3)$  и  $B(0, -3)$ , као и праве  $p: x - y - 2 = 0$  и  $q: x + y + 2 = 0$
- а) [3п] Одредити тачку  $B'$  која је симетрична тачки  $B$  у односу на праву  $q$ .
- б) [7п] Одредити једначину криве другог реда која садржи тачке  $A$  и  $B$  и којој су праве  $p$  и  $q$  осе симетрије. Која крива је у питању?
4. [7п] Одредити формуле ротације око тачке  $S(1, 2)$  за угао  $\phi = \frac{\pi}{3}$ . Шта је слика круга  $k: (x-4)^2 + (y-2)^2 = 9$  при том пресликавању?
5. [8п] Одредити једначину конуса чији је врх тачка  $V(1, -2, 3)$  и који садржи елипсу  $\mathcal{E}: 2x^2 + 3y^2 = 1, z = 0$ .

### Аналитичка геометрија (Геометрија 1)

ЈУН 1 - 13.06.2023. године

Време рада: 135мин. Срећно!



1. Дат је паралелограм  $ABCD$ . Тачка  $O$  је пресек дијагонала  $AC$  и  $BD$ ,  $K$  средиште странице  $AB$  и  $L$  средиште странице  $BC$ .
- а) [3п] Доказати да је  $O$  тежиште троугла  $DKL$ .
- б) [3п] Репер  $Axy$  има координатне векторе  $\vec{e}_1 = \vec{AB}$  и  $\vec{e}_2 = \vec{AD}$ , а репер  $Ox'y'$  координатне векторе  $\vec{f}_1 = \vec{OK}$  и  $\vec{f}_2 = \vec{OL}$ . Одредити везу координата  $(x, y)$  и  $(x', y')$ .
2. [9п] Криву  $\mathcal{K}: 2x^2 + 2xy + 2y^2 + 4x + 2y - 4 = 0$  изометријском трансформацијом свести на канонски облик и написати формулу те трансформације. Која крива је у питању?
3. Дате су тачка  $A(0, 0, 7)$ , права  $p: x + 2 = y + 2 = z - 1$  и раван  $\alpha: x + 2y + 3z + 1 = 0$ .
- а) [4п] Одредити једначину праве  $q$  која садржи тачку  $A$ , сече праву  $p$  и паралелна је равни  $\alpha$ .
- б) [6п] Одредити формуле рефлексије у односу на раван  $\alpha$ . Шта је слика праве  $p$  при тој рефлексији?
4. [8п] Одредити једначину цилиндра  $\mathcal{C}$  који садржи пресек равни  $\alpha: x + y - z + 1 = 0$  и  $\beta: 5x - 4y + z + 2 = 0$ , као и круг  $k$  који се налази у равни  $\gamma: x + y + z = 3$ , има полупречник  $\sqrt{2}$  и центар у тачки  $C(1, 1, 1)$ .
5. [7п] На јединичној сфери одредити растојање између тачака  $A(30^\circ S, 135^\circ W)$  и  $B(60^\circ N, 45^\circ E)$ .

# Рокови школске 2021/2022 године

## Геометрија 1, јануар 1, 2023. године

- 1) (20) Доказати да код троугла  $ABC$  симетрала спољашњег угла  $A$  и симетрале унутрашњих углова  $B$  и  $C$  секу праве одређене насипрним ивицама у колинеарним тачкама.
- 2) (20) Дат је правилан петоугао  $ABCDE$ . У равни петоугла изабрана су два афина репера: репер  $Axy$  са почетком у тачки  $A$  и координатним векторима  $\vec{e}_1 = \overrightarrow{AB}$  и  $\vec{e}_2 = \overrightarrow{AD}$  и репер  $Cx'y'$  са почетком у тачки  $C$  и координатним векторима  $\vec{f}_1 = \overrightarrow{CE}$  и  $\vec{f}_2 = \overrightarrow{CA}$ . Одредити везу координата  $(x, y)$  и  $(x', y')$ , као и координате темена у оба репера.
- 3) (20) Дата је хипербола  $xy - 1 = 0$ . Одредити пар њених конјугованих дијаметара од којих је један паралелан правој  $p: 2x + y - 6 = 0$ .
- 4) (20) Одредити формуле афиног пресликавања простора које представља композицију ротације за угао  $\phi = \frac{\pi}{4}$  око праве  $p: x = 0, y = 0$  и рефлексије у односу на раван  $\alpha: z = 0$ . Шта је слика сфере  $x^2 - 2x + y^2 + z^2 = 0$  при том пресликавању?
- 5) (20) Једначину површи другог реда  $2x^2 + y^2 + 2z^2 + 6xz - 10x + 2y - 10 = 0$  изометријским трансформацијама свести на канонски облик и написати формуле те трансформације.

## Геометрија 1, септембар 2, 2022. године

- 1) (20) Дат је једнакокраки трапез  $ABCD$  чија је основа  $AB$ , угао код темена  $A$  је  $60^\circ$  и  $BC = CD = DA = 2$ . Ако су  $M$  и  $N$  средишта страница  $BC$  и  $CD$ , а  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  редом јединични вектори истог смера као вектори  $\overrightarrow{AB}$  и  $\overrightarrow{AD}$ , изразити векторе  $\overrightarrow{AM}$ ,  $\overrightarrow{AN}$ ,  $\overrightarrow{BC}$  и  $\overrightarrow{MN}$  помоћу вектора  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , а затим одредити скаларни производ вектора  $\overrightarrow{BC}$  и  $\overrightarrow{MN}$ .
- 2) (20) Одредити угао под којим се секу криве  $x^2 + y^2 - 8y - 24 = 0$  и  $x^2 = 6y$ . Скицирати!
- 3) (20) Раван  $\alpha: x + 4y + 8z - 8 = 0$  и координатне равни образују тетраедар. Одредити једначину сфере уписане у тај тетраедар.
- 4) (20) Одредити афину трансформацију простора која представља композицију хомотетије са центром  $S(1, 2, 3)$  и коефицијентом 2 и равanske рефлексије у односу на раван  $\alpha: x + 2y + 2z - 1 = 0$ .
- 5) (20) Одредити приближно растојање између градова  $A(60^\circ N, 45^\circ E)$  и  $B(30^\circ S, 60^\circ W)$ . Узети да је Земља сфера полупречника  $r = 6370 km$ .

## ГЕОМЕТРИЈА 1, септембар 1, 06.09.2022.

- 1.[20] Нека су у равни дате тачке  $A(-20, 10)$ ,  $B(40, 10)$  и  $C(-5, 25)$ . Одредити координате подножја висина из темена  $A, B, C$  као и координате ортоцентра  $H$  троугла  $ABC$ .
- 2.[20] Одредити једначине свих равни које садрже праву  $p: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{0}$  и граде угао  $\frac{\pi}{4}$  с равни  $Oxy$ .
- 3.[20] Одредити једначину криве другог реда чије су осе праве  $p: 3x + 4y = 0$  и  $q: -4x + 3y = 0$ , једна од жижа је тачка  $F(3, 4)$  и има ексцентрицитет  $\frac{5}{4}$ .
- 4.[20] Свести површ другог реда  $3x^2 + 4y^2 + 2z^2 - 4xy + 4xz + 6y + 12z = 0$  на канонски облик изометријском трансформацијом и одредити формуле трансформације. Која је површ у питању?
- 5.[20] На јединичној сфери израчунати површину сферног троугла чије су странице  $a = b = c = \frac{\pi}{3}$ .

## Геометрија 1, јун 2 2022. године

- 1) [20] Нека је  $ABC$  троугао, тачка  $M$  средиште тежишне дужи  $CC_1$ , а тачка  $N$  пресек правих  $BC$  и  $AM$ . Израчунати односе  $\overrightarrow{AM} : \overrightarrow{MN}$  и  $\overrightarrow{BC} : \overrightarrow{CN}$ .
- 2) [7+7+6] а) Одредити афино пресликавање које пресликава квадрат  $ABCD$  са теменима  $A(-2, -3)$ ,  $B(0, -3)$ ,  $C(0, -1)$ ,  $D(-2, -1)$  у паралелограм  $A'B'C'D'$  са теменима  $A'(3, 3)$ ,  $B'(7, 5)$ ,  $C'(5, 7)$  и  $D'(1, 5)$ . б) Одредити једначину слике круга уписаног у квадрат. Која је то крива? в) Колика је површина слике круга?
- 3) [20] Дата је коцка  $OAFBCEGD$  ивице 1, са центром  $S$ . Афини репер  $Oxyz$  са почетком у темену  $O$  има координатне векторе  $\vec{e}_1 = \overrightarrow{OA}$ ,  $\vec{e}_2 = \overrightarrow{OB}$  и  $\vec{e}_3 = \overrightarrow{OC}$ . Други афини репер  $Sx'y'z'$  има почетак у тачки  $S$ , а његови координатни вектори  $\vec{f}_1, \vec{f}_2$  и  $\vec{f}_3$  су редом јединични вектори истог смера као вектори  $\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SB}$  и  $\overrightarrow{SC}$ . Изразити координате  $(x, y, z)$  произвољне тачке  $M$  у реперу  $Oxyz$  помоћу координата  $(x', y', z')$  исте тачке у реперу  $Sx'y'z'$ .
- 4) [10+10] а) Одредити једначину праве  $q$  која садржи тачку  $Q(1, 2, 4)$ , сече праву  $p: \frac{x-3}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+1}{-1}$  и паралелна је равни  $\alpha: x - 4y + 3z - 1 = 0$ . б) Израчунати запремину пирамиде  $PABC$  ако су  $A, B, C$  редом пресеци оса  $Ox, Oy, Oz$  са равни  $\alpha$ , а  $P$  пресечна тачка правих  $p$  и  $q$ .
- 5) [10+10] а) Шта се добија (објаснити и написати једначину) ротацијом праве  $p: x = 0, z = y\sqrt{3}$  око осе  $Oz$ ? б) Која крива је пресек те површи и равни  $y = 1$ ? Скицирати слику.

- [20] Нека је  $ABCD$  конвексан четвороугао у равни такав да је  $AB = CD$ . Ако су тачке  $E, F, G$  и  $H$  средишта дужи  $AD, BC, AC$  и  $BD$ , редом, изразити векторе  $\vec{EF}$  и  $\vec{GH}$  као линеарну комбинацију вектора  $\vec{AB}$  и  $\vec{DC}$ , а затим доказати да је  $\vec{EF} \perp \vec{GH}$ .
- [20] Свести криву другог реда  $2x^2 + 5xy + 2y^2 - 2 = 0$  на канонски облик изометријском трансформацијом координата и написати формуле те трансформације. Која је то крива? Наћи њен ексцентрицитет и скицирати је.
- [20] Одредити једначину равни  $\alpha$  која садржи тачку  $T(-2, 1, 3)$  и паралелна је са равни  $Oxy$ . Одредити формуле рефлексије простора  $S_\alpha$  у односу на раван  $\alpha$ , као и формуле translације  $\tau_{\vec{v}}$  простора за вектор  $\vec{v} = (0, 1, 0)$  ( $\tau_{\vec{v}}(X) = X'$  ако и само ако је  $\overrightarrow{XX'} = \vec{v}$ ). Одредити формуле композиција  $S_\alpha \circ \tau_{\vec{v}}$  и  $\tau_{\vec{v}} \circ S_\alpha$  и скицирати слику тачке  $M(1, 2, 4)$  при овим пресликавањима.
- [20] Одредити једначину правог кружног цилиндра чија је оса пресечна права равни  $x + 2y = 4$  и  $2y - z = 3$  ако је познато да тај цилиндар додирује раван која садржи тачку  $(-3, 1, 1)$  и нормална је на праву  $\frac{x-15}{1} = \frac{y-6}{-2} = \frac{z-2022}{2}$ .
- [20] На јединичној сфери у сферној геометрији одредити (изражавањем координата темена у сферним координатама) низ једнакостраничних троуглова  $(NA_nB_n)_{n \in \mathbb{N}}$  чији збир унутрашњих углова тежи ка  $\pi$ , при чему је  $N$  северни пол те сфере.

## Рокови школске 2020/2021 године

### ГЕОМЕТРИЈА 1, јануар, 22.01.2022.

- [14п] Нека је  $ABCD$  паралелограм, нека је  $F$  тачка на страници  $BC$  таква да је  $BF : FC = 2 : 3$ , нека је  $G$  тачка на страници  $CD$  таква да је  $CG : GD = 2 : 5$  и нека је  $E$  пресечна тачка дужи  $AF$  и  $BG$ . Одредити односе у којима тачка  $E$  дели дужи  $AF$  и  $BG$ .
- [14п] Одредити једначину праве која садржи тачку  $A(3, 6, 9)$  и нормална је на равни  $\alpha : 2x - y - 2z = 0$ . Одредити координате тачке  $A'$  која је симетрична тачки  $A$  у односу на раван  $\alpha$ .
- [14п] Ако су  $AC$  и  $BD$  било који конјуговани дијаметри једне елипсе, доказати да површина четвороугла  $ABCD$  не зависи од избора дијаметара.
- [14п] Свести површ другог реда  $7x^2 + y^2 + z^2 + 8xy - 8xz + 16yz = 1$  и одредити тип површи.
- [14п] На сфери полупречника  $R = 2$  израчунати површину сферног троугла чије су стране  $a - b - c = \frac{\pi}{3}$ .

### ГЕОМЕТРИЈА 1, септембар 2, 25.09.2021.

- [20п] Нека су  $A, B, C$  и  $D$  четири различите тачке у простору и  $M, N, P, Q, R$  и  $S$  редом средишта дужи  $AB, BC, CD, DA, AC$  и  $BD$ . Доказати да дужи  $MP, NQ$  и  $RS$  имају заједничко средиште.
- [20п] Дате су тачке  $A(5, 3), B(3, 5)$  и  $C(9, 3)$ .
  - [10п] Одредити једначину круга описаног око троугла  $ABC$ .
  - [10п] Одредити афину трансформацију равни којој су тачке  $B$  и  $C$  непокретне и која тачку  $A$  слика у центар описаног круга око троугла  $ABC$ .
- [20п] Одредити угао под којим се секу криве  $x^2 + y^2 - 4x - 6 = 0$  и  $y^2 = 3x$ .
- [20п] Одредити једначину кружног цилиндра који је описан око сфера  $\sigma_1 : (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 1)^2 = 3$  и  $\sigma_2 : (x - 2)^2 + (y - 3)^2 + (z - 2)^2 = 3$ .
- [20п] На јединичној сфери су дате тачке  $A(0, 0, 1), B(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2})$  и  $C(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ . Израчунати обим сферног троугла  $ABC$ .

### Геометрија 1 септембар 1 2021.

- Дате су координате тачака  $B(-1, -2), C(3, -1)$  и  $H(1, 0)$ .
  - Одредити координате тачке  $A$  тако да тачка  $H$  буде ортоцентар троугла  $ABC$ .
  - Нека су  $P_1$  и  $P_2$  редом површине троуглова  $BCH$  и  $ABC$ . Одредити однос  $P_1 : P_2$ .
- Нека је  $ABCD$  правилан тетраедар, нека је  $D_1$  подножје висине тетраедра из темена  $D$  на пљосан  $ABC$  и нека су дата два репера:  $A\vec{e}$  и  $D_1\vec{f}$ , где је  $\vec{e} = (\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD})$  и  $\vec{f} = (\vec{D_1A}, \vec{D_1B}, \vec{D_1C})$ .
  - Одредити формуле трансформације координата из репера  $A\vec{e}$  у репер  $D_1\vec{f}$ .
  - Одредити координате средишта ивица тетраедра у оба репера.
- Нека је права  $t$  тангента у тачки  $M$  хиперболе  $\Gamma$ . Доказати да тачка  $M$  полови дуж чији су крајеви пресечне тачке праве  $t$  и асимптота хиперболе  $\Gamma$ .

4. Нека су дате тачке  $A(1, -1, 0)$ ,  $B(2, 1, 1)$ ,  $C(-1, 0, 0)$ . Одредити геометријско место тачака које су подједнако удаљене од тачака  $A$ ,  $B$  и  $C$ .
5. Дата је тачка  $V(0, -1, 2)$  и раван  $\alpha: x + y - z = 0$ . Одредити једначину конуса чији је врх тачка  $V$  и чије изводнице заклапају угао  $\pi/3$  са равни  $\alpha$ .

### ГЕОМЕТРИЈА 1, септембар 0, 25.08.2021.

- 1.[20п] Нека је тачка  $M$  средиште тежисне дужи  $AA_1$  троугла  $ABC$ . Ако је тачка  $N$  пресек правих  $BM$  и  $AC$  одредити односе  $NA:AC$  и  $BM:MN$ .
- 2.[20п] Дата је тачка  $A(5, -2, 1)$  и права  $p: x = 0, y = z$ .
- (а) [10п] Одредити тачку  $B$  симетричну тачки  $A$  у односу на праву  $p$ .
- (б) [10п] На правој  $p$  одредити тачку  $C$  тако да троугао  $ABC$  буде једнакостраничан.
- 3.[20п] У простору су дате равни  $\alpha: 2x + y + 2z = 0$  и  $\beta: 2x - 2y - z = 0$ . Нека је  $f$  пресликавање које представља композицију рефлексија у односу на равни  $\alpha$  и  $\beta$  редом. Одредити формуле пресликавања  $f$ . Шта је слика сфере  $\sigma: (x+1)^2 + (y+2)^2 + (z-2)^2 = 9$  при том пресликавању?
- 4.[20п] Одредити једначину кружног конуса описаног око сфера  $\sigma_1: x^2 + y^2 + z^2 - 2y - 2z + 1 = 0$  и  $\sigma_2: x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z + 13 = 0$ .
5. [20п] Одредити приближно растојање између тачака на планети Земљи  $A(30^\circ S, 45^\circ W)$  и  $B(60^\circ N, 45^\circ E)$ . Узети да је Земља сфера полупречника  $6370\text{km}$ .

### Геометрија 1 јун 2 2021.

1. Нека је  $ABC$  троугао и тачке  $P$  и  $Q$  такве да је  $\overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{PB}$  и  $2\overrightarrow{BQ} = \overrightarrow{QC}$ .
- а) Ако је  $R$  тачка праве  $AC$  таква да се  $AQ$ ,  $BR$  и  $CP$  секу у једној тачки, одредити однос  $\overrightarrow{AR} : \overrightarrow{RC}$ .
- б) Одредити координате тачке  $Q$  у реперу  $Ae$  уколико је  $e = (\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AC})$ .
2. Дате су права  $s: x = -1$  и круг  $k: (x-2)^2 + y^2 = 1$ . Одредити геометријско место центара кругова који спољашњом страном додирују круг  $k$  и праву  $s$ . Која крива је тражено геометријско место?
3. Дате су две праве  $a: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-2}$  и  $b: \frac{x+1}{0} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{-1}$  као и тачка  $C(1, -1, 0)$ . Одредити праву  $c$  која садржи тачку  $C$ , сече праву  $b$  и чији вектор правца је ортогоналан на вектор правца праве  $a$ .
4. Нека су дате праве  $p: \frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-3}{2}$  и  $q: \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-1}{2}$ . Одредити једначине свих кружних конуса који садрже праве  $p$  и  $q$ , а чија оса припада равни одређеној правима  $p$  и  $q$ .
5. На сфери полупречника 2 одредити растојање између тачака  $X(30^\circ N, 60^\circ W)$  и  $Y(30^\circ S, 30^\circ E)$ .

### ГЕОМЕТРИЈА 1, јун, 15.06.2021.

- 1.[20] Нека су  $A, B, C$  и  $D, E, F$  две тројке колинеарних тачака таквих да је  $B$  средиште  $AC$  и  $E$  средиште  $DF$ . Ако су  $P, Q, R$  редом средишта дужи  $AD, BE, CF$ , доказати да су  $P, Q, R$  колинеарне и да је  $Q$  средиште дужи  $PR$ .
- 2.[20]
- (а) [10] Одредити једначину равни  $\gamma$  која полови угао између равни  $\alpha: 2x - 2y + z - 3 = 0$  и  $\beta: 8x + y - 4z - 1 = 0$  и садржи тачку  $C(-4, 1, 1)$ .
- (б) [10] Одредити једначину нормалне пројекције праве  $p: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z-2}{0}$  на равни  $\pi: x - 2y + 2z - 5 = 0$  и израчунати угао између праве  $p$  и равни  $\pi$ .
- 3.[20] Одредити једначину криве другог реда чије су осе праве  $p: 2x + y = 0$  и  $q: -x + 2y = 0$ , једна од жижа је тачка  $F(-1, 2)$  и садржи тачку  $B(2, 1)$ .
- 4.[20] Одредити формуле бар једног афиног пресликавања које квадрат  $ABCD$  с теменима  $A(0, 0)$ ,  $B(3, 4)$ ,  $C(-1, 7)$ ,  $D(-4, 3)$  слика на паралелограм  $A'B'C'D'$  с теменима  $A'(0, 0)$ ,  $B'(7, -2)$ ,  $C'(6, -13)$  и  $D'(-1, -11)$ . Израчунати површину паралелограма користећи податак да је површина квадрата  $ABCD$  једнака 25.
5. [20] На сфери полупречника 1 израчунати површину сферног троугла чије су стране  $a = b = c = \frac{\pi}{4}$ .

# Рокови школске 2019/2020 године

## Геометрија 1 јануар 2021.

1. [14] Нека је дат троугао  $ABC$  који пије једнакокрак, пека су  $A', B', C'$  подножја висина из темена  $A, B, C$  редом и нека је  $P$  пресечна тачка правих  $BC, B'C'$ ,  $Q$  пресечна тачка правих  $AC, A'C'$  и  $R$  пресечна тачка правих  $AB, A'B'$ . Доказати да су тачке  $P, Q, R$  колинеарне.
2. [14] Нека се равни  $\alpha: 2x + y + z = 0$  и  $\beta: 4x - 3y + z = 0$  секу по правој  $p$ . Одредити једначину праве  $q$  која садржи координатни почетак, припада равни  $\gamma: x + y - 2z = 0$  и нормална је на правој  $p$ .
3. [14] Одредити формуле трансформације која представља композицију осне симетрије равни у односу на осу  $p: x - 2y = 0$  и осне симетрије равни у односу на осу  $q: 2x + y = 0$ .
4. [14] Одредити једначину конуса чији је врх тачка  $V(0, 0, 0)$  и додирује сферу  $S: (x - 2)^2 + y^2 + z^2 = 2$ .
5. [14] Одредити обим сферног троугла  $ABC$  на сфери полупречника 1 коме су углови  $\sphericalangle BAC = \frac{\pi}{2}$ ,  $\sphericalangle ABC = \frac{\pi}{2}$ ,  $\sphericalangle ACB = \frac{\pi}{6}$ .

Време за рад је 135 минута.

## ГЕОМЕТРИЈА 1, Сеп 3, 2020.

1. [14п] Дат је паралелограм  $ABCD$  чија је површина једнака  $P$ . Уколико су  $M$  и  $N$  тачке такве да важи  $\frac{\overrightarrow{BM}}{\overrightarrow{MD}} = \frac{1}{2}$  и  $\frac{\overrightarrow{DN}}{\overrightarrow{NC}} = -\frac{4}{1}$ , израчунати (у функцији од  $P$ ) површину троугла  $AMN$ .
2. [14п] Одредити једначине свих хомотетија које сферу  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  трансформишу на сферу  $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z + 1)^2 = 9$ .
3. [14п] Одредити растојање између паралелних равни  $\alpha: x - y + 4z + 2020 = 0$  и  $\beta: x - y + 4z - 1 = 0$ .
4. [14п] Одредити једначину параболе која садржи тачку  $A(\sqrt{2}, 0)$ , чија је директриса права  $d: x + y - 3\sqrt{2} = 0$ , а оса симетрије права  $o: x - y + \sqrt{2} = 0$ .
5. [14п] Површ  $\Pi$  настаје ротацијом праве  $p: \frac{x-2}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z-3}{0}$  око праве  $o: \frac{x-3}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-3}{0}$ . Одредити једначину површи  $\Pi$ , скицирати и написати која је то површ.

## Геометрија 1 септембар 2 2020.

1. Нека је  $ABCD$  квадрат и тачка  $O$  центар тог квадрата. Репер  $Dxy$  има координатне векторе  $\vec{e}_1 = \overrightarrow{DA}$  и  $\vec{e}_2 = \overrightarrow{DC}$ , а репер  $Ox'y'$  координатне векторе  $\vec{f}_1 = \overrightarrow{OB}$  и  $\vec{f}_2 = \overrightarrow{OA}$ .
  - а) Одредити формуле које представљају везу између координата  $(x, y)$  и  $(x', y')$ .
  - б) Одредити координате срединга страница квадрата  $ABCD$  у оба репера.
  - ц) Да ли се при промени координата из дела а) задатка мења оријентација? (Образложити)
2.
  - а) Одредити формуле пројектовања простора на раван  $\alpha: x - z = 4$ .
  - б) Одредити пројекцију  $A'$  тачке  $A(0, 1, 0)$  и пројекцију  $p'$  праве  $p: \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{0} = \frac{z+1}{-1}$  на раван  $\alpha$ .
3. Свести криву другог реда  $\Gamma: 5x^2 + 10xy + 5y^2 - 4x = 6$  на канонски облик изометријском трансформацијом и написати формуле трансформације. Која крива је у питању?
4. Одредити једначину кружног конуса  $\mathcal{C}$  уколико је врх конуса тачка  $V(2, -3, 5)$ , тачка  $P(1, -2, 3)$  припада конусу, а вектор правца осе конуса заклана једнаке углове са свим координатним векторима.
5. На сфери полупречника 2 одредити растојање између тачака  $A(45^\circ N, 30^\circ W)$  и  $B(30^\circ N, 60^\circ E)$ .

## Геометрија 1 септембар 1 2020.

1. Дат је троугао  $ABC$  и тачке  $P$  и  $Q$  такве да важи  $3\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{PB}$  и  $\overrightarrow{BQ} = 2\overrightarrow{QC}$ , а тачка  $R$  је пресек правих  $AC$  и  $PQ$ .
  - а) Одредити однос  $\overrightarrow{AR} : \overrightarrow{AC}$ .
  - б) Одредити координате тачака  $P, Q$  и  $R$  у реперу  $Ae_1e_2$  ако су координатни вектори  $\vec{e}_1 = \overrightarrow{AC}$  и  $\vec{e}_2 = \overrightarrow{AB}$ .
2. Дате су тачка  $L(2, 0, 2)$  као и праве  $p: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{0}$  и  $q: \frac{x-3}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z-4}{0}$ .
  - а) Одредити међусобни положај правих  $p$  и  $q$ .
  - б) Одредити праву која садржи тачку  $L$  и сече праве  $p$  и  $q$ .

3. Дате су кружнице  $k_1 : (x+1)^2 + y^2 = 1$  и  $k_2 : (x-3)^2 + y^2 = 4$ . Одредити геометријско место центара кружница које тангирају две дате кружнице са спољашње стране. Која крива је у питању?
4. Свести површ другог реда  $\mathcal{M} : x^2 + y^2 + 4xz + z^2 = 1$  на канонски облик изометријском трансформацијом и написати формуле трансформације. Одредити тип површи и скицирати ту површ.
5. Сферни троугао на јединичној сфери има углове  $\alpha = \pi/4$  и  $\beta = \pi/2$  као и површину  $P = \pi/4$ . Одредити обим тог троугла.

### ГЕОМЕТРИЈА 1, јул, 05.07.2020.

- 1.[15п] Нека су  $H$ ,  $T$  и  $O$  редом ортоцентар, тежиште и центар описаног круга троугла  $ABC$ .
  - а) [10п] Показати да је  $\vec{HT} = 2\vec{TO}$ .
  - б) [5п] Показати да је  $\vec{OH} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}$ .
- 2.[15п] Одредити једначину праве  $p$  која садржи тачку  $P(1,0,-2)$ , паралелна је равни  $\alpha : 2x - y + z - 3 = 0$  и има заједничку тачку с правом  $q : \frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+2}{0}$ .
- 3.[15п]
  - а) [5п] Одредити формуле ротације равни такве да се  $x$ -оса слика у праву  $y = x$ , а  $y$ -оса у праву  $y = -x$ .
  - б) [10п] Одредити једначину криве другог реда чије су осе праве  $y = x$  и  $y = -x$  и која садржи тачке  $A(\sqrt{2}, \sqrt{2})$  и  $B(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ . Која је то крива?
- 4.[15п] Свести површ другог реда  $x^2 + y^2 - 2z^2 + xy + 5xz - 5yz = 3$  на канонски облик изометријском трансформацијом. Написати формуле трансформације. Одредити тип површи.
- 5.[10п] На сфери полупречника  $R = 2$  израчунати површину сферног троугла  $ABC$  чије су странице  $\widehat{AB} = \pi$ ,  $\widehat{AC} = \pi$ ,  $\widehat{BC} = \frac{2\pi}{3}$ .

### ГЕОМЕТРИЈА 1, јул, 24.06.2020.

- 1.[15п] Дате су координате темена  $A(0,0)$ ,  $B(3,0)$  и  $C(1,1)$  троугла  $ABC$ . Одредити координате центра описаног круга  $O$ , ортоцентра  $H$  и тежишта  $T$  троугла  $ABC$ .
- 2.[15п] Одредити једначину равни  $\alpha$  у простору која садржи тачку  $A(-4,0,3)$  такву да је права  $n$ , која садржи  $A$  и нормална је на правој  $l : \frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{0}$ , нормална на  $\alpha$ .
- 3.[15п] Одредити формуле афиног пресликавања које је композиција хомотетије с центром  $S(2,1)$  и коефицијентом 13 и ротације око исте тачке  $S$  за општа угао  $\varphi = \arctg \frac{5}{12}$ .
- 4.[15п] Одредити површ у простору која представља скуп тачака  $M$  на једнаком растојању од тачке  $A(1,0,0)$  и праве  $p : \frac{x}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z}{0}$ .
- 5.[10п] Одредити приближно растојање између тачака на планети Земљи  $A(45^\circ N, 10^\circ E)$  и  $B(60^\circ S, 35^\circ W)$ . Претпоставити да је Земља сфера полупречника  $R = 6370\text{km}$ .

## Рокови школске 2018/2019 године

### ГЕОМЕТРИЈА 1, јануар 1, 14.01.2020.

- 1.[10п] Дате су координате тачака  $A(1,10)$ ,  $B(1,18)$  и  $C(2,3)$  у односу на афини репер  $Oxy$  у равни. У односу на нови афини репер  $O'x'y'$  те исте тачке имају координате  $A(2,1)$ ,  $B(3,3)$ ,  $C(1,-2)$ . Изразити координате произвољне  $M$  у реперу  $Oxy$  помоћу координата  $(x',y')$  те тачке у реперу  $O'x'y'$ .
- 2.[10п] Одредити заједничку нормалу и растојање између мимоилазних правих  $p : \frac{x-1}{4} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-5}{-2}$  и  $q : \frac{x+1}{3} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z-2}{-1}$ .
- 3.[10п] Одредити једначине равни које садрже праву  $\frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{2}$  и додирују сферу  $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 6y - 4z + 10 = 0$ . Одредити једначине симетралних равни дивидирају ове две равни и назначити која сече дату сферу.
- 4.[10п] Одредити приближно растојање између тачака на планети Земљи  $A(45^\circ N, 10^\circ E)$  и  $B(60^\circ S, 35^\circ W)$ . Претпоставити да је Земља сфера полупречника  $R = 6370\text{km}$ .

### ГЕОМЕТРИЈА 1, септембар 2, 18.09.2019.

1. Нека су  $E$ ,  $F$ ,  $G$  средишта ивица  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  паралелограма  $ABCD$  и нека праве  $BG$  и  $DE$  сеску  $AF$  у тачкама  $M$  и  $N$ . Изразити  $\vec{AF}$ ,  $\vec{AM}$ ,  $\vec{AN}$  у функцији вектора  $\vec{AB}$  и  $\vec{AD}$ . Доказати затим да тачке  $M$  и  $N$  разлажу дуж  $AF$  у односу  $2:2:1$ .
2. Одредити афину трансформацију која представља композицију симетрије у односу на праву  $l : x + 3y - 5 = 0$  и хомотетије са центром  $S(2,1)$  и коефицијентом 3.

3. Одредити једначину цилиндра чије су изводнице паралелне правој  $p: \frac{x-3}{1} = \frac{y}{3} = \frac{z+4}{2}$  и садржи параболу  $y^2 = 2x$ ,  $z = 0$ .

4. Нека су на јединичној сфери дата темена троугла  $A(1, 0, 0)$ ,  $B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ,  $C(0, 0, 1)$ . Одредити ивице и углове сферног троугла  $ABC$ .

### ГЕОМЕТРИЈА 1, септембар 1, 08.09.2019.

1.[7п+3п] Нека је  $ABC$  троугао који није једнакокрак.

а) Нека симетрала спољашњег угла код темена  $A$  сече праву  $BC$  у тачки  $F$ . Доказати да је  $BF:FC = AB:AC$ .

б) Доказати да се у троуглу  $ABC$  симетрала једног унутрашњег угла и два спољашња угла секу у једној тачки.

2.[10п] Изометријском трансформацијом свести криву другог реда  $x^2 - 2xy + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$  на канонски облик. Написати формуле трансформације. Одредити координате центра (ако постоји) и жижа, као и једначине оса и асимптота (ако постоје).

3.[10п] Наћи једначину конуса коме је врх у тачки  $(0, 0, 0)$  и додирује сферу  $(x-5)^2 + y^2 + z^2 = 9$ . Израчунати полупречник круга по коме се конус и сфера додирују.

4.[10п] Израчунати растојање између тачака  $A(45^\circ N, 20^\circ E)$  и  $B(60^\circ S, 25^\circ W)$ . Претпоставити да је Земља сфера полупречника  $R = 6370 \text{ km}$ .

### ГЕОМЕТРИЈА 1, Јун 2, 29.06.2019.

1.[10п] Коришћењем своства скаларног, векторског и мешовитог производа доказати да за произвољне векторе  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d} \in E^3$  важи

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \circ (\vec{c} \times \vec{d}) = \begin{vmatrix} \vec{a} \circ \vec{c} & \vec{a} \circ \vec{d} \\ \vec{b} \circ \vec{c} & \vec{b} \circ \vec{d} \end{vmatrix}.$$

2.[4п+6п] Одредити једначину кружног цилиндра  $C$  полупречника 3 чија је оса права  $o: \frac{x-2}{5} = \frac{y+2}{6} = \frac{z-2}{-2}$ . Одредити једначине равни које садрже тачку  $M(0, 1, 1)$  и по изводници додирују цилиндар  $C$ .

3.[10п] Одредити једначине параболоа које садрже тачку  $A(0, 7)$ , чија је оса  $o: x + y + 1 = 0$ , а пресек директрисе и осе тачка  $D(1, -2)$ .

4.[10п] Одредити (приближно) растојање између тачака на Земљи између градова  $A(30^\circ S, 105^\circ E)$  и  $B(45^\circ S, 45^\circ W)$ . Узети да је Земља сфера полупречника  $R = 6370 \text{ km}$ .

### ГЕОМЕТРИЈА 1, Јун 1, 19.06.2019.

1.[4п+6п] За дате неколинеарне тачке  $A, B, C$  одређене су тачке  $P, Q, R$  тако да је  $\vec{AP} = 2\vec{PB}$ ,  $\vec{BQ} = 2\vec{QC}$  и  $\vec{AC} = 3\vec{CR}$ .

а) Доказати да су  $P, Q$  и  $R$  колинеарне.

б) Одредити у ком односу тачка  $Q$  дели дуж  $PR$ .

2.[10п] Одредити једначину праве која је паралелна равни  $2x - y - 3z + 2019 = 0$ , садржи тачку  $(1, 1, 1)$  и сече праву  $\frac{x-2}{2} = \frac{y}{0} = \frac{z-2}{-3}$ .

3.[10п] Одредити једначину кружног конуса коме је права  $\frac{x-1}{0} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-2019}{2019}$  оса и коме је раван  $\pi: x - z + 2 = 0$  тангентна раван. Свести једначину добијене површи на канонски облик изометријском трансформацијом и написати формуле трансформације.

4.[10п] Тачке  $A(1, 0, 0)$ ,  $B\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$  и  $C(0, 1, 0)$  леже на јединичној сфери  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ . Одредити слику сфере и троугла  $ABC$  при хомотетији са центром у координатном почетку и коефицијентом  $-3$ . Одредити (сферне) углове, дужине страница и површину слике сферног троугла  $ABC$ .

## Рокови школске 2017/2018 године

### ГЕОМЕТРИЈА 1, Септембар 2, 20.09.2018.

1.[8п] Нека је  $OA'B'$  троугао добијен ротацијом троугла  $OAB$  око темена  $O$  за прав угао. Доказати да је тежишна дуж из темена  $O$  троугла  $OA'B'$  нормална на праву  $AB'$ .

2.[8п] Одредити заједничку нормалу правих  $p: x + 3z = 0, y = 0$  и  $q: x - z + 4 = 0, y + 2z - 16 = 0$ .

3.[8п] Ако су  $AC$  и  $BD$  било који конјуговани дијаметри једне елипсе, доказати да површина четвороугла  $ABCD$  не зависи од избора дијаметара.

4.[8п] Одредити геометријско место тачака које су једнако удаљене од тачке  $(2, 2, 0)$  и равни  $x + y = 0$ . Одредити тип површи и скицирати је. Без коришћења сопствених вредности и сопствених вектора, одредити формуле ротације око једне од координатних оса, као и транслације којима се дата површ може поставити у један од канонских положаја.

5.[8п] На јединичној сфери дате су тачке  $A(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$  и  $B(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ . Одредити све тачке  $C$  на сфери тако да сферни троугао  $ABC$  буде једнакостраничан. Колике су странице, углови и површина тог сферног троугла?

- 1.[8п] Нека је  $ABCD$  паралелограм и нека су  $E$  и  $F$  редом срединна страница  $BC$  и  $CD$ . Одредити у ком односу дијагонала  $AC$  и дуж  $AE$  деле дуж  $BF$ .
- 2.[8п] Одредити једначине равни које садрже праву  $p: x = y, z = 0$  и с равни  $Oxy$  граде угао  $\frac{\pi}{4}$ .
- 3.[8п] Одредити формуле пресликавања које је композиција хомотетије са коефицијентом 3 у односу на тачку  $S_1(1, 2)$  и хомотетије са коефицијентом  $\frac{1}{3}$  у односу на тачку  $S_2(-2, -1)$ . Наћи слику круга  $k: x^2 + y^2 = 1$  при овом пресликавању. Одредити које је пресликавање добијено, да ли је директно и да ли чува површине.
- 4.[8п] Изометријском трансформацијом свести површ другог реда  $P: x^2 + y^2 - 2z^2 + 4xz + 5 = 0$  на канонски облик, написати формуле трансформације и одредити тип површи.
- 5.[8п] На сфери полупречника  $R = 2$  израчунати површину сферног троугла  $ABC$  чије су странице  $\widehat{AB} = \pi$ ,  $\widehat{AC} = \pi$ ,  $\widehat{BC} = \frac{2\pi}{3}$ .

**ГЕОМЕТРИЈА 1, Јун 2, 28.06.2018.**

- 1.[8п] Дат је паралелограм  $ABCD$  чија је површина једнака  $P$ . Уколико су  $M$  и  $N$  тачке такве да важи  $\frac{\overrightarrow{BM}}{\overrightarrow{MD}} = \frac{1}{2}$  и  $\frac{\overrightarrow{AN}}{\overrightarrow{ND}} = -\frac{2}{1}$ , израчунати (у функцији од  $P$ ) површину троугла  $AMN$ .
- 2.[8п] Одредити једначину равни која је ортогонална на пресек равни  $\alpha: x + 2y = 3$  и  $\beta: -2x + z = 1$ , а додирује сферу  $x^2 + y^2 + z^2 = 21$ .
- 3.[6п] Одредити формуле хомотетије са коефицијентом  $-3$  у односу на тачку  $S(1, -2)$ , као и слику криве  $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0$ .
- 4.[8п] Одредити једначину конуса са врхом у тачки  $V(0, 0, -1)$  описаног око површи  $\sigma: x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z + 10 = 0$ .
- 5.[10п] Доказати да на јединој сфери не постоји сферни троугао који има два угла  $\frac{\pi}{4}$  и  $\frac{3\pi}{4}$ , а чија је површина једнака  $\frac{3\pi}{4}$ .

**ГЕОМЕТРИЈА 1, Јун 1, 19.06.2018.**

- 1.[3п+5п] Нека су  $P$ ,  $Q$  и  $R$  додирне тачке круга уписаног у троугао  $ABC$  редом са страницама  $BC$ ,  $CA$  и  $AB$ .
- а) Доказати да се праве  $AP$ ,  $BQ$  и  $CR$  секу у једној тачки  $M$ .
- б) Ако је  $AB = 5$ ,  $BC = 4$  и  $CA = 3$  одредити координате вектора  $\overrightarrow{CM}$  у бази  $(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA})$ .
- 2.[8п] Одредити једначину праве  $l$  која садржи тачку  $L(0, -1, -4)$  и сече праву  $p: x + y + z - 3 = 0, 2y - z - 14 = 0$  под правим углом.
- 3.[8п] Крива другог реда садржи координатни почетак, центар јој је тачка  $C(-1, 1)$ , а директриса права  $d: x - y + 1 = 0$ . Одредити једначину те криве.
- 4.[8п] Одредити једначину уније свих правих које су ортогоналне на раван  $\alpha: x + y + z = 0$  и које додирују сферу  $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 4z = 0$ . Одредити канонски облик површи без рачуна. Која је то површ из класификације површи другог реда?
- 5.[8п] Тачке  $A(0, 0, -1)$ ,  $B(\frac{\sqrt{6}}{4}, \frac{\sqrt{6}}{4}, \frac{1}{2})$  и  $C(0, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$  припадају сфери. Одредити обим сферног троугла  $ABC$ .

## Рокови школске 2016/2017 године

Геометрија 1  
септембар 2017.

1. [8] Одредити полупречник уписаног круга троугла  $\triangle ABC$  чија су темена  $A(5, -3)$ ,  $B(1, -3)$ ,  $C(10, 9)$ .
2. [8] Одредити једначину праве која садржи тачку  $A(3, -1, 2)$ , паралелна је равни  $\alpha: x - 6y + z - 10 = 0$  и сече праву  $p: \frac{x}{0} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-5}{2}$ .
3. [8] Свести криву  $16x^2 - 24xy + 9y^2 - 20x - 110y + 225 = 0$  на канонски облик изометријском трансформацијом. Написати једначине трансформације и одредити координате жиже и једначину директрисе полазне криве. Скицати полазну криву и координатне системе.
4. (а) [4] Одредити слику сфере  $\sigma: (x-2)^2 + y^2 + (z-3)^2 = 4$  при рефлексији у односу на раван  $\pi: x = y$ . Скицати сферу и њену слику.
- (б) [4] Прецизно описати пројекције пресека сфере  $\sigma$  и равни  $\pi$  на координатне равни.
5. [8] Одредити једначину конуса чији је врх  $V(1, 1, 1)$  и који садржи криву  $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1, z = 0$ .

Време за рад је 135 минута.

Геометрија 1  
септембар 1 2017.

1. [8] Нека су  $X_1$  и  $X_2$  тачке ивица  $AB$  и  $AD$ , а  $Y_1$  и  $Y_2$  тачке ивице  $CD$  паралелограма  $ABCD$ , такве да је  $AX_1 : X_1B = 4 : 1$ ,  $AX_2 : X_2D = 3 : 2$  и  $CY_1 : Y_1Y_2 : Y_2D = 2 : 1 : 2$ . Нека су даље,  $Z_1$  и  $Z_2$  тачке на дужима  $X_1Y_1$  и  $X_2Y_2$ , такве да је  $X_1Z_1 : Z_1Y_1 = 1 : 4$  и  $X_2Z_2 : Z_2Y_2 = 1 : 1$ . Изразити вектор  $\overrightarrow{Z_1Z_2}$  као линеарну комбинацију вектора  $\overrightarrow{AB}$  и  $\overrightarrow{BC}$ .
2. [8] Одредити једначину равни у простору која садржи тачку  $A(4, 3, 9)$ , управна је на равни  $\alpha : 2x - 3y + z - 2 = 0$  и паралелна је правој  $p : \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z}{0}$ .
3. [8] Наћи једначину елипсе чији је центар тачка  $O(2, 2)$ , једна жижа тачка  $F_1(5, 3)$  и садржи тачку  $A(11, 5)$ .
4. (а) [6] Одредити формуле бар једног афиног пресликавања којим се сфера  $\sigma : x^2 + y^2 + z^2 = 1$  пресликава на елипсоид  $E : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} + \frac{z^2}{9} = 1$ .  
(б) [2] Израчунати запремину елипсоида  $E$ .
5. [8] Нека је на јединичној сфери дат једнакостранични сферни троугао  $ABC$  стране  $\arccos(-\frac{1}{3})$ . Одредити површину тог троугла.

Време за рад је  $x$  минута.

Геометрија 1  
јун 2 2017.

1. [8] Одредити запремину правилног тетраедра ивице 3, као и растојање између мимоилазних ивица.
2. [6] Одредити једначину равни која садржи праву  $p : \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z+4}{1}$  и нормална је на равни  $\alpha : 2x + y - z + 14 = 0$ .
3. [9] Одредити афино пресликавање  $f$  које слика квадрат  $ABCD$  у квадрат  $A'B'C'D'$ , ако је  $A(-1, -1)$ ,  $B(1, -1)$ ,  $C(1, 1)$ ,  $A'(6, 2)$ ,  $B'(8, 4)$ ,  $C'(6, 6)$ . Наћи једначину слике хиперболе  $\chi : x^2 - y^2 = 1$  при овом пресликавању. Скицирати оба квадрата, хиперболу  $\chi$  и слику  $f(\chi)$ . Да ли је  $f$  изометрија?
4. [9] Свести површ  $x^2 - yz + 1 = 0$  на канонски облик изометријском трансформацијом и написати формуле трансформације. Која је то површ из класификације? Скицирати.
5. [8] На јединичној сфери, дате су тачке  $A(0, 0, 1)$  и  $B(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2})$ . Одредити неку тачку  $C$  на сфери тако да троугао  $ABC$  буде једнакокраки са основицом  $BC$ , и сферним углом  $\angle BAC = \frac{\pi}{2}$ . Одредити ивице, углове и површину троугла  $ABC$ .

Геометрија 1  
јун, 20.06.2017.

1. (9 поена) Дат је паралелепипед  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Нека су  $M, N, P, Q, R, S$ , редом, средишта страница  $AB, BC, CC_1, C_1 D_1, A_1 D_1, AA_1$ .  
(а) Доказати да шестоугао  $MNPQRS$  лежи у једној равни.  
(б) Ако је тачка  $T$  тежиште шестоугла  $MNPQRS$ , изразити вектор  $\overrightarrow{AT}$  у функцији од вектора  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}$  и  $\overrightarrow{AA_1}$ .
2. (7 поена) Одредити површину троугла који одређују асимптоте хиперболе  $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$  и тангента хиперболе у тачки  $M(-\frac{5}{2}, \frac{9}{4})$ .
3. (7 поена) Кроз тачку  $L(1, 2, 3)$  одредити праву  $l$  која сече праве  $p : \frac{x-2}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z-6}{2}$  и  $q : \frac{x-8}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-8}{1}$ .
4. (10 поена) Одредити једначину когуса у који су уписане, са разних страна, сфере  $\sigma_1 : x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z + 10 = 0$  и  $\sigma_2 : x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y + 10z + 14 = 0$ .
5. (7 поена) На јединичној сфери одредити растојање између тачака  $A(60^\circ N, 45^\circ E)$  и  $B(30^\circ S, 135^\circ W)$ .

# Рокови школске 2015/2016 године

## Геометрија 1 септембар 2 2016.

1. Око правилног октаедра је описана коцка, тако да су темена октаедра средишта пљосни коцке. У исти октаедар је уписана коцка, тако да су темена коцке средишта пљосни октаедра. Колики је однос запремина ове две коцке?
2. Одредити једначину параболе која је одређена теменом  $T(2, 2)$  и жижом  $F(3, 1)$ . Скицирати слику.
3. а) Одредити једначину конуса чија је оса права  $y = z$ ,  $x = 0$  и изводница  $y$ -оса.  
б) Која крива је пресек датог конуса и равни  $z = 1$ ? Скицирати слику.
4. Одредити формуле рефлексије простора у односу на раван  $\alpha : x + 2y - z + 3 = 0$ . Одредити слику сфере  $x^2 + y^2 + z^2 - 12x - 6z + 29 = 0$  при тој рефлексији.

## Геометрија 1 септембар 1 2016.

1. Уписани круг троугла  $ABC$  додирује странице  $AB$ ,  $BC$ ,  $CA$  редом у тачкама  $P$ ,  $Q$ ,  $R$ . Доказати да се праве  $CP$ ,  $AQ$  и  $BR$  секу у једној тачки.
2. Свести једначину криве  $x^2 + y^2 - xy - 3x - 1 = 0$  на канонски облик изометријском трансформацијом. Одредити формуле трансформације, центар и осе полазне криве. Скицирати криву, центар и осе у полазном координатном систему.
3. Одредити једначину конуса са врхом  $V(1, 0, 4)$ , који додирује сферу  $(x - 4)^2 + y^2 + (z - 3)^2 = 4$ . Ако је извор светлости тачка  $V$ , одредити која је крива контура сенке сфере на раван  $O_{xy}$ . Скицирати конус и контуру сенке.
4. На сфери  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  дате су тачке  $A(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$ ,  $B(0, 1, 0)$ ,  $C(0, 0, -1)$ . Одредити слику сфере и троугла  $ABC$  при хомотетији са центром у координатном почетку и коефицијентом 6. Одредити (сферне) углове, дужине страница и површину слике троугла  $ABC$ .

## Геометрија 1 јун 2 2016.

1. (8п) У Декартовом правоуглом координатном систему дата је тачка  $M(a, b, c)$ , где су  $a, b, c$  позитивни реални бројеви. Означимо са  $A$ ,  $B$ ,  $C$  нормалне пројекције тачке  $M$  редом на координатне равни  $O_{xy}$ ,  $O_{yz}$ ,  $O_{xz}$ . Одредити трансформацију координата између полазног координатног система и координатног система  $M_f$ , где је база  $f = (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC})$ . Да ли ова промена координата чува оријентацију? Одредити координате тежишта троугла  $ABC$  у оба координатна система.
2. (5п) Нека су  $A_1, B_1, C_1$  нормалне пројекције тачке  $M$  редом на координатне осе  $O_x, O_y, O_z$ . Одредити једначине равни одређених тачкама  $A, B, C$  и  $A_1, B_1, C_1$  и доказати да су паралелне. (Тачке  $M, A, B, C$  су дате у претходном задатку.)
3. (10п) Одредити једначину хиперболе која садржи тачке  $A(2, 0)$  и  $B(4, 2)$ , оса симетрије је права  $x - y - 2 = 0$ , а ексцентрицитет је  $e = \sqrt{2}$ . Одредити једначине асимптота, скицирати хиперболу, осе и асимптоте.
4. (8п) Одредити једначину цилиндра који додирује сферу  $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 + (z + 2)^2 = 9$  по кругу, а изводнице су паралелне правој  $p : x = 0, 7x + 3y - 2z = 0$ .
5. (9п) На сфери  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$  дате су тачке  $A(\sqrt{2}, 0, \sqrt{2})$  и  $B(\sqrt{2}, 0, -\sqrt{2})$ . Одредити неку тачку  $C$  са сфере тако да сферни троугао  $ABC$  буде једнакостраничан. Колике су странице, углови и површина тог сферног троугла?

## Геометрија 1 јун 1 2016.

1. (5п) Одредити једначину уписаног круга троугла  $ABC$ , ако је  $A(6, -2)$ ,  $B(6, 4)$ ,  $C(2, 1)$ .
2. (8п) Дате су мимоилазне праве  $p : x + 2y + 4z = 0, z = 0$  и  $q = \frac{x-5}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z+11}{1}$ . Одредити заједничку нормалу и растојање између правих  $p$  и  $q$ . Одредити раван која садржи праву  $q$  и паралелна је правој  $p$ .

- (9п) Одредити формуле неког афиног пресликавања које круг  $k : (x-3)^2 + (y-5)^2 = 1$  слика у елипсу  $\epsilon : \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ . Шта је слика криве  $y^2 = x$  при том пресликавању (једначина и ексцентрицитет)?
- (9п) Одредити једначину конуса који настаје ротацијом праве  $p : x = 0, y = 3z$  око осе  $O_y$ . Шта је пресек конуса са равни  $z = -2$ ? Одредити нормалну пројекцију пресечне криве на координатне равни. Скицирати.
- (9п) Одредити дужине страница и углове сферног троугла  $ABC$  на јединичној сфери, ако је  $A(0,0,1)$ ,  $B(1,0,0)$ ,  $C(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ .

## Рокови школске 2014/2015 године

### ГЕОМЕТРИЈА 1, Јануар, 19.01.2016.

- Нека је  $ABC$  троугао,  $P$  и  $Q$  такве да је  $3\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{BA}$  и  $2\overrightarrow{BQ} = \overrightarrow{BC}$ . Ако је  $R$  тачка праве  $AC$  таква да се  $AQ$ ,  $CP$  и  $BR$  секу у једној тачки, одредити однос  $\overrightarrow{AR} : \overrightarrow{RC}$ .
- Одредити једначине свих хомотетија које сферу  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  трансформишу на сферу  $(x-3)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2 = 3$ .
- Одредити једначину криве другог реда која садржи тачке  $A(2,4)$ ,  $B(0,2)$ ,  $C(1,5)$  и  $D(1,1)$ , ако тетиве  $AB$  и  $CD$  имају конјуговане правце.
- Одредити једначину цилиндра који у пресеку са равни нормалној на његове изводнице даје криву  $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4z - 20 = 0$ ,  $2x - y + z + 8 = 0$ .

### ГЕОМЕТРИЈА 1, Септембар, 1. 9. 2015.

- Нека је  $ABCDEFV$  права правилна шестострана пирамида са врхом  $V$ . Ако је страница основе дужине  $a$ , а висина двоструко дужа, одредити угао између вектора  $\overrightarrow{AV}$  и  $\overrightarrow{CD}$ . Ако је тачка  $S$  центар основе, а координатни вектори базе  $e$  су  $\overrightarrow{e_1} = \overrightarrow{SC}$ ,  $\overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{SD}$ ,  $\overrightarrow{e_3} = \overrightarrow{SV}$ , одредити координате свих темена пирамиде у координатном систему  $S_e$ .
- Одредити слику сфере  $\sigma : (x+2)^2 + (y-3)^2 + (z-3)^2 = 4$  при симетрији у односу на раван  $\alpha : x - 2y - 2z - 4 = 0$ . Одредити једначину равни  $\beta$  која садржи тачку  $B(0,5,5)$ , центар сфере  $\sigma$  и центар њене слике. Колики је угао између равни  $\alpha$  и  $\beta$ ?
- Доказати да је збир растојања сваке тачке елипсе од жижа пропорционалан растојању директриса те елипсе. Одредити једначину, центар и осе елипсе која има жижу  $F(2,2)$ , одговарајућу директрису  $l : x + y = 0$  и ексцентрицитет  $e = \frac{1}{2}$ . Скицирати.
- Одредити једначину кружног конуса који додирује раван  $\alpha : z = 0$  и коме је оса права  $o : \frac{x}{-3} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1}$ . Шта је пресек равни  $\beta : z = 5$  са овим конусом (име из класификације) и зашто? Скицирати конус, равни  $\alpha$ ,  $\beta$  и пресек.

### ГЕОМЕТРИЈА 1, Јун 2, 2.7.2015.

- (8п) Нека је  $ABCD$  тетраедар и нека је тачка  $T$  тежиште троугла  $BCD$ . Ако су координатни вектори базе  $e$ :  $\overrightarrow{e_1} = \overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{AC}$ ,  $\overrightarrow{e_3} = \overrightarrow{AD}$ , а координатни вектори базе  $f$ :  $\overrightarrow{f_1} = \overrightarrow{TA}$ ,  $\overrightarrow{f_2} = \overrightarrow{TB}$ ,  $\overrightarrow{f_3} = \overrightarrow{TC}$ , одредити везу између координата произвољне тачке  $M$  у координатним системима  $Ae$  и  $Tf$ . Одредити координате темена тетраедра у систему  $Tf$ .
- (8п) Одредити једначине кругова који додирују праве  $p : x - 2y - 1 = 0$  и  $q : 2x - y - 5 = 0$ , а центри су им на правој  $r : x = 4$ . Одредити слике ових кругова при хомотетији којој је центар пресек правих  $p$  и  $q$ , а коефицијент  $-3$ .
- (8п) Одредити формуле централне симетрије у односу на тачку  $(-1,0,6)$  и слику праве  $p : \frac{x+1}{-3} = \frac{y-1}{4} = \frac{z+3}{16}$  при тој симетрији.
- (8п) Одредити једначину криве другог реда која има жиже  $F_1(3,3)$  и  $F_2(-1,-1)$  и садржи тачку  $A(0,0)$ . Скицирати криву и одредити јој центар и осе симетрије.
- (8п) Површ  $\Pi$  настаје ротацијом праве  $p : \frac{x-2}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-3}{2}$  око праве  $o : \frac{x-3}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-3}{0}$ . Одредити једначину површи  $\Pi$ , скицирати и нацртати која је то површ. Која површ се добија ротацијом праве  $q : \frac{x-2}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z-3}{0}$  око праве  $o$  (скица, име и једначина)?

- 1.[9п] Дат је паралелограм  $ABCD$  чија је површина једнака  $P$ . Уколико су  $M$  и  $N$  тачке такве да важи  $\frac{\overrightarrow{AM}}{\overrightarrow{MC}} = \frac{1}{3}$  и  $\frac{\overrightarrow{DN}}{\overrightarrow{NC}} = -\frac{2}{1}$ , израчунати (у функцији од  $P$ ) површину троугла  $AMN$ .
- 2.[7п] Одредити ортогоналну пројекцију праве  $l: \frac{x+1}{2} = \frac{y-4}{-1} = \frac{z-4}{0}$  на раван  $\alpha: -2x + 3y + z - 4 = 0$ .
- 3.[6п] Одредити растојање између паралелних равни  $\alpha: -2x + y + 5z + 27 = 0$  и  $\beta: -2x + y + 5z - 3 = 0$ .
- 4.[9п] Одредити једначину параболе која садржи тачку  $A(0, \sqrt{2})$ , чија је директриса права  $d: x + y - 3\sqrt{2} = 0$ , а оса симетрије права  $o: -x + y + \sqrt{2} = 0$ .
- 5.[9п] Одредити једначину цилиндра који садржи круг  $k: x^2 + y^2 + z^2 = 4, x + y + z = 2$ , а генератриса му је паралелна правој  $p: \frac{x-2015}{0} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{0}$ .

## Рокови школске 2013/2014 године

### Геометрија 1 јануар 2015.

- Нека је тачка  $E$  средиште стране  $AB$  паралелепипеда  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Ако су координатни вектори базе  $e: \vec{e}_1 = \overrightarrow{AB}, \vec{e}_2 = \overrightarrow{AD}, \vec{e}_3 = \overrightarrow{AA_1}$ , а координатни вектори базе  $f: \vec{f}_1 = \overrightarrow{CE}, \vec{f}_2 = \overrightarrow{CB}, \vec{f}_3 = \overrightarrow{CD_1}$ , одредити везу између координата произвољне тачке  $M$  у координатним системима  $A_e$  и  $C_f$ . Одредити координате свих темена паралелепипеда у систему  $C_f$ .
- Одредити једначине равни које садрже праву  $p: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{0} = \frac{z}{1}$  и додирују сферу  $S: (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+3)^2 = 2$ .
- Свести једначину криве  $4x^2 - 4xy + y^2 + x + 12y + 6 = 0$  на канонски облик изометријском трансформацијом и написати формуле трансформације. Која је то крива и колики је њен ексцентрицитет?
- Шта у простору представља једначина  $\Pi: x^2 + y^2 = 4$ ? Шта је пресек  $\Pi$  са равни  $\alpha: x + y + z = 1$ ? Скицирати координатне осе,  $\Pi$ , раван  $\alpha$  и пресек! Одредити једначину сфере уписане у  $\Pi$ , чији центар припада равни  $\alpha$ .

### ГЕОМЕТРИЈА 1, Септембар 2, 14.09.2014.

- [10п] Нека је  $S$  центар круга уписаног у троугао  $ABC$ .
  - Изразити вектор  $\overrightarrow{AS}$  у функцији од вектора  $\overrightarrow{AB}$  и  $\overrightarrow{AC}$  и дужина страница троугла.
  - Доказати да је  $a\overrightarrow{AS} + b\overrightarrow{BS} + c\overrightarrow{CS} = \vec{0}$ , где су  $a, b$  и  $c$  дужине одговарајућих страница троугла  $ABC$ .
- [10п] Одредити ортогоналну пројекцију праве  $l: \frac{x-4}{0} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-4}{-1}$  на раван  $\alpha: x - 2y + 3z - 4 = 0$ .
- [10п] Нека се тангенте параболе у њеним тачкама  $A$  и  $B$  секу у тачки  $P$ . Доказати да тачка  $P$  лежи на симетриали угла  $AFB$ , где је  $F$  жижа дате параболе.
- [10п] Одредити једначину неког кружног конуса који садржи све три координатне осе.

### Геометрија 1 јун 2, 2014.

- Нека је  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  коцка ивице  $a$ . Одредити угао и растојање између мимоилазних правих  $AC$  и  $BD_1$ .
- Нека је пресликавање  $g$  симетрија у односу на  $x$  осу, а  $h$  хомотетија са центром  $C(0, -1, 2)$  и коефицијентом 3. Наћи формуле трансформације простора  $f = g \circ h$ , а затим одредити слику површи  $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 2z + 2 = 0$  при трансформацији  $f$ .

3. Свести једначину криве  $xy + x + y = 0$  на канонски облик изометријском трансформацијом и написати једначине те трансформације. Скицирати полазну криву и одредити јој центар и осе.
4. Одредити једначину коноидне површи чија су оса и директриса праве  $o : x = z, y = 0$  и  $d : x = \frac{y+2}{-2} = z - 2$ , а директорна раван  $\alpha : x + z = 0$ . Која је то површ (име из класификације)?

### ГЕОМЕТРИЈА 1, Јун 1, 17.06.2014.

1. [8п] Дат је паралелограм  $ABCD$ . Нека су тачке  $E, F$  и  $G$  такве да важи  $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{FD}$ ,  $\overrightarrow{DE} = 3\overrightarrow{EC}$  и  $\overrightarrow{BG} = 2\overrightarrow{GD}$ . Ако са  $X$  означимо пресек  $GE$  и  $CB$ , а са  $Y$  пресек  $GF$  и  $AB$ , доказати да су праве  $AC$ ,  $EF$  и  $XY$  конкурентне.
2. [8п] Одредити једначине свих равни које су нормалне на праву  $p : x + 2y = 3, -2x + z = 1$ , а удаљене су од координатног почетка за  $\sqrt{21}$ .
3. [8п] Дате су елипса  $3x^2 - 2xy + y^2 + 6x - 10 = 0$  и хипербола  $3x^2 - 2xy - y^2 + 6y - 10 = 0$ . Одредити једначине правих  $d_1, d_2, d_3$  и  $d_4$  тако да важи:  $d_1$  и  $d_2$  су међусобно конјуговани дијаметри дате елипсе,  $d_3$  и  $d_4$  су међусобно конјуговани дијаметри дате хиперболе,  $d_1$  је паралелно са  $d_3$ , а  $d_2$  паралелно са  $d_4$ .
4. [8п] Одредити једначине свих параболо са директрисом  $x - y + 1 = 0$  које садрже тачке  $P(0, -9)$  и  $Q(0, -1)$ .
5. [8п] Одредити једначину кружног конуса чија је оса права  $o : \frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z+1}{-1}$ , чији врх припада равни  $x = 0$  и који садржи тачку  $M(1, 1, -\frac{1}{2})$ .

## Рокови школске 2012/2013 године

### ГЕОМЕТРИЈА 1, Јануар, 21.01.2014.

1. [10п] Нека је  $ABC$  троугао,  $P$  и  $Q$  такве да је  $3\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB}$  и  $2\overrightarrow{BQ} = \overrightarrow{BC}$ . Ако је  $R$  тачка праве  $AC$  таква да се  $AQ, CP$  и  $BR$  секу у једној тачки, одредити однос  $\overrightarrow{AC} : \overrightarrow{AR}$ .
2. [10п] Дата је раван  $\alpha : x + y = 0$  и праве  $p : \frac{x}{3} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{-2}$  и  $q : y = z + 2, x = 1$ . Одредити праву паралелну датој равни, која сече дате праве у тачкама између којих је растојање једнако три.
3. [10п] Одредити једначину криве другог реда која садржи координатни почетак и тачке  $P(5, 0)$  и  $Q(0, 1)$  и чији је центар тачка  $S(3, -1)$ .
4. [10п] Дате су праве  $p : \frac{x-2}{1} = \frac{1-y}{1} = \frac{z}{-1}$  и  $q : x - 2y + z = 0, x - 3y + z + 2 = 0$ . Написати једначину кружног цилиндра са осом  $p$  који додирује праву  $q$ .

### Писмени испит из Геометрије 1 септембар 2 15.09.2013.

1. Нека су  $P, Q$  и  $R$  додирне тачке круга уписаног у троугао  $ABC$  редом на страницама  $BC, CA$  и  $AB$ . Доказати да се праве  $AP, BQ$  и  $CR$  секу у једној тачки. ( 8 поена )
2. Кроз тачку  $L(-3, 1, 2)$  поставити праву која је паралелна равни  $\alpha : 4x - y + 2z - 5 = 0$  и која сече праву  $p : \frac{x+3}{0} = \frac{2-y}{-2} = \frac{1+z}{-1}$ , а затим одредити једначину њој симетричне праве у односу на раван  $\alpha$ . ( 8 поена )
3. Наћи једначину конусног пресека који садржи тачку  $(1, 1)$ , ако су му два пара конјугованих дијаметара  $2x - 3y = 0, x + 2y = 0$  и  $x - y = 0, 3x - 5y = 0$ . ( 12 поена )
4. Одредити једначину кружног цилиндра ако су познате три изводнице  $p : x = y = z, q : x = y - 1 = z, r : x - 1 = y = z$ . ( 12 поена )

### ГЕОМЕТРИЈА 1, Јун 2, 23.06.2013.

1. [8п] Нека је тачка  $P$  средиште тежишне дужи  $CC_1$  троугла  $ABC$ . Ако је тачка  $Q$  пресек правих  $AP$  и  $BC$ , одредити односе  $BQ : QC$  и  $AP : PQ$ .
2. [6п] Одредити вредност параметра  $\lambda$  за коју се праве  $p : \frac{x-\lambda}{2} = \frac{\lambda-y}{-1} = \frac{z-1}{2}$  и  $q : y = 2, x - z - 1 = 0$  налазе истој равни.
3. [8п] Наћи једначину праве  $l$  која садржи тачку  $T(3, -3, 1)$  и паралелна је равнима  $\alpha : x - 2y + z + 2 = 0, \beta : 3x - y - 2z + 2013 = 0$ . Одредити потом праву  $l'$  симетричну правој  $l$  у односу на раван  $\alpha$ .
4. [9п] Нека су тачке  $A(-4, -1), B(5, 0)$  и  $C(-3, 0)$  темена троугла  $ABC$ . Одредити једначину криве другог реда описане око троугла  $ABC$ , ако је познато да је центар тражене криве тачка  $O(1, -1)$ .
5. [9п] Одредити једначину бар једног правог кружног конуса описаног око сфера  $\sigma_1 : x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y + 6z + 10 = 0$  и  $\sigma_2 : x^2 + y^2 + z^2 - 10x - 8y - 6z + 49 = 0$ .

### ГЕОМЕТРИЈА 1, Јун 1, 04.06.2013.

1. [9п] Нека је  $ABCDV$  права пирамида чија је основа  $ABCD$  ромб ивице 2 са углом  $\angle BAD = \frac{\pi}{3}$ . Колика је висина пирамиде уколико знамо да је  $\angle AVB = \arccos\left(\sqrt{\frac{3}{8}}\right)$ ?
2. [4п] Одредити једначину равни која сече праву  $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{0}$ , нормална је на праву  $\frac{x-7}{2} = \frac{y-6}{3} = \frac{z-5}{1}$  и садржи тачку  $(2, 1, 4)$ .
3. [9п] Одредити једначине свих равни које садрже праву  $\frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{5} = \frac{z+2}{4}$  и подједнако су удаљене од тачака  $(1, 2, 5)$  и  $(3, 0, -1)$ .
4. [9п] Одредити једначине свих парабола које имају директрису  $x + y + 1 = 0$  и садрже тачке  $(0, 9)$  и  $(0, 1)$ .
5. [9п] Одредити једначину правог кружног цилиндра описаног око сфере  $x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y + 6z - 11 = 0$  ако тачка  $(1, 0, -2)$  припада његовој оси.

## Рокови школске 2011/2012 године

### Писмени испит из Геометрије 1

јануарски рок

21.01.2013.

1. Нека је дат квадрат  $ABCD$  и тачке  $E$  и  $F$  тако да је октаедар  $ABCDEF$  правилан и два афина координатна система. Координатни систем  $Axyz$  са почетком у тачки  $A$  има базне векторе  $(\vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AF})$  и координатни систем  $Tx'y'z'$  са почетком у тачки  $T$  која је тежиште троугла  $ABF$  и базним векторима  $(\vec{TA}, \vec{TE}, \vec{TC})$ . Одредити координате темена октаедра у датим системима.
2. Нека су дате равни  $3x - 4y - 5z + 11 = 0$  и  $x - z + 5 = 0$ . Одредити једначине равни које су ортогоналне на пресек ових двеју равни и додирују сферу  $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y - 6z + 5 = 0$ .
3. Одредити једначину конуса чији је врх тачка  $S(0, 0, 1)$ , а директриса елипса у равни  $Oxy$  дата на следећи начин: велика полуоса дужине 2 паралелна је са осом  $Ox$ , нумерички ексцентрицитет елипсе је  $\frac{1}{2}$ , елипса се налази у другом квадранту и додирује координатне осе.
4. Одредити растојање тачака  $A$  и  $B$  на Земљи (полупречника  $R$ ) чије су координате  $A : 60^\circ$  северне ширине,  $45^\circ$  источне дужине и  $B : 30^\circ$  јужне ширине,  $75^\circ$  западне дужине.

### ГЕОМЕТРИЈА 1, Октобарски рок 07.10.2012.

1. [10п] Са разних страна квадрата  $ABCD$  странице 2, конструисане су две праве пирамиде  $ABCDE$  и  $ABCDF$  тако да једна има дупло већу запремину од друге. Ако праве  $AE$  и  $BF$  заклањају угао од  $\arccos \frac{2}{\sqrt{10}}$ , одредити висине тих пирамида.
2. [10п] Одредити једначину криве другог реда која садржи тачке  $A(-2, -1)$  и  $B(0, -2)$  и којој су праве  $x + y + 1 = 0$  и  $x - y + 1 = 0$  осе симетрије.
3. [10п] Одредити све равни које садрже тачку  $(1, 2, 3)$  и додирују сфере  $x^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{2}$  и  $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = \frac{1}{2}$ .
4. [10п] Одредити једначину цилиндра који садржи круг полупречника  $\sqrt{2}$  у равни  $x + y + z = 3$  са центром у  $(1, 1, 1)$ , ако он садржи и пресек равни  $x + y - z + 1 = 0$  и  $5x - 4y + z + 2 = 0$ .

### ГЕОМЕТРИЈА 1, Септембарски рок 15.09.2012.

1. [10п] Дата је коцка  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Афини координатни систем  $Axyz$  има базне векторе  $(\vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AA}_1)$  и почетак у тачки  $A$ . Афини координатни систем  $Tx'y'z'$  има базне векторе  $(\vec{TD}_1, \vec{TC}_1, \vec{TA}_1)$  и почетак у тачки  $T$  која је тежиште тетраедра  $B_1 CAD_1$ . Одредити координате темена коцке у датим системима.
2. [10п] Одредити једначину праве која сече праве  $p : \frac{x-2}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z-6}{2}$  и  $q : \frac{x-8}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-8}{1}$  и садржи тачку  $A(1, 2, 3)$ .
3. [10п] Одредити једначину параболе која има директрису  $d : x + y + 1 = 0$ , ако она садржи тачке  $A(0, 1)$  и  $B(0, 9)$ , а не садржи тачку  $C(3, 0)$ .
4. [10п] Ако су сфере  $\sigma_1 : x^2 + y^2 + z^2 - 2y - 2z + 1 = 0$  и  $\sigma_2 : x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z + 13 = 0$  уписане у прави кружни конус, одредити му једначину.

### ГЕОМЕТРИЈА 1, Јулски рок 03.07.2012.

1. [7п] Дат је паралелограм  $ABCD$ . Ако је  $E$  средиште дужи  $CD$ , а  $F$  пресек правих  $AE$  и  $BD$ , одредити однос  $\overrightarrow{AE} : \overrightarrow{AF}$ .
2. [11п] Одредити једначину равни која садржи праву  $p : \frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{5} = \frac{z+2}{4}$ , сече праву  $x = y = 4z$ , а подједнако је удаљена од тачака  $A(1, 2, 5)$  и  $B(3, 0, -1)$ .
3. [11п] Изометријском трансформацијом свести једначину криве другог реда  $\Gamma : 2x^2 - xy + 2y^2 - 6 = 0$  на канонски облик, а затим одредити координате жижа криве  $\Gamma$ .
4. [11п] Ако су сфере  $\sigma_1 : x^2 + y^2 + z^2 - 2y - 2z + 1 = 0$  и  $\sigma_2 : x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z + 13 = 0$  уписане у прави кружни цилиндар, одредити му једначину.

### ГЕОМЕТРИЈА 1, Јунски рок 12.06.2012.

1. [7п] Дата је коцка  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Одредити угао између правих  $D_1 A$  и  $C_1 A$ .
2. [9п] Одредити једначину равни која садржи пресечну праву равни  $\alpha : 4x - 5y + 7z - 21 = 0$  и  $\beta : y - z + 3 = 0$  и садржи средиште дужи коју чини одсечак праве  $l : \frac{x-3}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-3}{0}$  између равни  $\alpha$  и  $\beta$ .
3. [9п] Крива другог реда  $\Gamma$  има директрисе дате једначинама  $d_1 : x - y - 3 = 0$  и  $d_2 : x - y - 7 = 0$ , а једна жижа јој је тачка  $F(2, 1)$ . Одредити центар криве  $\Gamma$ , а затим и једначину саме криве.
4. [9п] Одредити једначину кружног конуса са врхом  $V(0, 0, 0)$ , који садржи тачку  $A(3, -4, 1)$ , ако му је оса паралелна правој  $p : \frac{x-2010}{11} = \frac{y-2011}{2} = \frac{z-2012}{1}$ .
5. [6п] Одредити једначину равни која додирује површ  $\sigma : x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 6y + 4z + 13 = 0$  у тачки  $S(0, 3, -2)$ .