

Борђе Коцић

АНАЛИТИЧКА ГЕОМЕТРИЈА (ГЕОМЕТРИЈА 1)

— вежбе —



Универзитет у Београду
Математички факултет

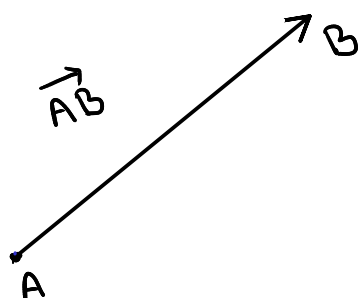
← Аналитичка геометрија (Геометрија 1) →

* 70 п писмени

* 30 п усмени

1 Линеарне операције са векторима

Деф Вектор је „усмерена дуж“ која је јединствено одређена правцем, смером и интензитетом (дужином).



* ПРВАЦ $\vec{AB}$ - ПРВАЦ ПРАВЕ АВ

* СМЕР $\vec{AB}$ - СМЕР ПОЛУПРАВЕ АВ

* ДУЖИНА $\vec{AB}$ је $\|\vec{AB}\|$ је РАСТОЈАЊЕ ИЗМЕЂУ ТАЧАКА А и В.

* НУЛА ВЕКТОР је ВЕКТОР $\vec{AA} = \vec{0} = \vec{BB}$

* СУПРОТАН ВЕКТОР ВЕКТОРА $\vec{AB}$ је $\vec{BA} = -\vec{AB}$

* ВЕКТОРИ ЧИЈИ СУ ПРАВЦИ ПАРАЛЕЛНИ ИСТОЈ ПРАВОЈ ЗОВУ СЕ КОЛИНЕАРНИ.

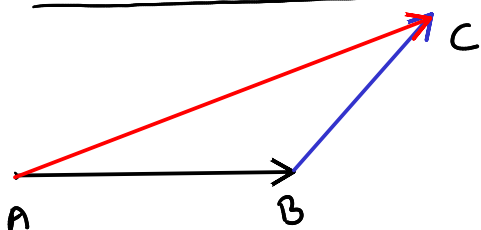
* ВЕКТОРИ ЧИЈИ СУ ПРАВЦИ ПАРАЛЕЛНИ ИСТОЈ РАВНИ ЗОВУ СЕ КОПЛАНАРНИ.

Линеарне операције са векторима

* САБИРАЊЕ ВЕКТОРА

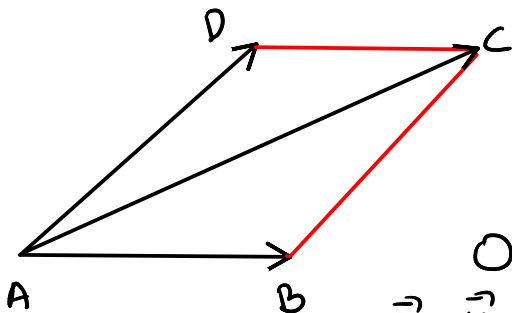
* ПРАВИЛО НАДОВЕЗИВАЊА

$$\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$$



* ПРАВИЛО ПАРАЛЕЛОГРАМА

$$\vec{AB} + \vec{AD} = \vec{AC}$$



ОЗНАКА : V - СКУП ВЕКТОРА

$\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$

Особине :

1) $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$

3) $\vec{u} + (-\vec{u}) = (-\vec{u}) + \vec{u} = \vec{0}$

2) $\vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$

4) $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$

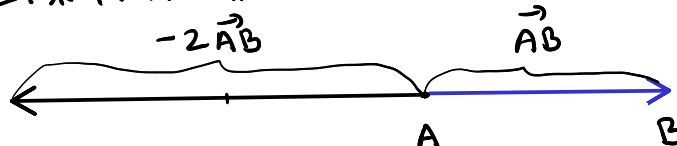
* МНОЖЕЊЕ СКАЛАРОМ

Производ $\vec{u} \in V$ и скалара $\lambda \in \mathbb{R}$ је вектор т.д.

1) ПРАВАЦ $\lambda \vec{u}$ је исти као ПРАВАЦ $\vec{u}$

2) СМЕР $\lambda \vec{u}$: $\lambda > 0$ исти смер као $\vec{u}$
 $\lambda < 0$ супротан смер

3) ДУЖИНА $\|\lambda \vec{u}\| = |\lambda| \cdot \|\vec{u}\|$



Особине : $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$$5) \lambda \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \lambda \vec{u} + \lambda \vec{v} \quad 7) \lambda (\mu \vec{u}) = (\lambda \mu) \vec{u}$$

$$6) (\lambda + \mu) \vec{u} = \lambda \vec{u} + \mu \vec{u} \quad 8) 1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$$

Def $(V, +, \cdot)$ је векторски простор ако важе особине 1) - 8).

$$* \vec{u} - \vec{v} := \vec{u} + (-\vec{v})$$

Def Вектор $\vec{u}$ је линеарна комбинација вектора $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k$ ако постоје скалари $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ т.д. $\vec{u} = \lambda_1 \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2 + \dots + \lambda_k \vec{u}_k$.

Def Вектори $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k$ линеарно независни ако

$$\lambda_1 \vec{u}_1 + \dots + \lambda_k \vec{u}_k = \vec{0} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0.$$

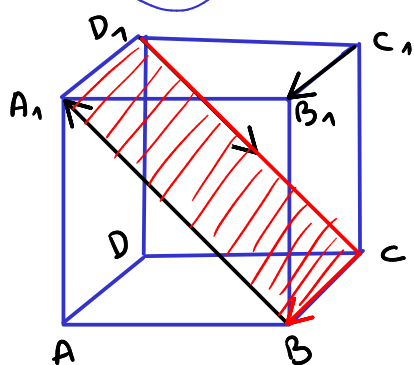
т.д. ниједан од $\vec{u}_i$ не може да се представи као линеарна комбинација осталих.

* 2 вектора су колинеарни $\Leftrightarrow$ лин. зависни

* 3 вектора су копланарни $\Leftrightarrow$ лин. зависни

1.1. Дана је коцка $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Да ли су вектори а) $\vec{BA_1}, \vec{C_1 B_1}, \frac{1}{2} \vec{D_1 C}$; б) $\vec{DD_1}, \vec{BC_1}, \vec{A_1 D}$; в) $\vec{C_1 B_1}, \vec{AB_1}, \vec{CD_1}$, компланарни.

а) $\vec{BA_1}, \vec{C_1 B_1}, \frac{1}{2} \vec{D_1 C}$



1) $\vec{C_1 B_1} = \vec{C B} \Rightarrow$ сва три вектора су паралелна равни $BC D_1 A_1$
 $\Rightarrow$ јесу копланарни

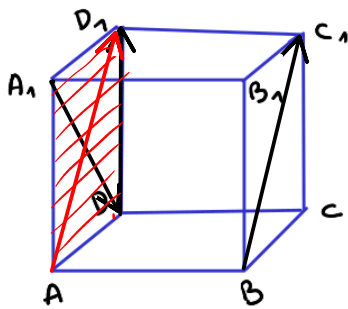
2) $\vec{BA_1} = \vec{CD_1} \cdot \frac{1}{2}$

$$\frac{1}{2} \vec{BA_1} - \frac{1}{2} \vec{CD_1} = \vec{0}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right) \vec{BA_1} + 0 \cdot \vec{C_1 B_1} + \left(-\frac{1}{2}\right) \vec{D_1 C} = \vec{0} \Rightarrow \text{лин. зав.}$$

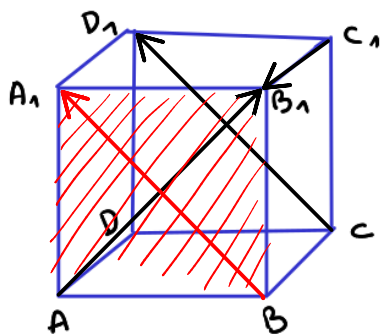
копланарни
 $\Uparrow$

б) $\vec{D_1A_1}$, $\vec{B_1C_1}$, $\vec{A_1D_1}$



$\vec{B_1C_1} = \vec{A_1D_1} \Rightarrow$ СВА ТРИ ВЕКТОРА
СУ ПАРАЛЕЛНА РАВНИ AA_1D_1
 $\Rightarrow$ **КОПЛАНАРНИ**

в) $\vec{C_1B_1}$, $\vec{AB_1}$, $\vec{CD_1}$



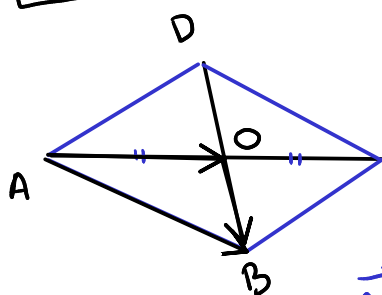
$$\vec{CD_1} = \vec{BA_1}$$

$\vec{AB_1}$ и $\vec{CD_1}$ су ПАРАЛЕЛНА ABA_1B_1
 $\vec{C_1B_1}$ је ОРТОГОНАЛАН НА ABA_1B_1

$\Rightarrow$ **НИСУ КОПЛАНАРНИ**

1.2. Доказати да се дијагонале четвороугла полове ако и само ако је тај четвороугао паралелограм.

$\Rightarrow$ ДИЈАГОНАЛЕ СЕ ПОЛОВЕ $\Rightarrow$ ПАРАЛЕЛОГРАМ



$$O = S(AC), O = S(BD)$$

$\nabla ABCD$ је ПАРАЛЕЛОГРАМ АКО ЈЕ

$$AB \parallel CD \text{ и } AB = CD \Leftrightarrow \vec{AB} = \vec{DC} \quad \nabla$$

$$\vec{AO} = \vec{OC}, \vec{BO} = \vec{OD} \quad \text{и} \quad \vec{OB} = \vec{DO}$$

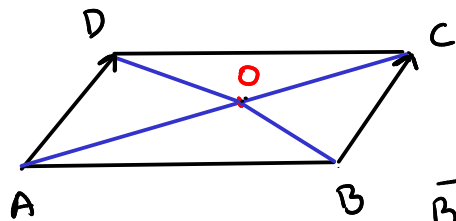
$$\vec{AB} = \vec{AO} + \vec{OB} = \vec{OC} + \vec{DO} \stackrel{4)}{=} \vec{DO} + \vec{OC} = \vec{DC} \Rightarrow ABCD \text{ ПАРАЛЕЛОГ.}$$

$\Leftarrow$ $ABCD$ ПАРАЛЕЛОГРАМ $\Rightarrow$ ДИЈАГОНАЛЕ СЕ ПОЛОВЕ

Нека је $O = S(AC)$.

Доказујемо да је $O = S(BD)$

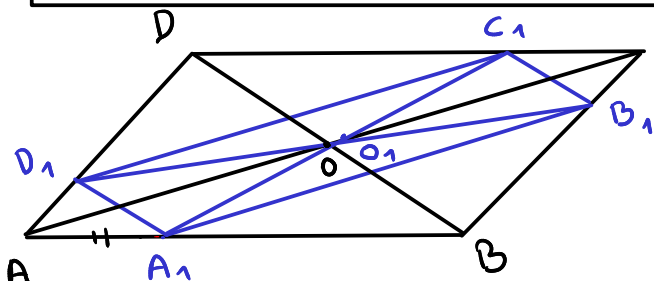
$$\Leftrightarrow \vec{BO} = \vec{OD}$$



$$\vec{BO} = \vec{BC} + \vec{CO} = \vec{AD} + \vec{OA} \stackrel{4)}{=} \vec{OA} + \vec{AD} = \vec{OD}$$

$$\Rightarrow O \in BD \text{ и } O = S(BD).$$

1.3. На страницама AB , BC , CD и AD паралелограма $ABCD$ дате су редом тачке A_1, B_1, C_1, D_1 тако да је $A_1B_1C_1D_1$ паралелограм. Доказати да се праве AC , BD , A_1C_1 , B_1D_1 секу у једној тачки.



$ABCD$ ПАРАЛЕЛОГРАМ

$$\Rightarrow O = S(AC) = S(BD)$$

$A_1B_1C_1D_1$ ПАРАЛЕЛОГРАМ

$$\Rightarrow O_1 = S(A_1C_1) = S(B_1D_1)$$

Покажујемо да је $O \equiv O_1$:

$\Leftrightarrow$ доказ. да је $O = S(A_1 C_1) \Leftrightarrow \overrightarrow{A_1 O} = \overrightarrow{O C_1}$:

A, A_1, B коллн. $\Rightarrow \overrightarrow{A A_1}$ и $\overrightarrow{A B}$ коллн. $\Rightarrow \overrightarrow{A A_1} = \alpha \overrightarrow{A B}$

Аналогно, $\overrightarrow{A D_1} = \beta \overrightarrow{A D}$, $\overrightarrow{C B_1} = \gamma \overrightarrow{C B}$, $\overrightarrow{C C_1} = \delta \overrightarrow{C D}$.

$A_1 B_1 C_1 D_1$ паралелограм $\Rightarrow \overrightarrow{A_1 D_1} = \overrightarrow{B_1 C_1}$

$$\overrightarrow{A_1 A} + \overrightarrow{A D_1} = \overrightarrow{B_1 C_1} + \overrightarrow{C C_1}$$

$$-\alpha \overrightarrow{A B} + \beta \overrightarrow{A D} = -\gamma \overrightarrow{C B} + \delta \overrightarrow{C D}$$

$$-\alpha \overrightarrow{A B} + \beta \overrightarrow{A D} = \gamma \overrightarrow{A D} - \delta \overrightarrow{A B}$$

$$(\delta - \alpha) \overrightarrow{A B} + (\beta - \gamma) \overrightarrow{A D} = \vec{0}$$

$\overrightarrow{A B}, \overrightarrow{A D}$ лчн. нез $\Rightarrow \delta - \alpha = 0, \beta - \gamma = 0$

$$\delta = \alpha, \beta = \gamma$$

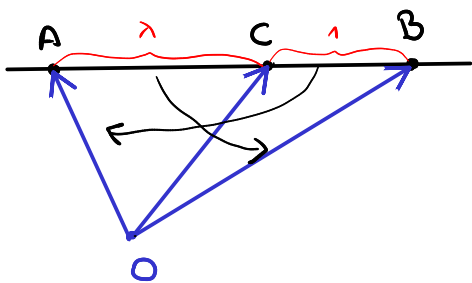
$$\overrightarrow{A A_1} = \alpha \overrightarrow{A B}, \overrightarrow{A D_1} = \beta \overrightarrow{A D}, \overrightarrow{C B_1} = \beta \overrightarrow{C B} = -\beta \overrightarrow{A D}$$

$$\overrightarrow{C C_1} = \alpha \overrightarrow{C D} = -\alpha \overrightarrow{A B} = -\overrightarrow{A A_1}$$

$$\overrightarrow{A_1 O} = \overrightarrow{A_1 A} + \overrightarrow{A O} = \overrightarrow{C C_1} + \overrightarrow{O C} = \overrightarrow{O C} + \overrightarrow{C C_1} = \overrightarrow{O C_1}$$

$$\Rightarrow O = S(A_1 C_1) \Rightarrow \boxed{O \equiv O_1} \quad \checkmark$$

1.4. У односу на тачку O дати су вектори положаја $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ тачака A и B ($A \neq B$). Изразити вектор положаја $\overrightarrow{OC}$ тачке C за коју је $\overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{CB}, \lambda \in \mathbb{R}$.



$$\overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{CB} \Rightarrow A, B, C \text{ коллинеарне}$$

$$\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC} = \lambda (\overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OB})$$

$$\overrightarrow{OC} - \lambda \overrightarrow{CO} = -\overrightarrow{AO} + \lambda \overrightarrow{OB}$$

$$(1 + \lambda) \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \lambda \overrightarrow{OB}$$

$$1) 1 + \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -1$$

$$2) \lambda \neq -1$$

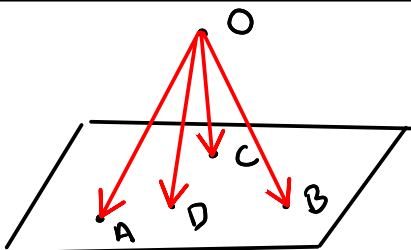
$$\vec{0} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$$

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB}$$

$$A \equiv B \quad \downarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\overrightarrow{OC} = \frac{1}{\lambda + 1} \overrightarrow{OA} + \frac{\lambda}{\lambda + 1} \overrightarrow{OB}}$$

1.6. Нека су O, A, B и C четири некопланарне тачке. Да би тачка D одређена са $\overrightarrow{OD} = \alpha \overrightarrow{OA} + \beta \overrightarrow{OB} + \gamma \overrightarrow{OC}$ припадала равни троугла ABC , потребно је и довољно да је $\alpha + \beta + \gamma = 1$. Ако је при томе $\alpha \geq 0, \beta \geq 0$ и $\gamma \geq 0$, тада тачка D припада троуглу ABC . Доказати.



$$\overrightarrow{OD} = \alpha \overrightarrow{OA} + \beta \overrightarrow{OB} + \gamma \overrightarrow{OC}$$

O, A, B, C некоплан $\Rightarrow \underline{A, B, C \text{ неколн.}} \quad \oplus$



$$\boxed{=>} \quad D \in \text{ПРЯМЫХ } ABC \Rightarrow \alpha + \beta + \gamma = 1 ?$$

$\rightarrow A, B, C, D$ КОПЛАНАРНЫЕ $\Rightarrow \vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}$ КОПЛАНАРНЫ
 $\Rightarrow$ ЛИН. ЗАВИСИМЫ $\Rightarrow \lambda_1 \vec{AB} + \lambda_2 \vec{AC} + \lambda_3 \vec{AD} = \vec{0}$, где не все $\lambda_i = 0$.
 $\lambda_3 \neq 0$ ЗБОГ $(*) \Rightarrow \vec{AD} = p \vec{AB} + q \vec{AC}$, $p, q \in \mathbb{R}$

$$\vec{AO} + \vec{OD} = p(\vec{AO} + \vec{OB}) + q(\vec{AO} + \vec{OC})$$

$$\vec{OD} = (1-p-q)\vec{OA} + p\vec{OB} + q\vec{OC}$$

$$\vec{OD} = \alpha \vec{OA} + \beta \vec{OB} + \gamma \vec{OC}$$

$$(1-p-q-\alpha)\vec{OA} + (p-\beta)\vec{OB} + (q-\gamma)\vec{OC} = \vec{0}$$

ЛИН. НЕЗАВИСИМЫ $\Rightarrow \alpha = 1-p-q, \beta = p, \gamma = q$

$$\alpha + \beta + \gamma = 1-p-q+p+q = 1 \quad \checkmark$$

$$\boxed{<=} \quad \alpha + \beta + \gamma = 1 \Rightarrow D \in \text{ПРЯМЫХ } ABC$$

$$\Rightarrow \alpha = 1 - \beta - \gamma$$

$$\vec{OD} = (1-\beta-\gamma)\vec{OA} + \beta\vec{OB} + \gamma\vec{OC}$$

$$\vec{OD} - \vec{OA} = \beta(\vec{OB} - \vec{OA}) + \gamma(\vec{OC} - \vec{OA})$$

$$\vec{AD} = \beta \vec{AB} + \gamma \vec{AC} \Rightarrow \vec{AD}, \vec{AB}, \vec{AC} \text{ ЛИН. ЗАВИСИМЫ}$$

$\Rightarrow$ КОПЛАНАРНЫ $\Rightarrow A, B, C, D$ КОПЛАНАРНЫЕ

$$\Rightarrow D \in \text{ПРЯМЫХ } ABC \quad \checkmark$$

Спешивацки

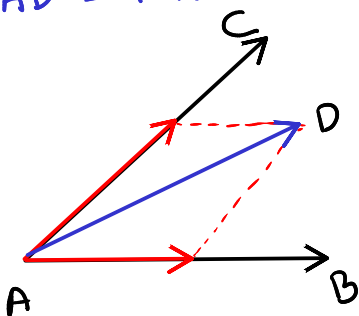
$$\left. \begin{array}{l} \alpha > 0, \beta > 0, \gamma > 0 \\ \alpha + \beta + \gamma = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\alpha, \beta, \gamma \in [0, 1]}$$

$$1) \alpha = 1 - \beta - \gamma$$

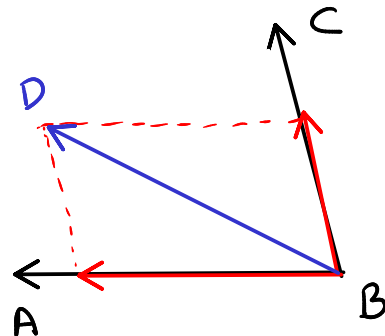
$$2) \beta = 1 - \alpha - \gamma$$

$$\Rightarrow \vec{AD} = \beta \vec{AB} + \gamma \vec{AC}$$

$$\Rightarrow \dots \Rightarrow \vec{BD} = \alpha \vec{BA} + \gamma \vec{BC}$$



$$\Rightarrow D \in \angle CAB$$



$$\Rightarrow D \in \angle CBA$$

$$1, 2 \Rightarrow D \in \Delta ABC$$

$\alpha, \beta, \gamma > 0 \Rightarrow D \in \text{УНУТРАШНОСТИ } \Delta ABC$

Или од $\alpha, \beta, \gamma = 0 \Rightarrow D \in \text{ГРАНИЦИ } \Delta ABC$

1.7. У простору је dato n тачака $A_1, \dots, A_n$ ($n \geq 2$) и тачка O . Тежиште тог скупа тачака је тачка T дефинисана са

$$\vec{OT} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \vec{OA}_i.$$

а) Доказати да дефиниција тачке T не зависи од избора тачке O .

Са $T_i, i = 1, \dots, n$ означимо тежиште скупа тачака који настаје из датог скупа изабацивањем тачке A_i .

б) Доказати да се све дужи $A_i T_i$ ($1 \leq i \leq n$) секу у тачки T и да је $\vec{A_i T} : \vec{T T_i} = (n-1) : 1$.

а) Узмимо неку произв. тачку O' :

$$\begin{aligned} \vec{O'T} &= \vec{O'O} + \vec{OT} = \frac{1}{n} \cdot n \vec{O'O} + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \vec{OA_i} \\ &= \frac{1}{n} (\underbrace{\vec{O'O}} + \dots + \underbrace{\vec{O'O}} + \underbrace{\vec{OA_1}} + \dots + \underbrace{\vec{OA_n}}) \\ &= \frac{1}{n} (\vec{O'A_1} + \dots + \vec{O'A_n}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \vec{O'A_i} \quad \checkmark \end{aligned}$$

б) $\vec{OT_i} = \frac{1}{n-1} (\vec{OA_1} + \dots + \vec{OA_{i-1}} + \vec{OA_{i+1}} + \dots + \vec{OA_n})$, $i \in \{1, \dots, n\}$ произв.

$$\vec{OT} = \frac{1}{n} (\vec{OA_1} + \dots + \vec{OA_{i-1}} + \vec{OA_i} + \vec{OA_{i+1}} + \dots + \vec{OA_n})$$

а) не зависи од O па узмимо $O = A_i$:

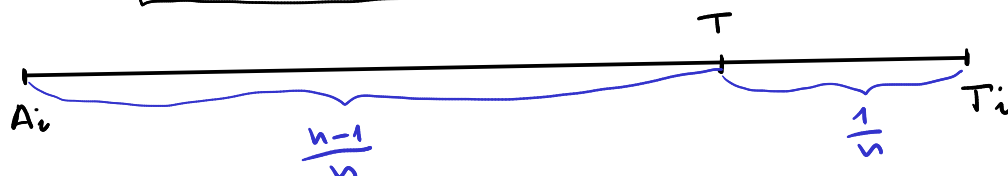
$$\begin{aligned} \vec{A_i T_i} &= \frac{1}{n-1} (\vec{A_i A_1} + \dots + \vec{A_i A_{i-1}} + \vec{A_i A_{i+1}} + \dots + \vec{A_i A_n}) \\ \vec{A_i T} &= \frac{1}{n} (\vec{A_i A_1} + \dots + \vec{A_i A_{i-1}} + \underbrace{\vec{A_i A_i}}_{\vec{0}} + \vec{A_i A_{i+1}} + \dots + \vec{A_i A_n}) \\ \Rightarrow \vec{A_i T_i} &= \frac{1}{n-1} \cdot n \vec{A_i T} \Rightarrow \boxed{\vec{A_i T_i} = \frac{n}{n-1} \cdot \vec{A_i T}} \end{aligned}$$

$\Rightarrow A_i, T, T_i$ колинеарне $\Rightarrow T \in A_i T_i, \forall i \in \{1, \dots, n\}$

$$\vec{A_i T} = \frac{n-1}{n} \vec{A_i T_i}$$

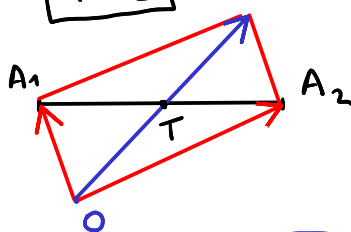
$$\vec{T T_i} = \vec{T A_i} + \vec{A_i T_i} = -\frac{n-1}{n} \vec{A_i T} + \vec{A_i T_i} = \frac{1}{n} \vec{A_i T_i}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{A_i T} : \vec{T T_i} = (n-1) : 1}$$



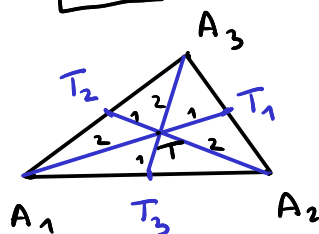
1.8. Скицирати и доказати Задатак 1.7 за $n = 2, 3$ у равни и $n = 4$ у простору.

$n = 2$

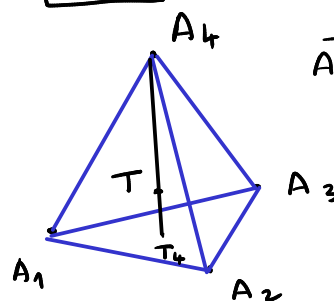


$$\vec{OT} = \frac{1}{2} (\vec{OA_1} + \vec{OA_2})$$

$n = 3$

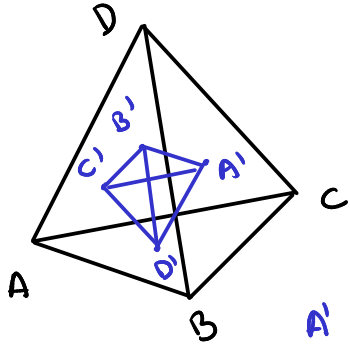


$n = 4$



$$\vec{A_4 T} : \vec{T T_4} = 3 : 1$$

1.9. Доказати да се тежиште тетраедра $ABCD$ поклапа са тежиштем тетраедра $A'B'C'D'$ коме су темена A', B', C', D' редом тежишта троуглова BCD, ACD, ABD и ABC .



$$T \text{ тежиште } ABCD \Rightarrow \vec{OT} = \frac{1}{4} (\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD})$$

$$T' \text{ тежиште } A'B'C'D' \Rightarrow \vec{OT'} = \frac{1}{4} (\vec{OA'} + \vec{OB'} + \vec{OC'} + \vec{OD'})$$

$$\text{Показујемо } T \equiv T' : \Leftrightarrow \vec{OT'} = \vec{OT}$$

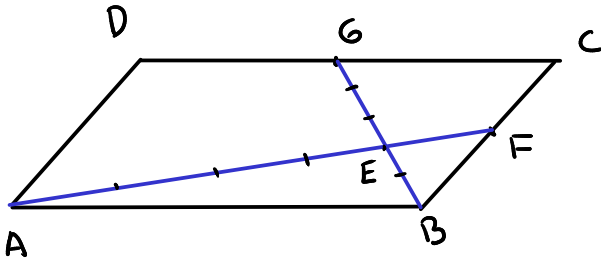
$$A' \text{ тежиште } BCD \Rightarrow \vec{OA'} = \frac{1}{3} (\vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD})$$

$$\Rightarrow \vec{OB'} = \frac{1}{3} (\vec{OA} + \vec{OC} + \vec{OD}), \vec{OC'} = \frac{1}{3} (\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OD}), \vec{OD'} = \frac{1}{3} (\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC})$$

$$\vec{OT'} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{3} (\vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD}) + \frac{1}{3} (\vec{OA} + \vec{OC} + \vec{OD}) + \frac{1}{3} (\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OD}) + \frac{1}{3} (\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}) \right)$$

$$\vec{OT'} = \frac{1}{4} (\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD}) = \vec{OT} \Rightarrow \boxed{T \equiv T'} \quad \checkmark$$

1.10. Дат је паралелограм $ABCD$. Ако је тачка F средиште странице BC , тачка G средиште странице CD , а тачка E пресек дужи AF и BG , одредити односе $\frac{AE}{EF}$ и $\frac{BE}{EG}$.



$$\frac{\vec{AE}}{\vec{EF}} = \lambda, \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\frac{AE}{EF} = \frac{\|\vec{AE}\|}{\|\vec{EF}\|} = |\lambda| = \frac{EA}{EF}$$

$$F = S(BC), G = S(CD)$$

$$A, E, F \text{ колинеарне} \Leftrightarrow \vec{AE} = \alpha \vec{AF}$$

$$B, E, G \text{ колинеарне} \Leftrightarrow \vec{BE} = \beta \vec{BG}$$

$$\vec{AF} = \vec{AB} + \vec{BF} = \vec{AB} + \frac{1}{2} \vec{BC}, \vec{BG} = \vec{BC} + \vec{CG} = \vec{BC} - \frac{1}{2} \vec{AB}$$

$$\vec{AB} = \vec{AE} + \vec{EB} = \alpha \vec{AF} - \beta \vec{BG} = \alpha \vec{AB} + \frac{\alpha}{2} \vec{BC} - \beta \vec{BC} + \frac{\beta}{2} \vec{AB}$$

$$(1 - \alpha - \frac{\beta}{2}) \vec{AB} + (\frac{\alpha}{2} - \beta) \vec{BC} = \vec{0}$$

$$\vec{AB}, \vec{BC} \text{ л.н.в.} \Rightarrow \alpha + \frac{\beta}{2} = 1 \quad \beta = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \frac{5}{4} \alpha = 1 \Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{4}{5}}$$

$$\boxed{\vec{AE} = \frac{4}{5} \vec{AF}, \vec{BE} = \frac{2}{5} \vec{BG}}$$

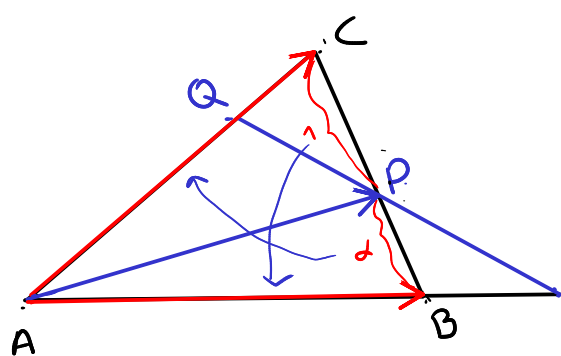
$$\vec{EF} = \vec{EA} + \vec{AF} = -\frac{4}{5} \vec{AF} + \vec{AF} = \frac{1}{5} \vec{AF} \Rightarrow \frac{AE}{EF} = \frac{\frac{4}{5} \|\vec{AF}\|}{\frac{1}{5} \|\vec{AF}\|} = \boxed{4}$$

$$\vec{EG} = \vec{EB} + \vec{BG} = -\frac{2}{5} \vec{BG} + \vec{BG} = \frac{3}{5} \vec{BG} \Rightarrow \frac{BE}{EG} = \frac{\frac{2}{5} \|\vec{BG}\|}{\frac{3}{5} \|\vec{BG}\|} = \boxed{\frac{2}{3}}$$

$$\boxed{\frac{AE}{EF} = 4}$$

$$\boxed{\frac{BE}{EG} = \frac{2}{3}}$$

1.11. (Менелајева теорема, 1. век н. е.) Потребан и довољан услов да би тачке P, Q и R које леже редом на правама BC, CA и AB троугла ABC биле колинеарне, јесте да важи $\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} \frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} = -1$.



$$\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} = \alpha, \quad \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} = \beta, \quad \frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} = \gamma$$

Доказујемо:

$$P, Q, R \text{ колин} \Leftrightarrow \alpha \beta \gamma = -1$$

$$\Rightarrow P \in QR \Leftrightarrow \alpha \beta \gamma = -1$$

$$\boxed{1.4} \Rightarrow \overrightarrow{AP} = \frac{1}{\alpha+1} \overrightarrow{AB} + \frac{\alpha}{\alpha+1} \overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{CQ} = \beta \overrightarrow{QA}$$

$$\overrightarrow{AR} = \gamma \overrightarrow{RB}$$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AR} + \overrightarrow{RB} = \overrightarrow{AR} + \frac{1}{\gamma} \overrightarrow{AR} = \frac{\gamma+1}{\gamma} \overrightarrow{AR}$$

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{QC} = \overrightarrow{AQ} + \beta \overrightarrow{AQ} = (1+\beta) \overrightarrow{AQ}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AP} = \left[\frac{1}{\alpha+1} \cdot \frac{\gamma+1}{\gamma} \right] \overrightarrow{AR} + \left[\frac{\alpha}{\alpha+1} \cdot (1+\beta) \right] \overrightarrow{AQ}$$

$$\boxed{1.5} \Rightarrow P \in RQ \Leftrightarrow \frac{\gamma+1}{\gamma(\alpha+1)} + \frac{\alpha(1+\beta)}{\alpha+1} = 1 \quad / \gamma(\alpha+1)$$

$$\Leftrightarrow \gamma+1 + \alpha(1+\beta)\gamma = \gamma(\alpha+1)$$

$$\Leftrightarrow \cancel{\gamma} + 1 + \cancel{\alpha\gamma} + \alpha\beta\gamma = \cancel{\gamma^2\alpha} + \cancel{\gamma}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\alpha\beta\gamma = -1}$$

1.12. (Чеваова теорема) Нека су P, Q и R тачке редом на правама BC, AC и AB , троугла ABC . Доказати да је $\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} \frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} = 1$ ако и само ако се праве AP, BQ и CR секу у једној тачки или су паралелне.



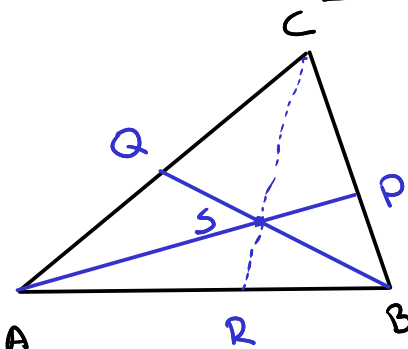
конкурентне

у истом правмену

$$AP, BQ, CR \text{ у истом правмену} \Leftrightarrow \alpha \beta \gamma = 1$$

$$\textcircled{1} AP \cap BQ = \{S\}$$

$$\boxed{S \in CR \Leftrightarrow \alpha \beta \gamma = 1}$$



Посматрамо $\triangle CPA$:

$$B \in CP, S \in PA, Q \in AC \text{ конкурентне} \Leftrightarrow \frac{\overrightarrow{CB}}{\overrightarrow{BP}} \cdot \frac{\overrightarrow{PS}}{\overrightarrow{SA}} \cdot \frac{\overrightarrow{AQ}}{\overrightarrow{QC}} = -1$$

$$\overrightarrow{BP} = \alpha \overrightarrow{PC} \Rightarrow \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CP} + \overrightarrow{PB} = -\frac{1}{\alpha} \overrightarrow{BP} - \overrightarrow{BP} = \frac{-1-\alpha}{\alpha} \overrightarrow{BP}$$

$$\overrightarrow{CQ} = \beta \overrightarrow{QA} \Rightarrow \overrightarrow{AQ} = \frac{1}{\beta} \overrightarrow{QC}$$

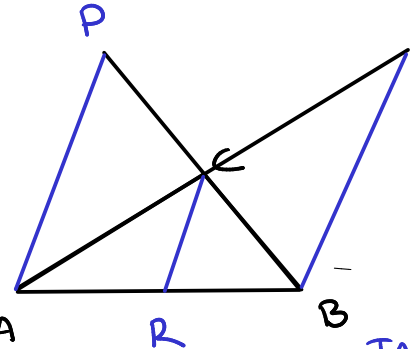
$$(*) \Rightarrow -\frac{\alpha+1}{\alpha} \cdot \frac{\vec{PS}}{\vec{SA}} \cdot \frac{1}{\beta} = -1 \Rightarrow \boxed{\frac{\vec{PS}}{\vec{SA}} = \frac{\alpha\beta}{\alpha+1}}$$

ПОСМАТРАМО $\triangle BPA$

$C \in BP, S \in PA, R \in AB$ КОЛИНЕАРНЕ $\xLeftrightarrow{\text{МЕНЕЛАЈ}} \frac{\vec{BC}}{\vec{CP}} \cdot \frac{\vec{PS}}{\vec{SA}} \cdot \frac{\vec{AR}}{\vec{RB}} = -1$

$\vec{BP} = \alpha \vec{PC} \Rightarrow \vec{BC} = \vec{BP} + \vec{PC} = \alpha \vec{PC} + \vec{PC} = -(\alpha+1) \vec{CP}$

$S \in CR \Leftrightarrow \cancel{-(\alpha+1)} \cdot \frac{\alpha\beta}{\cancel{\alpha+1}} \cdot \gamma = \cancel{-1} \Leftrightarrow \alpha\beta\gamma = 1$

②  AP, BQ, CR ПАРАЛЕЛНЕ $\Leftrightarrow \alpha\beta\gamma = 1$

Нека су $BQ \parallel CR$.

Показујемо:

$AP \parallel CR \Leftrightarrow \alpha\beta\gamma = 1$

$\vec{AQ} = \frac{1}{\beta} \vec{QC}$

$\vec{CQ} = \beta \vec{QA}$

③ $BQ \parallel CR \xLeftrightarrow{\text{Tanec}} \frac{\vec{AC}}{\vec{CQ}} = \frac{\vec{AR}}{\vec{RB}}$

$\frac{\vec{BP}}{\vec{PC}} \cdot \frac{\vec{CQ}}{\vec{QA}} \cdot \frac{\vec{AR}}{\vec{RB}} = 1$

$\vec{AC} = \vec{AQ} + \vec{QC} = \frac{1}{\beta} \vec{QC} + \vec{QC} = \frac{1+\beta}{\beta} \vec{QC} = -\frac{\beta+1}{\beta} \vec{CQ}$

$\Rightarrow -\frac{\beta+1}{\beta} = \gamma \Rightarrow \beta+1 = -\beta\gamma \Rightarrow \boxed{\beta(1+\gamma) = -1}$

④ $AP \parallel CR \xLeftrightarrow{\text{Tanec}} \frac{\vec{BC}}{\vec{CP}} = \frac{\vec{BR}}{\vec{RA}} \Rightarrow \gamma+1 = -\frac{1}{\beta}$

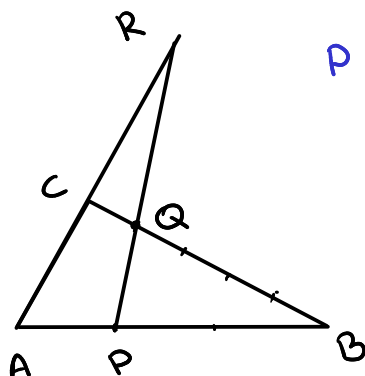
$\vec{BP} = \alpha \vec{PC} \Rightarrow \vec{BC} = \vec{BP} + \vec{PC} = \alpha \vec{PC} + \vec{PC} = -(\alpha+1) \vec{CP}$

$AP \parallel CR \Leftrightarrow -(\alpha+1) = \frac{1}{\gamma} \Leftrightarrow -\alpha-1 = \frac{1}{\gamma}$

$\Leftrightarrow \boxed{-\alpha = \frac{1}{\gamma} + 1 = \frac{\gamma+1}{\gamma} = -\frac{1}{\beta\gamma}}$

$AP \parallel CR \Leftrightarrow \alpha\beta\gamma = 1$

1.13. Нека је ABC троугао и тачке P и Q такве да је $\vec{AP} = \frac{1}{2}\vec{PB}$ и $\vec{BQ} = 4\vec{QC}$, а тачка R је пресек правих AC и PQ . Израчунати однос $\vec{CR} : \vec{RA}$.



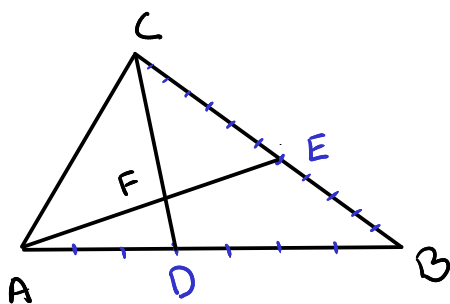
$P \in AB, Q \in BC, R \in CA$ КОЛИНЕАРНЕ

$\xLeftrightarrow{\text{МЕНЕЛАЈ}} \frac{\vec{AP}}{\vec{PB}} \cdot \frac{\vec{BQ}}{\vec{QC}} \cdot \frac{\vec{CR}}{\vec{RA}} = -1$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \frac{\vec{CR}}{\vec{RA}} = -1$

$\Rightarrow \boxed{\frac{\vec{CR}}{\vec{RA}} = -\frac{1}{2}}$

1.14. У равни је дат троугао ABC . Нека тачка D припада страници AB , а тачка E страници BC , тако да је $\frac{AD}{DB} = \frac{3}{4}$ и $\frac{BE}{EC} = \frac{5}{7}$. Ако се дужи AE и CD секу у тачки F одредити у ком односу тачка F дели дужи AE и CD .



ΔBDC

$$\frac{AD}{DB} = \frac{3}{4} = \frac{\vec{AD}}{\vec{DB}}, \quad \frac{BE}{EC} = \frac{5}{7} = \frac{\vec{BE}}{\vec{EC}}$$

ΔABE
Менелай
($\Rightarrow$)

$D \in AB, C \in BE, F \in EA$ колич.

$$\frac{\vec{AD}}{\vec{DB}} \cdot \frac{\vec{BC}}{\vec{CE}} \cdot \frac{\vec{EF}}{\vec{FA}} = -1$$

$$\frac{3}{4} \cdot -\frac{12}{7} \Rightarrow \frac{\vec{EF}}{\vec{FA}} = \frac{7}{9}$$

$$\frac{\vec{EF}}{\vec{FA}} = \frac{7}{9}$$

$A \in BD, F \in DC, E \in CB$ колинеарне

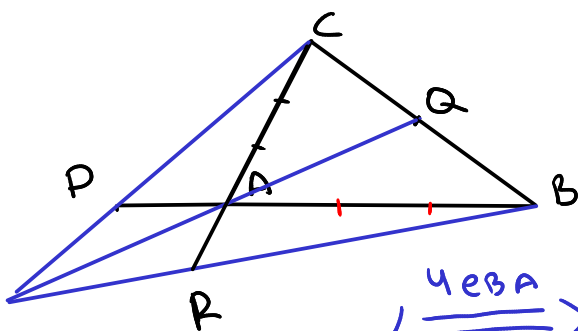
Менелай
($\Rightarrow$)

$$\frac{\vec{BA}}{\vec{AD}} \cdot \frac{\vec{DF}}{\vec{FC}} \cdot \frac{\vec{CE}}{\vec{EB}} = -1$$

$$-\frac{7}{3} \cdot \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{\vec{DF}}{\vec{FC}} = \frac{15}{49}$$

$$\frac{\vec{DF}}{\vec{FC}} = \frac{15}{49}$$

1.15. Нека је ABC троугао, P и Q тачке такве да је $3\vec{AP} = \vec{BA}$ и $2\vec{BQ} = \vec{BC}$. Ако је R тачка праве AC таква да се праве AQ, CP и BR секу у једној тачки, одредити однос $\vec{AC} : \vec{AR}$.



$$3\vec{AP} = \vec{BA} \quad 2\vec{BQ} = \vec{BC}$$

ΔABC

AQ, CP, BR конкурентне

$$\frac{\vec{AP}}{\vec{PB}} \cdot \frac{\vec{BQ}}{\vec{QC}} \cdot \frac{\vec{CR}}{\vec{RA}} = 1$$

$$-\frac{1}{4} \cdot 1 \Rightarrow \frac{\vec{CR}}{\vec{RA}} = -4$$

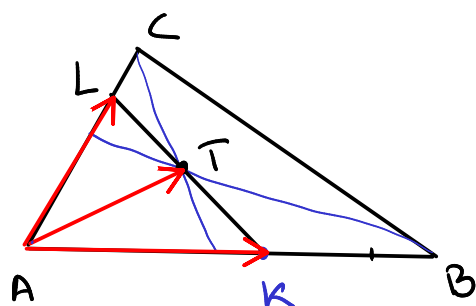
$$\frac{\vec{CR}}{\vec{RA}} = -4$$

$$\vec{CR} = -4\vec{RA}$$

$$\vec{AC} = \vec{AR} + \vec{RC} = \vec{AR} - 4\vec{AR} = -3\vec{AR}$$

$$\Rightarrow \vec{AC} : \vec{AR} = -3 : 1$$

1.16. На страницама AB и AC троугла ABC дате су редом тачке K и L , такве да важи $\frac{KB}{AK} + \frac{LC}{AL} = 1$. Доказати да тежиште троугла ABC припада дужи KL .



T је тежиште ΔABC

$$\Rightarrow \vec{OT} = \frac{1}{3} (\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC})$$

$$O \equiv A \Rightarrow \vec{AT} = \frac{1}{3} \vec{AB} + \frac{1}{3} \vec{AC} \quad (*)$$

$$\frac{KB}{AK} + \frac{LC}{AL} = 1 \Rightarrow \alpha + \beta = 1$$

$$\alpha = \frac{KB}{AK} = \frac{\vec{KB}}{\vec{AK}} \Rightarrow \vec{KB} = \alpha \vec{AK} \Rightarrow \vec{AB} = \vec{AK} + \vec{KB} = \vec{AK} + \alpha \vec{AK} = (\alpha + 1) \vec{AK}$$

$$\beta = \frac{LC}{AL} = \frac{\vec{LC}}{\vec{AL}} \Rightarrow \vec{LC} = \beta \vec{AL} \Rightarrow \vec{AC} = \vec{AL} + \vec{LC} = \vec{AL} + \beta \vec{AL} = (\beta + 1) \vec{AL}$$

$$\vec{AT} = \frac{\alpha + 1}{3} \vec{AK} + \frac{\beta + 1}{3} \vec{AL}$$

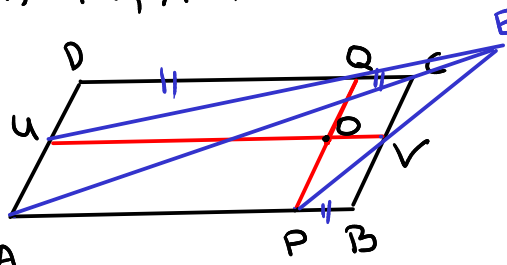
$$1.5 \quad T \in KL \Leftrightarrow \frac{\alpha + 1}{3} + \frac{\beta + 1}{3} = 1 \Rightarrow T \in KL$$

$$\frac{\alpha + 1 + \beta + 1}{3} = \frac{3}{3} = 1 \quad \checkmark \quad \frac{\alpha + 1}{3} > 0 \quad \frac{\beta + 1}{3} > 0$$

$$\Rightarrow T \in \text{дужи } KL$$

1.17. Дат је паралелограм $ABCD$ и у његовој унутрашњости тачка O . Две праве које садрже тачку O и паралелне страницама паралелограма, секу странице паралелограма у тачкама $P \in AB, Q \in CD, U \in AD$ и $V \in BC$. Доказати да се праве PV, QU и AC секу у једној тачки или су паралелне.

1) PV, AC, QU конкурентне? претп. $AC \cap PV = \{E\}$



Доказујемо $E \in QU$:

ΔABC $P \in AB, V \in BC, E \in AC$ колич.

$$\frac{\vec{AP}}{\vec{PB}} \cdot \frac{\vec{BV}}{\vec{VC}} \cdot \frac{\vec{CE}}{\vec{EA}} = -1 \quad \checkmark$$

$$E \in QU \Leftrightarrow Q, U, E \text{ колич.} \quad \frac{\vec{CQ}}{\vec{QD}} \cdot \frac{\vec{DU}}{\vec{UA}} \cdot \frac{\vec{AE}}{\vec{EC}} = -1 \quad ?$$

$$\vec{CQ} = \vec{BP}, \vec{QD} = \vec{PA} \\ \vec{DU} = \vec{CV}, \vec{UA} = \vec{VB}$$

$$\Rightarrow \frac{\vec{BP}}{\vec{PA}} \cdot \frac{\vec{CV}}{\vec{VB}} \cdot \frac{\vec{AE}}{\vec{EC}} = \frac{1}{-1} = -1$$

$\Rightarrow Q, U, E$ колич. $\Rightarrow AC, PV, QU$ конк. $\checkmark$

2) AC, PV, QU паралелне

претп. $AC \parallel PV$. Доказ. $AC \parallel QU$

$$\text{Талес} \Rightarrow \frac{\vec{BV}}{\vec{VC}} = \frac{\vec{BP}}{\vec{PA}}$$

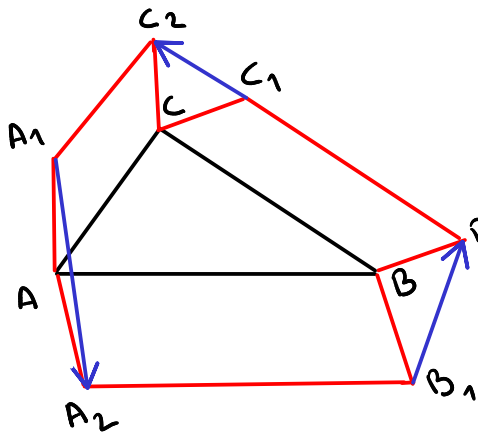
$$\Rightarrow \frac{\vec{AU}}{\vec{UD}} = \frac{\vec{CQ}}{\vec{QD}} \Rightarrow \frac{\vec{DU}}{\vec{UA}} = \frac{\vec{DQ}}{\vec{QC}}$$

Талес $\Rightarrow$

$$\boxed{AC \parallel QU}$$

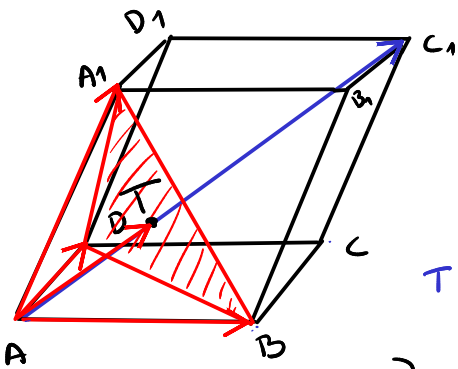
$\Rightarrow AC, PV, QU$ паралелне

1.18. Над страницами треугола ABC конструисани су паралелограми ABB_1A_2 , BCC_1B_2 , CAA_1C_2 . Доказати да је $\vec{A_1A_2} + \vec{B_1B_2} + \vec{C_1C_2} = \vec{0}$.



$$\begin{aligned} & \vec{A_1A_2} + \vec{B_1B_2} + \vec{C_1C_2} \\ &= \vec{A_1A} + \vec{AA_2} + \vec{B_1B} + \vec{BB_2} + \vec{C_1C} + \vec{CC_2} \\ &= \vec{A_1A} + \vec{AA_2} + \vec{A_2A} + \vec{BB_2} + \vec{B_2B} + \vec{AA_1} \\ &= \vec{0} \end{aligned}$$

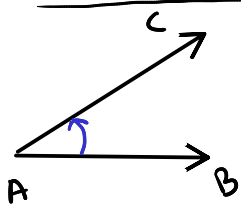
1.19. Дат је паралелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Доказати да је продор T дијагонале AC_1 кроз раван одређену тачкама B, D и A_1 тежиште троугла BDA_1 .



$$\begin{aligned} & \vec{AT} = \alpha \vec{AC_1} \quad (\vec{T} \in AC_1) \\ & \vec{AT} = \alpha \cdot (\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CC_1}) \\ & \vec{AT} = \alpha \vec{AB} + \alpha \vec{AD} + \alpha \vec{AA_1} \\ & \vec{T} \in BDA_1 \quad \boxed{1.6} \Rightarrow \alpha + \alpha + \alpha = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{3} \\ & \Rightarrow \vec{AT} = \frac{1}{3} \vec{AB} + \frac{1}{3} \vec{AD} + \frac{1}{3} \vec{AA_1} \Rightarrow T \text{ је тежиште } \triangle BDA_1 \end{aligned}$$

2 Скаларни, векторски и мешовити производ

* СКАЛАРНИ ПРОИЗВОД



$$\angle(\vec{AB}, \vec{AC}) = \angle(AB, AC) \quad \text{полуправе}$$

$$\Rightarrow \angle(\vec{AB}, \vec{AC}) \in [0, \pi]$$

$$\|\vec{AB}\| = \text{РАСТОЈАЊЕ ИЗМЕЂУ } A \text{ и } B$$

$$\vec{u}, \vec{v} \in V \Rightarrow \vec{u} \circ \vec{v} = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle := \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos \angle(\vec{u}, \vec{v})$$

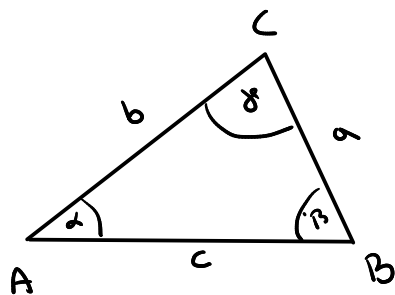
$$* \angle(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \vec{u} \circ \vec{v} = 0 \Rightarrow \vec{u} \perp \vec{v} \quad (\text{ОРТОГОНАЛНИ})$$

$$* \|\vec{u}\|^2 = \vec{u} \circ \vec{u} \Rightarrow \|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \circ \vec{u}}$$

Особине

- 1) $\vec{u} \circ \vec{v} = \vec{v} \circ \vec{u}$
- 2) $\vec{u} \circ (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \circ \vec{v} + \vec{u} \circ \vec{w}$
- 3) $(\alpha \vec{u}) \circ \vec{v} = \alpha \cdot \vec{u} \circ \vec{v}$
- 4) $\vec{u} \circ \vec{u} \geq 0$
 $\vec{u} \circ \vec{u} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$

2.1. Доказати да је за троугао ABC испуњен услов $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$ (косинусна теорема).



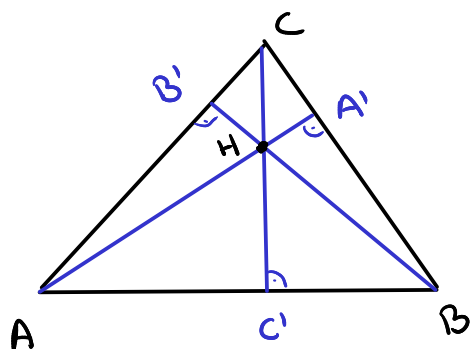
$$a = \|\vec{BC}\| \quad b = \|\vec{AC}\| \quad c = \|\vec{AB}\|$$

$$\begin{aligned} c^2 &= \|\vec{AB}\|^2 = \vec{AB} \circ \vec{AB} \\ &= (\vec{AC} + \vec{CB}) \circ (\vec{AC} + \vec{CB}) \\ &= \|\vec{AC}\|^2 + \vec{AC} \circ \vec{CB} + \vec{CB} \circ \vec{AC} + \|\vec{CB}\|^2 \\ &= b^2 + a^2 + 2 \vec{AC} \circ \vec{CB} \\ &= a^2 + b^2 - 2 \vec{CA} \circ \vec{CB} \end{aligned}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \|\vec{CA}\| \cdot \|\vec{CB}\| \cdot \cos \angle(\vec{CA}, \vec{CB})$$

$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma}$$

2.2. Доказати да се висине троугла секу у једној тачки (ортоцентар).



$$AA' \perp BC, \quad BB' \perp AC, \quad CC' \perp AB$$

Претп. $AA' \cap BB' = \{H\}$. Доказујемо $H \in CC'$:

$$\Leftrightarrow \vec{CH} \perp \vec{AB}$$

$$\Leftrightarrow \vec{CH} \circ \vec{AB} = 0$$

$$H \in AA' \Rightarrow \vec{AH} \circ \vec{CB} = 0$$

$$H \in BB' \Rightarrow \vec{BH} \circ \vec{CA} = 0$$

$$\vec{CH} = \vec{CA} + \vec{AH} \quad / \circ \vec{CB}$$

$$\vec{CH} = \vec{CB} + \vec{BH} \quad / \circ \vec{CA}$$

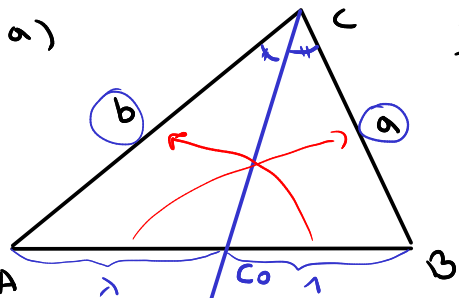
$$\Rightarrow \vec{CH} \circ \vec{CB} = \vec{CA} \circ \vec{CB} + 0$$

$$\vec{CH} \circ \vec{CA} = \vec{CB} \circ \vec{CA} + 0$$

$$\Rightarrow \vec{CH} \circ \vec{CB} - \vec{CH} \circ \vec{CA} = 0 \Rightarrow \vec{CH} \circ (\vec{CB} - \vec{CA}) = 0$$

$$\Rightarrow \vec{CH} \circ \vec{AB} = 0 \Rightarrow H \in CC'$$

2.3. а) Доказати да симетрала унутрашњег угла у троуглу дели насупрну страну у односу суседних страна. б) Доказати да се симетрале унутрашњих углова у троуглу секу у једној тачки (центар уписаног круга). Упутство: користити Чеваову теорему.



$$\text{Доказујемо } \|\vec{AD}\| : \|\vec{CD}\| = b : a$$

$$\text{Претп. } \vec{AD} = \lambda \vec{CD} \quad \text{Доказ. } \lambda = \frac{b}{a} = \frac{\|\vec{CA}\|}{\|\vec{CB}\|}$$

$$\boxed{1.4} \Rightarrow \vec{CD} = \frac{1}{\lambda + 1} \vec{CA} + \frac{\lambda}{\lambda + 1} \vec{CB} \quad (*)$$

$$\angle(\vec{CA}, \vec{CD}) = \angle(\vec{CB}, \vec{CD}) \Rightarrow \cos \angle(\vec{CA}, \vec{CD}) = \cos \angle(\vec{CB}, \vec{CD})$$

$$\frac{\vec{CA} \circ \vec{CD}}{\|\vec{CA}\| \cdot \|\vec{CD}\|} = \frac{\vec{CB} \circ \vec{CD}}{\|\vec{CB}\| \cdot \|\vec{CD}\|}$$

$$\Leftrightarrow a \cdot \vec{CA} \cdot \left(\frac{1}{\lambda+1} \vec{CA} + \frac{\lambda}{\lambda+1} \vec{CB} \right) = b \cdot \vec{CB} \cdot \left(\frac{1}{\lambda+1} \vec{CA} + \frac{\lambda}{\lambda+1} \vec{CB} \right) \quad /_{\lambda+1}$$

$$a \cdot b^2 + a\lambda \vec{CA} \cdot \vec{CB} = b \cdot \vec{CB} \cdot \vec{CA} + b\lambda \cdot a^2$$

$$\lambda (a \vec{CA} \cdot \vec{CB} - ba^2) = b \vec{CB} \cdot \vec{CA} - ab^2$$

$$\lambda a (\vec{CA} \cdot \vec{CB} - ab) = b (\vec{CB} \cdot \vec{CA} - ab) \quad /: \vec{CA} \cdot \vec{CB} - ab$$

$$\lambda a = b \Rightarrow \lambda = \frac{b}{a}$$

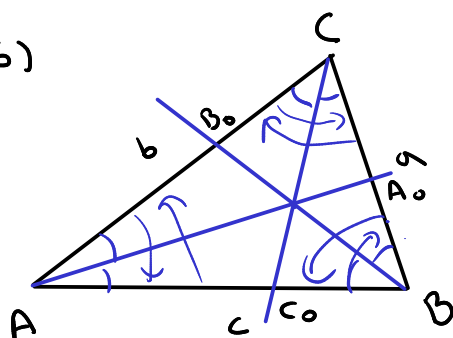
$$\vec{CA} \cdot \vec{CB} \neq ab = \|\vec{CA}\| \cdot \|\vec{CB}\|$$

$$\|\vec{CA}\| \cdot \|\vec{CB}\| \cdot \cos \angle(\vec{CA}, \vec{CB}) \neq \|\vec{CA}\| \cdot \|\vec{CB}\|$$

$$\cos \angle(\vec{CA}, \vec{CB}) \neq 1 \quad \checkmark$$

$$\Rightarrow \frac{\vec{AC}_0}{\vec{C_0B}} = \lambda = \frac{b}{a}$$

б)



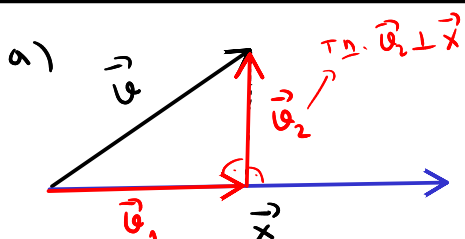
AA_0, BB_0, CC_0 конкyрентне

$$\Leftrightarrow \frac{\vec{AC}_0}{\vec{C_0B}} \cdot \frac{\vec{BA}_0}{\vec{A_0C}} \cdot \frac{\vec{CB}_0}{\vec{B_0A}} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{b}{a} \cdot \frac{c}{b} \cdot \frac{a}{c} = 1 \quad \checkmark$$

$\Rightarrow AA_0, BB_0, CC_0$ су конкyрентне

2.4. а) Доказати да се нормална пројекција вектора $\vec{v}$ на вектор $\vec{x}$ може записати у облику $\vec{v}_1 = \frac{\vec{v} \cdot \vec{x}}{\|\vec{x}\|^2} \vec{x}$. б) Ако су $\vec{v} = (1, 1, 1)$, $\vec{x} = (1, 2, 2)$ дати координатама у ортонормираној бази одредити једнозначно разлагање $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$ вектора $\vec{v}$ на пројекцију и ортогоналну допуну ($\vec{v}_2 \perp \vec{x}$).



$$\vec{v}_1 = \lambda \vec{x}$$

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \lambda \vec{x} + \vec{v}_2 \quad / \cdot \vec{x}$$

$$\vec{v} \cdot \vec{x} = \lambda \cdot \vec{x} \cdot \vec{x} + \underbrace{\vec{v}_2 \cdot \vec{x}}_{=0}$$

$$\lambda = \frac{\vec{v} \cdot \vec{x}}{\vec{x} \cdot \vec{x}} \Rightarrow \lambda = \frac{\vec{v} \cdot \vec{x}}{\|\vec{x}\|^2}$$

$$\Rightarrow \vec{v}_1 = \frac{\vec{v} \cdot \vec{x}}{\|\vec{x}\|^2} \cdot \vec{x}$$

б) СТАНДАРДНИ СКАЛАРНИ ПРОИЗВОД У $\mathbb{R}^3$

$$\vec{u} = (u_1, u_2, u_3), \vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3, \quad \|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$$

$$\vec{u} = (1, 1, 1), \quad \vec{x} = (1, 2, 2)$$

$$\vec{u} \circ \vec{x} = (1, 1, 1) \circ (1, 2, 2) = 1 + 2 + 2 = 5$$

$$\|\vec{x}\|^2 = \vec{x} \circ \vec{x} = 1^2 + 2^2 + 2^2 = 9$$

$$\Rightarrow \vec{u}_1 = \frac{\vec{u} \circ \vec{x}}{\|\vec{x}\|^2} \vec{x} = \frac{5}{9} (1, 2, 2) = \left(\frac{5}{9}, \frac{10}{9}, \frac{10}{9}\right)$$

$$\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 \Rightarrow \vec{u}_2 = \vec{u} - \vec{u}_1 = (1, 1, 1) - \left(\frac{5}{9}, \frac{10}{9}, \frac{10}{9}\right)$$

$$\boxed{\vec{u}_2 = \left(\frac{4}{9}, -\frac{1}{9}, -\frac{1}{9}\right), \quad \vec{u}_1 = \left(\frac{5}{9}, \frac{10}{9}, \frac{10}{9}\right)}$$

$$\vec{u}_1 \circ \vec{u}_2 = \frac{20}{81} - \frac{10}{81} - \frac{10}{81} = 0 \Rightarrow \vec{u}_1 \perp \vec{u}_2$$

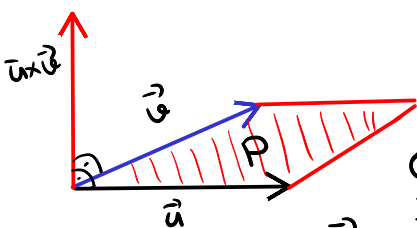
Def Векторски производ $\vec{u} \times \vec{v}$ вектора $\vec{u}$ и $\vec{v}$ је вектор т.д.

1) праваци $\vec{u} \times \vec{v} \perp \vec{u}, \vec{v}$

2) смер т.д. $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \times \vec{v})$ позитивно оријентисана

3) дужина

$$\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \sin \angle(\vec{u}, \vec{v}) = P_{\square}$$



Особине:

$$1) \vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$$

$$2) (\alpha \vec{u}) \times \vec{v} = \alpha (\vec{u} \times \vec{v})$$

$$3) (\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{w} = \vec{u} \times \vec{w} + \vec{v} \times \vec{w}$$

$$4) \vec{u} \times \vec{w} = 0 \Rightarrow \vec{u} \text{ и } \vec{w} \text{ колинеарни}$$

Def Мешовити производ вектора $\vec{u}, \vec{v}$ и $\vec{w}$ је

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = (\vec{u} \times \vec{v}) \circ \vec{w} \quad - \text{ број.}$$

Особине: 1) $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = [\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}] = [\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}]$

$$2) [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = -[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}]$$

$$3) [\alpha \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \alpha [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$$

$$4) [\vec{u}_1 + \vec{u}_2, \vec{v}, \vec{w}] = [\vec{u}_1, \vec{v}, \vec{w}] + [\vec{u}_2, \vec{v}, \vec{w}]$$

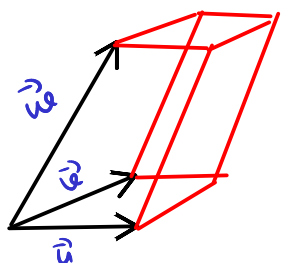
$$5) V_{\text{паралелепипеда}} = |[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]|$$

$$V_{\text{тетраедра}} = \frac{1}{6} |[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]|$$

$$6) [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 0 \Leftrightarrow \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \text{ колинеарни}$$

Двоstrуки векторски производ

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} = (\vec{u} \circ \vec{w}) \vec{v} - (\vec{v} \circ \vec{w}) \vec{u}$$



2.5. Наћи вектор $\vec{x}$ ако је $\vec{x} \cdot \vec{a} = \alpha$, $\vec{x} \cdot \vec{b} = \beta$, $\vec{x} \cdot \vec{c} = \gamma$, при чему су $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ некопланарни вектори, а $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ задати ненула скалари.

$$(\vec{x} \cdot \vec{a}) \cdot \beta = \alpha \beta = \alpha \cdot (\vec{x} \cdot \vec{b})$$

$$\vec{x} \cdot (\beta \vec{a}) = \vec{x} \cdot (\alpha \vec{b})$$

$$\vec{x} \cdot (\beta \vec{a} - \alpha \vec{b}) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{x} \perp \beta \vec{a} - \alpha \vec{b}}$$

$$(\vec{x} \cdot \vec{a}) \cdot \gamma = \alpha \gamma = \alpha \cdot (\vec{x} \cdot \vec{c})$$

$$\vec{x} \cdot (\gamma \vec{a}) = \vec{x} \cdot (\alpha \vec{c})$$

$$\vec{x} \cdot (\gamma \vec{a} - \alpha \vec{c}) = 0$$

$$\boxed{\vec{x} \perp \gamma \vec{a} - \alpha \vec{c}}$$

Да ли су $\beta \vec{a} - \alpha \vec{b}$ и $\gamma \vec{a} - \alpha \vec{c}$ неколинеарни?

$$(\beta \vec{a} - \alpha \vec{b}) \times (\gamma \vec{a} - \alpha \vec{c}) \neq \vec{0}?$$

$$\cancel{\beta \gamma \vec{a} \times \vec{a}} - \alpha \beta \vec{a} \times \vec{c} - \alpha \gamma \vec{b} \times \vec{a} + \alpha^2 \vec{b} \times \vec{c} \neq \vec{0} \quad / \cdot \vec{a}$$

$$= \vec{0} - \alpha \beta [\vec{a}, \vec{c}, \vec{a}] - \alpha \gamma [\vec{b}, \vec{a}, \vec{a}] + \alpha^2 [\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}] \neq \vec{0}?$$

$$\alpha^2 [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] \neq \vec{0} \quad \checkmark$$

$\neq 0$ неколинеарни

$$\Rightarrow \vec{x} = \lambda (\beta \vec{a} - \alpha \vec{b}) \times (\gamma \vec{a} - \alpha \vec{c}) \quad / \cdot \vec{a}$$

$$\alpha = \vec{x} \cdot \vec{a} = \lambda \cdot \alpha^2 [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda = \frac{1}{\alpha [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]}}$$

$$\vec{x} = \frac{1}{\alpha [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]} (-\alpha \beta \vec{a} \times \vec{c} - \alpha \gamma \vec{b} \times \vec{a} + \alpha^2 \vec{b} \times \vec{c})$$

$$\boxed{\vec{x} = \frac{1}{[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]} (\gamma \vec{a} \times \vec{b} + \alpha \vec{b} \times \vec{c} + \beta \vec{c} \times \vec{a})}$$

2.6. Одредити вектор $\vec{x}$ ако важи $\vec{u} \cdot \vec{x} = \alpha$, $\vec{u} \times \vec{x} = \vec{v}$.

$$\vec{v} \times \vec{u} = (\vec{u} \times \vec{x}) \times \vec{u} = (\vec{u} \cdot \vec{u}) \vec{x} - (\vec{x} \cdot \vec{u}) \vec{u} = \|\vec{u}\|^2 \vec{x} - \alpha \vec{u}$$

$$\|\vec{u}\|^2 \vec{x} = \alpha \vec{u} + \vec{v} \times \vec{u}$$

$$1) \|\vec{u}\| \neq 0 \Rightarrow \boxed{\vec{x} = \frac{1}{\|\vec{u}\|^2} (\alpha \vec{u} + \vec{v} \times \vec{u})}$$

$$2) \|\vec{u}\| = 0 \Rightarrow \underline{\vec{u} = \vec{0}} \Rightarrow 0 = \alpha, \quad \vec{v} = \vec{0}$$

2.1) $\alpha \neq 0$ и $\vec{v} \neq \vec{0} \Rightarrow$ нема решења

2.2) $\underline{\alpha = 0}$ и $\underline{\vec{v} = \vec{0}} \Rightarrow \boxed{\forall \vec{x} \in V}$

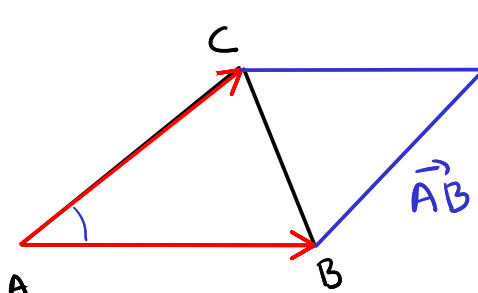
* Векторски и мешовити производ у $\mathbb{R}^3$

$$\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k} \\ \vec{a} = (a_1, a_2, a_3), \quad \vec{b} = (b_1, b_2, b_3), \quad \vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1)$$

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

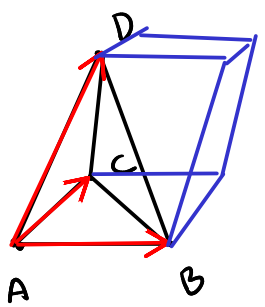
2.7. Ако су $A(0, 1, 1)$, $B(2, 3, 5)$, $C(3, 1, 4)$ темена троугла, израчунати његову површину.



$$\vec{AB} = "B - A" = (2, 2, 4) \\ \vec{AC} = "C - A" = (3, 0, 3) \\ \vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 3 \end{vmatrix} = (6, 6, -6) \\ \|\vec{AB} \times \vec{AC}\| = \sqrt{6^2 + 6^2 + 6^2} = 6\sqrt{3}$$

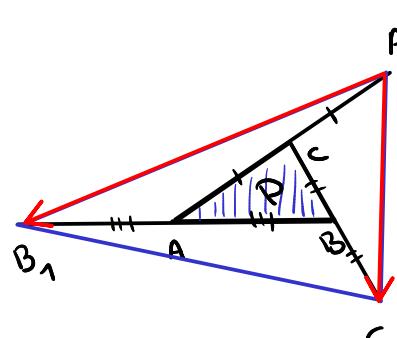
$$P_{\square} = \|\vec{AB} \times \vec{AC}\| = 6\sqrt{3}, \quad P_{\Delta} = \frac{1}{2} \|\vec{AB} \times \vec{AC}\| = 3\sqrt{3}$$

2.8. Ако су $A(0, 1, 1)$, $B(1, 2, 6)$, $C(0, 1, 2)$ и $D(2, 0, 2)$ темена тетраедра, израчунати његову запремину.



$$\vec{AB} = (1, 1, 5), \quad \vec{AC} = (0, 0, 1), \quad \vec{AD} = (2, -1, 1) \\ V_{\text{паралелепипеда}} = |[\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}]| = 3 \\ V_{\text{тетраедра}} = \frac{1}{6} |[\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}]| = \frac{1}{2} \\ [\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}] = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 3$$

2.9. Дат је троугао ABC површине P . Нека су тачке A_1, B_1, C_1 такве да важи $\vec{CA_1} = \vec{AC}$, $\vec{BC_1} = \vec{CB}$, $\vec{AB_1} = \vec{BA}$. Колика је површина троугла $A_1B_1C_1$?

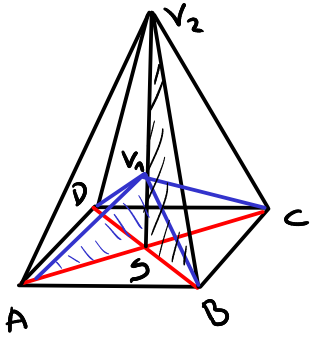


$$P = P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \|\vec{AB} \times \vec{AC}\| \\ P_{\Delta A_1B_1C_1} = \frac{1}{2} \|\vec{A_1B_1} \times \vec{A_1C_1}\| \\ = \frac{1}{2} \|(\vec{A_1A} + \vec{AB_1}) \times (\vec{A_1C} + \vec{CC_1})\| \\ = \frac{1}{2} \|(-2\vec{AC} - \vec{AB}) \times (-\vec{AC} + 2\vec{CB})\| \\ = \frac{1}{2} \|(-2\vec{AC} - \vec{AB}) \times (-3\vec{AC} + 2\vec{AB})\| = \frac{1}{2} \|-4\vec{AC} \times \vec{AB} + 3\vec{AB} \times \vec{AC}\|$$

$\vec{CB} = \vec{CA} + \vec{AB} = -\vec{AC} + \vec{AB}$

$$= \frac{1}{2} \| 4 \vec{AB} \times \vec{AC} + 3 \vec{AB} \times \vec{AC} \| = 7 \cdot \frac{1}{2} \| \vec{AB} \times \vec{AC} \| = \boxed{7P}$$

2.10. Дате су две праве пирамиде са истом основом, квадратом $ABCD$ ивице a . Нека су V_1 и V_2 врхови датих пирамида и угао између правих AV_1 и BV_2 једнак $\frac{\pi}{4}$. Ако је висина једне пирамиде једнака a одредити висину друге пирамиде.



$$\angle(AV_1, BV_2) = \frac{\pi}{4}, \quad \|\vec{AB}\| = \|\vec{AD}\| = a, \quad \|\vec{SV}_1\| = a$$

$$\begin{aligned} \vec{AV}_1 \circ \vec{BV}_2 &= (\vec{AS} + \vec{SV}_1) \circ (\vec{BS} + \vec{SV}_2) \\ &= \underbrace{\vec{AS} \circ \vec{BS}}_{=0} + \underbrace{\vec{AS} \circ \vec{SV}_2}_{=0} + \underbrace{\vec{SV}_1 \circ \vec{BS}}_{=0} + \vec{SV}_1 \circ \vec{SV}_2 \\ &= \vec{SV}_1 \circ \vec{SV}_2 = \|\vec{SV}_1\| \cdot \|\vec{SV}_2\| \cdot \cos 0 = a \cdot \|\vec{SV}_2\| \end{aligned}$$

$$\vec{AV}_1 \circ \vec{BV}_2 = \|\vec{AV}_1\| \cdot \|\vec{BV}_2\| \cdot \cos \angle(\vec{AV}_1, \vec{BV}_2) = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \cdot \|\vec{BV}_2\| \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\begin{aligned} \|\vec{AS}\|^2 &= \vec{AS} \circ \vec{AS} = \frac{1}{2} \vec{AC} \circ \frac{1}{2} \vec{AC} = \frac{1}{4} (\vec{AB} + \vec{BC}) \circ (\vec{AB} + \vec{BC}) \\ &= \frac{1}{4} (\|\vec{AB}\|^2 + \|\vec{BC}\|^2) = \frac{1}{4} (a^2 + a^2) = \frac{a^2}{2} \Rightarrow \|\vec{AS}\| = \frac{a}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

$$\|\vec{AV}_1\|^2 = \|\vec{AS}\|^2 + \|\vec{SV}_1\|^2 = \frac{a^2}{2} + a^2 = \frac{3a^2}{2} \Rightarrow \|\vec{AV}_1\| = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow a \cdot \|\vec{SV}_2\| = \vec{AV}_1 \circ \vec{BV}_2 = \frac{a\sqrt{3}}{2} \|\vec{BV}_2\| \Rightarrow \|\vec{SV}_2\| = \frac{\sqrt{3}}{2} \|\vec{BV}_2\|$$

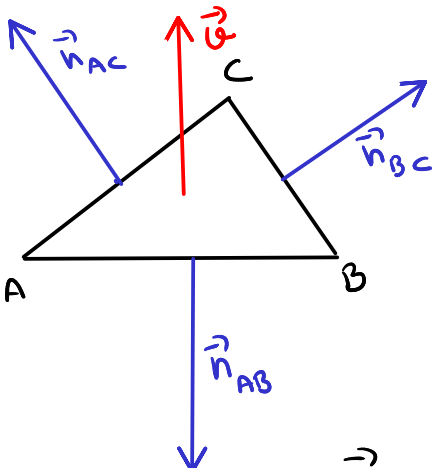
Питагора
 $\triangle BS V_2$

$$\|\vec{BV}_2\|^2 = \|\vec{BS}\|^2 + \|\vec{SV}_2\|^2 = \frac{a^2}{2} + \frac{3}{4} \|\vec{BV}_2\|^2$$

$$\frac{1}{4} \|\vec{BV}_2\|^2 = \frac{a^2}{2} \Rightarrow \|\vec{BV}_2\|^2 = 2a^2 \Rightarrow \|\vec{BV}_2\| = a\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \|\vec{SV}_2\| = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a\sqrt{2} \Rightarrow \|\vec{SV}_2\| = \frac{a\sqrt{6}}{2}$$

2.11. Нека је ABC произвољан троугао у равни. Доказати да је збир три вектора који су спољашње нормале на ивице троугла, а чији је интензитет једнак дужини одговарајуће ивице, једнак нули.



$$\vec{n}_{AB} \perp \vec{AB}, \quad \|\vec{n}_{AB}\| = \|\vec{AB}\|$$

и аналогно за остале стране

Нека је $\vec{e}$ јединични вектор нормалан на равни ABC

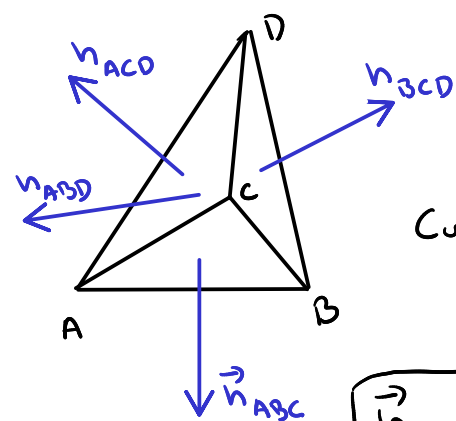
$$\vec{n}_{AB} \perp \vec{AB}, \quad \vec{e} \Rightarrow \vec{n}_{AB} = \vec{AB} \times \vec{e}$$

$$\|\vec{n}_{AB}\| = \|\vec{AB} \times \vec{e}\| = \|\vec{AB}\| \cdot \underbrace{\|\vec{e}\|}_{=1} \cdot \underbrace{\sin \frac{\pi}{2}}_{=1} = \|\vec{AB}\| \checkmark$$

$$\text{Аналогно } \Rightarrow \vec{n}_{BC} = \vec{BC} \times \vec{e}, \quad \vec{n}_{AC} = \vec{CA} \times \vec{e}$$

$$\begin{aligned} \vec{n}_{AB} + \vec{n}_{BC} + \vec{n}_{AC} &= \vec{AB} \times \vec{e} + \vec{BC} \times \vec{e} + \vec{CA} \times \vec{e} \\ &= (\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA}) \times \vec{e} = \vec{0} \times \vec{e} = \vec{0} \end{aligned}$$

2.12. Нека је $ABCD$ тетраедар. Доказати да је збир четири вектора који су спољашње нормале на пљосни тетраедра, а интензитет им је једнак површини одговарајуће пљосни, једнак нули.



$$\vec{n}_{ABC} = \frac{1}{2} \vec{AC} \times \vec{AB}$$

$$\|\vec{n}_{ABC}\| = \frac{1}{2} \|\vec{AC} \times \vec{AB}\| = P_{\triangle ABC} \quad \checkmark$$

Слично, $\vec{n}_{ACD} = \frac{1}{2} \vec{AD} \times \vec{AC}$, $\vec{n}_{BCD} = \frac{1}{2} \vec{BC} \times \vec{BD}$

$$\vec{n}_{ABD} = \frac{1}{2} \vec{BD} \times \vec{BA}$$

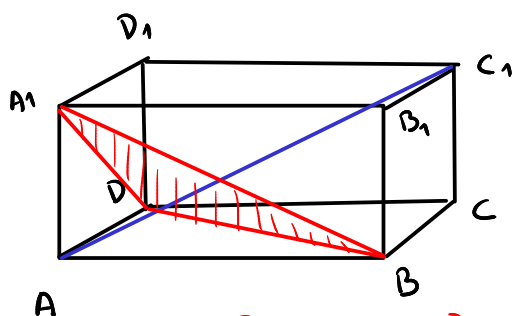
$$\vec{n}_{ABC} + \vec{n}_{ACD} + \vec{n}_{BCD} + \vec{n}_{ABD}$$

$$= \frac{1}{2} \vec{AC} \times \vec{AB} + \frac{1}{2} \vec{AD} \times \vec{AC} + \frac{1}{2} \vec{BC} \times \vec{BD} + \frac{1}{2} \vec{BD} \times \vec{BA}$$

$$= \frac{1}{2} \vec{AC} \times (\vec{AB} - \vec{AD}) + \frac{1}{2} \vec{BD} \times (\vec{BA} - \vec{BC})$$

$$= \frac{1}{2} \vec{AC} \times \vec{DB} + \frac{1}{2} \vec{BD} \times \vec{CA} = \frac{1}{2} \vec{AC} \times \vec{DB} + \frac{1}{2} \vec{DB} \times \vec{AC} = \vec{0}$$

2.13. Ако је у правоуглом паралелепипеду $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ дијагонала AC_1 нормална на раван која садржи тачке A_1, B, D доказати да је тај паралелепипед коцка.



Докажујемо $\|\vec{AB}\| = \|\vec{BC}\| = \|\vec{AA}_1\|$.

$AC_1 \perp \text{PABAN } A_1BD$
 $\Rightarrow \vec{AC}_1 \perp \vec{A_1B}$ и $\vec{AC}_1 \perp \vec{A_1D}$

1) $0 = \vec{AC}_1 \cdot \vec{A_1B}$
 $= (\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CC}_1) \cdot (\vec{A_1A} + \vec{AB})$

$$= \underbrace{\vec{AB} \cdot \vec{A_1A}}_{=0} + \vec{AB} \cdot \vec{AB} + \underbrace{\vec{BC} \cdot \vec{A_1A}}_{=0} + \underbrace{\vec{BC} \cdot \vec{AB}}_{=0} + \underbrace{\vec{CC}_1 \cdot \vec{A_1A}}_{\text{"AA}_1} + \underbrace{\vec{CC}_1 \cdot \vec{AB}}_{=0}$$

$$\Rightarrow 0 = \|\vec{AB}\|^2 - \|\vec{AA}_1\|^2 \Rightarrow \boxed{\|\vec{AB}\| = \|\vec{AA}_1\|}$$

2) $0 = \vec{AC}_1 \cdot \vec{A_1D} = (\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CC}_1) \cdot (\vec{A_1A} + \vec{AD})$

$$0 = \|\vec{BC}\|^2 - \|\vec{AA}_1\|^2 \Rightarrow \boxed{\|\vec{BC}\| = \|\vec{AA}_1\|}$$

2.14. Ако су A, B, C фиксиране неколинеарне тачке и P произвољна тачка, доказати да је $\vec{PA} \times \vec{AB} = \vec{PB} \times \vec{BC} = \vec{PC} \times \vec{CA}$ ако и само је P тежиште троугла ABC .

$$\vec{PA} \times \vec{AB} = \vec{PA} \times (\vec{AP} + \vec{PB}) = \underbrace{\vec{PA} \times \vec{AP}}_{=0} + \vec{PA} \times \vec{PB} = \vec{PA} \times \vec{PB}$$

Аналогно, $\vec{PB} \times \vec{BC} = \vec{PB} \times \vec{PC}$, $\vec{PC} \times \vec{CA} = \vec{PC} \times \vec{PA}$

Докажујемо:

$$\vec{PA} \times \vec{PB} = \vec{PB} \times \vec{PC} = \vec{PC} \times \vec{PA} \Leftrightarrow P \text{ тежиште } \triangle ABC$$

$\boxed{\Leftarrow}$ Означимо са T тежиште $\triangle ABC \Rightarrow \vec{OT} = \frac{1}{3}(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC})$

Претп. да је $P \equiv T$.

$$\Rightarrow \vec{O} = \vec{PT} = \frac{1}{3}(\vec{PA} + \vec{PB} + \vec{PC}) \Rightarrow \vec{PB} = -\vec{PA} - \vec{PC} \quad (*)$$

$$\vec{PA} \times \vec{PB} \stackrel{(*)}{=} \vec{PA} \times (-\vec{PA} - \vec{PC}) = -\vec{PA} \times \vec{PC} = \vec{PC} \times \vec{PA} \quad \checkmark$$

$$\vec{PB} \times \vec{PC} \stackrel{(*)}{=} (-\vec{PA} - \vec{PC}) \times \vec{PC} = -\vec{PA} \times \vec{PC} = \vec{PC} \times \vec{PA}$$

$$\Rightarrow \vec{PA} \times \vec{PB} = \vec{PC} \times \vec{PA} = \vec{PB} \times \vec{PC}$$

$\boxed{\Rightarrow}$ Знамо $\vec{PA} \times \vec{PB} \stackrel{1}{=} \vec{PB} \times \vec{PC} \stackrel{2}{=} \vec{PC} \times \vec{PA}$

Показујемо да је $P \equiv T$.

$$* \vec{PA} \times \vec{PB} \stackrel{1}{=} \vec{PB} \times \vec{PC}$$

$$\vec{PA} \times \vec{PB} - \vec{PB} \times \vec{PC} = \vec{0}$$

$$\vec{PA} \times \vec{PB} + \underbrace{\vec{PB} \times \vec{PB}}_{=\vec{0}} + \vec{PC} \times \vec{PB} = \vec{0}$$

$$\frac{1}{3}(\vec{PA} + \vec{PB} + \vec{PC}) \times \vec{PB} = \vec{0}$$

$$\boxed{\vec{PT} \times \vec{PB} = \vec{0}}$$

$$* \vec{PB} \times \vec{PC} \stackrel{2}{=} \vec{PC} \times \vec{PA}$$

$$\frac{1}{3}(\vec{PA} + \vec{PB} + \vec{PC}) \times \vec{PC} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{PT} \times \vec{PC} = \vec{0}}$$

$$* \vec{PA} \times \vec{PB} \stackrel{3}{=} \vec{PC} \times \vec{PA}$$

$$\frac{1}{3}(\vec{PA} + \vec{PB} + \vec{PC}) \times \vec{PA} = \vec{0}$$

$$\boxed{\vec{PT} \times \vec{PA} = \vec{0}}$$

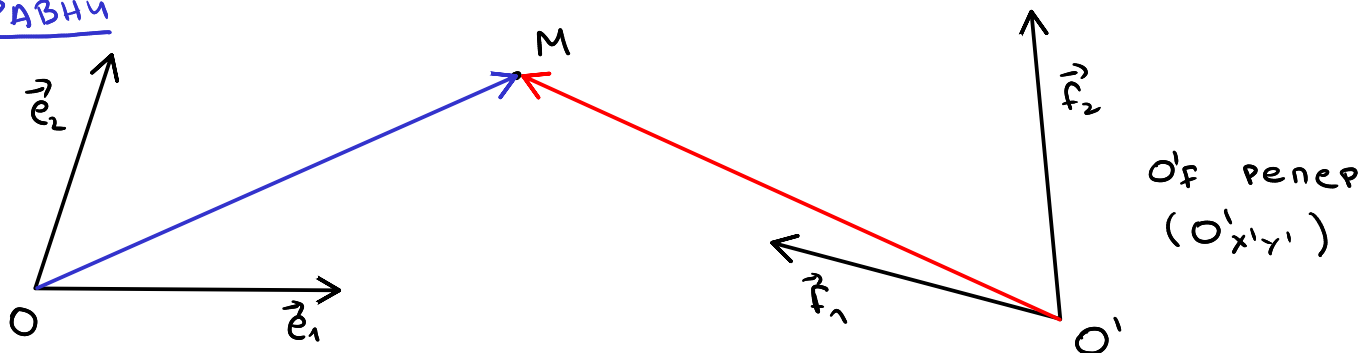
$\Rightarrow \vec{PT}$ колинеаран са $\vec{PA}$, $\vec{PB}$ и $\vec{PC}$ или $\vec{PT} = \vec{0}$

$\Downarrow$
A, B, C, T колинеарне $\Downarrow \Rightarrow \vec{PT} = \vec{0}$

$\Rightarrow$ P тежиште $\triangle ABC$

3 Трансформације координата

У РАВНИ



Oe репер (Ox, y)

$$\left. \begin{aligned} [M]_{oe} &= [\vec{OM}]_e = [x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2]_e = (x, y) \\ [M]_{o'f} &= [\vec{O'M}]_f = [x'\vec{f}_1 + y'\vec{f}_2]_f = (x', y') \end{aligned} \right\} \text{ЗНАЧИМА НАС ВЕЗА ОБИХ КООРДИНАТА}$$

$$[\vec{f}_1]_e = [a_{11}\vec{e}_1 + a_{21}\vec{e}_2]_e = (a_{11}, a_{21})$$

$$[\vec{f}_2]_e = [a_{12}\vec{e}_1 + a_{22}\vec{e}_2]_e = (a_{12}, a_{22})$$

$$[O']_{oe} = [\vec{OO'}]_e = [a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2]_e = (a, b)$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \Leftrightarrow \underline{X = C X' + A}$$

$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$
 $[\vec{f}_1]_e$ $[\vec{f}_2]_e$ $[O']_{oe}$

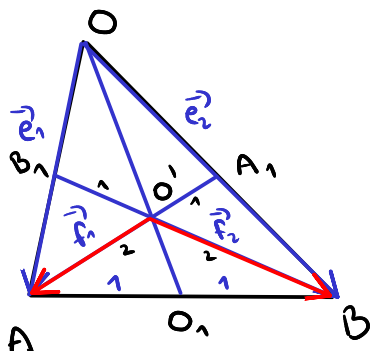
$$C_{ef} = C_{fe}^{-1}$$

МАТРИЦА ПРЕЛАСКА
 $C_{ef} = C$ СА Е НА F

$$* X = C X' + A \Rightarrow C X' = X - A \Rightarrow X' = C^{-1} X - C^{-1} A$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = C^{-1} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - C^{-1} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

3.1. Тежиште троугла OAB је тачка O' . У равни троугла изабрана су два афина репера: репер Oxy са почетком у тачки O и координатним векторима $\vec{e}_1 = \vec{OA}$ и $\vec{e}_2 = \vec{OB}$ и репер $O'x'y'$ са почетком у тачки O' и координатним векторима $\vec{f}_1 = \vec{O'A}$ и $\vec{f}_2 = \vec{O'B}$. Одредити везу координата (x, y) и (x', y') као и координате средишта страница троугла OAB у односу на репер $O'x'y'$.



$$[O']_{oe} = [\vec{OO'}]_e = \left[\frac{1}{3}\vec{e}_1 + \frac{1}{3}\vec{e}_2 \right]_e = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right)$$

$$O' \text{ тежиште } \triangle OAB \Rightarrow \vec{OO'} = \frac{1}{3} (\vec{OO} + \vec{OA} + \vec{OB})$$

$$[\vec{f}_1]_e = [\vec{O'A}]_e = [\vec{OO} + \vec{OA}]_e = \left[-\frac{1}{3}\vec{e}_1 - \frac{1}{3}\vec{e}_2 + \vec{e}_1 \right]_e = \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3} \right)$$

$$[\vec{f}_2]_e = [\vec{O'B}]_e = [\vec{OO} + \vec{OB}]_e = \left[-\frac{1}{3}\vec{e}_1 - \frac{1}{3}\vec{e}_2 + \vec{e}_2 \right]_e = \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right)$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/3 \\ 1/3 \end{bmatrix} \quad (*)$$

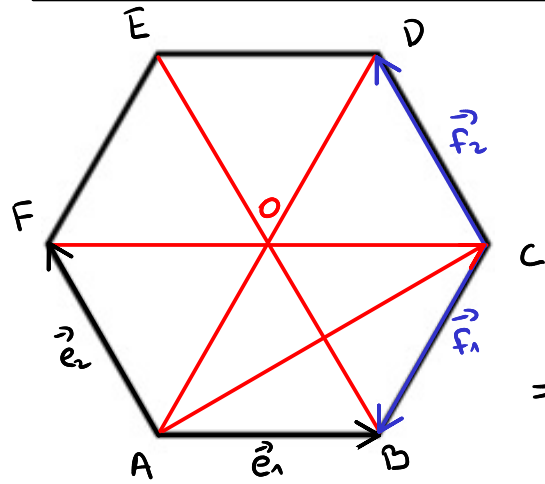
$$* C = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow C^{-1} = \frac{1}{\det C} \text{adj}(C) \Rightarrow C = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$[O_1]_{O_1 F} = [O_1^T O_1]_F \stackrel{(1.4)}{=} [\frac{1}{2} O_1^T A + \frac{1}{2} O_1^T B]_F = [\frac{1}{2} \vec{F}_1 + \frac{1}{2} \vec{F}_2]_F = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$$

$$[A_1]_{O_1 F} = [O_1^T A_1]_F \stackrel{(1.3)}{=} [\frac{1}{2} A O_1^T]_F = [-\frac{1}{2} O_1^T A]_F = (-\frac{1}{2}, 0)$$

$$[B_1]_{O_1 F} = [O_1^T B_1]_F \stackrel{(1.3)}{=} [\frac{1}{2} B O_1^T]_F = [-\frac{1}{2} O_1^T B]_F = (0, -\frac{1}{2})$$

3.2. Нека је $ABCDEF$ правилан шестоугао. Репер Axy има координатне векторе $\vec{e}_1 = \vec{AB}$, $\vec{e}_2 = \vec{AF}$, а репер $Cx'y'$ координатне векторе $\vec{f}_1 = \vec{CB}$, $\vec{f}_2 = \vec{CD}$. Одредити формуле које представљају везу координата (x, y) и (x', y') , њима инверзне формуле, као и координате темена шестоугла у оба репера.



$$[C]_{Ae} = [A^T C]_e = [\vec{AB} + \vec{BO} + \vec{OC}]_e = [2\vec{e}_1 + \vec{e}_2]_e = (2, 1)$$

$$[\vec{f}_1]_e = [C^T B]_e = [C^T A + \vec{AB}]_e = [-2\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_1]_e = (-1, -1)$$

$$[\vec{f}_2]_e = [C^T D]_e = (0, 1)$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow C^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

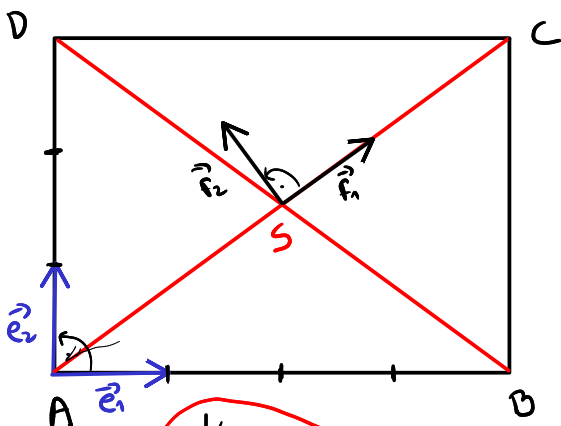
$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$[Ae]_{(x,y)}$ $A(0,0), B(1,0), C(2,1), D(2,2), E(1,2), F(0,1)$

$[C_F]_{(x',y')}$ $A(2,1), B(1,0), C(0,0), D(0,1), E(1,2), F(2,2)$

↓ ПРОВЕРА ФОРМУЛА: $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \checkmark$ $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

3.3. Дат је правоугаоник $ABCD$ чије ивице имају дужине $AB = 4, BC = 3$, а тачка S је центар тог правоугаоника. Дата су два ортонормирана репера, исте оријентације: репер Axy има x осу у правцу вектора $\vec{AB}$ и y осу у правцу вектора $\vec{AD}$, а репер $Sx'y'$ има x' осу у правцу вектора $\vec{SC}$. Одредити везу координата (x, y) и (x', y') , као и координате темена правоугаоника у оба координатна репера.



ОРТОНОРМИРАНИ РЕПЕР
($\Rightarrow$ ОРТОГОНАЛНИ И НОРМИРАНИ
(ПРАВОУГЛНИ) (ВЕКТОРИ ДУЖИНЕ 1))

$$\vec{e}_1 = \frac{1}{4} \vec{AB} \Rightarrow \vec{AB} = 4\vec{e}_1, \vec{AD} = 3\vec{e}_2$$

$$[S]_{Ae} = [A^T S]_e = [\frac{1}{2} (\vec{AB} + \vec{BC})]_e = (2, 3/2)$$

$$[\vec{f}_1]_e = \frac{\vec{SC}}{\|\vec{SC}\|} = \frac{\vec{AC}}{\|\vec{AC}\|} = \frac{4\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2}{5} = (\frac{4}{5}, \frac{3}{5})$$

$$\cos \alpha = \frac{4}{5} \quad \sin \alpha = \frac{3}{5}$$

$$\Rightarrow [\vec{f}_2]_e = [\cos(\alpha + \frac{\pi}{2}), \sin(\alpha + \frac{\pi}{2})]_e = (-\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/5 & -3/5 \\ 3/5 & 4/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 3/2 \end{bmatrix}$$

$$C \text{ је ортогонална матрица} \Rightarrow C^{-1} = C^T = \begin{bmatrix} 4/5 & 3/5 \\ -3/5 & 4/5 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/5 & 3/5 \\ -3/5 & 4/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5/2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Матрица преласка
са ортонорм. базе
на ортонорм. базу
је ортогонална
тј. $C \cdot C^T = E$
 $\Rightarrow C^{-1} = C^T$

Ae $A(0,0), B(4,0), C(4,3), D(0,3)$

Sf $A: \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5/2 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A(-\frac{5}{2}, 0)$

$B: \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/5 & 3/5 \\ -3/5 & 4/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5/2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16/5 \\ -12/5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5/2 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow B(\frac{7}{10}, -\frac{12}{5})$

и аналогно за $C(\frac{5}{2}, 0)$ и $D(-\frac{7}{10}, \frac{12}{5})$

3.4. Дате су координате тачака $A(2,1), B(3,0)$ и $C(1,4)$ у односу на афини репер Oxy у равни. У односу на нови афини репер $O'x'y'$ те исте тачке имају координате $A(1,6), B(1,9)$ и $C(3,1)$. Изразити координате (x,y) произвољне тачке M у реперу Oxy помоћу координата (x',y') те исте тачке у новом реперу $O'x'y'$.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}$$

$A \mapsto A': \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix} \Rightarrow a + 6b + e = 2, c + 6d + f = 1$

$B \mapsto B': \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix} \Rightarrow a + 9b + e = 3, c + 9d + f = 0$

$C \mapsto C': \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix} \Rightarrow 3a + b + e = 1, 3c + d + f = 4$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 2/3 & -1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1/3 \\ 7/3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{rcl} a + 6b + e = 2 & c + 6d + f = 1 \\ 3b = 1 & 3d = -1 \\ 2a - 5b = -1 & 2c - 5d = 3 \end{array}$$

$$b = 1/3$$

$$d = -1/3$$

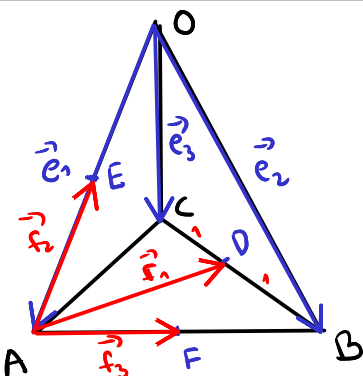
$$2a = \frac{2}{3} \Rightarrow a = \frac{1}{3}$$

$$2c = 4/3 \Rightarrow c = 2/3$$

$$e = -1/3$$

$$f = 1 - \frac{2}{3} \times 2 \Rightarrow f = 7/3$$

3.5. Дат је тетраедар $OABC$. Афини репер $Oxyz$ има почетак у темену O , а координатни вектори су $\vec{e}_1 = \vec{OA}, \vec{e}_2 = \vec{OB}$ и $\vec{e}_3 = \vec{OC}$. Афини репер $Ax'y'z'$ има почетак у темену A тетраедра, а његови координатни вектори су $\vec{f}_1 = \vec{AD}, \vec{f}_2 = \vec{AE}$ и $\vec{f}_3 = \vec{AF}$, где су D, E и F средишта ивица BC, OA и AB . Изразити координате (x,y,z) произвољне тачке M у реперу $Oxyz$ помоћу координата (x',y',z') исте тачке у реперу $Ax'y'z'$. Одредити инверзне формуле као и координате темена тетраедра у односу на репер $Ax'y'z'$.



$$[A]_{Oe} = [OA]_e = [\vec{e}_1]_e = (1, 0, 0)$$

$$[\vec{f}_1]_e = [AD]_e = [AO + OD]_e \stackrel{1.4}{=} [-\vec{e}_1 + \frac{1}{2}\vec{e}_2 + \frac{1}{2}\vec{e}_3] = (-1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$$

$$[\vec{f}_2]_e = [\frac{1}{2}AO]_e = (-\frac{1}{2}, 0, 0)$$

$$[\vec{f}_3]_e = [AO + OF]_e \stackrel{1.4}{=} [-\vec{e}_1 + \frac{1}{2}\vec{e}_1 + \frac{1}{2}\vec{e}_2]_e = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$x = -x' - \frac{1}{2}y' - \frac{1}{2}z' + 1$$

$$y = \frac{1}{2}x' + \frac{1}{2}z'$$

$$z = \frac{1}{2}x'$$

$$\Rightarrow x' = 2z$$

$$y = z + \frac{1}{2} z' \Rightarrow z' = 2y - 2z$$

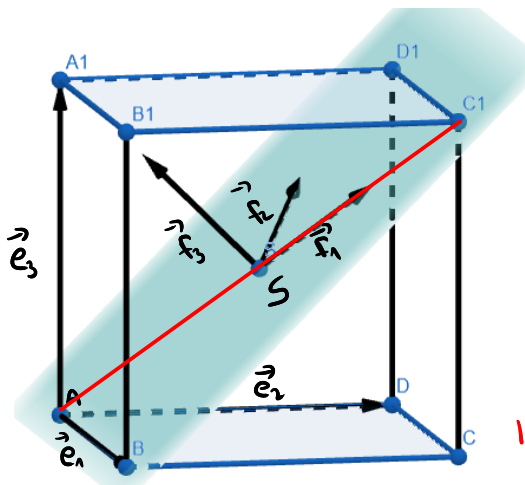
$$x = -2z - \frac{1}{2} y' + z - y + 1 \Rightarrow y' = -2x - 2y - 2z + 2$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -2 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (*)$$

Oe $O(0,0,0)$, $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$, $C(0,0,1)$

Af $(*) \Rightarrow O(0,2,0)$, $A(0,0,0)$, $B(0,0,2)$, $C(2,0,-2)$

3.6. Дата је коцка $ABCA_1B_1C_1D_1$ ивице 1, са центром S . Ортонормирани репер $Axyz$ има базне векторе $\vec{e}_1 = \vec{AB}$, $\vec{e}_2 = \vec{AD}$, $\vec{e}_3 = \vec{AA_1}$. У ортонормираном реперу $Sx'y'z'$, исте оријентације, дијагонална раван ABC_1D_1 има једначину $z' = 0$, тачка C_1 је на позитивном делу x' осе, а тачка D_1 има позитивну x' и y' координату. Одредити формуле трансформација координата и координате темена коцке у оба репера.



$z' = 0 \Rightarrow Sx'y'$ РАВАН $\Rightarrow \vec{f}_1$ и $\vec{f}_2 \in ABC_1D_1$
 C_1 и поз. делу x' осе $\Rightarrow \vec{f}_1 = \frac{\vec{SC_1}}{\|\vec{SC_1}\|}$

$$[S]_{Ae} = [\vec{AS}]_e = \left[\frac{1}{2} \vec{AC_1} \right]_e$$

$$= \left[\frac{1}{2} (\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CC_1}) \right]_e = \left[\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \right]_e$$

$$[\vec{f}_1]_e = \left[\frac{\vec{AC_1}}{\|\vec{AC_1}\|} \right]_e = \left[\frac{\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3}{\sqrt{3}} \right]_e = \left[\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right]_e$$

$$\|\vec{AC_1}\| = \sqrt{\|\vec{e}_1\|^2 + \|\vec{e}_2\|^2 + \|\vec{e}_3\|^2} = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$$

$$\vec{f}_3 \perp ABC_1D_1 \Rightarrow \vec{f}_3 \perp \vec{AB}, \vec{f}_3 \perp \vec{AC_1} \Rightarrow [\vec{f}_3]_e = \left[\frac{\vec{AB} \times \vec{AC_1}}{\|\vec{AB} \times \vec{AC_1}\|} \right]_e = \left[\frac{\vec{e}_3 - \vec{e}_2}{\sqrt{2}} \right]_e$$

$$\vec{AB} \times \vec{AC_1} = \vec{e}_1 \times (\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3) = \vec{e}_3 - \vec{e}_2 \Rightarrow [\vec{f}_3]_e = \left[\left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right]_e$$

$$\Rightarrow \vec{f}_2 = \vec{f}_3 \times \vec{f}_1 = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \end{vmatrix} = \left[\left(-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}} \right) \right]_e$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

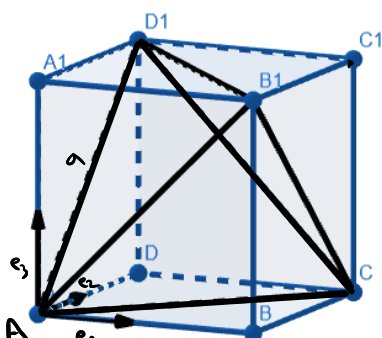
ВАЖИ $C^{-1} = C^T$ због
 ОРТОНОРМИРАНИХ РЕПЕРА

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (*)$$

Ae $A(0,0,0)$, $B(1,0,0)$, $C(1,1,0)$, $D(0,1,0)$
 $A_1(0,0,1)$, $B_1(1,0,1)$, $C_1(1,1,1)$, $D_1(0,1,1)$

Sf добијено координате користећи $(*)$

3.8. У погодно одабраном ортонормираном реперу одредити координате темена а) правилног тетраедра ивице a ; б) правилног октаедра ивице d .

а)  $A_e: \vec{e}_1 = \frac{\vec{AB}}{\|\vec{AB}\|}, \vec{e}_2 = \frac{\vec{AD}}{\|\vec{AD}\|}, \vec{e}_3 = \frac{\vec{AA_1}}{\|\vec{AA_1}\|}$

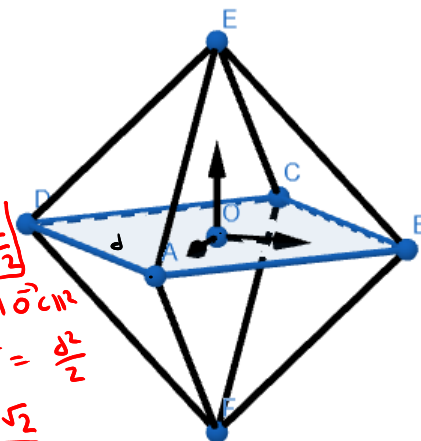
$\Rightarrow A(0,0,0), C(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{a}{\sqrt{2}}, 0)$
 $B_1(\frac{a}{\sqrt{2}}, 0, \frac{a}{\sqrt{2}}), D_1(0, \frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{a}{\sqrt{2}})$

нормала тетраедра
 $\|\vec{AB}\| = \frac{\|\vec{AC}\|}{\sqrt{2}} = \frac{a}{\sqrt{2}}$
 $\|\vec{AD}\| = \|\vec{AA_1}\|$
нормале кубике

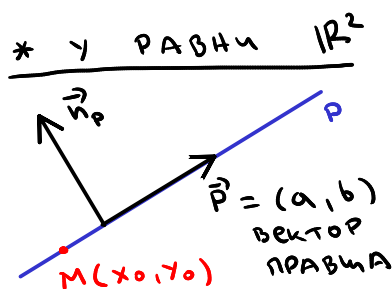
б) $O_e: \vec{e}_1 = \frac{\vec{OA}}{\|\vec{OA}\|}, \vec{e}_2 = \frac{\vec{OB}}{\|\vec{OB}\|}, \vec{e}_3 = \frac{\vec{OE}}{\|\vec{OE}\|}$

$\Rightarrow A(\frac{d}{\sqrt{2}}, 0, 0), B(0, \frac{d}{\sqrt{2}}, 0)$
 $C(-\frac{d}{\sqrt{2}}, 0, 0), D(0, -\frac{d}{\sqrt{2}}, 0)$
 $E(0, 0, \frac{d}{\sqrt{2}}), F(0, 0, -\frac{d}{\sqrt{2}})$

$\|\vec{OA}\| = \|\vec{OB}\|$
 $= \frac{\|\vec{AC}\|}{2} = \frac{d\sqrt{2}}{2} = \frac{d}{\sqrt{2}}$
 $\|\vec{OE}\|^2 = \|\vec{CE}\|^2 - \|\vec{OC}\|^2$
 $= d^2 - (\frac{d}{\sqrt{2}})^2 = \frac{d^2}{2}$
 $\Rightarrow \|\vec{OE}\| = \frac{d}{\sqrt{2}}$



4 Тачка, права и раван



$P: \frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b}$

$x = at + x_0$
 $P: y = bt + y_0, t \in \mathbb{R}$

$y = kx + n$
 $k = \tan \alpha$
 $x = x_0$

$p: b(x-x_0) = a(y-y_0)$

$p: bx - ay + ay_0 - bx_0 = 0$

$p: Ax + By + C = 0$

$\Downarrow$
 ВЕКТОР НОРМАЛЕ $\vec{n}_p = (A, B)$

$\angle(\vec{p}, \vec{z}) \in [0, \pi]$

$\angle(p, z) \in [0, \pi/2]$

* $\vec{p} = (a, b), \vec{n}_p \perp \vec{p} \Rightarrow \vec{n}_p = (b, -a)$

* УГЛО ИЗМЕТЉУ ДВЕ ПРАВЕ p И z

$\cos \angle(p, z) = \left| \frac{\vec{p} \cdot \vec{z}}{\|\vec{p}\| \cdot \|\vec{z}\|} \right|$

* РАСТОЈАЊЕ ТАЧКЕ $M(x_0, y_0)$ ОД ПРАВЕ $p: Ax + By + C = 0$

$d(M, p) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

4.1. Одредити углове које права $p: 3x - 2y + 4 = 0$ гради са координатним осама.

$p: 3x - 2y + 4 = 0$

$\Rightarrow \vec{n}_p = (3, -2) \Rightarrow \vec{p} = (2, 3)$

$\cos \angle(p, O_x) = \frac{|\vec{p} \cdot \vec{O}_x|}{\|\vec{p}\| \cdot \|\vec{O}_x\|} = \frac{2}{\sqrt{13}}$

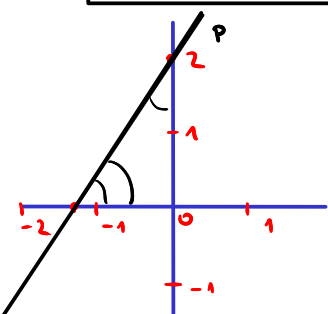
$\Rightarrow \angle(p, O_x) = \arccos \frac{2}{\sqrt{13}}$

$\begin{array}{r|l} x & 0 \\ \hline y & 2 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 0 & -4/3 \\ \hline 1 & 0 \end{array}$

$O_x: y = 0 \Rightarrow \vec{n}_{O_x} = (0, 1)$

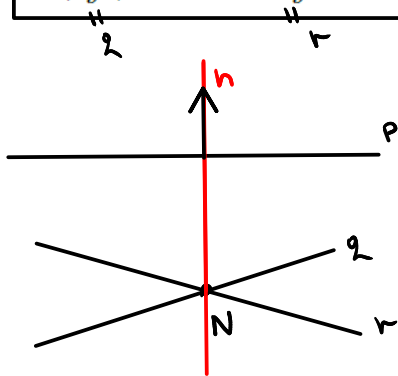
$O_y: x = 0 \Rightarrow \vec{n}_{O_y} = (1, 0)$

$\Rightarrow \vec{O}_x = (1, 0), \vec{O}_y = (0, 1)$



$$\cos \Delta(P, O_Y) = \frac{|\vec{p} \cdot \vec{O_Y}|}{\|\vec{p}\| \|\vec{O_Y}\|} = \frac{3}{\sqrt{13}} \Rightarrow \Delta(P, O_Y) = \arccos \frac{3}{\sqrt{13}}$$

4.2. Одредити једначину праве n која је нормална на праву $p: 2x + 3y - 4 = 0$ и која садржи пресек правих $x + y + 1 = 0$ и $x - y = 0$.



$$\begin{aligned} \ell: x + y + 1 &= 0 \\ r: x - y &= 0 \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} + \quad n \perp p \Rightarrow \vec{n} \perp \vec{p}$$

$$2x + 1 = 0$$

$$x = -1/2$$

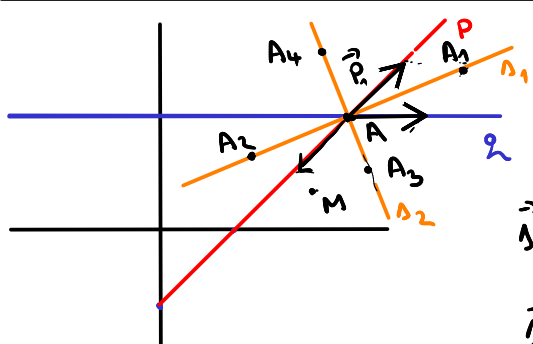
$$y = -1/2$$

$$N(-1/2, -1/2)$$

$$\vec{n}_p = (2, 3) = \vec{n}$$

$$n: \frac{x + 1/2}{2} = \frac{y + 1/2}{3}$$

4.3. Праве $p: y = x - 2$ и $q: y = 3$ разлажу раван на четири угла. а) Одредити једначине обе симетрале тих углова. б) Без цртања, у сваком од четири угла одредити по једну тачку A_1, A_2, A_3, A_4 . в) Одредити која од тачака A_i је у истом углу као тачка $M(1, 4)$. Проверити цртањем.



$$\text{I НАЧИН} \quad p \cap q = A(5, 3)$$

$$p: x - y - 2 = 0 \Rightarrow \vec{n}_p = (1, -1) \Rightarrow \vec{p} = (1, 1)$$

$$q: y - 3 = 0 \Rightarrow \vec{n}_q = (0, 1) \Rightarrow \vec{q} = (1, 0)$$

$$\vec{A}_1 = \frac{\vec{p}}{\|\vec{p}\|} + \frac{\vec{q}}{\|\vec{q}\|} = \frac{(1, 1)}{\sqrt{2}} + \frac{(1, 0)}{1} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + 1, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \parallel (1 + \sqrt{2}, 1)$$

$$\vec{A}_2 = \frac{\vec{p}}{\|\vec{p}\|} - \frac{\vec{q}}{\|\vec{q}\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \parallel (1 - \sqrt{2}, 1)$$

$$\Rightarrow \Delta_1: \frac{x - 5}{1 + \sqrt{2}} = \frac{y - 3}{1}, \quad \Delta_2: \frac{x - 5}{1 - \sqrt{2}} = \frac{y - 3}{1}$$

II НАЧИН

$$M(x_0, y_0) \in \Delta \text{ произв.} \quad d(M, p) = d(M, q)$$

$$\frac{|x_0 - y_0 - 2|}{\sqrt{1 + 1}} = \frac{|y_0 - 3|}{\sqrt{1}} \Rightarrow |x_0 - y_0 - 2| = \sqrt{2} |y_0 - 3|$$

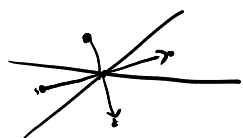
$$\neq |A| = |B|$$

$$\Rightarrow A = B \vee A = -B$$

$$\Delta_1: x - y - 2 = \sqrt{2}(y - 3)$$

$$\Delta_2: x - y - 2 = -\sqrt{2}(y - 3)$$

$$\begin{aligned} \text{б)} \quad A_1 &= A + \vec{A}_1 \Rightarrow A_1(6 + \sqrt{2}, 4) & A_3 &= A + \vec{A}_2 \Rightarrow A_3(6 - \sqrt{2}, 4) \\ A_2 &= A - \vec{A}_1 \Rightarrow A_2(4 - \sqrt{2}, 2) & A_4 &= A - \vec{A}_2 \Rightarrow A_4(4 + \sqrt{2}, 2) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \text{в)} \quad f_p &> 0 & f_r &< 0 \\ f_r &< 0 & f_p &> 0 \end{aligned} \quad \begin{aligned} r: Ax + By + C &= 0 \Rightarrow f_r(x, y) = Ax + By + C \\ f_p(x, y) &= x - y - 2 & f_q(x, y) &= y - 3 \end{aligned}$$

$$M(1, 4) \Rightarrow f_p(M) = -5 < 0, \quad f_q(M) = 1 > 0$$

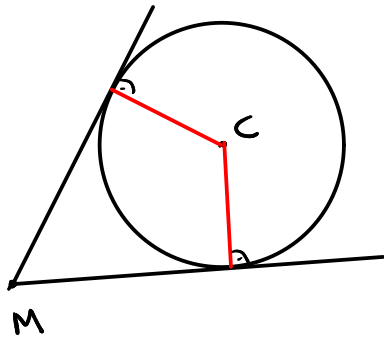
$$f_q(A_2) = f_q(A_4) = -1 < 0 \Rightarrow M \text{ и } A_2(A_4) \text{ са супротних страна } q$$

$$f_q(A_1) = f_q(A_3) = 1 > 0 \quad \checkmark$$

$$\Rightarrow M \text{ и } A_3 \text{ су у истом углу}$$

$$f_p(A_1) = \sqrt{2} > 0 \quad f_p(A_3) = -\sqrt{2} < 0 \quad \checkmark$$

4.4. Одредити једначине тангенти из тачке $M(1,2)$ на круг $k: (x-1)^2 + (y-7)^2 = 9$.



$$k: (x-1)^2 + (y-7)^2 = r^2 \Rightarrow C(1, 7), r \text{ полупречник}$$

$$\Rightarrow C(1, 7), r=3, t: ax+by+c=0$$

$$1) M(1, 2) \in t \Rightarrow a+2b+c=0 \Rightarrow \boxed{c=-a-2b}$$

$$2) d(C, t) = r \Leftrightarrow t \text{ ТАНГЕНТА НА } k$$

$$\frac{|a+7b-a-2b|}{\sqrt{a^2+b^2}} = 3 / 2$$

$$\Rightarrow 25b^2 = 9(a^2+b^2) \Rightarrow b^2 = \frac{9}{16}a^2 \Rightarrow \boxed{b = \pm \frac{3}{4}a}$$

$$\text{I} \quad b = \frac{3}{4}a \Rightarrow c = -\frac{5}{2}a$$

$$\text{II} \quad b = -\frac{3}{4}a \Rightarrow c = \frac{1}{2}a$$

$$t_1: ax + \frac{3}{4}ay - \frac{5}{2}a = 0$$

$$t_2: ax - \frac{3}{4}ay + \frac{1}{2}a = 0$$

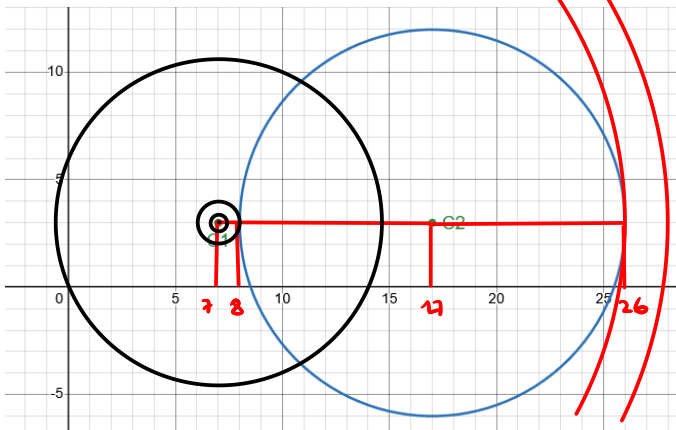
$$\boxed{a=4} \Rightarrow \boxed{t_1: 4x + 3y - 10 = 0}$$

$$\boxed{t_2: 4x - 3y + 2 = 0}$$

4.5. Дати су кругови: $k_1: (x-7)^2 + (y-3)^2 = r_1^2$ и $k_2: (x-17)^2 + (y-3)^2 = 81$. а) У зависности од полупречника $r_1 > 0$ дискутовати број заједничких тангенти ових кругова. б) За $r_1 = 3$ одредити једначине заједничких тангенти ових кругова.

$$k_1: C_1(7, 3), r_1$$

$$k_2: C_2(17, 3), r_2 = 9$$



$$a) r_1 \in (0, 1) \Rightarrow \boxed{4 \text{ T}}$$

$$r_1 = 1 \Rightarrow \boxed{3 \text{ T}}$$

$$r_1 \in (1, 19) \Rightarrow \boxed{2 \text{ T}}$$

$$r_1 = 19 \Rightarrow \boxed{1 \text{ T}}$$

$$r_1 > 19 \Rightarrow \boxed{\text{НЕМА Т}}$$

$$b) t: ax+by+c=0$$

$$1) t \text{ ТАНГ. НА } k_1 \Leftrightarrow d(C_1, t) = 3 \Rightarrow \frac{|7a+3b+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} = 3 \quad (*)$$

$$2) t \text{ ТАНГ. НА } k_2 \Leftrightarrow d(C_2, t) = 9 \Rightarrow \frac{|17a+3b+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} = 9 \quad \#$$

$$\Rightarrow |17a+3b+c| = 3|7a+3b+c|$$

$$\text{I} \quad 17a+3b+c = 21a+9b+3c$$

$$4a+6b+2c=0$$

$$\boxed{c = -2a-3b}$$

$$\text{II} \quad 17a+3b+c = -21a-9b-3c$$

$$38a+12b+4c=0$$

$$c = -3b - \frac{19}{2}a$$

$$(*) \Rightarrow |5a| = 3\sqrt{a^2+b^2} / 2$$

$$25a^2 = 9a^2 + 9b^2$$

$$(*) \Rightarrow |-\frac{5}{2}a| = 3\sqrt{a^2+b^2} / 2$$

$$16a^2 = 9b^2$$

$$4a = 3b$$

$$c = -6a$$

$$4a = -3b$$

$$c = 2a$$

$$L: 3ax + 3by + 3c = 0$$

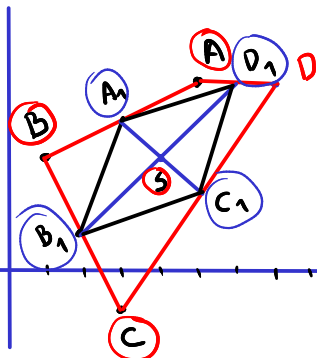
$$a=1 \quad L_1: 3x + 4y - 18 = 0$$

$$\frac{25}{4}a^2 = 9a^2 + 9b^2$$

$$\frac{-11}{4}a^2 = \frac{9b^2}{>0}$$

$$L_2: 3x - 4y + 6 = 0$$

4.6. Координате три темена четвороугла $ABCD$ су $A(5,5), B(1,3), C(3,-1)$. Темена четвороугла $A_1B_1C_1D_1$ су редом средишта страница AB, BC, CD, DA , а пресек дијагонала A_1C_1 и B_1D_1 је тачка $S_1(4,3)$. Одредити координате темена D и однос површина ова два четвороугла.



* $A_1B_1C_1D_1$ ПАРАЛЕЛОГРАМ ?

$$\begin{aligned} \vec{A_1B_1} &= \vec{A_1B} + \vec{BB_1} = \frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{BC} = \frac{1}{2}\vec{AC} \\ \vec{D_1C_1} &= \vec{D_1D} + \vec{DC_1} = \frac{1}{2}\vec{AD} + \frac{1}{2}\vec{DC} = \frac{1}{2}\vec{AC} \end{aligned} \Rightarrow \text{ПАРАЛЕЛ.}$$

$$\Rightarrow S = S(A_1C_1), \quad S = S(B_1D_1)$$

$$\begin{aligned} A(5,5) & \quad B(1,3) & C(3,-1) \\ A_1(3,4) & B_1(2,1) \\ D_1(6,5) & C_1(5,2) \\ S(4,3) & D(7,5) \end{aligned}$$

$$P_{A_1B_1C_1D_1} = \|\vec{A_1B_1} \times \vec{A_1D_1}\|$$

$$\Rightarrow \vec{A_1B_1} = (-1, -3, 0)$$

$$\vec{A_1D_1} = (3, 1, 0) \Rightarrow \vec{A_1B_1} \times \vec{A_1D_1} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & -3 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, 8)$$

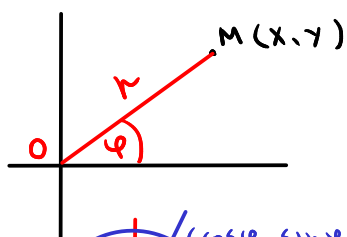
$$\Rightarrow P_{A_1B_1C_1D_1} = 8$$

$$P_{ABCD} = P_{ABC} + P_{ADC} = 10 + 6 = 16$$

$$\vec{AB} = (-4, -2, 0) \quad \vec{AC} = (-2, -6, 0) \quad \vec{AD} = (2, 0, 0)$$

$$P_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \|\vec{AB} \times \vec{AC}\| = \frac{1}{2} \cdot 20 = 10, \quad P_{\triangle ADC} = \frac{1}{2} \|\vec{AC} \times \vec{AD}\| = 6$$

4.7. У поларним координатама одредити: а) једначину праве $p: \frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1$. б) Једначину праве q која са x -осом гради угао $\phi_0 \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, а на растојању је $r_0 \geq 0$ од координатног почетка.



$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi \\ y &= r \sin \varphi \end{aligned}$$

а)

$$p: \frac{r \cos \varphi}{m} + \frac{r \sin \varphi}{n} = 1$$

б) $L: ax + by + c = 0$

$$1) \varphi_0 \Rightarrow \vec{r} = (\cos \varphi_0, \sin \varphi_0) \Rightarrow \vec{n}_r = (\sin \varphi_0, -\cos \varphi_0)$$

$$\Rightarrow L: x \sin \varphi_0 - y \cos \varphi_0 + c = 0$$

$$2) r_0 = d(O, L) = \frac{|c|}{\sqrt{\sin^2 \varphi_0 + \cos^2 \varphi_0}} = |c| \Rightarrow c = \pm r_0$$

$$L_{1/2}: r \cos \varphi \sin \varphi_0 - r \sin \varphi \cos \varphi_0 \pm r_0 = 0$$

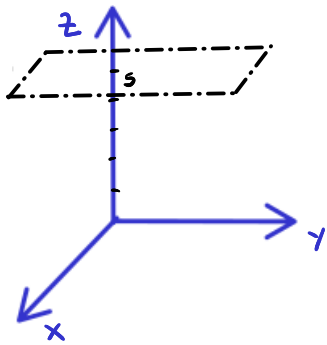
4.8. Одредити растојање тачака A и B преко њихових поларних координата $A(r_A, \phi_A)$, $B(r_B, \phi_B)$.

$$A(r_A \overset{''x_A}{\cos \phi_A}, r_A \overset{''y_A}{\sin \phi_A}), B(r_B \overset{''x_B}{\cos \phi_B}, r_B \overset{''y_B}{\sin \phi_B})$$

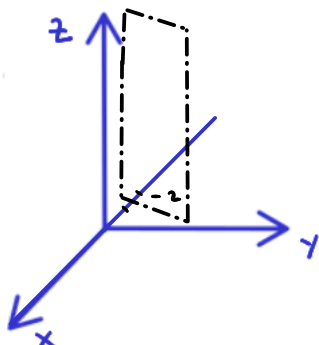
$$\begin{aligned} d(A, B) &= \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} \\ &= \sqrt{(r_A \cos \phi_A - r_B \cos \phi_B)^2 + (r_A \sin \phi_A - r_B \sin \phi_B)^2} \\ &= \sqrt{r_A^2 + r_B^2 - 2r_A r_B (\cos \phi_A \cos \phi_B + \sin \phi_A \sin \phi_B)} \\ &= \sqrt{r_A^2 + r_B^2 - 2r_A r_B \cos(\phi_A - \phi_B)} \end{aligned}$$

4.9. Скицирати раван а) $z - 5 = 0$; б) $x = -2$; в) $y + z - 3 = 0$; г) $x + 2y + 3z - 6 = 0$.

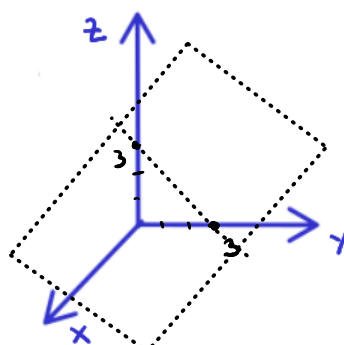
а) $z - 5 = 0$



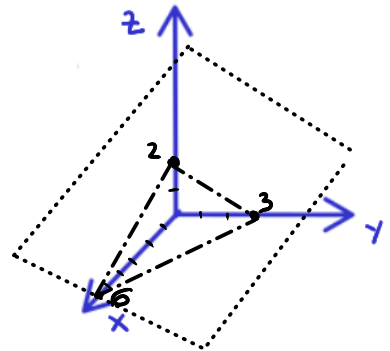
б) $x = -2$



в) $y + z - 3 = 0$



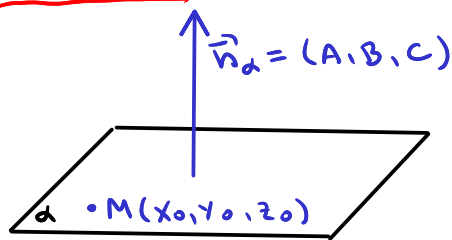
г) $x + 2y + 3z = 6$
 $\frac{x}{6} + \frac{y}{3} + \frac{z}{2} = 1$



4 Тачка, права и раван

* у простору $\mathbb{R}^3$

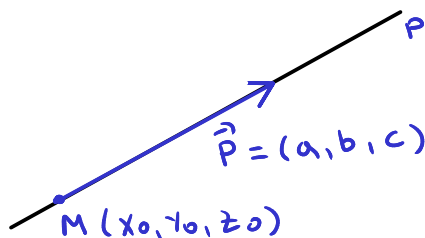
* РАВАН



$$\alpha: Ax + By + Cz + D = 0 \Rightarrow \vec{n}_\alpha = (A, B, C)$$

$$\Rightarrow \alpha: A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

* ПРАВА



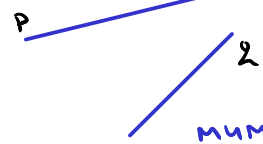
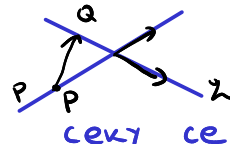
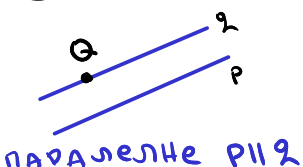
$$\Rightarrow P: \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} = t$$

$$\begin{aligned} x &= at + x_0 \\ y &= bt + y_0 \\ z &= ct + z_0 \end{aligned}, t \in \mathbb{R}$$

$$P: \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

* однос две праве

$$P \Rightarrow \vec{P}, P \in P, Q \Rightarrow \vec{Q}, Q \in Q$$



$$\vec{p} \times \vec{q} = \vec{0}$$

$Q \notin P$

$Q \in P$

$$\vec{p} \times \vec{q} \neq \vec{0}$$

$$[\vec{p}, \vec{q}, \vec{p}Q] = 0$$

$$[\vec{p}, \vec{q}, \vec{p}Q] \neq 0$$

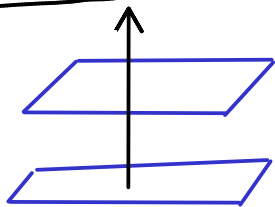
$\Rightarrow$

$$1) P \parallel Q \Rightarrow \vec{p} = \vec{q}$$

$$2) P \perp Q \Rightarrow \vec{p} \perp \vec{q}$$

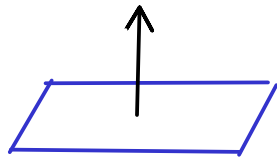
$$3) P \cap Q \text{ сек } \Rightarrow [\vec{p}, \vec{q}, \vec{p}Q] = 0$$

* ОДНОС ДВЕ РАВНИ

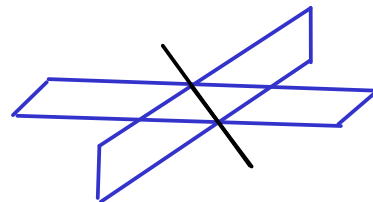


$\alpha \parallel \beta$

$$\vec{n}_\alpha \times \vec{n}_\beta = \vec{0}$$



$\alpha \equiv \beta$



$\alpha \cap \beta \text{ се сек } \Rightarrow$

$$\vec{n}_\alpha \times \vec{n}_\beta \neq \vec{0}$$

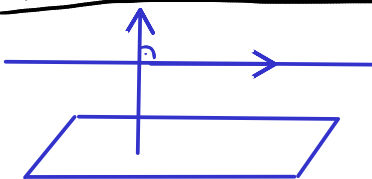
$A \notin \beta$

$A \in \beta$

$$4) \alpha \parallel \beta \Rightarrow \vec{n}_\alpha = \vec{n}_\beta$$

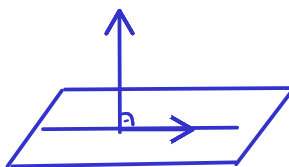
$$5) \alpha \perp \beta \Rightarrow \vec{n}_\alpha \perp \vec{n}_\beta$$

* ОДНОС ПРАВЕ И РАВНИ



$P \parallel \alpha$

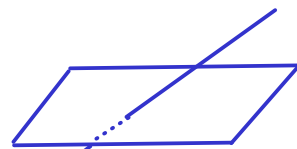
$$\vec{n}_\alpha \circ \vec{p} = 0$$



$P \subset \alpha$

$P \notin \alpha$

$P \in \alpha$



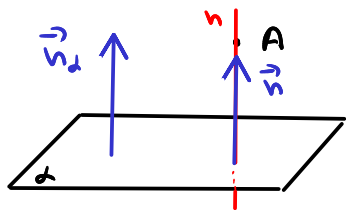
секу се

$$\vec{n}_\alpha \circ \vec{p} \neq 0$$

$$6) P \parallel \alpha \Rightarrow \vec{p} \perp \vec{n}_\alpha$$

$$7) P \perp \alpha \Rightarrow \vec{p} = \vec{n}_\alpha$$

4.10. Одредити једначину нормале из тачке $A(2, 3, -1)$ на раван $\alpha: 2x + y - 4z + 5 = 0$.

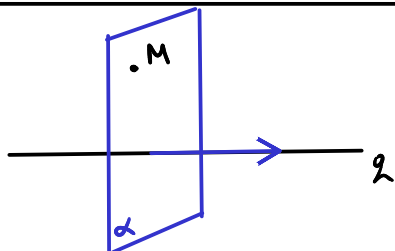


$$A(2, 3, -1) \in n \quad \checkmark$$

$$n \perp \alpha \Rightarrow \vec{n} = \vec{n}_\alpha = (2, 1, -4) \quad \checkmark$$

$$\Rightarrow n: \frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+1}{-4}$$

4.11. Одредити једначину равни која садржи тачку $M(-1, 0, 3)$ и нормална је на праву $q: \frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-3}{-1}$.



$$M(-1, 0, 3) \in \alpha \quad \checkmark$$

$$\alpha \perp q \Rightarrow \vec{n}_\alpha = \vec{q} = (2, 4, -1) \quad \checkmark$$

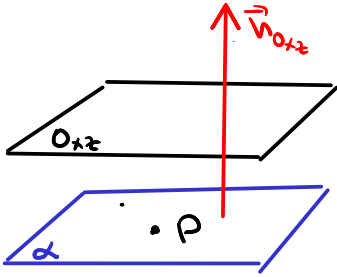
$$\Rightarrow \alpha: 2(x+1) + 4(y-0) - 1(z-3) = 0$$

$$\alpha: 2x + 4y - z + 5 = 0$$

4.12. Одредити једначину равни која:

а) је паралелна са равни Oxz и садржи тачку $P(2, 3, 5)$ б) садржи z -осу и тачку $M(-3, 1, 2)$ в) паралелна је x оси и садржи тачке $A(4, 0, -2)$, $B(5, 1, 7)$.

а) α т.ј. $\alpha \parallel Oxz$, $P(2, 3, 5) \in \alpha$?



$$P \in \alpha \quad \checkmark$$

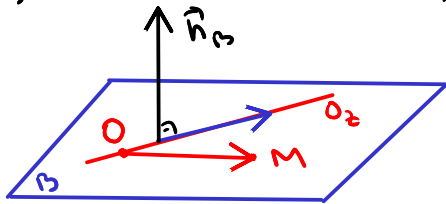
$$Oxz : y = 0$$

$$\alpha \parallel Oxz \Rightarrow \vec{n}_\alpha = \vec{n}_{Oxz} = (0, 1, 0) \quad \checkmark$$

$$\Rightarrow \alpha : 0(x-2) + 1(y-3) + 0(z-5) = 0$$

$$\boxed{\alpha : y = 3}$$

б) β т.ј. $Oz \subset \beta$, $M(-3, 1, 2) \in \beta$?



$$M \in \beta \quad \checkmark$$

$$Oz : x=0, y=0, z=t, t \in \mathbb{R}, Oz : \frac{x}{0} = \frac{y}{0} = \frac{z}{1}$$

$$1) Oz \subset \beta \Rightarrow \vec{n}_\beta \perp \vec{Oz} = (0, 0, 1)$$

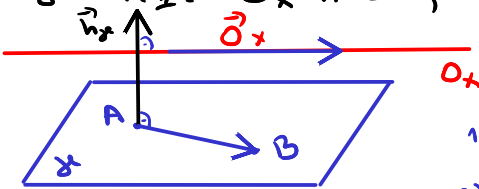
$$2) \vec{OM} \subset \beta \Rightarrow \vec{n}_\beta \perp \vec{OM} = (-3, 1, 2)$$

$$\vec{n}_\beta = \vec{OM} \times \vec{Oz} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1, 3, 0) \quad \checkmark$$

$$\Rightarrow \beta : 1(x+3) + 3(y-1) + 0(z-2) = 0$$

$$\boxed{\beta : x + 3y = 0}$$

в) γ т.ј. $Ox \parallel \gamma$, $A(4, 0, -2) \in \gamma$, $B(5, 1, 7) \in \gamma$?



$$A \in \gamma \quad \checkmark \quad Ox : y=0, z=0, x=t, t \in \mathbb{R}$$

$$1) \gamma \parallel Ox \Rightarrow \vec{n}_\gamma \perp \vec{Ox} = (1, 0, 0)$$

$$2) \vec{AB} \subset \gamma \Rightarrow \vec{n}_\gamma \perp \vec{AB} = (1, 1, 9)$$

$$\Rightarrow \vec{n}_\gamma = \vec{AB} \times \vec{Ox} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 9 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0, 9, -1) \quad \checkmark$$

$$\Rightarrow \gamma : 0(x-4) + 9(y-0) - 1(z+2) = 0$$

$$\boxed{\gamma : 9y - z - 2 = 0}$$

4.13. Одредити тачку Q која је симетрична тачки $P(3, -2, -4)$ у односу на раван $\alpha : 6x + 2y - 3z - 75 = 0$ као и пројекцију P' тачке P на раван α .

$t=0$
 $t=1$
 $t=2$

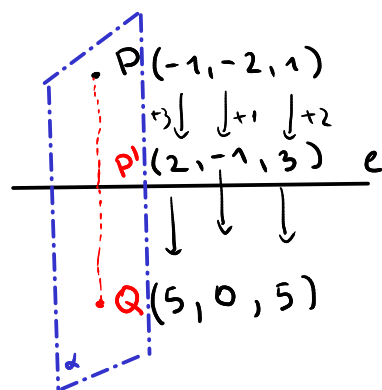
$P(3, -2, -4)$ 1) n т.ј. $P \in n$, $n \perp \alpha \Rightarrow \vec{n} = \vec{n}_\alpha = (6, 2, -3)$

$\Rightarrow n : \frac{x-3}{6} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+4}{-3} = t \Rightarrow n : \begin{matrix} x = 6t + 3 \\ y = 2t - 2 \\ z = -3t - 4 \end{matrix}, t \in \mathbb{R}$

2) $P' = n \cap \alpha$:
 $6(6t+3) + 2(2t-2) - 3(-3t-4) - 75 = 0$
 $49t - 49 = 0 \Rightarrow t = 1 \Rightarrow \boxed{P'(9, 0, -7)}$

3) $P' = S(PQ) \Rightarrow [P'] = \frac{[P] + [Q]}{2}$
 $[Q] = 2[P'] - [P] \Rightarrow \boxed{Q(15, 2, -10)}$

4.14. Одредити тачку Q која је симетрична тачки $P(-1, -2, 1)$ у односу на праву $l : \frac{x}{-2} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-4}{1}$ као и пројекцију P' тачке P на праву l .



1) α T. n. $P \in \alpha$, $\alpha \perp \ell \Rightarrow \vec{n}_\alpha = \vec{e} = (-2, 4, 1)$

$$d: -2(x+1) + 4(y+2) + 1(z-1) = 0$$

$$\alpha: -2x + 4y + z + 5 = 0$$

2) $P' = \alpha \cap e$:

$$C: \begin{aligned} x &= -2t \\ y &= 4t + 3 \\ z &= t + 4 \end{aligned}, \quad t \in \mathbb{R}$$

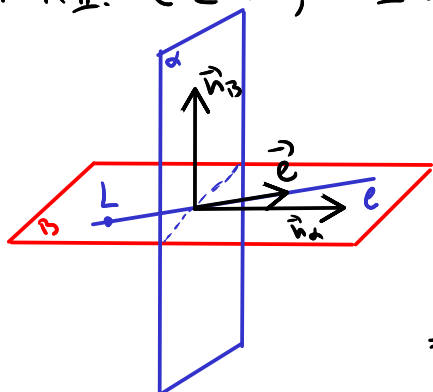
$$4t + 16t + 12 + t + 4 + 5 = 0 \Rightarrow 21t + 21 = 0$$

$$\Rightarrow \underline{t = -1} \Rightarrow \boxed{p'(2, -1, 3)}$$

3) $Q(5, 0, 5)$

4.15. Одредити једначину равни која садржи праву $l : \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-3}{3}$ и нормална је на раван $\alpha : 2x-4y+z+5=0$.

B.T. 1. $e \subset B$, $B \perp \alpha$



1) $L(1, -2, 3) \in e \subset B \quad \checkmark$

$$2) \ell \subset \beta \Rightarrow \vec{n}_\beta \perp \vec{e} = (2, 1, 3)$$

$$\beta \perp \alpha \Rightarrow \vec{n}_\beta \perp \vec{n}_\alpha = (2, -4, 1)$$

$$\Rightarrow \vec{n}_B = \vec{n}_a \times \vec{e} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = (-13, -4, 10) \checkmark$$

$$\Rightarrow \beta: -13(x-1) - 4(y+2) + 10(z-3) = 0$$

$$\beta: -13x - 4y + 10z - 25 = 0$$

4.16. Одредити λ тако да се праве $p: \frac{x-2}{3} = \frac{y+4}{5} = \frac{z-1}{-2}$ и $q: \frac{x-\lambda}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+5}{0}$ секу. Које су координате пресечне тачке?

I $p \wedge q \text{ cexy} \Rightarrow [\vec{p}, \vec{q}, \vec{pq}] = 0 \Rightarrow \dots \underline{\lambda = \dots}$

$$x = 2\lambda + \lambda$$

P: $y = 5t - 4, t \in \mathbb{R}$

2: $y = \lambda + 3$, $\lambda \in \mathbb{R}$

$$z = -2t + 1$$

$$z = -5$$

$$3t + 2 = 2s + \lambda \rightarrow 9 + 2 = 16 + \lambda \Rightarrow \boxed{\lambda = -5}$$

$P \cap Q: 5t - 4 = 1t + 3$

$$15 - 4 = D + 3 \Rightarrow D = 8$$

$$-2 + 1 = -1$$

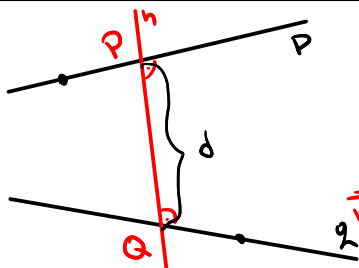
$$\Rightarrow t = 3$$

$$|P \cap Q| = A(11, 11, -5)$$

4.17. Одредити заједничку нормалу и растојање између мимоилазних права $p: \frac{x-4}{1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-12}{-1}$ и $q: \frac{x-3}{-7} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-4}{3}$.

$$\vec{p} = (1, 2, -1)$$

$$\vec{q} = (-7, 2, 3)$$



$$P(t+4, 2t-3, -t+12) \in P \text{ проузв.}$$

$$Q(-7\Delta+3, 2\Delta+1, 3\Delta+1) \in \mathcal{Q} \text{ проузб.}$$

$$\vec{r} = \vec{PQ} = (-7\lambda - t - 1, 2\lambda - 2t + 4, 3\lambda + t - 11)$$

$$1) \vec{PQ} \cdot \vec{P} = 0 \Rightarrow -7\Delta - t - 1 + 4\Delta - 4t + 8 - 3\Delta - t + 11 = 0 \\ \Rightarrow \boxed{-6\Delta - 6t = -18} \quad (1)$$

$$2) \vec{PQ} \cdot \vec{Q} = 0 \Rightarrow 4\Delta + 7t + 7 + 4\Delta - 4t + 8 + 9\Delta + 3t - 33 = 0 \\ \boxed{62\Delta + 6t = 18} \quad (2)$$

$$(1) + (2) \Rightarrow 56\Delta = 0 \Rightarrow \boxed{\Delta = 0} \Rightarrow \boxed{t = 3}$$

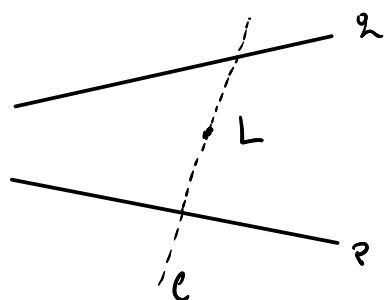
$$\Rightarrow P(7, 3, 9), Q(3, 1, 1), \vec{PQ} = (-4, -2, -8) \parallel (2, 1, 4)$$

$$1) n = PQ : \frac{x-7}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-9}{4} !$$

$$2) d(P, Q) = \|\vec{PQ}\| = \sqrt{(-4)^2 + (-2)^2 + (-8)^2} = \sqrt{84} = \boxed{2\sqrt{21}}$$

$$\boxed{\text{II}} \quad d(P, Q) = \frac{|[\vec{P}, \vec{Q}, \vec{PQ}]|}{\|\vec{P} \times \vec{Q}\|} = \dots = 2\sqrt{21}$$

4.18. Одредити једначину праве која садржи тачку $L(2, -1, 7)$ и сече праве $p : \frac{x-1}{2} = \frac{y-4}{-3} = \frac{z-3}{1}$ и $q : \frac{x-7}{-1} = \frac{y-11}{-3} = \frac{z+2}{0}$.



$$L(2, -1, 7) \in l \checkmark, \vec{e} = (a, b, c)$$

$$P(1, 4, 3) \in p, \vec{P} = (2, -3, 1)$$

$$Q(7, 11, -2), \vec{Q} = (-1, -3, 0)$$

$$1) l \cap q \text{ се сече} \Rightarrow [\vec{e}, \vec{Q}, \vec{PQ}] = 0$$

$$\Rightarrow 0 = \begin{vmatrix} a & b & c \\ -1 & -3 & 0 \\ 5 & 12 & -9 \end{vmatrix} = 27a - 9b + 3c \Rightarrow \underline{9a - 3b + c = 0} \quad +$$

$$2) l \cap p \text{ се сече} \Rightarrow [\vec{e}, \vec{P}, \vec{PQ}] = 0$$

$$\Rightarrow 0 = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 2 & -3 & 1 \\ -1 & 5 & -4 \end{vmatrix} = 7a + 7b + 7c \Rightarrow \underline{a + b + c = 0} \quad -1$$

$$a + b + c = 0$$

$$8a - 4b = 0$$

$$\uparrow c = -3a$$

$$\Rightarrow b = 2a$$

$$\Rightarrow \vec{e} = (a, 2a, -3a)$$

$$a=1 \Rightarrow \underline{\vec{e} = (1, 2, -3)} \checkmark$$

$$\Rightarrow l : \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-7}{-3}$$

4.19. Кроз тачку $T(-3, 1, 2)$ одредити праву l која је паралелна равни $\alpha: 4x - y + 2z - 5 = 0$ и која сече праву $p: \frac{x+3}{0} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{-1} = t$

I НАЧИН 1) $T(-3, 1, 2) \in l \quad \checkmark \quad \vec{l} = (a, b, c)$
 2) $l \parallel \alpha \Rightarrow \vec{l} \cdot \vec{n}_\alpha = 0$
 3) l и p се секу $\Rightarrow [\vec{l}, \vec{p}, \vec{PT}] = 0, P(-3, 2, -1)$

II НАЧИН $P(-3, 2t+2, -t-1) \in p$ произв.
 $l = PT \Rightarrow T \in l, l$ сече $p \quad \checkmark$
 $l \parallel \alpha \Rightarrow \vec{n}_\alpha \cdot \vec{l} = 0, \vec{n}_\alpha = (4, -1, 2), \vec{l} = \vec{PT} = (0, -2t-1, t+3)$
 $\Rightarrow 2t+1+2t+6=0 \Rightarrow t = -\frac{7}{4}$
 $\vec{l} = (0, \frac{5}{2}, \frac{5}{4}) \parallel (0, 2, 1)$
 $\Rightarrow l: \frac{x+3}{0} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{1}$

III НАЧИН

1) β т.д. $T \in \beta, \beta \perp \alpha$
 2) $\beta \cap p = l$
 3) $l = PT$

4.20. Одредити раван α која са равни $\gamma: x - 4y - 8z + 12 = 0$ образује угао $\frac{\pi}{4}$ и садржи праву: а) $x + 5y + z = 0, x - z + 4 = 0$ б) $p: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z}{-1}$.

а) α т.д. $\Delta(\alpha, \gamma) = \frac{\pi}{4}, \alpha \supset p: \begin{cases} x + 5y + z = 0 \\ x - z + 4 = 0 \end{cases}$

(Т) Прамен равни које садрже праву $p = \alpha_1 \cap \alpha_2$ је облика $\chi_{\alpha_1, \alpha_2}: \lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2 = 0$.

$\Rightarrow \alpha: \lambda_1(x + 5y + z) + \lambda_2(x - z + 4) = 0 \Rightarrow p \subset \alpha$

2) $\Delta(\gamma, \alpha) = \frac{\pi}{4}, \vec{n}_\gamma = (1, -4, -8)$

2.1) $\lambda_1 = 0 \Rightarrow \alpha: x - z + 4 = 0 \quad ? \quad \vec{n}_\alpha = (1, 0, -1)$

$\cos \Delta(\alpha, \gamma) = \frac{|\vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\gamma|}{\|\vec{n}_\alpha\| \cdot \|\vec{n}_\gamma\|} = \frac{|1 + 8|}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{81}} = \frac{9}{\sqrt{2} \cdot 9} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow \Delta(\alpha, \gamma) = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \alpha_1: x - z + 4 = 0$

2.2) $\lambda_1 \neq 0 \Rightarrow \alpha: x + 5y + z + \lambda(x - z + 4) = 0$

$\alpha: (1+\lambda)x + 5y + (1-\lambda)z + 4\lambda = 0$

$\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos \Delta(\alpha, \gamma) = \frac{|1+\lambda-20-8+8\lambda|}{9\sqrt{(1+\lambda)^2+25+(1-\lambda)^2}} = \frac{|9\lambda-27|}{9\sqrt{2\lambda^2+27}} = \frac{|\lambda-3|}{\sqrt{2\lambda^2+27}}$

$\sqrt{2}\sqrt{2\lambda^2+27} = 2|\lambda-3| \quad /^2$

$$4\lambda^2 + 54 = 4(\lambda^2 - 6\lambda + 9) = 4\lambda^2 - 24\lambda + 36$$

$$24\lambda = -18 \Rightarrow \lambda = -\frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow \alpha_2: \frac{1}{4}x + 5y + \frac{7}{4}z - 3 = 0 \quad | \cdot 4$$

$$\alpha_2: x + 20y + 7z - 12 = 0$$

$$6) p: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z}{-1}$$

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{0} \Rightarrow y-2=0$$

$$\frac{x-1}{1} = \frac{z}{-1} \Rightarrow z = -x+1$$

$$\alpha \text{ т.д. } \angle(\alpha, \beta) = \frac{\pi}{4}, \quad P \subset \alpha$$

І НАЧИН

$$P: \begin{cases} y-2=0 \\ x+z-1=0 \end{cases} \Rightarrow \alpha: \lambda_1(y-2) + \lambda_2(x+z-1) = 0$$

...

ІІ НАЧИН

$$1) P(1,2,0) \in P \subset \alpha \quad \checkmark, \quad \vec{n}_\alpha = (A, B, C)$$

$$2) P \subset \alpha \Rightarrow \vec{n}_\alpha \cdot \vec{P} = 0 \Rightarrow (A, B, C) \cdot (1, 0, -1) = 0$$

$$\Rightarrow A - C = 0 \Rightarrow \underline{C = A} \Rightarrow \vec{n}_\alpha = (A, B, A)$$

$$3) \angle(\alpha, \beta) = \frac{\pi}{4}, \quad \vec{n}_\beta = (1, -4, -8)$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos \angle(\alpha, \beta) = \frac{|\vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta|}{\|\vec{n}_\alpha\| \cdot \|\vec{n}_\beta\|} = \frac{|A - 4B - 8A|}{9\sqrt{A^2 + B^2 + A^2}}$$

$$9\sqrt{2} \sqrt{2A^2 + B^2} = 2|-7A - 4B| \quad |^2$$

$$81 \cdot 2 \cdot (2A^2 + B^2) = 4^2 (49A^2 + 56AB + 16B^2)$$

$$162A^2 + 81B^2 = 98A^2 + 112AB + 32B^2$$

$$64A^2 - 112AB + 49B^2 = 0 \quad \neq \quad \because B^2 \neq 0 \Rightarrow \text{кв. атн.}$$

$$(8A - 7B)^2 = 0$$

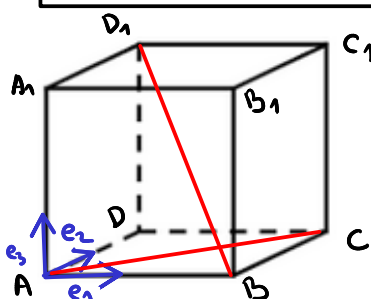
$$\Rightarrow 8A = 7B \Rightarrow \underline{B = \frac{8}{7}A}$$

$$\Rightarrow \vec{n}_\alpha = (A, \frac{8}{7}A, A) \parallel (7, 8, 7) \quad \checkmark$$

$$\alpha: 7(x-1) + 8(y-2) + 7(z-0) = 0$$

$$\alpha: 7x + 8y + 7z - 23 = 0$$

3.7. Дана је коцка $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ ивице a . Одредити а) угао између мимоилазних правих AC и BD_1 ; б) растојање између правих AC и BD_1 ; в) угао између праве AC и равни $\alpha = BCD_1$.



$$Ae: \vec{e}_1 = \frac{\vec{AB}}{a}, \quad \vec{e}_2 = \frac{\vec{AD}}{a}, \quad \vec{e}_3 = \frac{\vec{AA_1}}{a}$$

$$\Rightarrow A(0,0,0), C(a,a,0), B(a,0,0), D_1(0,a,a)$$

$$a) \cos \angle(AC, BD_1) = \frac{|\vec{AC} \cdot \vec{BD_1}|}{\|\vec{AC}\| \cdot \|\vec{BD_1}\|} = \frac{|(a,a,0) \cdot (-a,a,a)|}{\sqrt{2a^2} \cdot \sqrt{3a^2}} = 0$$

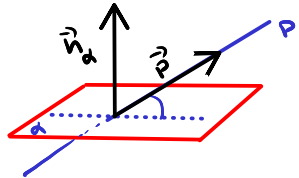
$$\Rightarrow \underline{AC \perp BD_1}$$

$$5) d(AC, BD_1) = \frac{|[\vec{AC}, \vec{BD}_1, \vec{AB}]|}{\|\vec{AC} \times \vec{BD}_1\|} = \frac{\left| \begin{vmatrix} -a & a & 0 \\ a & a & 0 \\ -a & a & a \end{vmatrix} \right|}{\left\| \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -a & a & 0 \\ -a & a & a \end{vmatrix} \right\|} = \frac{|a^3|}{\|(a^2, -a^2, 2a^2)\|}$$

$$\left| \begin{vmatrix} -a & a & 0 \\ a & a & 0 \\ -a & a & a \end{vmatrix} \right| = a \cdot (-1)^{2+3} \cdot \left| \begin{vmatrix} a & a \\ a & 0 \end{vmatrix} \right| = -a \cdot (-a^2) = a^3$$

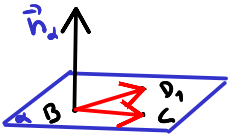
$$d(AC, BD_1) = \frac{a^3}{\sqrt{6} a^2} = \frac{a^3}{\sqrt{6} a^2} = \frac{a}{\sqrt{6}} = \boxed{\frac{a\sqrt{6}}{6}}$$

6) $P = AC$, $\alpha = BC D_1$



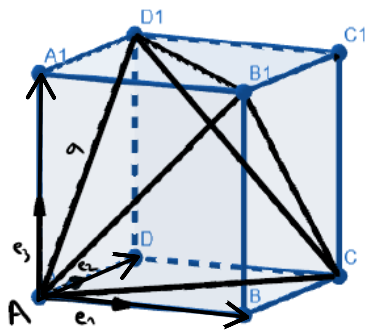
$$\sin \Delta(P, \alpha) = \frac{|\vec{n}_\alpha \cdot \vec{p}|}{\|\vec{n}_\alpha\| \cdot \|\vec{p}\|} = \frac{a^3}{\sqrt{2a^4} \cdot \sqrt{2a^2}} = \frac{a^3}{2a^3} = \frac{1}{2}$$

$$\vec{p} = \vec{AC} = (a, a, 0), \vec{n}_\alpha = \vec{BC} \times \vec{BD}_1 = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 0 & a & 0 \\ -a & a & a \end{vmatrix} = (a^2, 0, a^2)$$



$$\Rightarrow \Delta(AC, BC D_1) = \frac{\pi}{6}$$

4.21. Одредити угао између плосни правилног тетраедра.



Ае : $\vec{e}_1 = \vec{AB}$, $\vec{e}_2 = \vec{AD}$, $\vec{e}_3 = \vec{AA_1}$

тетраедар уписан у коцку изише 1

$$A(0, 0, 0), C(1, 1, 0), B_1(1, 0, 1), D_1(0, 1, 1)$$

$$\alpha = AC B_1, \beta = AB_1 D_1$$

$$\vec{n}_\alpha = \vec{AC} \times \vec{AB_1} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1, -1, -1)$$

$$\vec{n}_\beta = \vec{AB_1} \times \vec{AD_1} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1, -1, 1)$$

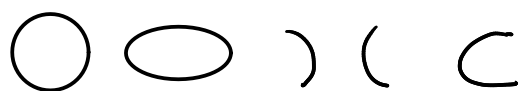
$$\cos \Delta(\alpha, \beta) = \frac{|\vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta|}{\|\vec{n}_\alpha\| \cdot \|\vec{n}_\beta\|} = \frac{|-1|}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{1}{3} \Rightarrow \Delta(\alpha, \beta) = \arccos \frac{1}{3}$$

5 Криве другог реда

$$\mathcal{K}: a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

* недегенерисане

* дегенерисане



$$x^2 + y^2 + 1 = 0$$

$$x^2 + y^2 = 0$$

$$y^2 = 0$$

$$(x+y+1)(x-y) = 0$$

...

$$(x-y)^2 - 4 = 0$$

Елипса

$$\varepsilon : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

, a, b - натуралне, $a > b$

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}, \quad e = \frac{c}{a}, \quad \boxed{0 < e < 1}$$

* иже $F_1(c, 0), F_2(-c, 0)$

Директрисе $d_{1/2} : x = \pm \frac{a}{e} \Leftrightarrow x = \pm \frac{a^2}{c}$

$$\varepsilon : \frac{d(M, F)}{d(M, d)} = e, \quad MF_1 + MF_2 = 2a, \quad M \in \varepsilon$$

$$* M(x_0, y_0) \in \varepsilon \Rightarrow t_M : \frac{x_0}{a^2} x + \frac{y_0}{b^2} y = 1$$

* Спец. за $a = b \Rightarrow$ круг ($e = 0$)

Хипербола

$$\chi : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

, a, b - натуралне

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad e = \frac{c}{a}, \quad \boxed{e > 1}$$

* иже $F_1(c, 0), F_2(-c, 0)$

Директрисе $d_{1/2} : x = \pm \frac{a}{e}$

$$\frac{d(M, F)}{d(M, d)} = e, \quad |MF_1 - MF_2| = 2a, \quad M \in \chi$$

$$\text{Асимптоте } a_{1/2} : y = \pm \frac{b}{a} x \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0 \Rightarrow \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = 0$$

$$* M(x_0, y_0) \in \chi \Rightarrow t_M : \frac{x_0}{a^2} x - \frac{y_0}{b^2} y = 1$$

Парабола

$$\wp : y^2 = 2px$$

, $p > 0$, p - параметар $\wp$

* иже $F(\frac{p}{2}, 0)$

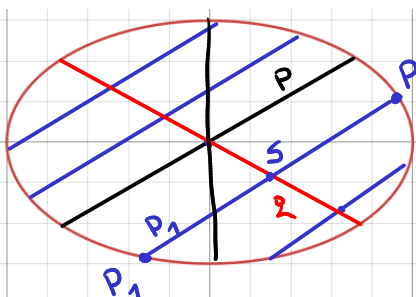
$$\boxed{e = 1}$$

Директриса $d : x = -\frac{p}{2}$

$$d(M, F) = d(M, d), \quad M \in \wp$$

$$* M(x_0, y_0) \in \wp \Rightarrow t_M : y_0 \cdot y = p(x + x_0)$$

5.1. а) Доказати да средишта тетива паралелних дијаметру p елипсе (хиперболе) припадају некој правој q која пролази кроз центар елипсе (хиперболе). б) Доказати да су тангенте у крајевима дијаметра p паралелне правој q . в) Доказати да су (у случају елипсе) тангенте у крајевима дијаметра q паралелне дијаметру p .



$$a) \chi : \frac{x^2}{a^2} + \mu \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad / a^2 b^2$$

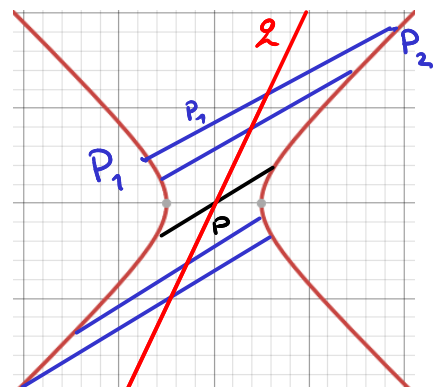
$$\mu = 1 \Rightarrow \varepsilon, \quad \mu = -1 \Rightarrow \chi$$

$$1) p : x = 0 \Rightarrow \text{очигледно}$$

$$2) p : y = k_0 x$$

$$p_1 \parallel p \Rightarrow p_1 : y = k_0 x + n$$

$$P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2) \in p_1 \cap \chi$$



$$P_1 \cap \mathcal{U}: b^2 x^2 + \mathcal{M} a^2 y^2 = a^2 b^2$$

$$y = k_p x + n \quad \uparrow$$

$$b^2 x^2 + \mathcal{M} a^2 (k_p^2 x^2 + 2k_p x n + n^2) = a^2 b^2$$

$$(b^2 + \mathcal{M} a^2 k_p^2) x^2 + 2\mathcal{M} a^2 k_p n x + \mathcal{M} a^2 n^2 - a^2 b^2 = 0$$

$$\neq ax^2 + bx + c = 0 \xRightarrow{\text{буџет}} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \quad \otimes \quad \neq$$

$$S(P_1 P_2) = S\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

$$x_s = \frac{x_1 + x_2}{2} \stackrel{\text{буџет}}{=} -\frac{B}{2A} = -\frac{2\mathcal{M} a^2 k_p n}{2(b^2 + \mathcal{M} a^2 k_p^2)} = -\frac{\mathcal{M} a^2 k_p n}{b^2 + \mathcal{M} a^2 k_p^2}$$

$$y_s = k_p x_s + n = \frac{-\cancel{k_p \mathcal{M} a^2 k_p n} + n b^2 + \cancel{\mathcal{M} n a^2 k_p^2}}{b^2 + \mathcal{M} a^2 k_p^2} = \frac{n b^2}{b^2 + \mathcal{M} a^2 k_p^2}$$

$$y_s = \frac{n b^2}{b^2 + \mathcal{M} a^2 k_p^2} \cdot \frac{-\cancel{\mathcal{M} a^2 k_p}}{-\cancel{\mathcal{M} a^2 k_p}} = \frac{b^2}{-\mathcal{M} a^2 k_p} \cdot \frac{\overset{“x_s”}{-\mathcal{M} a^2 k_p n}}{b^2 + \mathcal{M} a^2 k_p^2} = -\frac{b^2}{\mathcal{M} a^2 k_p} x_s$$

$\Rightarrow$ сва средншта припадају правој

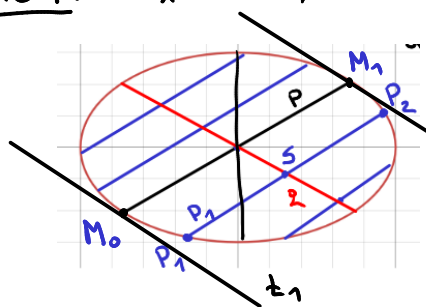
$$q: y = \frac{-b^2}{\mathcal{M} a^2 k_p} x$$

Деф Дијаметри $P: y = k_p x$ и $q: y = k_q x$ за које важи $k_p \cdot k_q = -\frac{b^2}{\mathcal{M} a^2}$ називају се узajамно конјуговани дијаметри.

$$\mathcal{E} \Rightarrow k_p k_q = -\frac{b^2}{a^2}, \quad \mathcal{H} \Rightarrow k_p k_q = \frac{b^2}{a^2}$$

Слеч. O_x и O_y -осе су узajамно конј. дијаметри.

б)



$$P: y = k_p x$$

$$\mathcal{U}: \frac{x^2}{a^2} + \mathcal{M} \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\mathcal{U}: b^2 x^2 + \mathcal{M} a^2 y^2 = a^2 b^2$$

$$\Rightarrow q: y = -\frac{b^2}{\mathcal{M} a^2 k_p} x = k_q$$

$$P \cap \mathcal{U} = M(x_0, y_0)$$

$$1) M \in \mathcal{U} \Rightarrow t_m: b^2 x_0 x + \mathcal{M} a^2 y_0 y = a^2 b^2$$

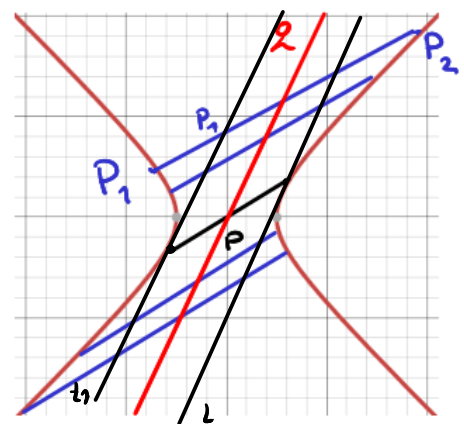
$$t: y = -\frac{b^2 x_0}{\mathcal{M} a^2 y_0} x + \frac{a^2 b^2}{\mathcal{M} a^2 y_0} \Rightarrow k_t = -\frac{b^2 x_0}{\mathcal{M} a^2 y_0}$$

$$2) M \in P \Rightarrow y_0 = k_p x_0 \Rightarrow \frac{x_0}{y_0} = \frac{1}{k_p}$$

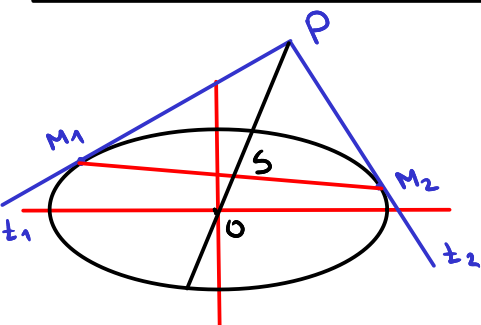
$$\Rightarrow k_t = -\frac{b^2}{\mathcal{M} a^2 k_p} = k_q \Rightarrow t_m \parallel q$$

в) аналогно уз замену k_p и k_q

ЗАДАТАК 5.2 ЗА ВЕЖБУ (АНАЛОГНО ЗАД. 5.1)



5.3. Тангенте у тачкама M_1 и M_2 елипсе секу се у тачки P . Доказати да тачка P припада дијаметру који полови тетиву M_1M_2 .



претп. $\mathcal{E}: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ т.д. $\mathcal{E}: b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$

$M_1(x_1, y_1) \in \mathcal{E}$, $M_2(x_2, y_2) \in \mathcal{E}$ произв.

$\Rightarrow S(M_1M_2) = S\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$

$O(0,0)$ центар $\mathcal{E}$.

1) $M_1 \in \mathcal{E} \Rightarrow t_1: b^2x_1x + a^2y_1y = a^2b^2$ $\begin{matrix} /y_2 \\ /-x_1 \end{matrix}$
 $M_2 \in \mathcal{E} \Rightarrow t_2: b^2x_2x + a^2y_2y = a^2b^2$ $\begin{matrix} /-y_1 \\ /x_1 \end{matrix}$

2) $P = t_1 \cap t_2: \begin{cases} b^2x(x_1y_2 - x_2y_1) = a^2b^2(y_2 - y_1) \\ a^2y(x_1y_2 - x_2y_1) = a^2b^2(x_1 - x_2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_P = \frac{a^2(y_2 - y_1)}{x_1y_2 - x_2y_1} \\ y_P = \frac{b^2(x_1 - x_2)}{x_1y_2 - x_2y_1} \end{cases}$

$P\left(\frac{a^2(y_2 - y_1)}{x_1y_2 - x_2y_1}, \frac{b^2(x_1 - x_2)}{x_1y_2 - x_2y_1}\right)$

3) $P \in OS$? OS т.д. $O \in OS$, $\vec{OS} = \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right) \parallel (x_1+x_2, y_1+y_2)$

$\Rightarrow OS: \frac{x}{x_1+x_2} = \frac{y}{y_1+y_2} \Leftrightarrow OS: (y_1+y_2)x = (x_1+x_2)y$

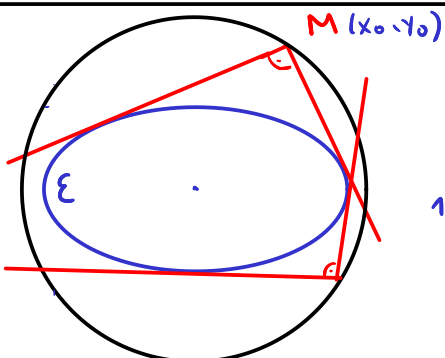
$P \in OS: \frac{a^2(y_1+y_2)(y_2-y_1)}{x_1y_2 - x_2y_1} = \frac{b^2(x_1+x_2)(x_1-x_2)}{x_1y_2 - x_2y_1} ?$

$a^2y_2^2 - a^2y_1^2 = b^2x_1^2 - b^2x_2^2 ?$

$a^2y_2^2 + b^2x_2^2 = b^2x_1^2 + a^2y_1^2$

$M_1, M_2 \in \mathcal{E} \Rightarrow a^2b^2 = a^2b^2 \quad \checkmark$

5.4. Доказати да је геометријско место тачака из којих се елипса види под правим углом круг (еквивалентно: кад елипса клизи додирујући координатне осе њени центар се креће по кругу).



$\mathcal{E}: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ т.д. $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$

$M(x_0, y_0)$ произв., $t: y = kx + n$ ТАНГЕНТА

1) t ТАНГ. НА $\mathcal{E}$:

$b^2x^2 + a^2(k^2x^2 + 2kxn + n^2) = a^2b^2$

$\underbrace{(b^2 + a^2k^2)}_A x^2 + \underbrace{2kna^2}_B x + \underbrace{a^2n^2 - a^2b^2}_C = 0$

t ТАНГ. НА $\mathcal{E} \Leftrightarrow \Delta = D = B^2 - 4AC = 4k^2n^2a^4 - 4(b^2 + a^2k^2)(a^2n^2 - a^2b^2)$

$4k^2n^2a^4 - 4a^2b^2n^2 + 4a^2b^4 - 4a^4k^2n^2 + 4a^4k^2b^2 = 0 \quad / : 4a^2b^2 \neq 0$

$\boxed{b^2 + a^2k^2 = n^2}$ УСЛОВ ДОДИРА

2) $M \in t \Rightarrow y_0 = kx_0 + n \Rightarrow \boxed{n = y_0 - kx_0}$

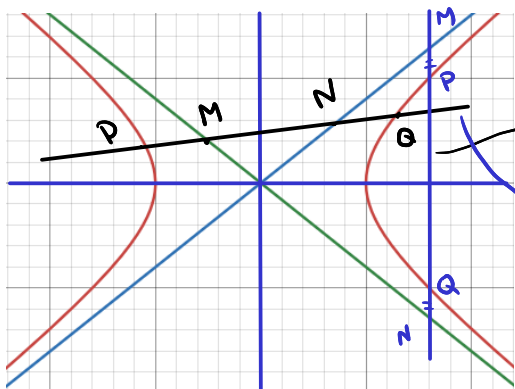
3) t ТАНГ. НА $\mathcal{E} \Rightarrow b^2 + a^2k^2 = n^2 = y_0^2 - 2kx_0y_0 + k^2x_0^2$

$\Rightarrow \boxed{(a^2 - x_0^2)k^2} + \boxed{2x_0y_0}k + \boxed{b^2 - y_0^2} = 0$

$$t_1 \perp t_2 \Leftrightarrow -1 = k_1 \cdot k_2 = \frac{c}{a} = \frac{b^2 - y_0^2}{a^2 - x_0^2} \Leftrightarrow x_0^2 - a^2 = b^2 - y_0^2$$

$$\Leftrightarrow x_0^2 + y_0^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow M \in \mathbb{R}(0, \sqrt{a^2 + b^2})$$

5.6. Произвольна права l сече хиперболу у тачкама P и Q , а асимптоте хиперболе у тачкама M и N . Доказати да је $MP = NQ$.



$$\chi: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a_{1/2}: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$$

1) $\ell: x = x_0$ очигледно због симетрије

2) $\ell: y = kx + n$, $\ell \cap \chi = \{P, Q\}$, $\ell \cap a_{1/2} = \{M, N\}$

$$PM = NQ \Leftrightarrow S(PQ) = S(MN)$$

$$\Leftrightarrow S = S(PQ) \stackrel{?}{=} S = S(MN)?$$

$$SM = SP - PM \stackrel{?}{=} SQ - NQ = SN \quad \checkmark$$

$$\Leftrightarrow PM = SP - SM = SQ - SN = NQ \quad \checkmark$$

Доказујемо $S(PQ) = S(MN)$:

$$I) \ell \cap \chi: y = kx + n \downarrow$$

$$b^2 x^2 - a^2 y^2 = a^2 b^2$$

$$b^2 x^2 - a^2 (k^2 x^2 + 2knx + n^2) = a^2 b^2$$

$$\boxed{(b^2 - a^2 k^2)} x^2 \quad \boxed{-2kn a^2} x \quad \boxed{-a^2 n^2 - a^2 b^2} = 0$$

$$x_{s_1} = \frac{x_P + x_Q}{2} = -\frac{B}{2A} = \frac{2kn a^2}{2(b^2 - a^2 k^2)} = \frac{kn a^2}{b^2 - a^2 k^2}$$

$$II) \ell \cap a_{1/2}: y = kx + n \downarrow$$

$$b^2 x^2 - a^2 y^2 = a^2 b^2$$

$$\Rightarrow \boxed{(b^2 - a^2 k^2)} x^2 \quad \boxed{-2kn a^2} x \quad \boxed{-a^2 n^2} = 0$$

$$x_{s_2} = \frac{x_M + x_N}{2} = -\frac{B}{2A} = \frac{kn a^2}{b^2 - a^2 k^2}$$

$$\Rightarrow x_{s_1} = x_{s_2}$$

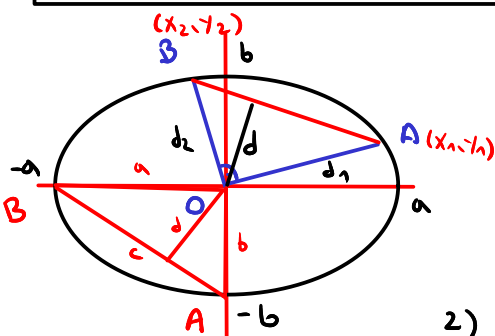
$$s_1, s_2 \in \ell$$

$$\Rightarrow y_{s_1} = y_{s_2}$$

$$\Rightarrow S(PQ) = S(MN)$$

$$\Rightarrow MP = NQ$$

5.8. Нека су дужи OA и OB два узајамно нормална полудијаметра елипсе. Доказати да је растојање центра O елипсе од тетиве AB константа која не зависи од избора полудијаметара.



$$\varepsilon: b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$$

$$1) d_1: x = 0 \Rightarrow d_2: y = 0$$

$$\Rightarrow ab = c \cdot d \Rightarrow \boxed{d = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}}$$

$$2) d_1: y = k_1 x \Rightarrow d_2: y = k_2 x$$

$$A(x_1, y_1) \in d_1 \stackrel{A \in d_1}{\Rightarrow} y_1 = k_1 x_1 \Rightarrow k_1 = \frac{y_1}{x_1}$$

$$d_2 \perp d_1 \Rightarrow k_2 = -\frac{1}{k_1} = -\frac{x_1}{y_1} \Rightarrow \boxed{d_2: y = -\frac{x_1}{y_1} x}$$

$$\boxed{B = E \cap d_2} \Rightarrow b^2 x^2 + a^2 \cdot \frac{x_1^2}{y_1^2} x^2 = a^2 b^2 \quad / \cdot y_1^2$$

$$(b^2 y_1^2 + a^2 x_1^2) x^2 = a^2 b^2 y_1^2 \Rightarrow x_2 = \frac{\pm a b y_1}{\sqrt{a^2 x_1^2 + b^2 y_1^2}}$$

у симетри

$$\boxed{x_2 = \frac{-a b y_1}{\sqrt{a^2 x_1^2 + b^2 y_1^2}}} \Rightarrow \boxed{y_2 = \frac{a b x_1}{\sqrt{a^2 x_1^2 + b^2 y_1^2}}} \quad | B(x_2, y_2)$$

$$P = \frac{1}{2} \|\vec{OA} \times \vec{OB}\| = \frac{\|\vec{AB}\| \cdot d}{2} \Rightarrow d = \frac{\|\vec{OA} \times \vec{OB}\|}{\|\vec{AB}\|}$$

$$\vec{OA} \times \vec{OB} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x_1 & y_1 & 0 \\ x_2 & y_2 & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, x_1 y_2 - x_2 y_1) = (0, 0, \frac{a b (x_1^2 + y_1^2)}{\sqrt{a^2 x_1^2 + b^2 y_1^2}})$$

$$\Rightarrow \|\vec{OA} \times \vec{OB}\| = \frac{a b (x_1^2 + y_1^2)}{\sqrt{a^2 x_1^2 + b^2 y_1^2}}$$

$$\|\vec{AB}\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{\frac{(-a b y_1 - x_1 \sqrt{a^2 x_1^2 + b^2 y_1^2})^2 + (a b x_1 - y_1 \sqrt{a^2 x_1^2 + b^2 y_1^2})^2}{a^2 x_1^2 + b^2 y_1^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{a^2 b^2 y_1^2 + x_1^2 (a^2 x_1^2 + b^2 y_1^2) + a^2 b^2 x_1^2 + y_1^2 (a^2 x_1^2 + b^2 y_1^2)}{a^2 x_1^2 + b^2 y_1^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{(x_1^2 + y_1^2) [a^2 x_1^2 + b^2 y_1^2 + a^2 b^2]}{a^2 x_1^2 + b^2 y_1^2}}$$

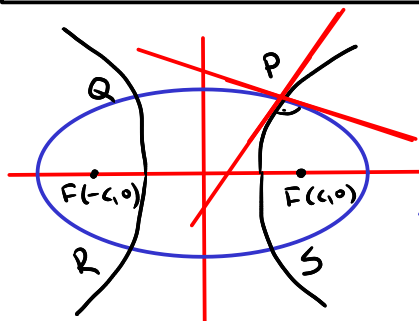
$\neq A(x_1, y_1) \in E$
 $b^2 x_1^2 + a^2 y_1^2 = a^2 b^2$

$$= \sqrt{\frac{(x_1^2 + y_1^2) [a^2 x_1^2 + b^2 y_1^2 + b^2 x_1^2 + a^2 y_1^2]}{a^2 x_1^2 + b^2 y_1^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{(x_1^2 + y_1^2)^2 (a^2 + b^2)}{a^2 x_1^2 + b^2 y_1^2}} \Rightarrow \|\vec{AB}\| = \frac{(x_1^2 + y_1^2) \sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt{a^2 x_1^2 + b^2 y_1^2}}$$

$$d = \frac{\|\vec{OA} \times \vec{OB}\|}{\|\vec{AB}\|} = \frac{\frac{a b (x_1^2 + y_1^2)}{\sqrt{a^2 x_1^2 + b^2 y_1^2}}}{\frac{(x_1^2 + y_1^2) \sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt{a^2 x_1^2 + b^2 y_1^2}}} = \frac{a b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

5.10. Доказати да се елипса и хипербола које имају заједничке жиже (конфокалне криве) секу под правим углом.



$$E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad H: \frac{x^2}{A^2} - \frac{y^2}{B^2} = 1$$

$$\text{заједничке жиже} \Rightarrow \boxed{a^2 - b^2 = c^2 = A^2 + B^2}$$

$$1) E \cap H: \begin{aligned} b^2 x^2 + a^2 y^2 &= a^2 b^2 & / A^2 & / B^2 \\ B^2 x^2 - A^2 y^2 &= A^2 B^2 & / a^2 & / -b^2 \end{aligned}$$

$$x^2(b^2A^2 + a^2B^2) = a^2A^2(b^2 + B^2)$$

$$\Rightarrow \boxed{x^2 = \frac{a^2A^2(b^2+B^2)}{b^2A^2 + a^2B^2} = \frac{a^2A^2(b^2+B^2)}{b^2c^2 - \cancel{b^2B^2} + c^2B^2 + \cancel{b^2B^2}} = \frac{a^2A^2(b^2+B^2)}{c^2(b^2+B^2)} = \frac{a^2A^2}{c^2}}$$

$$\boxed{y^2 = \frac{b^2B^2(a^2-A^2)}{a^2B^2 + b^2A^2} = \frac{b^2B^2(a^2-A^2)}{a^2c^2 - \cancel{a^2A^2} + a^2A^2 - c^2A^2} = \frac{b^2B^2(a^2-A^2)}{c^2(a^2-A^2)} = \frac{b^2B^2}{c^2}}$$

нпр. посматрајмо $P\left(\frac{aA}{c}, \frac{bB}{c}\right)$

$$P \in \ell \Rightarrow t_\ell: \frac{\frac{aA}{c}x}{a^2} + \frac{\frac{bB}{c}y}{b^2} = 1 \quad /abc$$

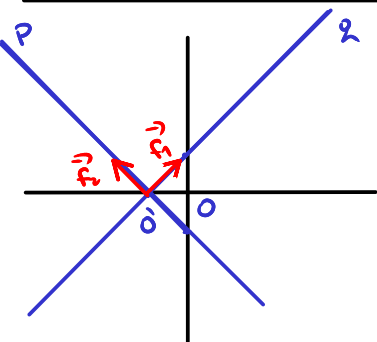
$$\Rightarrow \boxed{t_\ell: bAx + aBy = abc} \Rightarrow \vec{n}_{t_\ell} = (bA, aB)$$

$$P \in \chi \Rightarrow t_\chi: \frac{\frac{aA}{c}x}{A^2} - \frac{\frac{bB}{c}y}{B^2} = 1 \quad /ABc$$

$$\boxed{t_\chi: aBx - bAy = ABc} \Rightarrow \vec{n}_{t_\chi} = (aB, -bA)$$

$$\boxed{t_\ell \perp t_\chi \Leftrightarrow \vec{n}_{t_\ell} \cdot \vec{n}_{t_\chi} = (bA, aB) \cdot (aB, -bA) = aAbB - aAbB = 0 \Leftrightarrow \vec{n}_{t_\ell} \perp \vec{n}_{t_\chi}}$$

5.11. Одредити једначину криве другог реда који садржи тачке $A(-2, -1)$ и $B(0, -2)$ и којој су праве $x+y+1=0$ и $x-y+1=0$ осе симетрије.



$$P: x+y+1=0$$

$$Q: x-y+1=0$$

$$\begin{array}{c|c|c} x & y & \\ \hline 1 & -1 & -1 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|c|c} x & y & \\ \hline 1 & 1 & -1 \end{array}$$

Бирамо нови коорд. систем $O'x'y'$ т.д.

x' -оса је Q , y' -оса је P , $O' = P \cap Q$

$$\vec{n}_Q = (1, -1) \Rightarrow \vec{Q} = (1, 1) \Rightarrow \vec{F}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\vec{n}_P = (1, 1) \Rightarrow \vec{P} = (-1, 1) \Rightarrow \vec{F}_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$O' = P \cap Q \Rightarrow O'(-1, 0)$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$C^{-1} = C^T \quad (\text{о.т.б.})$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{K}': \frac{x'^2}{a^2} + \mu \frac{y'^2}{b^2} = 1}$$

$$A(-2, -1) \mapsto A'(-\sqrt{2}, 0), \\ B(0, -2) \mapsto B'\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{2}}\right)$$

ејачања
↑

$$\boxed{\mu = 1} \\ \boxed{b^2 = 6}$$

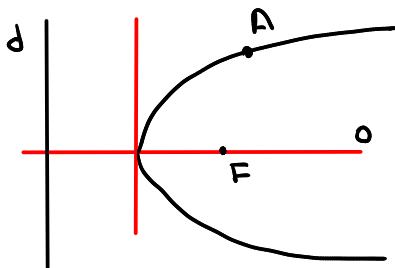
$$1) A' \in \mathcal{K}' \Rightarrow \frac{2}{a^2} = 1 \Rightarrow \boxed{a^2 = 2}$$

$$2) B' \in \mathcal{K}' \Rightarrow \frac{\frac{1}{2}}{2} + \mu \cdot \frac{\frac{9}{2}}{b^2} = 1 \Rightarrow \mu \cdot \frac{9}{2b^2} = \frac{3}{4} \Rightarrow b^2 = 6\mu$$

$$\Rightarrow \mathcal{K}': \frac{x'^2}{2} + \frac{y'^2}{6} = 1 \Rightarrow \boxed{\mathcal{K}: \frac{(x+y+1)^2}{4} + \frac{(-x+y-1)^2}{12} = 1}$$

5.12. Одредити једначину параболе која садржи тачку $A(2,1)$, ако су дате њена директриса $x - 2y - 5 = 0$ и оса симетрије $2x + y - 1 = 0$.

d :



$$\mathcal{P}: d(M, d) = d(M, F)$$

$$1) F(x_0, y_0) \in 0 \Rightarrow 2x_0 + y_0 - 1 = 0 \Rightarrow y_0 = -2x_0 + 1$$

$$2) A \in \mathcal{P} \Rightarrow d(A, F) = d(A, d)$$

$$\sqrt{(x_0 - 2)^2 + (-2x_0)^2} = \frac{|2 - 2 - 5|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \sqrt{5} \quad /^2$$

$$5x_0^2 - 4x_0 - 1 = 0$$

$$x_{0,1/2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 20}}{10} = \frac{4 \pm 6}{10} \rightarrow -1/5 \Rightarrow F^1(-\frac{1}{5}, \frac{7}{5})$$

$$F^2(1, -1)$$

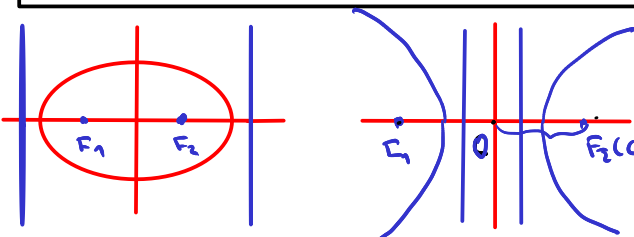
$M(x, y) \in \mathcal{P}$ произв

$$\mathcal{P}: d(M, F^1) = d(M, d)$$

$$3) \sqrt{(x + \frac{1}{5})^2 + (y - \frac{7}{5})^2} = \frac{|x - 2y - 5|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} \Rightarrow \mathcal{P}_1: (x + \frac{1}{5})^2 + (y - \frac{7}{5})^2 = \frac{(x - 2y - 5)^2}{5}$$

$$4) \sqrt{(x - 1)^2 + (y + 1)^2} = \frac{|x - 2y - 5|}{\sqrt{5}} \Rightarrow \mathcal{P}_2: (x - 1)^2 + (y + 1)^2 = \frac{(x - 2y - 5)^2}{5}$$

5.13. Одредити једначину криве другог реда чија једна директриса има једначину $l: x + y - 1 = 0$, а жижје су јој тачке $F_1(1,1)$ и $F_2(-2,-2)$.



$$1) f_e(x, y) = x + y - 1$$

$$f_e(F_1) = 1 + 1 - 1 = 1 > 0$$

$$f_e(F_2) = -2 - 2 - 1 = -5 < 0$$

$\Rightarrow F_1$ и F_2 са супротних страна e
 $\Rightarrow$ хипербола

$\Rightarrow F_1$ и e у пару

$$2) \text{ центар } \chi \text{ је } O = S(F_1, F_2) \Rightarrow O(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$$

$$3) c = d(O, F_1) = \sqrt{(\frac{3}{2})^2 + (\frac{3}{2})^2} = \sqrt{\frac{18}{4}} \Rightarrow c = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$4) \text{ директриса } \frac{a^2}{c} = d(O, e) = \frac{|-\frac{1}{2} - \frac{1}{2} - 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{1-2}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow a^2 = c\sqrt{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{2} = 3 \Rightarrow a = \sqrt{3}$$

$$5) e = \frac{c}{a} = \frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{6}} = \frac{3\sqrt{6}}{6} = \frac{\sqrt{6}}{2} > 1 \Rightarrow \text{хипербола}$$

$$* M(x, y) \in \chi \text{ произв. } \Rightarrow \chi: \frac{d(M, F_1)}{d(M, e)} = e$$

$$\frac{\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2}}{\frac{|x+y-1|}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{6}}{2} \quad /^2 \quad \chi: \frac{2((x-1)^2 + (y-1)^2)}{(x+y-1)^2} = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \chi: \frac{3}{4} (x+y-1)^2 = (x-1)^2 + (y-1)^2$$

$$d: x = \pm \frac{a}{e} \Rightarrow \pm \frac{a^2}{c}$$

$$e = \frac{c}{a}$$

5.14. Одредити једначину праве која садржи тачку $A(3,4)$ и додирује криву $2x^2 - 4xy + y^2 - 2x + 6y - 3 = 0$.

1) $P: \frac{x-3}{a} = \frac{y-4}{b} \Rightarrow P: \begin{cases} x = at+3 \\ y = bt+4 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

2) P додирује $\mathcal{K} \Leftrightarrow P \cap \mathcal{K}$ има јед. решење

$$2(at^2 + 6at + 9) - 4(abt^2 + 4at + 3bt + 12) + (b^2t^2 + 8bt + 16) - 2at - 6 + 6bt + 24 - 3 = 0$$

$$\underbrace{(2a^2 - 4ab + b^2)}_A t^2 + \underbrace{(-6a + 2b)}_B t + \underbrace{1}_C = 0$$

$$\Delta = B^2 - 4AC = 36a^2 - 24ab + 4b^2 - 8a^2 + 16ab - 4b^2$$

$$28a^2 - 8ab = 0 \Rightarrow 4a(7a - 2b) = 0$$

$$\Rightarrow a = 0$$

$$\vee b = \frac{7}{2}a$$

$$\Rightarrow \vec{p} = (0, 1)$$

$$\vec{p} = (a, \frac{7}{2}a) \parallel (2, 7)$$

$$t_1: \frac{x-3}{0} = \frac{y-4}{1}$$

$$t_2: \frac{x-3}{2} = \frac{y-4}{7}$$

$$\boxed{t_1: x=3}$$

$$\boxed{t_2: 7x - 2y - 13 = 0}$$

Свођење криве II реда на канонски облик

$$\mathcal{K}: a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathcal{K}: [x \ y \ 1] A \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

5.16. Свести криву другог реда $4x^2 - 4xy + y^2 + x + 12y + 6 = 0$ на канонски облик изометријском трансформацијом координата и написати формуле те трансформације. Која је то крива и колики јој је ексцентрицитет. Скицирати криву.

$$\mathcal{K}: 4x^2 - 4xy + y^2 + x + 12y + 6 = 0$$

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1/2 \\ -2 & 1 & 6 \\ 1/2 & 6 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow B = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

* сопств. вредности B

$$\det(B - \lambda E) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -2 \\ -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda + 4 - 4 = \lambda(\lambda - 5) = 0$$

$$\boxed{\lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = 5}$$

* сопств. вектори $\Leftrightarrow (B - \lambda E)\vec{v} = \vec{0}$

$$\boxed{\lambda_1 = 0} \Rightarrow B\vec{v} = \vec{0}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 4a - 2b = 0 \\ -2a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow b = 2a \Rightarrow \vec{v}_1 = (a, 2a)$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{v}_1 = (\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}})}$$

$$\lambda_2 = 5 \Rightarrow (B - 5E) \vec{v} = \vec{0} \quad -a - 2b = 0 \Rightarrow a = -2b \Rightarrow \vec{v}_2 = (-2b, b)$$

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow -2a - 4b = 0 \Rightarrow \vec{v}_2 = \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} & 0 \\ 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow X = R \cdot X'$$

$$X: x^T A x = 0 \Rightarrow (R X')^T A \cdot R X' = 0 \Rightarrow X': X'^T \overset{A'}{R^T A R} X' = 0$$

$$A' = R^T A R = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} & 0 \\ -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1/2 \\ -2 & 1 & 6 \\ 1/2 & 6 & 6 \end{bmatrix} R$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 25/2\sqrt{5} \\ -10/\sqrt{5} & 5/\sqrt{5} & 5/\sqrt{5} \\ 1/2 & 6 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} & 0 \\ 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 5\sqrt{5}/2 \\ 0 & 5 & \sqrt{5} \\ 5\sqrt{5}/2 & \sqrt{5} & 6 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{2\sqrt{5}} + \frac{2 \cdot 12}{2\sqrt{5}} = \frac{25}{2\sqrt{5}} = \frac{5\sqrt{5}}{2}$$

$$-\frac{2}{2\sqrt{5}} + \frac{6}{\sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow X': 5 y'^2 + 5\sqrt{5} x' + 2\sqrt{5} y' + 6 = 0$$

$$X': 5 \left(y'^2 + \frac{2}{\sqrt{5}} y' + \frac{1}{5} \right) + 5\sqrt{5} x' - 1 + 6 = 0$$

$$X': 5 \left(y' + \frac{1}{\sqrt{5}} \right)^2 + 5\sqrt{5} x' + 5 = 0 \quad / : 5$$

$$\underbrace{\left(y' + \frac{1}{\sqrt{5}} \right)^2}_{y''} = -\sqrt{5} \underbrace{\left(x' + \frac{1}{\sqrt{5}} \right)}_{x''} \quad ! \text{ we } x'' = -\sqrt{5} x' - 1 \text{ see these nom.}$$

$$X'': y''^2 = -\sqrt{5} x''$$

$$\Rightarrow$$

$$y''' = y''$$

$$x''' = -x''$$

$$\Rightarrow X''': y'''^2 = \sqrt{5} x'''$$

ПАРАБОЛА

$$y^2 = 2px$$

$$\Rightarrow p = \frac{\sqrt{5}}{2}, T''(0,0), F\left(\frac{\sqrt{5}}{4}, 0\right), d''': x''' = -\frac{\sqrt{5}}{4}, \sigma''': y''' = 0$$

формуле:

$$x = \frac{1}{\sqrt{5}} x' - \frac{2}{\sqrt{5}} y' = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(x'' - \frac{1}{\sqrt{5}} \right) - \frac{2}{\sqrt{5}} \left(y'' - \frac{1}{\sqrt{5}} \right) = -\frac{1}{\sqrt{5}} x''' - \frac{2}{\sqrt{5}} y''' + \frac{1}{5} = x$$

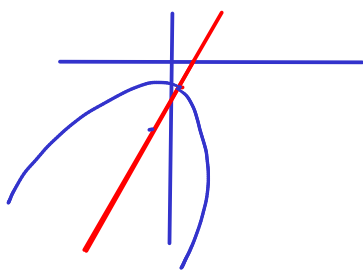
$$y = \frac{2}{\sqrt{5}} x' + \frac{1}{\sqrt{5}} y' = \frac{2}{\sqrt{5}} \left(x'' - \frac{1}{\sqrt{5}} \right) + \frac{1}{\sqrt{5}} \left(y'' - \frac{1}{\sqrt{5}} \right) = -\frac{2}{\sqrt{5}} x''' + \frac{1}{\sqrt{5}} y''' - \frac{3}{5} = y$$

$$\Rightarrow T(1/5, -3/5), F(-\frac{1}{20}, -\frac{11}{10}), \sqrt{5} y''' = -2x + y + 1$$

$$\Rightarrow \sigma: -2x + y + 1 = 0$$

$$y = 2x - 1$$

$$\begin{array}{c|c|c} x & 0 & 1/2 \\ y & -1 & 0 \end{array}$$



6 Афина пресликавања

F афине пресликавања $M(x, y) \xrightarrow{F} M'(x', y')$

$$\Rightarrow F: \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}, \quad F: Ax + B = x'$$

$$\Rightarrow F: \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boxed{F(\vec{AB}) = \overrightarrow{F(A)F(B)}}$$

Особине:

- 1) слика праве у праве
- 2) чува паралелност правих
- 3) чува размеру колич. дужи

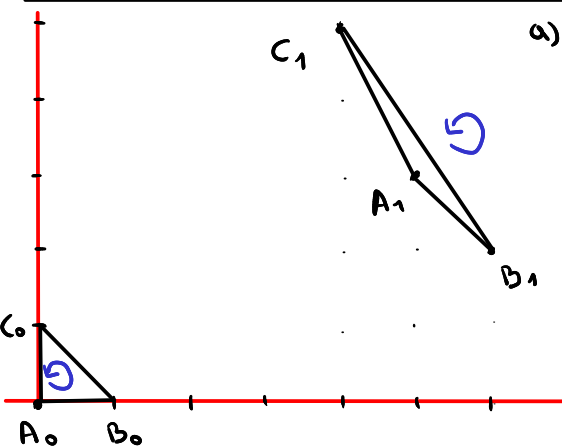
$$4) \frac{P_{\text{слике}}}{P_{\text{оригинала}}} = \det A$$

$$5) \det A > 0 \Rightarrow \text{чува оријентацију}$$

$$\det A < 0 \Rightarrow \text{не чува}$$

$$6) \text{ не чува дужине, углове, ...}$$

6.1. а) Одредити афине пресликавање које тачке $A_0(0,0)$, $B_0(1,0)$, $C_0(0,1)$ пресликава редом у тачке $A_1(5,3)$, $B_1(6,2)$, $C_1(4,5)$. б) Да ли је пресликавање изометрија, чува ли оријентацију и површину? в) Одредити му инверзно пресликавање.



$$a) F: \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}$$

$$F(0) = F(A_0) = A_1 = (5, 3)$$

$$F(\vec{e}_1) = F(\vec{A_0B_0}) = \vec{A_1B_1} = (1, -1)$$

$$F(\vec{e}_2) = F(\vec{A_0C_0}) = \vec{A_1C_1} = (-1, 2)$$

$$\boxed{F: \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}}$$

$$A^T A = E \quad (\Rightarrow \text{изометрија})$$

$$b) \|\vec{A_0B_0}\| = 1 \xrightarrow{F} \|\vec{A_1B_1}\| = \sqrt{2} \Rightarrow F \text{ није изометрија}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 1 > 0 \Rightarrow \text{чува оријентацију}$$

$$\det A = 1 \Rightarrow P_{\text{слике}} = P_{\text{оригинала}} \Rightarrow \text{чува површину}$$

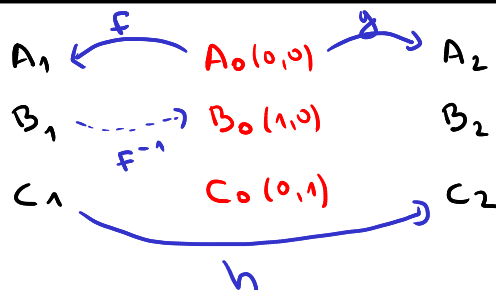
$$b) x' = Ax + B \Rightarrow x = A^{-1}x' - A^{-1}B$$

$$, A^{-1} = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{F^{-1}: \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 13 \\ 8 \end{bmatrix}}$$

$$(A_0, B_0, C_0) \xrightarrow{F} (A_1, B_1, C_1)$$

6.2. а) Одредити афине пресликавање које троугао $A_1B_1C_1 : A_1(5,3)$, $B_1(6,2)$, $C_1(4,5)$ пресликава троугао $A_2B_2C_2 : A_2(1,1)$, $B_2(-1,0)$, $C_2(0,-3)$. б) чува ли пресликавање оријентацију. Скицирати. в) Одредити површину троугла $A_2B_2C_2$ ако се зна да је површина троугла $A_1B_1C_1$ једнака $\frac{1}{2}$.



$$\boxed{h = g \circ F^{-1}}$$

$$P_{A_2B_2C_2} = \det h \cdot P_{A_1B_1C_1}$$

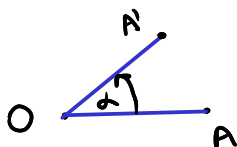
6.3. а) Одредити формуле ротације око тачке $S(2,2)$ за угао од $\phi = \frac{\pi}{4}$. б) Шта је слика праве $y = -x$ при том пресликавању. Нацртати!

* РОТАЦИЈА ОКО O ЗА УГАО α

* ТРАНСЛАЦИЈА ЗА $\vec{b} = (a, b)$

$$R_{O, \alpha} : \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$T_{\vec{b}} : \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$



а) $R_{S, \phi} = T_{\vec{OS}} \circ R_{O, \phi} \circ T_{\vec{SO}}$

III НАЧИН

$$x' = [R_{O, \phi}]x + b$$

$S \mapsto S$

$$[R_{S, \phi}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 2-2\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



$$\Rightarrow R_{S, \phi} : \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 2-2\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

б) $P: y = -x \xrightarrow{R} P': y = 2 - 2\sqrt{2}$

I НАЧИН $O(0,0) \in P \mapsto (2, 2-2\sqrt{2}) = O' \in P'$
 $A(1,-1) \in P \mapsto (2+\sqrt{2}, 2-2\sqrt{2}) = A' \in P'$

$$\vec{P'} = \vec{O'A'} = (\sqrt{2}, 0) \Rightarrow P': \frac{x-2}{\sqrt{2}} = \frac{y-2+2\sqrt{2}}{0} \Rightarrow P': y = 2-2\sqrt{2}$$

II НАЧИН

$$x = \dots \Rightarrow P': y = -x \dots$$

6.4. а) Одредити формуле ротације око тачке $S(2,5)$ за угао од $\phi = \frac{\pi}{2}$. б) Шта је слика круга $(x-2)^2 + y^2 = 4$ при том пресликавању. Нацртати!

II НАЧИН

а) $[R_{S, \phi}] = \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

2) $S \mapsto S \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 2 = -5 + a \\ 5 = 2 + b \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} a = 7 \\ b = 3 \end{matrix}$

$$R_{S, \frac{\pi}{2}} : \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \end{bmatrix}$$

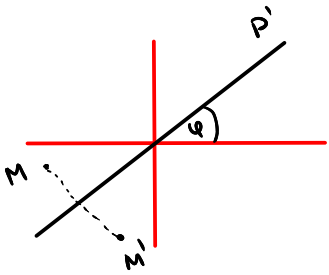
б) $k: (x-2)^2 + y^2 = 4 \mapsto k': (x-7)^2 + (y-5)^2 = 4$

$C(2,0), r=2 \mapsto C'(7,5), r'=2$

$$C \mapsto C' : \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \end{bmatrix}$$

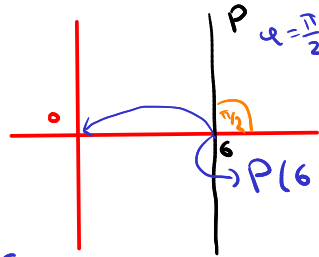
6.5. Одредити формуле рефлексije у односу на праву $p: x = 6$.

* рефлексija γ односу на праву кроз O



$$S_p: \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 2\varphi & \sin 2\varphi \\ \sin 2\varphi & -\cos 2\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

* $\varphi = \frac{\pi}{2}$ $S_p = T_{\vec{OP}} \circ S_{p'} \circ T_{\vec{PO}}$



$$P(6,0) \quad [S_p] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[S_p] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 12 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

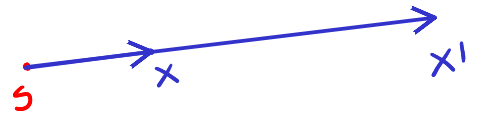
$$S_p: \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 12 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

6.6. Одредити формуле хомотетије са коефицијентом 2 у односу на тачку $S(4,3)$. шта је слика круга $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 9$ при тој хомотетији?

* хомотетија са центром γ O и коеф. κ

$$\chi_{O,\kappa}: \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \kappa & 0 \\ 0 & \kappa \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

* $\chi_{S,\kappa}(X) = X' \Leftrightarrow \vec{SX'} = \kappa \vec{SX}$



I начин $\chi_{S,2} = T_{\vec{OS}} \circ \chi_{O,2} \circ T_{\vec{SO}}$

$$[\chi_{S,2}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\chi_{S,2}: \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 \\ -3 \end{bmatrix}$$

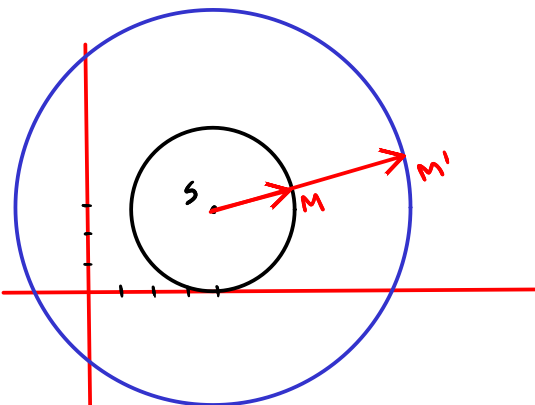
II начин $\chi_{S,2}(M) = M' \Leftrightarrow \vec{SM'} = 2\vec{SM}$

$$M(x,y) \mapsto M'(x',y') : (x'-4, y'-3) = 2(x-4, y-3)$$

$$x'-4 = 2x-8$$

$$y'-3 = 2y-6$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x' = 2x - 4 \\ y' = 2y - 3 \end{cases}$$



$$K: (x-4)^2 + (y-3)^2 = 9$$

$$C(4,3), r=3$$



$$C'(4,3), r'=6$$

$$K': (x-4)^2 + (y-3)^2 = 36$$

6.7. а) Одредити формуле рефлексије простора у односу на раван $\alpha : 2x + 2y - z + 1 = 0$. б) Шта је слика сфере $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ при тој рефлексији? Скицирати!

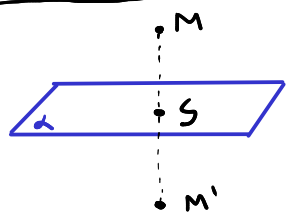
а)

I НАЧИН

* ретн. у односу на α_0 кроз коорд. почетак

$$[S_{\alpha_0}] = I_3 - 2 \vec{n}_{\alpha_0} \cdot \vec{n}_{\alpha_0}^T, \quad \alpha_0 : 2x + 2y - z = 0$$

$$\vec{n}_{\alpha_0} = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$$



$$[S_{\alpha_0}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - 2 \cdot \begin{bmatrix} 2/3 \\ 2/3 \\ -1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2/3 & 2/3 & -1/3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 8/9 & 8/9 & -4/9 \\ 8/9 & 8/9 & -4/9 \\ -4/9 & -4/9 & 2/9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/9 & -8/9 & 4/9 \\ -8/9 & 1/9 & 4/9 \\ 4/9 & 4/9 & 7/9 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow S_{\alpha} = T_{\vec{OA}} \circ S_{\alpha_0} \circ T_{\vec{AO}}, \quad A \in \alpha \text{ произв.}$$

II НАЧИН

$$M(x_0, y_0, z_0) \mapsto M'(x'_0, y'_0, z'_0)$$

1) n т.д. $M \in n, n \perp \alpha \Rightarrow \vec{n} = \vec{n}_{\alpha} = (2, 2, -1) \Rightarrow$

$$\begin{cases} x = 2t + x_0 \\ y = 2t + y_0 \\ z = -t + z_0 \end{cases}$$

2) $S = n \cap \alpha : 4t + 2x_0 + 4t + 2y_0 + t - z_0 + 1 = 0$

$$t = \frac{1}{9}(-2x_0 - 2y_0 + z_0 - 1)$$

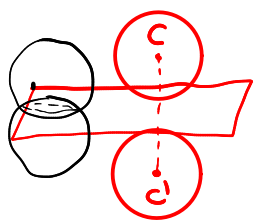
$$\Rightarrow S\left(\frac{5}{9}x_0 - \frac{4}{9}y_0 + \frac{2}{9}z_0 - \frac{2}{9}, -\frac{4}{9}x_0 + \frac{5}{9}y_0 + \frac{2}{9}z_0 - \frac{2}{9}, \frac{2}{9}x_0 + \frac{2}{9}y_0 + \frac{8}{9}z_0 + \frac{1}{9}\right)$$

3) $[S] = \frac{[M] + [M']}{2} \Rightarrow [M'] = 2[S] - [M]$

$$M'\left(\frac{1}{9}x_0 - \frac{8}{9}y_0 + \frac{4}{9}z_0 - \frac{4}{9}, -\frac{8}{9}x_0 + \frac{1}{9}y_0 + \frac{4}{9}z_0 - \frac{4}{9}, \frac{4}{9}x_0 + \frac{4}{9}y_0 + \frac{7}{9}z_0 + \frac{2}{9}\right)$$

$$S_{\alpha} : \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/9 & -8/9 & 4/9 \\ -8/9 & 1/9 & 4/9 \\ 4/9 & 4/9 & 7/9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4/9 \\ -4/9 \\ 2/9 \end{bmatrix}$$

б) $S : x^2 + y^2 + z^2 = 1 \mapsto S' : \left(x + \frac{4}{9}\right)^2 + \left(y + \frac{4}{9}\right)^2 + \left(z - \frac{2}{9}\right)^2 = 1$

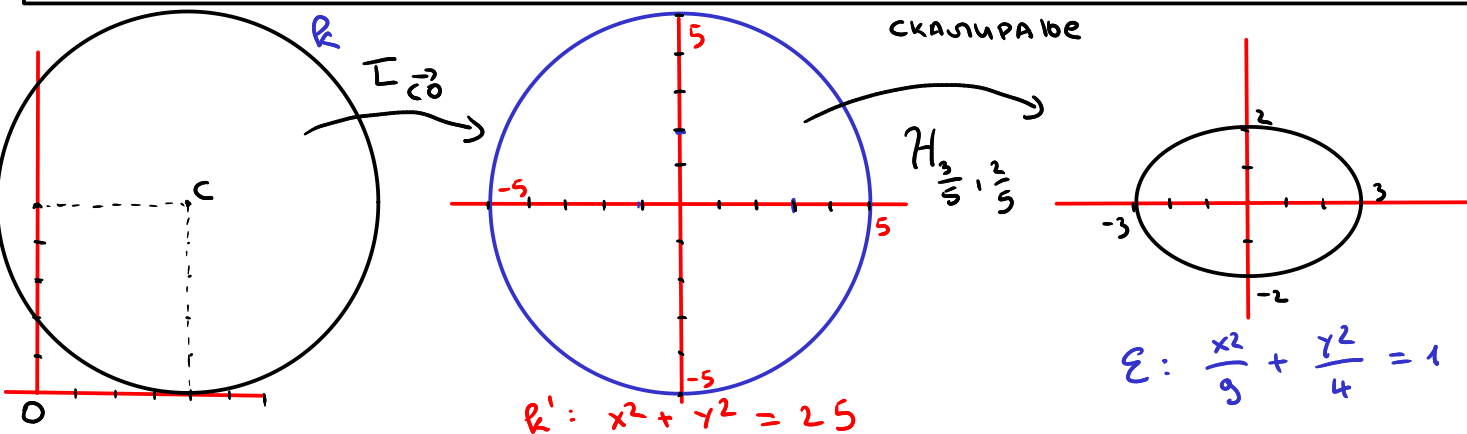


$$C(0, 0, 0) \xrightarrow{S_{\alpha}} C'\left(-\frac{4}{9}, -\frac{4}{9}, \frac{2}{9}\right)$$

$$r=1 \mapsto r'=1$$

6.8. Одредити бар једно афино пресликавање равни које које круг $k : x^2 + y^2 - 8x - 10y + 16 = 0$ пресликава на елипсу $e : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$.

$$k : (x-4)^2 + (y-5)^2 = 25 \Rightarrow C(4, 5), r=5$$



СКАЛЧРАВС СА ЦЕНТРОМ
У КООРД. ПОЧЕТКУ

$$H_{\lambda_1, \lambda_2}: \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$F = H_{\frac{3}{5}, \frac{2}{5}} \circ T_{\vec{c}} \Rightarrow [F] = \begin{bmatrix} 3/5 & 0 & 0 \\ 0 & 2/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/5 & 0 & -12/5 \\ 0 & 2/5 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$F: \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/5 & 0 \\ 0 & 2/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -12/5 \\ -2 \end{bmatrix}$$

6.10. Одредити формуле афиног пресликавања простора које представља централну симетрију у односу на тачку $S(-1, 1, 3)$. Да ли пресликавање чува оријентацију простора?

I НАЧИН

$$C_S(M) = M' \Leftrightarrow \vec{SM'} = -\vec{SM}$$

$$M(x, y, z) \mapsto M'(x', y', z')$$

$$(x' + 1, y' - 1, z' - 3) = -(x + 1, y - 1, z - 3)$$

$$C_S: \begin{aligned} x' &= -x - 2 \\ y' &= -y + 2 \\ z' &= -z + 6 \end{aligned}$$

$$C_S: \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}$$

II НАЧИН

$$C_0 = S_{Ox} \circ S_{Oy} \circ S_{Oz} \Rightarrow C_S = T_{\vec{S}} \circ C_0 \circ T_{\vec{S}}$$

$$\det [C_S] = -1 < 0 \Rightarrow \text{НЕ ЧУВА ОРИЈЕНТАЦИЈУ}$$

6.12. Одредити формуле хомотетије којом се сфера $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ пресликава на сферу $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 + (z - 3)^2 = 3$. Наћи сва решења.

$$S: x^2 + y^2 + z^2 = 1 \mapsto S': (x - 3)^2 + (y - 1)^2 + (z - 3)^2 = 3$$

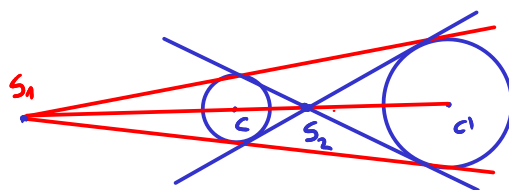
$$C(0, 0, 0), r = 1$$

$$C'(3, 1, 3), r' = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow |k| = \sqrt{3}$$

$$1) \chi_{S, \sqrt{3}}: \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$2) \chi_{S, -\sqrt{3}}: \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$



7 Површи

$$S: a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0$$

7.1. Круг k који настаје ротацијом тачке $A(1, 2, 3)$ око праве $p: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{1}$ написати као: а) пресек равни и сфере којој центар припада равни б) пресек равни и кружног цилиндра в) пресек две сфере полупречника 2.

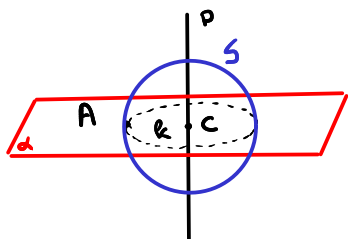
$$a) k = \alpha \cap S \quad 1) \alpha \perp p, A \in \alpha, \alpha \perp p \Rightarrow \vec{n}_\alpha = \vec{p} = (1, 1, 1)$$

$$\Rightarrow \alpha: 1(x-1) + 1(y-2) + 1(z-3) = 0$$

$$\alpha: x + y + z - 6 = 0$$

$$2) C = p \cap \alpha$$

$$p: \begin{aligned} x &= t+1 \\ y &= t+2 \\ z &= t+3 \end{aligned}, t \in \mathbb{R}$$



$$P \cap \alpha: t+1+t+2+t+1-6=0 \Rightarrow 3t=2 \Rightarrow t=\frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow C\left(\frac{5}{3}, \frac{8}{3}, \frac{5}{3}\right)$$

$$3) r = d(C, A) = \|\vec{AC}\| = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{4}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{24}{9}} = \sqrt{\frac{8}{3}}$$

$M(x, y, z) \in S$ произв.

$$S: d(M, C) = r \Rightarrow S: \left(x - \frac{5}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{8}{3}\right)^2 + \left(z - \frac{5}{3}\right)^2 = \frac{8}{3}$$

$$b) R = \alpha \cap \ell$$

$$\alpha: x+y+z-6=0, r = \sqrt{\frac{8}{3}}$$

$$M(x, y, z) \in \ell \text{ произв.} \Rightarrow d(M, P) = r$$

$$\ell: \sqrt{\frac{8}{3}} = d(M, P) = \frac{\|\vec{P} \times \vec{PM}\|}{\|\vec{P}\|}$$

$$P(1, 2, 1) \in P$$

$$\vec{P} = (1, 1, 1)$$

$$\vec{P} \times \vec{PM} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ x-1 & y-2 & z-1 \end{vmatrix} = (z-y+1, x-z, y-x-1)$$

$$\ell: \sqrt{\frac{8}{3}} = \frac{\sqrt{(z-y+1)^2 + (x-z)^2 + (y-x-1)^2}}{\sqrt{3}}$$

$$\ell: (z-y+1)^2 + (x-z)^2 + (y-x-1)^2 = 8$$

$$b) R = S_1 \cap S_2$$

$$P: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{1}$$

$$P(t+1, t+2, t+1) \in P \text{ произв.}, A(1, 2, 3)$$

$$d(P, A) = 2$$

$$\sqrt{t^2 + t^2 + (t-2)^2} = 2 \quad /^2$$

$$3t^2 - 4t + 4 = 4 \Rightarrow t(3t-4) = 0$$

$$t_1 = 0 \quad \vee \quad t_2 = \frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow C_1(1, 2, 1) \quad C_2\left(\frac{7}{3}, \frac{10}{3}, \frac{7}{3}\right)$$

$$\Rightarrow S_1: (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 4, S_2: \left(x - \frac{7}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{10}{3}\right)^2 + \left(z - \frac{7}{3}\right)^2 = 4$$

7.2. Одредити једначине равни које садрже праву $l: \frac{x-13}{-1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{4}$ и додирују сферу $S: x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z - 67 = 0$. Одредити затим једначине симетралних равни диједара између ове две равни назначивши ону која сече дату сферу.

$$a) \ell: \frac{x-13}{-1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{4} \Rightarrow \vec{e} = (-1, 1, 4), L(13, -1, 0) \in \ell$$

$$S: (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 81 \Rightarrow C(1, 2, 3), R=9$$

$$\Rightarrow \alpha: Ax + By + Cz + D = 0$$

$$1) \ell \subset \alpha \Rightarrow \vec{n}_\alpha \cdot \vec{e} = 0 \Rightarrow -A + B + 4C = 0 \Rightarrow B = A - 4C$$

$$2) L \in \ell \subset \alpha \Rightarrow 13A - B + D = 0 \Rightarrow D = B - 13A \Rightarrow D = -12A - 4C$$

$$3) \alpha \text{ додирује } S \Rightarrow d(C, \alpha) = R$$

$$g = \frac{|A+2B+3C+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \frac{|A+2A-8C+3C-12A-4C|}{\sqrt{A^2+A^2-8AC+16C^2+C^2}} = \frac{|-9A-9C|}{\sqrt{2A^2-8AC+17C^2}} / 2$$

$$\cancel{81} (2A^2 - 8AC + 17C^2) = \cancel{81} (A^2 + 2AC + C^2)$$

$$A^2 - 10AC + 16C^2 = 0 \quad /: C^2$$

$$\left(\frac{A}{C}\right)^2 - 10 \frac{A}{C} + 16 = 0 \Rightarrow t^2 - 10t + 16 = 0$$

$$(t-2)(t-8) = 0$$

$$t=2 \quad t=8$$

$$\Rightarrow A=2C \quad \vee \quad A=8C$$

$$B=-2C$$

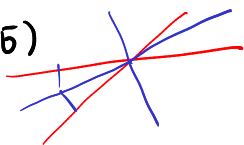
$$B=4C$$

$$D=-28C$$

$$D=-100C$$

$$d_1: 2x - 2y + z - 28 = 0, \quad d_2: 8x + 4y + z - 100 = 0$$

б)



$$M(x, y, z) \in \sigma \text{ произв.} \Rightarrow d(M, d_1) = d(M, d_2)$$

$$\frac{|2x - 2y + z - 28|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{|8x + 4y + z - 100|}{\sqrt{8^2 + 4^2 + 1^2}}$$

$$3|2x - 2y + z - 28| = |8x + 4y + z - 100|$$

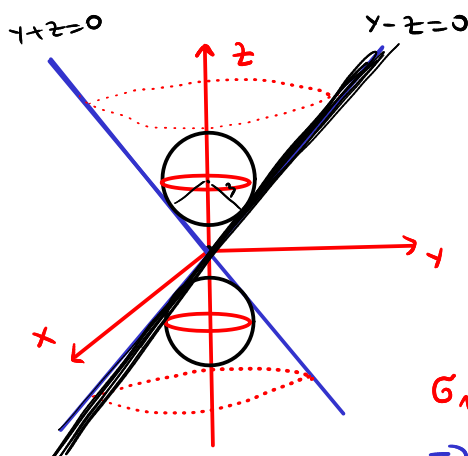
$$3(2x - 2y + z - 28) = \pm (8x + 4y + z - 100)$$

$$G_1: 2x + 10y - 2z - 16 = 0 \quad G_2: 14x - 2y + 4z - 184 = 0$$

$$G_1: x + 5y - z - 8 = 0, \quad G_2: 7x - y + 2z - 92 = 0$$

$$C(1, 2, 3) \in G_1? \quad 1 + 10 - 3 - 8 = 0 \quad \checkmark \Rightarrow C \in G_1 \Rightarrow G_1 \text{ сече } S$$

7.3. Одредити једначину сфере полупречика 3 која је уписана у конус $x^2 + y^2 - z^2 = 0$. Скицирати.



$$K: x^2 + y^2 - z^2 = 0$$

$$z=0 \Rightarrow x^2 + y^2 = 0 \Rightarrow O(0, 0, 0)$$

$$x=0 \Rightarrow y^2 - z^2 = 0 \Rightarrow y = \pm z$$

$$y=0 \Rightarrow x^2 - z^2 = 0 \Rightarrow x = \pm z$$

$$O \subset K \text{ конуса је } O_z: x=0, y=0, z=t, t \in \mathbb{R}$$

$$C \in O_z \Rightarrow C(0, 0, t) \text{ центар сфере}$$

$$G_1: y - z = 0 \text{ танг. раван на } S$$

$$\Rightarrow d(C, G_1) = 3$$

$$\frac{|0 - t|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = 3 \Rightarrow |t| = 3\sqrt{2} \Rightarrow t = \pm 3\sqrt{2}$$

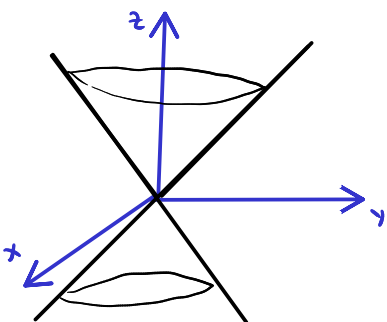
$$\Rightarrow C_1(0, 0, 3\sqrt{2}), \quad C_2(0, 0, -3\sqrt{2})$$

$$S_1: x^2 + y^2 + (z - 3\sqrt{2})^2 = 9, \quad S_2: x^2 + y^2 + (z + 3\sqrt{2})^2 = 9$$

7.4. Шта се добија (објаснити и написати једначину) ротацијом праве p око Oz осе, ако је права p : а) $x = 0, y = z$; б) $y = 0, x = 1$ в) $z = 0, x = y$; г) $z = 0, x = 2$; д) $x = 1, y = z$.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

а) $p: x = 0, y = z \Rightarrow M(0, t, t) \in p$ произв., $t \in \mathbb{R}$

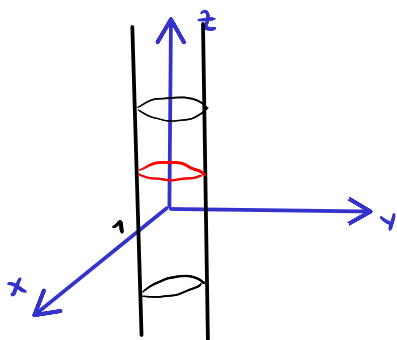


$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t \sin \alpha \\ t \cos \alpha \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

$$x'^2 + y'^2 = t^2 \sin^2 \alpha + t^2 \cos^2 \alpha = t^2 = z'^2$$

$$\mathcal{S}: x^2 + y^2 - z^2 = 0 \quad \text{кружачи конач}$$

б) $p: y = 0, x = 1$



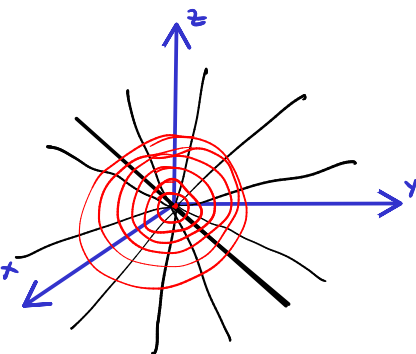
$M(1, 0, t) \in p$ произв., $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

$$x'^2 + y'^2 = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$$

$$\mathcal{S}: x^2 + y^2 = 1 \quad \text{кружачи бесконач}$$

в) $p: z = 0, x = y$



$M(t, t, 0) \in p$ произв., $t \in \mathbb{R}$

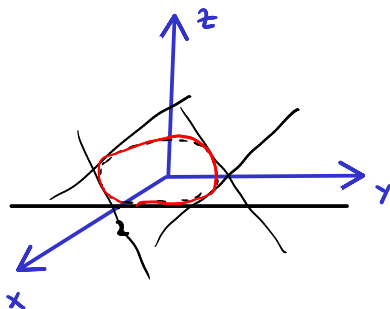
$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ t \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \cos \alpha - t \sin \alpha \\ t \sin \alpha + t \cos \alpha \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

$$x'^2 + y'^2 = t^2 + t^2 = 2t^2, \quad t \in \mathbb{R}$$

$$z' = 0$$

$$\mathcal{S}: O_{xy} - \text{раван}, \quad z = 0$$

г) $p: z = 0, x = 2$



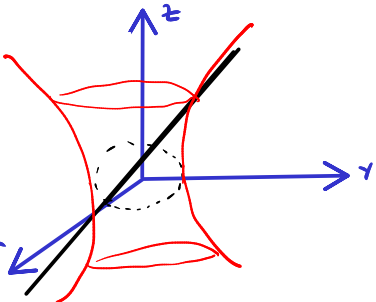
$M(2, t, 0) \in p$ произв.,

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ t \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cos \alpha - t \sin \alpha \\ 2 \sin \alpha + t \cos \alpha \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

$$x'^2 + y'^2 = 4 + t^2 \Rightarrow \mathcal{S}: x^2 + y^2 \geq 4, \quad z = 0$$

раван O_{xy} без
гиперб. круга $x^2 + y^2 = 4$

д) $p: x = 1, y = z$



$M(1, t, t) \in p$ произв.

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha - t \sin \alpha \\ \sin \alpha + t \cos \alpha \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

$$x'^2 + y'^2 = 1 + t^2 = 1 + z'^2$$

$$\mathcal{S}: x^2 + y^2 - z^2 = 1 \quad \text{безпогранич гиперболич}$$

7.7. Одредити једначину геометријског места тачака које су једнако удаљене од мимоилазних права $p: x=0, y=0$, и $q: z=0, x=a$. Свести површ на канонски облик. О којој се површи ради?

$$p: x=0, y=0$$

$$q: z=0, x=a$$

$$\Rightarrow P: \begin{matrix} x=0 \\ y=0 \\ z=t \end{matrix}, t \in \mathbb{R}$$

$$\vec{P} = (0, 0, 1), P(0, 0, 0)$$

$$Q: \begin{matrix} x=a \\ y=1 \\ z=0 \end{matrix}, 1 \in \mathbb{R} \quad Q(a, 0, 0)$$

$$\vec{Q} = (0, 1, 0)$$

$$M(x, y, z) \in \mathcal{S} \text{ произв.} \Rightarrow$$

$$d(M, P) = d(M, Q)$$

$$\frac{\|\vec{P} \times \vec{PM}\|}{\|\vec{P}\| = 1} = \frac{\|\vec{Q} \times \vec{QM}\|}{\|\vec{Q}\| = 1}$$

$$\vec{P} \times \vec{PM} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ x & y & z \end{vmatrix} = (-y, x, 0)$$

$$\vec{Q} \times \vec{QM} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ x-a & y & z \end{vmatrix} = (z, 0, a-x)$$

$$\mathcal{S}: \sqrt{y^2 + x^2} = \sqrt{z^2 + (a-x)^2}$$

$$\mathcal{S}: y^2 + x^2 = z^2 + a^2 - 2ax + x^2$$

$$\boxed{\mathcal{S}: y^2 - z^2 = -2a(x - \frac{a}{2})}$$

хиперболоиди параболоид

7.8. Одредити једначину цилиндра који је описан око сфере $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ чије су изводнице паралелне вектору $(1, 1, -2)$.

$$\mathcal{S}: x^2 + y^2 + z^2 = 1 \Rightarrow C(0, 0, 0), r = 1$$

$$\sigma \text{ т.д. } C \in \sigma, \vec{\sigma} = (1, 1, -2) \Rightarrow \sigma: \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-2}$$

$$M(x, y, z) \in \mathcal{C} \text{ произв.} \Rightarrow d(M, \sigma) = r$$

$$\vec{\sigma} \times \vec{CM} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -2 \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

$$= (z+2y, -z-2x, y-x)$$

$$\mathcal{C}: \frac{\|\vec{\sigma} \times \vec{CM}\|}{\|\vec{\sigma}\|} = r = 1$$

$$\|\vec{\sigma}\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{6}$$

$$\mathcal{C}: \frac{\sqrt{(z+2y)^2 + (-z-2x)^2 + (y-x)^2}}{\sqrt{6}} = 1$$

$$\boxed{\mathcal{C}: (z+2y)^2 + (-z-2x)^2 + (y-x)^2 = 6}$$

7.9. (291.) Одредити једначину цилиндра чије су изводнице паралелне правој $p: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+2}{4}$, а који садржи параболу $x^2 = 2y, z = 0$. $\mathcal{P}$



$$A(x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{P} \Rightarrow x_0^2 = 2y_0, z_0 = 0$$

$$i: \frac{x-x_0}{2} = \frac{y-y_0}{3} = \frac{z-z_0}{4} = t \in \mathcal{C} \Rightarrow i:$$

$$x_0 = x - 2t$$

$$y_0 = y - 3t$$

$$z_0 = z - 4t$$

$$1) z_0 = 0 \Rightarrow z - 4t = 0 \Rightarrow t = \frac{z}{4} \Rightarrow$$

$$x_0 = x - \frac{z}{2}$$

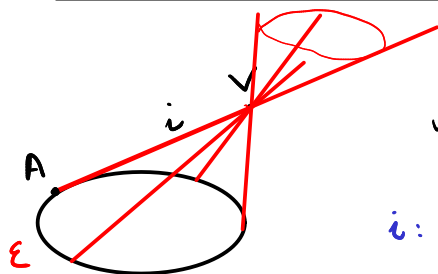
$$y_0 = y - \frac{3z}{4}$$

$$z_0 = 0$$

$$2) x_0^2 = 2y_0$$

$$\boxed{\mathcal{C}: (x - \frac{z}{2})^2 = 2(y - \frac{3z}{4})}$$

7.10. Одредити једначину конуса чији је врх тачка $V(0, 1, 1)$ и који садржи елипсу $x^2 + 3y^2 = 4, z = 0$. ε



$$A(x_0, y_0, z_0) \in \varepsilon \Rightarrow x_0^2 + 3y_0^2 = 4, z_0 = 0$$

$$\text{изводичица } i = VA : \frac{x}{x_0} = \frac{y-1}{y_0-1} = \frac{z-1}{z_0-1} = t$$

$$x_0 = \frac{x}{t} = \frac{x}{1-t}$$

$$i: y_0 = \frac{y-1}{t} + 1 = \frac{y-1}{1-t} + 1 = \frac{y-1+1-t}{1-t} = \frac{y-t}{1-t}$$

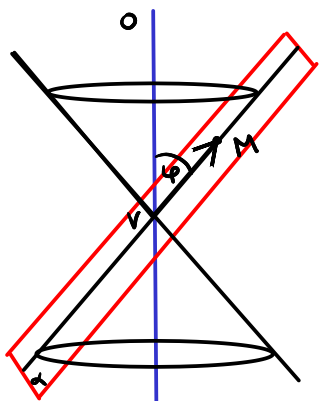
$$z_0 = \frac{z-1}{t} + 1 = 0$$

$$1) z_0 = 0 \Rightarrow \frac{z-1}{t} + 1 = 0 \Rightarrow z-1 = -t \Rightarrow z = 1-t \Rightarrow \underline{t = 1-z}$$

$$2) x_0^2 + 3y_0^2 = 4 \Rightarrow \mathcal{K}: \left(\frac{x}{1-z}\right)^2 + 3\left(\frac{y-t}{1-t}\right)^2 = 4$$

$$\mathcal{K}: x^2 + 3(y-z)^2 = 4(z-1)^2$$

7.11. Одредити једначину кружног конуса коме је права $o: x-y=0, 4x-z=0$ оса и коме је раван $\alpha: x+y+z=0$ тангентна раван.



$$o: \begin{cases} x-y=0 \\ 4x-z=0 \end{cases} \Rightarrow o: \begin{cases} x=t \\ y=t \\ z=4t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \Rightarrow \vec{o} = (1, 1, 4)$$

$$\alpha: x+y+z=0 \Rightarrow \vec{n}_\alpha = (1, 1, 1)$$

$$1) V = o \cap \alpha: t+t+4t=0 \Rightarrow t=0 \Rightarrow \underline{V(0, 0, 0)}$$

$$2) \sin \varphi = \frac{|\vec{n}_\alpha \cdot \vec{o}|}{\|\vec{n}_\alpha\| \cdot \|\vec{o}\|} = \frac{|1+1+4|}{\sqrt{3} \sqrt{18}} = \frac{6}{3\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

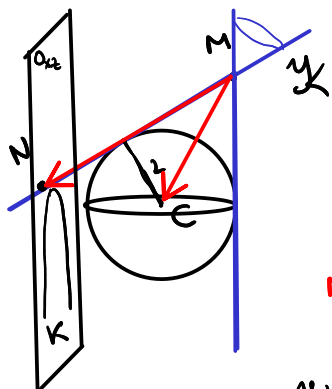
$$\Rightarrow \cos \varphi = \sqrt{1 - \sin^2 \varphi} = \sqrt{1 - \frac{6}{9}} = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$3) M(x, y, z) \in \mathcal{K} \text{ произв.} \Rightarrow \angle(VM, o) = \varphi = \text{const.}$$

$$\mathcal{K}: \frac{\sqrt{3}}{3} = \cos \varphi = \frac{|\vec{VM} \cdot \vec{o}|}{\|\vec{VM}\| \cdot \|\vec{o}\|} = \frac{|x+y+4z|}{\sqrt{x^2+y^2+z^2} \cdot 3\sqrt{2}} \quad / 2$$

$$\mathcal{K}: (x+y+4z)^2 = 6(x^2+y^2+z^2)$$

7.12. (298.) Одредити једначину конуса чије је теме тачка $M(1, 4, 5)$ и који додирује сферу $\sigma: (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 4$. Ако је извор светлости у тачки M одредити која је крива контура сенке сфере σ на раван Oxz .



$$\sigma: (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 4 \Rightarrow C(1, 2, 1), R=2$$

$$N(x, y, z) \in \mathcal{K} \text{ произв.} \Rightarrow d(C, MN) = 2$$

$$\frac{\|\vec{MC} \times \vec{MN}\|}{\|\vec{MN}\|} = 2$$

$$\vec{MC} = (0, -2, -4)$$

$$\vec{MN} = (x-1, y-4, z-5)$$

$$\vec{MC} \times \vec{MN} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & -2 & -4 \\ x-1 & y-4 & z-5 \end{vmatrix} = (-2z+4y-6, 4(x-1), 2(x-1))$$

$$\mathcal{K}: \frac{\sqrt{(4y-2z-6)^2 + 20(x-1)^2}}{\sqrt{(x-1)^2 + (y-4)^2 + (z-5)^2}} = 2$$

$$\mathcal{K}: (4y-2z-6)^2 + 16(x-1)^2 - 4(y-4)^2 - 4(z-5)^2 = 0$$

$$b) K = \mathcal{K} \cap O_{xz}, \quad O_{xz}: y=0 \quad \uparrow$$

$$K: (2z+6)^2 + 16(x-1)^2 - 4(z-5)^2 = 64$$

$$4(z+3)^2 + 16(x-1)^2 - 4(z-5)^2 = 64 \quad / : 4$$

$$\cancel{z^2} + \underline{6z} + \underline{9} + 4x^2 - 8x + 4 - \cancel{z^2} + \underline{10z} - \underline{25} = 16$$

$$4x^2 - 8x + 4 = -16z + 32 \quad / : 4$$

$$K: (x-1)^2 = -4(z-2) \quad \text{ПАРАБОЛА}$$

7.14. Свести једначину површи на канонски облик изометријском трансформацијом и написати формуле трансформације 1) $3x^2 + 3y^2 - 2xy - 8x + 8y - z + 10 = 0$; 2) $12x^2 + 6y^2 + 9z^2 - 12xz - 12yz - 4 = 0$.

$$1) \mathcal{S}: 3x^2 + 3y^2 - 2xy - 8x + 8y - z + 10 = 0$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} -4 \\ 4 \\ -1/2 \end{matrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\varphi_B(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ -1 & 3-\lambda \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ -\lambda \end{matrix} = -\lambda \cdot (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \cdot [(3-\lambda)^2 - 1]$$

$$= -\lambda(2-\lambda)(4-\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda_1=2 \quad \lambda_2=4 \quad \lambda_3=0$$

$$\lambda_1=2 \Rightarrow (B-2E)\vec{u} = \vec{0}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \vec{0}$$

$$\begin{matrix} a-b=0 \\ -2c=0 \end{matrix} \Rightarrow \vec{u}_1 = \begin{pmatrix} a \\ a \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{u}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right)$$

$$\lambda_2=4 \Rightarrow (B-4E)\vec{u} = \vec{0}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \vec{0}$$

$$\begin{matrix} a=-b \\ c=0 \end{matrix} \Rightarrow \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} -b \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{u}_2 = (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)$$

$$\lambda_3=0 \Rightarrow B\vec{u} = \vec{0}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \vec{0}$$

$$\begin{matrix} 3a-b=0 \\ -a+3b=0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} b=3a \\ a=0 \end{matrix}$$

$$\vec{u}_3 = (0, 0, 1)$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} x = \frac{1}{\sqrt{2}}x' - \frac{1}{\sqrt{2}}y' \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y' \\ z = z' \end{matrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(x' - y')$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y')$$

$$\mathcal{S}': \frac{3}{2}(x'^2 - 2x'y' + y'^2) + \frac{3}{2}(x'^2 + 2x'y' + y'^2) - x'^2 + y'^2$$

$$\frac{8}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}$$

$$- \frac{8}{\sqrt{2}}(x' - y') + \frac{8}{\sqrt{2}}(x' + y') - z' + 10 = 0$$

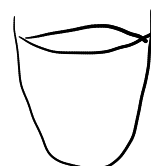
$$\mathcal{S}': 2x'^2 + 4y'^2 + 8\sqrt{2}y' - z' + 10 = 0$$

$$\mathcal{S}': 2x'^2 + 4(y' + \sqrt{2})^2 - z' + 2 = 0 \Rightarrow$$

$$\mathcal{S}'': 2x''^2 + 4y''^2 = z''$$

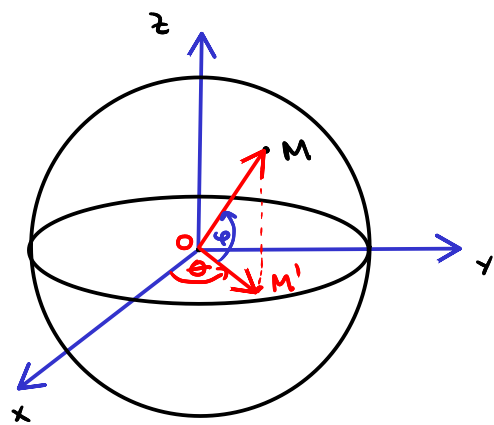
елиптички
параболоид

$$\begin{matrix} x'' = x' \\ y'' = y' + \sqrt{2} \\ z'' = z' - 2 \end{matrix}$$



R полупр.

8 Сферна геометрија



$$\theta = \angle(\vec{Ox}, \vec{OM}) \in (-\pi, \pi] \text{ геогр. дужина}$$

$$\varphi = \angle(\vec{OM'}, \vec{OM}) \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \text{ геогр. ширина}$$

$$\begin{cases} x = R \cos \theta \cos \varphi \\ y = R \sin \theta \cos \varphi \\ z = R \sin \varphi \end{cases}$$

$$\varphi = 0 \Rightarrow \text{екватор}$$

$$\theta = 0 \Rightarrow \text{Грчич}$$

$$\angle AOB = \alpha$$

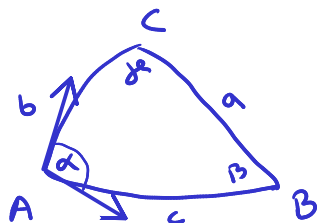
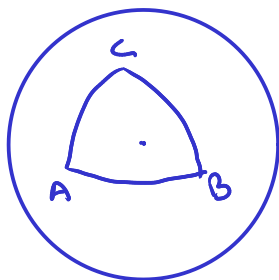
$$\frac{\widehat{AB}}{2R\pi} = \frac{\alpha}{2\pi} \Rightarrow \widehat{AB} = R\alpha = R \cdot \angle AOB$$

* Претп. да је НАДАЉЕ $R = 1$

$$\alpha = \angle(\perp_{\widehat{AB}}, \perp_{\widehat{AC}})$$

$$0 < a, b, c < \pi, \quad a + b + c < 2\pi$$

$$0 < \alpha, \beta, \gamma < \pi, \quad \pi < \alpha + \beta + \gamma < 3\pi$$



* синусна теорема :

$$\frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin b}{\sin \beta} = \frac{\sin c}{\sin \gamma}$$

* косинусна теорема :

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha$$

* дуална косинусна теорема :

$$-\cos \alpha = \cos \beta \cos \gamma - \sin \beta \sin \gamma \cos a$$

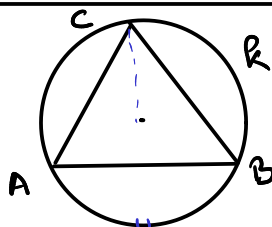
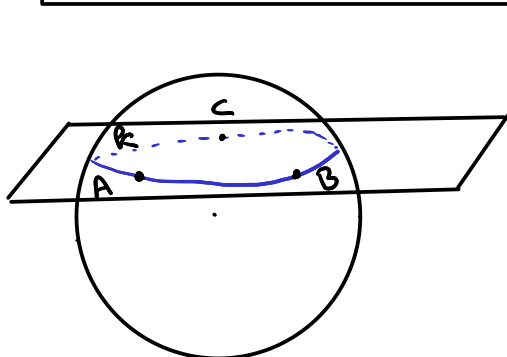
* површина Δ :

$$P = \alpha + \beta + \gamma - \pi$$

* обим Δ :

$$O = a + b + c$$

8.1. Одредити полупречник круга k на једничној сфери који садржи тачке $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $C(0, 0, 1)$. Упоредити растојање између тачака A и B мерено по кругу k , са растојањем по великом кругу између A и B .



$$AB = \|\vec{AB}\| = \|(-1, 1, 0)\| = \sqrt{2}$$

$$AC = \|\vec{AC}\| = \|(-1, 0, 1)\| = \sqrt{2}$$

$$BC = \|\vec{BC}\| = \|(0, -1, 1)\| = \sqrt{2}$$

$\Rightarrow R$ круг описан око ΔABC

$$r = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow r = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$\widehat{AB}^k = \frac{1}{3} \cdot 2\pi = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{6}}{3} \pi = \frac{2\sqrt{6}}{9} \pi$$

$$\widehat{AB} = \angle AOB = \frac{\pi}{2}$$

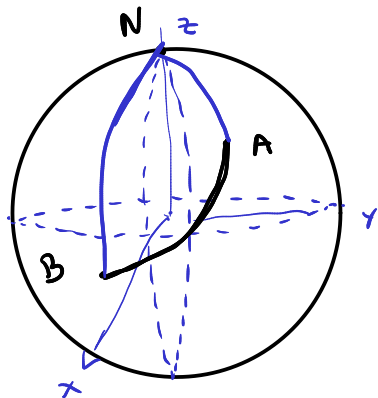
$$\angle AOB = \angle(\vec{OA}, \vec{OB}), \quad \vec{OA} \cdot \vec{OB} = 0 \Rightarrow \angle AOB = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \widehat{AB} < \widehat{AB}^k$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} = \frac{81}{4 \cdot 81}$$

$$\left(\frac{2\sqrt{6}}{9}\right)^2 = \frac{24}{81} = \frac{96}{4 \cdot 81}$$

8.3. Одредити (приближно) растојање између тачака на планети Земљи између градова $A(45^\circ N, 20^\circ E)$ и $B(30^\circ S, 25^\circ W)$. Узети да је Земља сфера полупречника $r = 6340 km$.



Претпоставимо да је $r = 1$:

φ - геогр. ширина, θ - геогр. дужи на

$\Rightarrow \varphi = 0 \Rightarrow$ екватор, $\theta = 0 \Rightarrow$ Гринич

N - северни пол, $\varphi_N = 90^\circ$, θ_N - није деф

A: $\varphi_A = 45^\circ$, $\theta_A = 20^\circ$

B: $\varphi_B = -30^\circ$, $\theta_B = -25^\circ$

КОСИНУСА ТЕОРЕМА НА СФЕРНИ ТРОУГОЛ $\triangle ABN$:

$$\cos \widehat{AB} = \cos \widehat{NA} \cdot \cos \widehat{NB} + \sin \widehat{NA} \sin \widehat{NB} \cos \angle ANB$$

$$\widehat{NA} = \varphi_N - \varphi_A = 45^\circ, \quad \widehat{NB} = \varphi_N - \varphi_B = 90^\circ - (-30^\circ) = 120^\circ$$

$$\angle ANB = |\theta_A - \theta_B| = |20^\circ - (-25^\circ)| = 45^\circ$$

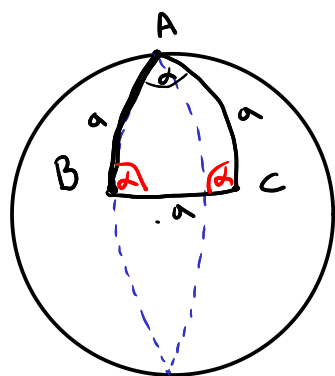
$$\begin{aligned} \cos \widehat{AB} &= \cos 45^\circ \cdot \cos 120^\circ + \sin 45^\circ \cdot \sin 120^\circ \cdot \cos 45^\circ \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

За $R = 1 \Rightarrow \widehat{AB} = \arccos \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{4}$

Како је $R = 6340$, применом хомотетије

$$\Rightarrow \widehat{AB} = 6340 \cdot \arccos \left(\frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{4} \right)$$

8.5. На јединичној сфери одредити једнакостранични сферни троугао ABC (тј. координате темена) чији је унутрашњи угао $\alpha > \frac{\pi}{3}$, а теме A је северни пол. Колики му је обим, а колика површина?



Нека је СТРАНИЦА ДУЖИНЕ α .

$$\Rightarrow \begin{cases} A: \varphi_A = \frac{\pi}{2}, \theta_A \text{ није деф} \\ B: \varphi_B = \frac{\pi}{2} - \alpha, \theta_B = 0 \\ C: \varphi_C = \frac{\pi}{2} - \alpha, \theta_C = \alpha \end{cases}$$

ОСТАЈЕ ДА ИЗРАЧУНАМО α :

КОСИНУСА

ДУЖИНА КОСИНУСА

$$\cos \alpha = \cos \alpha \cos \alpha + \sin \alpha \sin \alpha \cos \alpha$$

...

$$-\cos \alpha = \cos \alpha \cdot \cos \alpha - \sin \alpha \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{\cos^2 \alpha + \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{\cos \alpha (\cos \alpha + 1)}{(1 - \cos \alpha)(1 + \cos \alpha)}$$

$$\cos \alpha = \frac{\cos \alpha}{1 - \cos \alpha} \Rightarrow \alpha = \arccos \left(\frac{\cos \alpha}{1 - \cos \alpha} \right)$$

$$\Rightarrow A: \varphi_A = \frac{\pi}{2}, \theta_A \text{ није деф.}$$

$$B: \varphi_B = \frac{\pi}{2} - \arccos \left(\frac{\cos \alpha}{1 - \cos \alpha} \right), \theta_B = 0$$

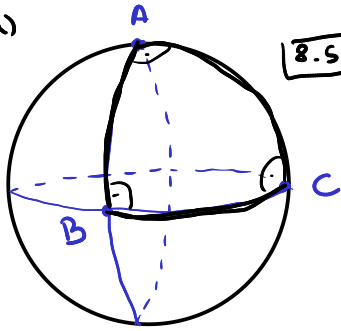
$$C: \varphi_C = \frac{\pi}{2} - \arccos \left(\frac{\cos \alpha}{1 - \cos \alpha} \right), \theta_C = \alpha$$

$$O = 3\alpha = 3 \arccos \left(\frac{\cos \alpha}{1 - \sin \alpha} \right)$$

$$P = 3\alpha - \pi$$

8.4. а) На јединичној сфери одредити неки сферни троугао (тј. координате темена) који има три права угла. Колики му је обим, а колика површина? б) Одредити фамилију троуглова чији збир углова тежи ка 3π .

а)



[8.5] $\Rightarrow$

$$\begin{cases} A: \varphi_A = \frac{\pi}{2}, \theta_A \text{ не деф.} \\ B: \varphi_B = \frac{\pi}{2} - \arccos\left(\frac{\cos \alpha}{1 - \cos \alpha}\right), \theta_B = 0 \\ C: \varphi_C = \frac{\pi}{2} - \arccos\left(\frac{\cos \alpha}{1 - \cos \alpha}\right), \theta_C = \alpha \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{за } \alpha = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}$$

снеч. за $\alpha = \frac{\pi}{2}$

$$A: \varphi_A = \frac{\pi}{2}, \theta_A \text{ не деф.}$$

$$B: \varphi_B = 0, \theta_B = 0$$

$$C: \varphi_C = 0, \theta_C = \frac{\pi}{2}$$

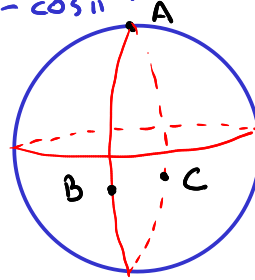


б)

[8.5] за $\alpha \rightarrow \pi \Rightarrow$ гранични случај

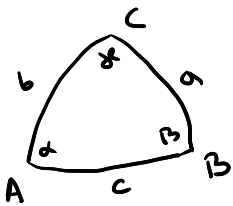
$$\alpha = \arccos\left(\frac{\cos \pi}{1 - \cos \pi}\right) = \arccos\left(\frac{-1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A: \varphi_A = \frac{\pi}{2}, \theta_A \text{ не деф.} \\ B: \varphi_B = -\frac{\pi}{6}, \theta_B = 0 \\ C: \varphi_C = -\frac{\pi}{6}, \theta_C = \pi \end{cases}$$



$$\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{3} = \frac{3\pi - 4\pi}{6} = -\frac{\pi}{6}$$

8.6. Сферни троугао $\bar{ABC}$ на јединичној сфери има два угла једнака $\alpha = \frac{\pi}{3} = \beta$ и површину $P = \frac{\pi}{6}$. Израчунати ивице тог троугла.



$$\alpha = \frac{\pi}{3} \quad \beta = \frac{\pi}{3} \quad P = \frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow a = b$$

$$\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\sin \frac{\pi}{2} = 1$$

$$\cos \frac{\pi}{2} = 0$$

$$P = \alpha + \beta + \gamma - \pi$$

$$\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} + \gamma - \pi$$

$$\gamma = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$$

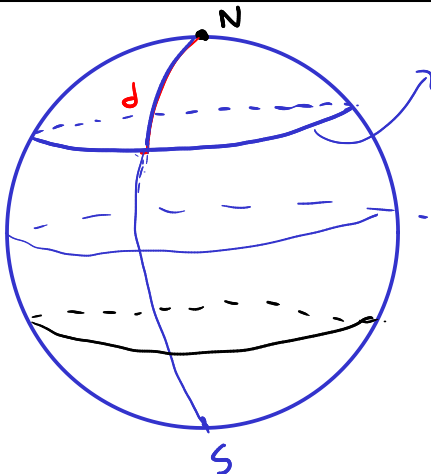
ДУАЛНА КОСИНУСА: $-\cos \alpha = \cos \beta \cos \gamma - \sin \beta \sin \gamma \cos a$

$$-\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot 0 - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 1 \cdot \cos a \Rightarrow \cos a = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow a = \arccos \frac{1}{\sqrt{3}} = b$$

ДУАЛНА КОСИНУСА: $-\cos \gamma = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \cos c$

$$0 = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} \cos c \Rightarrow \cos c = \frac{1}{3} \Rightarrow c = \arccos \frac{1}{3}$$

8.7. Описати прецизно геометријско место тачака које су за $d > 0$ удаљене од северног пола сфере. Које су могуће вредности константе d ?



$$\varphi = \frac{\pi}{2} - d, \theta \in (-\pi, \pi]$$

$$\text{параметре } \varphi = \frac{\pi}{2} - d = \text{const}$$

$$d \in (0, \pi)$$

снеч. $d = \pi \Rightarrow$ јужни пол S

$$d \in (0, \pi]$$