

$$L(E_n, s)$$

-1-

$$[1] \quad L(E_n, s) = \prod_{\mathfrak{p} \nmid 2n} \frac{1}{1 - \frac{\alpha_{\mathfrak{p}}^{\deg \mathfrak{p}}}{(N\mathfrak{p})^s}} = \prod_{\mathfrak{p} \nmid 2n} \frac{1}{1 - \frac{\tilde{\chi}_n(\mathfrak{p})}{(N\mathfrak{p})^s}}$$

Ovaj beskončni proizvod konvergira ako konvergira red

$$\sum_{\mathfrak{p}} \frac{|\alpha_{\mathfrak{p}}|^{\deg \mathfrak{p}}}{(N\mathfrak{p})^{\operatorname{Re} s}} = \sum_{\substack{\mathfrak{p} \text{ prost, } \neq 61 \\ \vee \mathbb{Z}[i]}} \frac{(N\mathfrak{p})^{\frac{1}{2}}}{(N\mathfrak{p})^{\operatorname{Re} s}} \leq 2 \sum_{\mathfrak{p}} \frac{1}{\mathfrak{p}^{\operatorname{Re} s - \frac{1}{2}}} < \infty$$

$\approx \boxed{\operatorname{Re} s > \frac{3}{2}}$

( $N\mathfrak{p} \geq p$  za vsa  $\mathfrak{p}$ , i za vsako  $p$  imamo najvišje 2 prosta ideala  $\mathfrak{p}$  iznad  $p$ )

• Doble Eulerov proizvod : Dirichlet-ov red boji definirati Hasse-Weil-ov L-funkciji  $L(E_n, s)$

konvergiraju samo v polovini:  $\boxed{\operatorname{Re} s > \frac{3}{2}}$

$$[2] \quad L(E_n, s) = \sum_{\substack{a \in \mathbb{Z}[i] \\ a \neq 0}} \frac{\tilde{\chi}_n(a)}{(Na)^s} = \sum_{m \geq 1} \frac{b_{m,n}}{m^s}$$

Za  $(r, 2n) = 1$  je

$$\tilde{\chi}_n(r) = \underbrace{r \cdot \chi'_1(r)} \cdot \left(\frac{n}{Nr}\right) = \tilde{\chi}_1(r) \cdot \left(\frac{n}{Nr}\right)$$

Kako su svi ideali glavni i  $\tilde{\chi}_n$  ne zavisí od generatora

ideala v  $\mathbb{Z}[i]$ :

$$\tilde{\chi}_n(\alpha) = \tilde{\chi}_1(\alpha) \cdot \left(\frac{n}{N\alpha}\right) \quad \text{za nobi nenula ideal} \\ \alpha \in \mathbb{Z}[i]$$

pa imamo da je

$$b_{m,n} = \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{Z}[i] \\ N\alpha = m}} \tilde{\chi}_n(\alpha) = \left(\frac{n}{m}\right) \cdot \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{Z}[i] \\ N\alpha = m}} \tilde{\chi}_1(\alpha) = \left(\frac{n}{m}\right) b_{m,1}$$

• Za fiksnano  $n$ , neka je

$$\chi_n: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$$

Dirihleov karakter definisan za  $(m, 2n)=1$  sa  $\chi_n(m) = \left(\frac{n}{m}\right)$

• Onda je

$$L(E_n, s) = \sum_{m \geq 1} \frac{b_{m,n}}{m^s} = \sum_{m \geq 1} \frac{b_{m,1} \cdot \chi_n(m)}{m^s}$$

-tj.  $L(E_n, s)$  je twist  $L$ -fnc  $L(E_1, s) = \sum_{m \geq 1} \frac{b_{m,1}}{m^s}$

Dirihleovim karakterom  $\chi_n$

Pa ako je  $n$  bestočan, proverite da je

$$\text{konduktor od } \chi_n = \begin{cases} n, & \text{ako je } n \equiv 1 \pmod{4} \\ 4n, & \text{ako je } n \equiv 2 \text{ ili } 3 \pmod{4} \end{cases}$$

**3**

Staki nenula ideal  $\alpha \in \mathbb{Z}[i]$  ima 4 generatore, pa je

$$b_{m,n} = \frac{1}{4} \sum_{\substack{a+bi \in \mathbb{Z}[i] \\ a^2+b^2=m}} \tilde{\chi}_n(a+bi)$$

-2-

$$L(E_n, s) = \frac{1}{4} \sum_{\substack{\gamma \in \mathbb{Z}[i] \\ \gamma \neq 0}} \frac{\tilde{\chi}_n(\gamma)}{(N\gamma)^s}$$

$$= \frac{1}{4} \sum_{\substack{a+bi \in \mathbb{Z}[i] \\ \neq 0}} \frac{(a+bi) \chi'_n(a+bi)}{(a^2+b^2)^s}$$

• Neka je  $n$  neparno (slučaj parnog  $n$  - slično)

Onda  $\chi'_n(\gamma)$  zavisi samo od klase ostataka

$\gamma \pmod{\gamma = (2+2i)n}$ , pa tim pre i od klase ostataka

$\gamma \pmod{4n}$ .

• Uvedimo oznake:

$$w = (1, i)$$

$$m = (m_1, m_2) \in \mathbb{Z}^2$$

Onda su svi Gausovi celi u jednoj klasi ostataka mod  $4n$  opisani sa

$$a+bi + 4n(m_1 + m_2 i) = a+bi + 4n \cdot m \cdot (1+i)$$

$$= a+bi + 4n \cdot m \cdot w$$

izbacimo proporciju  
(0,0) + 4n  $\mathbb{Z}^2 w$   
jer se na njoj  
 $\chi'_n \equiv 0$

(osim  $a=b=0, m=(0,0)$ )

↳ standardni  
skalarni proizvod  
u  $\mathbb{C}^2$

$$L(E_n, s) = \frac{1}{4} \sum_{\substack{0 \leq a, b < 4n \\ (a, b) \neq (0, 0)}} \chi'_n(a+bi) \sum_{m \in \mathbb{Z}^2} \frac{a+bi + 4n \cdot m \cdot w}{|(a, b) + 4n \cdot m|^2 s}$$

$$= \frac{(4n)^{1-2s}}{4} \sum_{\substack{0 \leq a, b < 4n \\ (a, b) \neq (0, 0)}} \chi'_n(a+bi) \sum_{m \in \mathbb{Z}^2} \frac{\left(m + \left(\frac{a}{4n}, \frac{b}{4n}\right)\right) \cdot w}{\left|m + \left(\frac{a}{4n}, \frac{b}{4n}\right)\right|^{2s}} \quad (1)$$

# [4] Teorema 1 Hasse-Weilova L-funkcija $L(E_n, s)$

pridružena eliptičkoj krivici  $y^2 = x^3 - n^2x$ ,  $n$ -beskvadr.  
koja je za  $\text{Re } s > \frac{3}{2}$  definirana Euler-ovim proizvodom

$$L(E_n, s) = \prod_{p \nmid 2n} \frac{1}{1 - 2a_{E_n, p} p^{-s} + p^{1-2s}}$$

- ima analitičko proširenje do cele funkcije na celom  $\mathbb{C}$
- i dodatno, ako označimo

$$N := 4|D|^2 = \begin{cases} 32n^2, & n \text{ neparno} \\ 16n^2, & n \text{ parno} \end{cases}$$

$$\Lambda(E_n, s) := \left( \frac{\sqrt{N}}{2\pi} \right)^s \Gamma(s) L(E_n, s) \quad \text{"kompletna L-funkcija"}$$

onda  $L(E_n, s)$  zadovoljava funkcionalnu jednačinu

$$\Lambda(E_n, s) = \varepsilon \cdot \Lambda(E_n, 2-s)$$

gde je "korenski broj"  $\varepsilon$  jednak

$$\varepsilon = \begin{cases} 1, & \text{ako je } n \equiv 1, 2, 3 \pmod{8} \\ -1, & \text{ako je } n \equiv 5, 6, 7 \pmod{8} \end{cases}$$

# Teta funkcije sa parametrima

—2.5—

[1]

$$u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2 - \mathbb{Z}^2$$

$$w = (1, i) \in \mathbb{C}^2$$

$$m = (m_1, m_2) \in \mathbb{Z}^2, \quad m \cdot w = m_1 + m_2 i$$

$$t \in \mathbb{R}_{>0}$$

② Definišemo teta-funkcije (sa parametrima)

$$\theta_u(t) := \sum_{m \in \mathbb{Z}^2} (m+u) \cdot w \quad e^{-\pi t |m+u|^2}$$

$$\theta^u(t) := \sum_{m \in \mathbb{Z}^2} m \cdot w \quad e^{2\pi i m \cdot u} \quad e^{-\pi t |m|^2}$$

[2] Lema 1: Neka je  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ ,  $w \in \mathbb{C}^2$  :

$$g = w \cdot \frac{\partial f}{\partial x} := w_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + w_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}$$

Onda je :  $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$  :  $\hat{g}(y) = 2\pi i \, w \cdot y \, \hat{f}(y)$   
za sve  $y \in \mathbb{R}^2$ .

▮ 1 Fourier-ova transformacija i bilinearna forma  $w \cdot y$   
su linearne po  $w \rightarrow$  dovoljno je proveriti za  $w = (1, 0)$  i  $(0, 1)$   
tj. da je Fourier-ova transformacija  $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x)$  jednaka  
 $2\pi i y_j \hat{f}(y)$ , što je parcijalna integracija po  $j$ -toj promenljivoj



Sada:

$$f(x) = e^{-\pi |x|^2}, \quad x = (x_1, x_2), \quad |x|^2 = x_1^2 + x_2^2$$

$$g_1(x) = f(\sqrt{t} x) = f((\sqrt{t} x_1, \sqrt{t} x_2)) = e^{-\pi t |x|^2}$$

$$g_2(x) = w \cdot \frac{\partial g_1}{\partial x}(x)$$

$$\begin{aligned} g(x) &= -\frac{1}{2\pi t} g_2(x+u) = -\frac{1}{2\pi t} g_2((x_1+u_1, x_2+u_2)) \\ &= (x+u) \cdot w \cdot e^{-\pi t |x+u|^2} \end{aligned}$$

$$\hat{f}(y) = e^{-\pi |y|^2}$$

$$\hat{g}_1(y) = \frac{1}{t} e^{-\frac{\pi}{t} |y|^2}$$

$$\hat{g}_2(y) = 2\pi i w \cdot y \cdot \frac{1}{t} e^{-\frac{\pi}{t} |y|^2} \quad (\text{prema L.1})$$

$$\hat{g}(y) = -\frac{i}{t^2} w \cdot y \cdot e^{2\pi i u \cdot y} e^{-\frac{\pi}{t} |y|^2}$$

Teorema 2  $u \in \mathbb{R}^2 - \mathbb{Z}^2$   
 Za svaki  $\theta^u$  zadovoljavaju  
 funkcionalnu jednačinu

$$\boxed{\theta_u(t) = -\frac{i}{t^2} \theta^u\left(\frac{1}{t}\right)}$$

za sve  $t > 0$

(2)

▽ Poisson-ova sumacija  $f|_a$  na  $\mathbb{R}^2$  za Fourier par  $g(x), \hat{g}(y)$

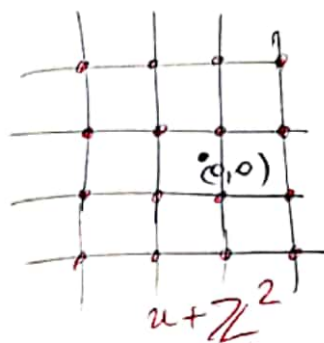
▷ Dokaz za n neparno (parno - analogno)

$$\theta_u(t) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^2} (m+u) \cdot w e^{-\pi t |m+u|^2}$$

$u \in \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Z}^2$  pa je  $m+u \neq (0,0)$  za vse  $m \in \mathbb{Z}^2$   
 pa sledi da je

$$\theta_u(t) = \mathcal{O}(e^{-ct}), \quad t \rightarrow \infty$$

za neko  $c > 0$



$$\theta^u(t) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^2} m \cdot w e^{2\pi i m \cdot u} e^{-\pi t |m|^2}$$

za  $m=(0,0)$   
 ali je  $=0$

eksponentijalno opada osim za  $m=(0,0)$

$$\rightarrow \theta^u(t) = \mathcal{O}(e^{-c_1 t}), \quad t \rightarrow \infty$$

Ali iz funkcije jve  $\theta_u(t) = -\frac{i}{t^2} \theta^u\left(\frac{1}{t}\right)$   
 kad  $t \rightarrow 0+$

$$\theta_u(t) = \mathcal{O}(e^{-c_2/t}), \quad \text{za neko } c_2 > c_1 > 0.$$

• Odatde zaključujemo da Mellin-ova transformacija

$$\int_0^\infty \theta_u(t) \cdot t^s \frac{dt}{t}$$

konverira za vse  $s \in \mathbb{C}$  i definiše celo fkv na  $\mathbb{C}$

- U polazni  $\text{Re } s > \frac{3}{2}$  imamo aps. konvergenciju  
reda koji definiše  $\theta_u$  i možemo pisati  $\sum$  i  $\int$ :

$$\int_0^\infty \theta_u(t) \cdot t^\Delta \frac{dt}{t} = \sum_{m \in \mathbb{Z}^2} (m+u) \cdot w \int_0^\infty t^\Delta e^{-\pi t |m+u|^2} \frac{dt}{t}$$

$$= \pi^{-\Delta} \Gamma(\Delta) \sum_{m \in \mathbb{Z}^2} \frac{(m+u) \cdot w}{|m+u|^{2\Delta}}$$

- Doble, fw (1) možemo sad zapisati kao

$$\pi^{-\Delta} \Gamma(\Delta) L(E_n, \Delta)$$

$$= \frac{(4n)^{1-2\Delta}}{4} \sum_{\substack{0 \leq a, b < 4n \\ (a, b) \neq (0, 0)}} \chi'_n(a+bi) \int_0^\infty t^\Delta \theta_{\left(\frac{a}{4n}, \frac{b}{4n}\right)}(t) \frac{dt}{t}$$

(3)

$\nearrow$   
 konačna suma celih  $f_a \rightarrow$  cela  $f_a$   
 $(4n)^{1-2\Delta}$  cela  
 $\frac{\pi^\Delta}{\Gamma(\Delta)}$  cela

$\Rightarrow L(E_n, \Delta)$  je cela funkcija.

U svakom od Mellin-ovih integrala uradimo smenu:  $t \rightarrow \frac{1}{t}$

$$\int_0^{\infty} t^s \theta_{\left(\frac{a}{4n}, \frac{b}{4n}\right)}(t) \frac{dt}{t} = \int_0^{\infty} t^{-s} \theta_{\frac{a}{4n}, \frac{b}{4n}}\left(\frac{1}{t}\right) \frac{dt}{t}$$

Iz funkcionalne j-re (2):  $\theta_{\frac{a}{4n}, \frac{b}{4n}}\left(\frac{1}{t}\right) = -i t^2 \theta^{\frac{a}{4n}, \frac{b}{4n}}(t)$

$$= -i \int_0^{\infty} t^{2-s} \theta^{\frac{a}{4n}, \frac{b}{4n}}(t) \frac{dt}{t}$$

Orde, pošto vidimo da je  $\operatorname{Re}(2-s) > \frac{3}{2}$  tj.  $(\operatorname{Re} s < \frac{1}{2})$  možemo zameniti  $\int$  i  $\sum$  iz definicije  $\theta$ -fje:

$$= -i \int_0^{\infty} t^{2-s} \left( \sum_{m \in \mathbb{Z}^2} m \cdot w e^{2\pi i m \cdot \left(\frac{a}{4n}, \frac{b}{4n}\right)} e^{-\pi t |m|^2} \right) \frac{dt}{t}$$

$$= -i \sum_{m \in \mathbb{Z}^2} m \cdot w e^{2\pi i m \cdot \left(\frac{a}{4n}, \frac{b}{4n}\right)} \int_0^{\infty} t^{2-s} e^{-\pi t |m|^2} \frac{dt}{t}$$

$$= -i \pi^{s-2} \Gamma(2-s) \sum_{m \in \mathbb{Z}^2} \frac{m \cdot w e^{2\pi i m \cdot \left(\frac{a}{4n}, \frac{b}{4n}\right)}}{|m|^{2(2-s)}} \quad \left( \begin{array}{l} \text{nemamo} \\ \text{problem} \\ \vee m=(0,0) \end{array} \right)$$

(4)

Dakle za  $\operatorname{Re}(2-s) > \frac{3}{2}$  desna strana u (3)

se može transformisati koristeći (4):

$$\pi^{-s} \Gamma(s) L(E_n, s)$$

$$= \frac{(4n)^{1-2s}}{4} \sum_{\substack{0 \leq a, b < 4n \\ (a, b) \neq (0, 0)}} \chi'_n(a+bi) (-i) \pi^{s-2} \Gamma(2-s)$$

$$\times \sum_{m \in \mathbb{Z}^2} \frac{m \cdot w \ e^{2\pi i m \cdot \left(\frac{a}{4n}, \frac{b}{4n}\right)}}{|m|^{2(2-s)}}$$

$$= -\frac{i}{4} (4n)^{1-2s} \pi^{s-2} \Gamma(2-s) \sum_{m \in \mathbb{Z}^2} \frac{m \cdot w}{|m|^{2(2-s)}}$$

$$\times \sum_{0 \leq a, b < 4n} \chi'_n(a+bi) e^{2\pi i m \cdot \left(\frac{a}{4n}, \frac{b}{4n}\right)} \quad (5)$$

$\underbrace{\hspace{15em}}_{=: S_m}$

(osob  $(a, b) \neq (0, 0)$   
 je redundanten per  
 imamo  $\chi'_n$ )

Lema 2  $m = (m_1, m_2) \in \mathbb{Z}^2$

Ali  $m_1 + m_2 i \notin \langle 1+i \rangle$ , onda je  $S_m = 0$ .

Ali  $m_1 + m_2 i = (1+i)r \in \langle 1+i \rangle$ ,  $r \in \mathbb{Z}[i]$

onda je

$$\boxed{S_m = 2 \chi'_n(r) g(\chi'_n)}$$

gde je  $g(\chi'_n)$  Gaussova suma na  $\mathbb{Z}[i]$ .

- 5 -

Dakle, u sumaciji (5) opstaju samo  $m$ -ovi oblika  
 $m \cdot w = m_1 + m_2 i = (1+i)r, \quad r \in \mathbb{Z}[i]$  :

$$(5) = -i (4n)^{1-2s} \pi^{s-2} \Gamma(2-s) \frac{1}{4} \sum_{r \in \mathbb{Z}[i]} \frac{(1+i)r}{|(1+i)r|^{2(2-s)}} \cdot 2 X'_n(r) g(X'_n)$$

$$= (1-i) \cdot 2^{1-3s} \pi^{s-2} \Gamma(2-s) g(X'_n) \cdot \underbrace{\frac{1}{4} \sum_{r \in \mathbb{Z}[i]} \frac{r \cdot X'_n(r)}{|r|^{2(2-s)}}}_{= L(E_n, 2-s)}$$

$$= L(E_n, 2-s)$$

$$\text{za } \operatorname{Re}(2-s) > \frac{3}{2}$$

+j. za  $\operatorname{Re}(2-s) > \frac{3}{2}$  smo dobili.

$$\pi^{-s} \Gamma(s) L(E_n, s) =$$

$$= (1-i) 2^{1-3s} g(X'_n) \cdot \pi^{s-2} \Gamma(2-s) L(E_n, 2-s) \quad (6)$$

Ostaje još da izračunamo Gauss-ovu sumu  $g(X'_n)$   
 ; dokazemo (L.2).