

Hecke-ovi Größencharakteri na $\mathbb{Z}[i]$ -1-

1

$$\tilde{\chi}_n : \mathbb{Z}[i] \rightarrow \mathbb{C}$$

$$\tilde{\chi}_n(r) := r \cdot \chi'_n(r) = \begin{cases} r \cdot \chi'_n(r) \cdot \left(\frac{n}{Nr}\right), & \text{za } (r, 2n) = 1 \\ 0, & \text{inače} \end{cases} \quad (1)$$

gde je $\chi'_n(r) = i^j$, ako je $r \cdot i^j \equiv 1 \pmod{2+2i}$

• Neka je $\mathfrak{p}$ neki prost ideal koji ne deli $\langle 2n \rangle$
i r bilo koji njegov generator:

$$\mathfrak{p} = \langle r \rangle = \langle -r \rangle = \langle ir \rangle = \langle -ir \rangle$$

→ ako je $\mathfrak{p} = \langle p \rangle$, $p \equiv 3 \pmod{4}$ onda je

$$\left(\frac{n}{Nr}\right) = \left(\frac{n}{p^2}\right) = 1 \quad i$$

$$\tilde{\chi}_n(r) = r \cdot \chi'_n(r) = -p = \alpha_{\mathfrak{p}}^2 = \alpha_{\mathfrak{p}}^{\deg \mathfrak{p}} \quad \left(\text{jer je } \alpha_{\mathfrak{p}} = i\sqrt{p} \right)$$

$\equiv 1 \pmod{2+2i}$

→ ako je $\mathfrak{p}$ prost ideal norme $N\mathfrak{p} = p \equiv 1 \pmod{4}$
onda je

$$\tilde{\chi}_n(r) = r \cdot i^j \cdot \left(\frac{n}{p}\right) \equiv \left(\frac{n}{p}\right) \pmod{2+2i}$$

$\equiv 1 \pmod{2+2i}$

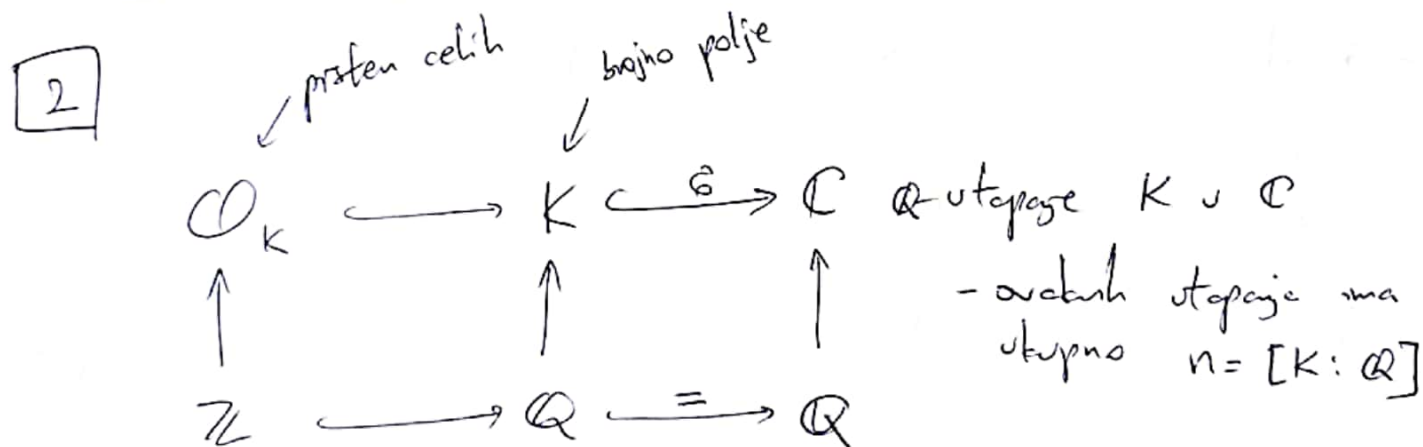
tj. vrednost $\tilde{\chi}_n(r)$ je jedinstveni generator $\alpha_{\mathfrak{p}}$ ideala $\mathfrak{p}$

koji je $\equiv \left(\frac{n}{p}\right) \pmod{2+2i}$.

Primjerka: U oba slučaja, vrednost $\tilde{X}_n(r)$ ne zavisi
 od izbora generatore r ideala $\mathfrak{p}$ tj. $\tilde{X}_n$ zavisi samo
 od ideala $\mathfrak{p}$ i možemo pisati: $\tilde{X}_n(\mathfrak{p}) = \tilde{X}_n(r)$
 na bilo koje $\langle r \rangle = \mathfrak{p}$.

• Doble dobili smo:

Tvrđenje 1 Preslikavanje $\tilde{X}_n: \mathbb{Z}[i] \rightarrow \mathbb{C}$ definirano sa (1)
 je jedinstveno totalno multiplikativno preslikavanje na $\mathbb{Z}[i]$
 koje se poklapa sa $\alpha_{\mathfrak{p}}^{\deg \mathfrak{p}}$ na bilo kom generatoru
 prostog ideala $\mathfrak{p}$.



Multiplikativno preslikavanje χ na idealima prstena $\mathcal{O}_K$
 je Hedeker barabter ako

- postoji jedan fiksiran ideal $\mathfrak{f}$
- postoji fiksirana n -torka $(k_1, k_2, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}^n$

tako da ako je α bilo koji glavni ideal $\langle r \rangle \leq \mathcal{O}_K$

-2-

generisan elementom $\gamma \equiv 1 \pmod{f}$, onda je

$$\chi(a) = \chi(\langle \gamma \rangle) = \prod_{\sigma: K \rightarrow \mathbb{C}} \sigma(\gamma)^{k_\sigma} \quad (2)$$

Primer $K = \mathbb{Q}(i) \supseteq \mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[i]$

$\sigma_1 = \text{id}$, $\sigma_2 = \text{kompleksno konjugiranje}$

$$\text{Gal}(\mathbb{Q}(i)/\mathbb{Q}) = \{\sigma_1, \sigma_2\}$$

$$(k_{\sigma_1}, k_{\sigma_2}) = (1, 0)$$

$$f = \langle v \rangle \quad v = \begin{cases} (2+2i)n, & \text{ako je } n \text{ neparno} \\ 2n, & \text{ako je } n \text{ parno} \end{cases}$$

Za konstruisani karakter $\tilde{\chi}_n$ važi

$$\tilde{\chi}_n(\langle \gamma \rangle) = \gamma \quad \text{ako je } \gamma \equiv 1 \pmod{\langle v \rangle}$$

tj. $\tilde{\chi}_n$ zadovoljava (2).

• Dade $\tilde{\chi}_n$ možemo videti kao preslikavanje iz ideala $\mathbb{Z}[i]$ u elemente $\mathbb{Z}[i]$

koje idealu a , $(a, 2n) = 1$ pridružuje njegov

jedinstveni generator koji je $\equiv \left(\frac{n}{Na} \right) \pmod{2+2i}$