

Teta-funkcija

$$\theta(t) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 t}, \quad t \in \mathbb{R}_{>0} \quad (1)$$

Napomena: Uobičajeno se definiše

$$\theta(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{\pi i n^2 z}$$

- ovaj red konvergira za
 $z \in \mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$

pa je red iz (1) u stvari $\theta(it)$. Ali mi ćemo zadržati
gornju oznaku...

Teorema 1 θ -fja zadovoljava funkcionalnu jednačinu: za sve $t > 0$

$$\theta(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \theta\left(\frac{1}{t}\right) \quad (2)$$

Napomena: θ -fja je modularna forma, i ovo je relacija modularnosti
 $\theta(z), z \in \mathbb{H}$

Primenimo Poissonov sumaciju na $g(x) = e^{-\pi t x^2} \in \mathcal{S}$
 $t \in \mathbb{R}_{>0}$

$$g(x) = f(\sqrt{t} \cdot x), \quad f(x) = e^{-\pi x^2}$$

$$\text{Fourier (L.1) (3): } \hat{g}(y) = \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\pi \frac{y^2}{t}}$$

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} g(n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{g}(n) \quad \text{isto je upravo (2)} \quad \blacktriangle$$

(L.2) Kad $t \rightarrow 0+$, $\forall \varepsilon > 0$

$$\left| \theta(t) - \frac{1}{\sqrt{t}} \right| < e^{-\frac{c}{t}}, \quad \text{za nekakšnu konstantu } c > 0.$$

$$\nabla \quad \theta(t) - \frac{1}{\sqrt{t}} = \frac{1}{\sqrt{t}} \theta\left(\frac{1}{t}\right) - \frac{1}{\sqrt{t}} = \frac{2}{\sqrt{t}} \sum_{n \geq 1} e^{-\pi n^2 \frac{1}{t}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{t}} \left(e^{-\frac{\pi}{t}} + e^{-\frac{4\pi}{t}} + e^{-\frac{9\pi}{t}} + \dots \right) = (*)$$

za t dovoljno malo tako da je $\frac{2}{\sqrt{t}} < \frac{e^{\frac{1}{t}}}{2}$; $e^{-\frac{3\pi}{t}} < \frac{1}{2}$

$$(*) < \frac{e^{\frac{1}{t}}}{2} e^{-\frac{\pi}{t}} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots \right) = e^{-\frac{\pi-1}{t}} \quad \blacktriangle$$

Napomena: kad $t \rightarrow +\infty$, $\theta(t) \rightarrow 1$

Γ -funkcija

- U poluravni $\operatorname{Re} s > 0$, Γ -fka je definirana integralom

$$\Gamma(s) := \int_0^{\infty} e^{-t} t^s \frac{dt}{t} \quad (1)$$

- Z zadovoljava funkcionalnu fkvu $\Gamma(s+1) = s \Gamma(s)$

($\rightarrow \Gamma$ interpolira faktoriјele: $\Gamma(n) = (n-1)!$)

koja daje analitičko proširenje na celu kompleksnu ravan,
osim prostih polova u $s = 0, -1, -2, -3, \dots$

- Z zadovoljava i sledeće relacije:

$$\Gamma(s) \Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin(\pi s)} \quad (2)$$

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \cdot 2^{1-s} \cdot \Gamma(s) \quad (3)$$

- Iz (1) + (2) vidimo da je $\frac{1}{\Gamma(s)}$ cela funkcija
(holomorfa na celom $\mathbb{C}$)

② Za $f: \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{C}$ definišemo njenu Mellin-ovu
transformaciju g integralom

$$g(s) := \int_0^{\infty} f(t) \cdot t^s \cdot \frac{dt}{t}$$

za vrednosti $s \in \mathbb{C}$ za koje integral konvergira.

Primer $\Gamma(s)$ je Mellin-ova transformacija funkcije e^{-t}

Primerba $\Gamma(2)$, $z = \frac{1}{2}$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{2}} \rightarrow \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

Riemann-ova zeta funkcija

-1-

Ⓣ [Riemann, 1859.]

Riemann-ova zeta fca definirana se

$$\zeta(s) := \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s} = \prod_{\text{prsti}} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}} \quad \text{u polovini } \operatorname{Re} s > 1$$

ima meromorfno proširenje na celu s -ravan,
sa jedinim (i prstim) polom u $s=1$, sa reziduumom 1.
 $\zeta(s)$ zadovoljava funkcionalnu jednačinu

$$\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) = \pi^{-\frac{1-s}{2}} \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \zeta(1-s) \quad (1)$$

🔺
Ideja: $\int_0^\infty e^{-n^2 t} t^{\frac{s}{2}} \frac{dt}{t} = \frac{1}{n^s} \int_0^\infty e^{-n^2 t} (n^2 t)^{\frac{s}{2}} \frac{dt}{t} = \frac{1}{n^s} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)$

a znamo da je $2 \sum_{n \geq 1} e^{-\pi n^2 t} = \theta(t) - 1$

pa nam praktično treba "Mellin-ova transformacija θ fce"

" $\int_0^\infty \theta(t) t^{\frac{s}{2}} \frac{dt}{t}$ "

• Ali zbog ponašanja $\theta(t)$, kad $t \rightarrow 0+$ i kad $t \rightarrow +\infty$
moramo da regularizujemo, tj. posmatramo integral

$$\phi(s) := \int_1^\infty (\theta(t) - 1) t^{\frac{s}{2}} \frac{dt}{t} + \int_0^1 \left(\theta(t) - \frac{1}{\sqrt{t}} \right) t^{\frac{s}{2}} \frac{dt}{t} \quad (3)$$

• Levi integral $\int_0^{\infty}$ je cela θ po s (integral konvergira i definiše holomorfnu funkciju za svako $s \in \mathbb{C}$)

- jer $\theta(t) - 1$ opada rapidno u ∞

• Shvatio, da li integral $\int_0^1$ konvergira za svako $s \in \mathbb{C}$

jer $\theta(t) - \frac{1}{\sqrt{t}}$ opada rapidno u $0+$, zbog Teta L.2

• Dato $\phi(s)$ je cela funkcija

• Za $\operatorname{Re}(s) > 1$ korakcija u 2. integralu može da se izračuna:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}} t^{\frac{s}{2}} \frac{dt}{t} = \int_0^1 t^{\frac{s-1}{2}} \frac{dt}{t} = \frac{2}{s-1}$$

$p =$ je za $\operatorname{Re} s > 1$:

$$\phi(s) = \int_1^{\infty} (\theta(t) - 1) t^{\frac{s}{2}} \frac{dt}{t} + \underbrace{\int_0^1 \theta(t) t^{\frac{s}{2}} \frac{dt}{t}}_{1 + (\theta(t) - 1)} - \frac{2}{s-1}$$

$$= \int_1^{\infty} \left(2 \sum_{n \geq 1} e^{-\pi n^2 t} \right) t^{\frac{s}{2}} \frac{dt}{t}$$

$$+ \int_0^1 t^{\frac{s}{2}} \frac{dt}{t} + \int_0^1 \left(2 \sum_{n \geq 1} e^{-\pi n^2 t} \right) t^{\frac{s}{2}} \frac{dt}{t} - \frac{2}{s-1}$$

$$= 2 \sum_{n \geq 1} \int_1^{\infty} e^{-\pi n^2 t} t^{\frac{s}{2}} \frac{dt}{t} + 2 \sum_{n \geq 1} \int_0^1 e^{-\pi n^2 t} t^{\frac{s}{2}} \frac{dt}{t}$$

$$+ \frac{2}{s} + \frac{2}{1-s}$$

$$= 2 \sum_{n \geq 1} \underbrace{\int_0^{\infty} e^{-\pi n^2 t} t^{\frac{s}{2}} \frac{dt}{t}}_{\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \cdot \frac{1}{n^s}} + \frac{2}{s} + \frac{2}{1-s}$$

Dalje za $\operatorname{Re}(s) > 1$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \phi(s) &= \sum_{n \geq 1} \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \frac{1}{n^s} + \frac{1}{s} + \frac{1}{1-s} \\ &= \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) + \frac{1}{s} + \frac{1}{1-s} \quad (*) \end{aligned}$$

g. za $\operatorname{Re}(s) > 1$ je

$$\zeta(s) = \frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} \left(\frac{1}{2} \phi(s) - \frac{1}{s} - \frac{1}{1-s} \right) \quad (**)$$

• Ali videli smo da je desna strana meromorfnu na celom $\mathbb{C}$, jer su $\pi^{\frac{s}{2}}$, $\frac{1}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}$ i $\phi(s)$ cele funkcije, pa desna strana $(*)$ daje meromorfnu proširenje Riemann-ove zeta fke $\zeta(s)$ na celo $\mathbb{C}$.

• Dodatno, iz $(*)$ vidimo da su jedini mogući polovi ζ -fke u tačkama 0 ili 1.

$$\text{Ali } \frac{1}{s \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} = \frac{1}{2 \cdot \frac{s}{2} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} = \frac{1}{2 \Gamma\left(\frac{s}{2} + 1\right)} \rightarrow \frac{1}{2 \Gamma(1)} \neq 0 \quad \text{kad } s \rightarrow 0$$

pa $s=0$ nije pol.

- $\Delta = 1$ jeste pol, prost, sa residuom

$$\operatorname{res}_{\Delta=1} \zeta(\Delta) = \lim_{\Delta \rightarrow 1} (\Delta-1) \frac{\pi^{\frac{\Delta}{2}}}{\Gamma(\frac{\Delta}{2})} \underbrace{\left(\frac{1}{2} \phi(\Delta) - \frac{1}{\Delta} + \frac{1}{\Delta-1} \right)}_{\text{dobro je oko 1}}$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(\frac{1}{2})} = 1$$

- Iz (2) vidimo da je funkcionalna jednačina (1) ekvivalentna sa $\phi(s) = \phi(1-s)$.

- Da bismo to dokazali uvedimo smenu promenljivih $t \rightarrow \frac{1}{t}$ u (3):

$$\phi(s) = \int_0^1 \left(\theta\left(\frac{1}{t}\right) - 1 \right) t^{-\frac{s}{2}} \frac{dt}{t} + \int_1^{\infty} \left(\theta\left(\frac{1}{t}\right) - \sqrt{t} \right) t^{-\frac{s}{2}} \frac{dt}{t}$$

funk. jma
za $\theta \rightarrow$

$$= \int_0^1 \left(\sqrt{t} \theta(t) - 1 \right) t^{-\frac{s}{2}} \frac{dt}{t} + \int_1^{\infty} \left(\sqrt{t} \theta(t) - \sqrt{t} \right) t^{-\frac{s}{2}} \frac{dt}{t}$$

$$= \int_0^1 \left(\theta(t) - \frac{1}{\sqrt{t}} \right) t^{\frac{1-s}{2}} \frac{dt}{t} + \int_1^{\infty} (\theta(t) - 1) t^{\frac{1-s}{2}} \frac{dt}{t}$$

$$= \phi(1-s)$$



• Dakle

