Fourier-ova transformacija – podsećanje

1

$\mathcal{S}$ = Schwartz-ov vektorski prostor

$= \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \mid f$ beskonačno diferencijabilna i $|x|^N f(x) \to 0$, kad $x \to \pm\infty$, za $\forall N \}$

Primer: $f(x) = e^{-\pi x^2} \in \mathcal{S}$

(D) Za $f \in \mathcal{S}$ definišemo njenu Fourier-ovu transformaciju $\hat{f}$

$$\boxed{\hat{f}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-2\pi i x y}\, dx}$$

Lako se proverava da integral konvergira za sve $y \in \mathbb{R}$ i da je $\hat{f} \in \mathcal{S}$.

(L.1) Neka je $f \in \mathcal{S}$, $a \in \mathbb{R}$ i $b \in \mathbb{R}_{>0}$. Onda važi:

(1) ako je $g(x) = f(x+a)$, onda je $\hat{g}(y) = e^{2\pi i a y} \hat{f}(y)$

(2) ako je $g(x) = e^{2\pi i a x} f(x)$, onda je $\hat{g}(y) = \hat{f}(y-a)$

(3) ako je $g(x) = f(bx)$, onda je $\hat{g}(y) = \frac{1}{b} \hat{f}\left(\frac{y}{b}\right)$

▽ Npr. (3):

$$\hat{g}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(bx)\, e^{-2\pi i x y}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-2\pi i \frac{x}{b} y}\, \frac{dx}{b} = \frac{1}{b} \hat{f}\left(\frac{y}{b}\right)$$

△

(L.2) Za $f(x) = e^{-\pi x^2}$ važi $\hat{f} = f$

▽ $$\hat{f}'(y) = \frac{d}{dy}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-2\pi i x y}\, dx = -2\pi i \int_{-\infty}^{\infty} x\cdot e^{-\pi x^2} e^{-2\pi i x y}\, dx$$

$$= -2\pi i \left[e^{-2\pi i x y} \frac{e^{-\pi x^2}}{(-2\pi)} \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\pi x^2}}{(-2\pi)} (-2\pi i y)\, e^{-2\pi i x y}\, dx \right]$$

$$= -2\pi y \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-2\pi i x y}\, dx = -2\pi y\, \hat{f}(y)$$

tj. $\hat{f}$ zadovoljava linearnu diferencijalnu jednačinu $\dfrac{\hat{f}'(y)}{\hat{f}(y)} = -2\pi y$

čije rešenje je $\hat{f}(y) = C\cdot e^{-\pi y^2}$. Konstantu nalazimo iz

$$C = \hat{f}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2}\, dx$$

$$C^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2}\, dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi y^2}\, dy = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\pi(x^2+y^2)}\, dx\, dy$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-\pi r^2}\, 2\pi r \cdot dr = \int_0^{\infty} e^{-u}\, du = 1$$

△

(T.3) [Poisson-ova sumaciona formula] Ako je $g \in \mathcal{S}$, onda

$$\boxed{\sum_{m\in\mathbb{Z}} g(m) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \hat{g}(m)}$$

▽ Definišimo $$h(x) := \sum_{k\in\mathbb{Z}} g(x+k)$$ – očigledno 1-periodična

$$= \sum_{m\in\mathbb{Z}} c_m\, e^{2\pi i m x} \quad (1)$$ – njen Fourier-ov razvoj

Fourier-ovi koeficijenti:

$$c_m = \int_0^1 h(x)\, e^{-2\pi i m x}\, dx = \int_0^1 \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} g(x+k)\right) e^{-2\pi i m x}\, dx$$

$$= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_0^1 g(x+k)\, e^{-2\pi i m (x+k)}\, d(x+k) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, e^{-2\pi i m x}\, dx$$

$$= \hat{g}(m)$$

U (1) stavimo $x=0$ ◭

$\boxed{2}$ Sve ovo će važiti i u $\mathbb{R}^n$.

$x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$ $\in \mathbb{R}^n$

$x \cdot y = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$, $|x| = \sqrt{x \cdot x}$

$\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) = \{ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} \mid$ ograničene, glatke, rapidno opadajuće $\}$

vektorski prostor Schwartz-ovih f-ja

svi parcijalni izvodi postoje i neprekidni su

$|x|^N f(x) \to 0$, $|x| \to \infty$ za $\forall N$

- Za $f \in \mathcal{S}$ definišemo Fourier-ovu transformaciju $\hat{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ sa

$$\boxed{\hat{f}(y) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, e^{-2\pi i x \cdot y}\, dx}$$

$dx = dx_1 dx_2 \dots dx_n$

- Ako je $b \in \mathbb{R}_{>0}$, $g(x) = f(bx)$, $f \in \mathcal{S}$,
onda je
$$\hat{g}(y) = \frac{1}{b^n} \hat{f}\left(\frac{y}{b}\right)$$
- Ako je $f(x) = e^{-\pi x \cdot x} = e^{-\pi(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2)}$,
onda je $\hat{f} = f$.

T4 [Poissonova sumacione f-la] Za $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$
vaŽi

$$\boxed{\sum_{m \in \mathbb{Z}^n} g(m) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \hat{g}(m)}$$