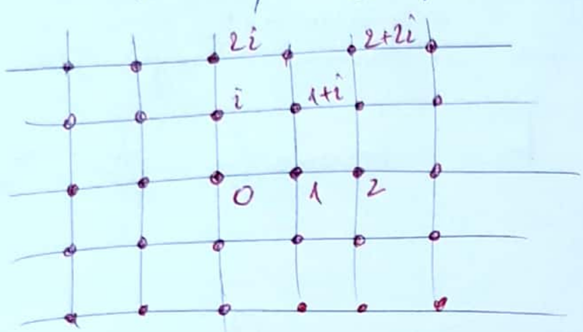
Eliptičke funkcije

[1]

• $L = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2 \le \mathbb{C}$ **rešetka** u $\mathbb{C}$ ako su $\omega_1, \omega_2 \neq 0$ i $\omega_2 \notin \mathbb{R}\omega_1$

tj. $\langle \omega_1, \omega_2 \rangle_{\mathbb{R}} = \mathbb{C}$

Primer $\omega_1 = i$, $\omega_2 = 1$



$L = \mathbb{Z}[i] = \{ mi + n \mid m, n \in \mathbb{Z} \}$

ova rešetka je i prsten ("prsten Gausovih celih")

• $\Pi := \{ a\omega_1 + b\omega_2 \mid 0 \le a \le 1,\ 0 \le b \le 1 \}$ (zatvoreni) **fundamentalni paralelogram** rešetke L

$\mathbb{C} = L + \Pi$ - razlaganje nije jedinstveno "na ivicama"

• Uvek ćemo pretpostaviti da je označavanje takvo da je $\operatorname{Im} \dfrac{\omega_1}{\omega_2} > 0$

• Ako je (ω_1, ω_2) jedna $\mathbb{Z}$-baza rešetke L, onda su i

$$(\omega_1', \omega_2') = (\omega_1, \omega_2)\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$ takođe $\mathbb{Z}$-baze za L

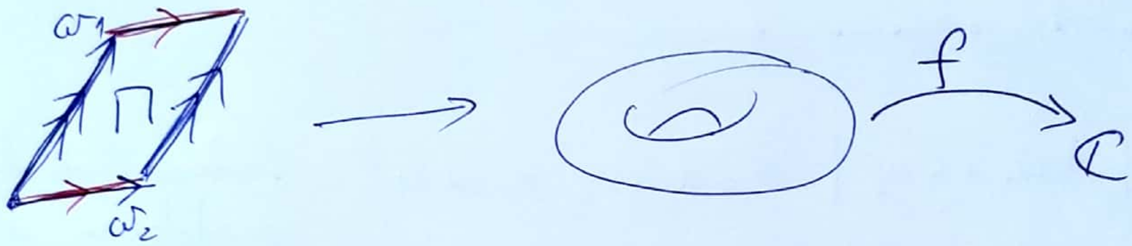
za svaku matricu $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$

[2] (D) Za datu rešetku, L, meromorfna funkcija f na $\mathbb{C}$ je **eliptička** u odnosu na L, ako važi $\boxed{f(z+\ell) = f(z), \quad \forall \ell \in L}$

$\left(\Longleftrightarrow \quad f(z+\omega_1) = f(z), \quad f(z+\omega_2) = f(z), \quad \forall z \in \mathbb{C} \right.$

tj. f je "dvostruko periodična", sa 2 $\mathbb{R}$-lin. nezavisna perioda ω_1 i ω_2 $\Big)$

- Ovakve f-je f su određene svojim vrednostima na fund. paralelogramu Π (+ na naspramnim ivicama imaju istu vrednost) pa f možemo videti kao meromorfnu f-ju na <u>torusu</u>:



- $\mathcal{E}_L$ = skup svih eliptičkih funkcija u odnosu na fiksiranu rešetku L
- ako su f i g eliptičke, i $f \pm g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}_{\,g \neq 0}$ su takođe eliptičke

pa je

$\mathcal{E}_L$ = <u>polje</u> (potpolje polja svih meromorfnih f-ja na $\mathbb{C}$)

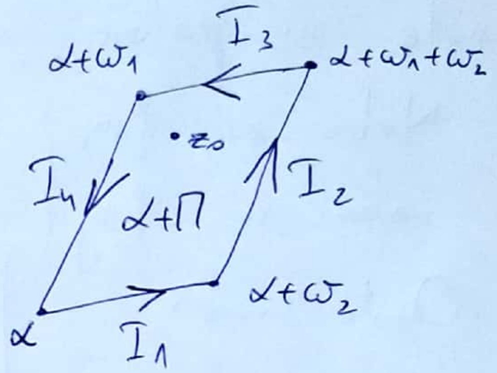
- ako je $f \in \mathcal{E}_L$ i $f' \in \mathcal{E}_L$

<u>Lema 1</u> Eliptička f-ja $f(z) \in \mathcal{E}_L$ koja nema pol u fund. paralelogramu Π mora biti konstanta.

▽ Π kompaktan $\longrightarrow$ f ako nema pol, neprekidna je pa i ograničena:
$|f| \leq M$ na Π $\longrightarrow$ ali onda $|f| \leq M$ i na celom $\mathbb{C}$
(zbog L-periodičnosti)
Liouville-ova t.: holomorfna f-ja koja je ograničena na celom $\mathbb{C}$ je konst. △

Za $\alpha \in \mathbb{C}$, $\quad \alpha + \Pi = \{ \alpha + z \mid z \in \Pi \}$ translat od Π

Lema 2 Ako $f(z) \in \mathcal{E}_L$ nema polove na granici $\alpha + \Pi$, onda je
$$\sum_{\substack{z_0 \text{ pol} \\ z_0 \in \alpha+\Pi}} \operatorname{res}_{z_0} f(z) = 0$$



▽ Cauchy-jeva teorema o reziduumima:
$$\sum \operatorname{res} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial(\alpha+\Pi)} f(z)\, dz$$
$$= \underbrace{\left(I_1 + I_3\right)}_{0} + \underbrace{\left(I_2 + I_4\right)}_{0} = 0$$

jer je f ω_1-periodična

jer je f ω_2-periodična △

Primedba: Meromorfna f-ja može imati samo konačno mnogo polova u ograničenom regionu, uvek možemo izabrati neko $\alpha \in \mathbb{C}$ tako da granica $\alpha + \Pi$ ne sadrži polove f-je $f(z)$

Primedba: Nekonst. eliptička f-ja $f(z) \in \mathcal{E}_L$ mora imati bar 2 pola (ili bar 1 pol višestrukosti ≥ 2) unutar svakog takvog $\alpha + \Pi$, zbog (L2).

reziduum

Primer: $f(z) = \dfrac{a_{-2}}{(z-z_0)^2} + \dfrac{a_{-1}}{(z-z_0)} + a_0 + a_1 (z - z_0) + \ldots$ Laurent-ov razvoj oko z_0

$a_{-2} \neq 0$ - ovo je pol reda 2

$\operatorname{res}_{z_0} f(z) = a_{-1}$

Primer: $f(z) = \dfrac{a_{-1}}{(z-z_0)} + a_0 + a_1 (z - z_0) + \ldots$ prost pol (pol reda 1)

$a_{-1} \neq 0$

Primer: Ako je $f(z) = a_3(z-z_0)^3 + a_4(z-z_0)^4 + \dots$

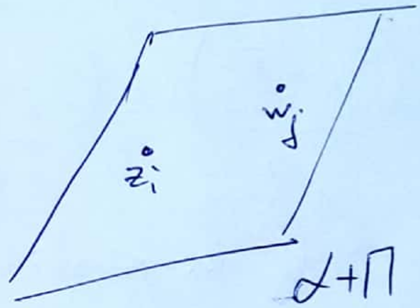
$a_3 \neq 0$

onda kažemo da je z_0 nula reda 3 meromorfne fje $f(z)$

(L 3) Pretpostavimo da eliptička fja $f(z) \in E_L$ nema nule ni polove na granici $\alpha + \Pi$.

Neka su $\{m_i\}$ redovi svih nula fje $f(z)$ u $\alpha + \Pi$ i neka su $\{n_j\}$ redovi svih polova fje $f(z)$ u $\alpha + \Pi$.

Onda važi $\boxed{\sum m_i = \sum n_j}$



∇ • Ako je z_i nula reda m_i tj.

$$\cancel{f(z) = a_{m_i}(z-z_i)^{m_i} + a_{m_i+1}(z-z_i)^{m_i+1} + \dots}$$

onda je

$$\cancel{f'(z) = m_i \cdot a_{m_i}}$$

$$f(z) = a_m (z-z_i)^m + a_{m+1}(z-z_i)^{m+1} + \dots$$

$$f'(z) = m a_m (z-z_i)^{m-1} + (m+1) a_{m+1} (z-z_i)^m + \dots$$

pa je $$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m}{z-z_i} + b_0 + b_1(z-z_i) + \dots$$

tj. $$m = \text{red nule } z_i = \operatorname{res}_{z_i} \frac{f'(z)}{f(z)}$$

• Ako je w_j pol $f(z)$ reda n, onda je

$$f(z) = \frac{a_{-n}}{(z-w_j)^n} + \frac{a_{-n+1}}{(z-w_j)^{n-1}} + \dots$$

$$f'(z) = -\frac{n \cdot a_{-n}}{(z-w_j)^{n+1}} + \dots$$

pa je $$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{-n}{z-w_j} + c_0 + c_1(z-w_j) + \dots$$

$$-n = -(\text{red pola u } w_j) = \operatorname*{res}_{w_j} \frac{f'(z)}{f(z)}$$

- Dakle, za svaku meromorfnu funkciju $f(z)$ njen logaritamski izvod $\frac{f'(z)}{f(z)}$ ima <u>prost pol</u> za svaku nulu ili pol f-je $f(z)$.
- Dodatno, ako je f eliptička, i $\frac{f'}{f}$ je eliptička. Primenite (L2) na $\frac{f'}{f}$

$\boxed{3}$ Konstrukcija (bar jedne) eliptičke f-je

$L \leq \mathbb{C}$ fiksirana rešetka u $\mathbb{C}$, $L = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$

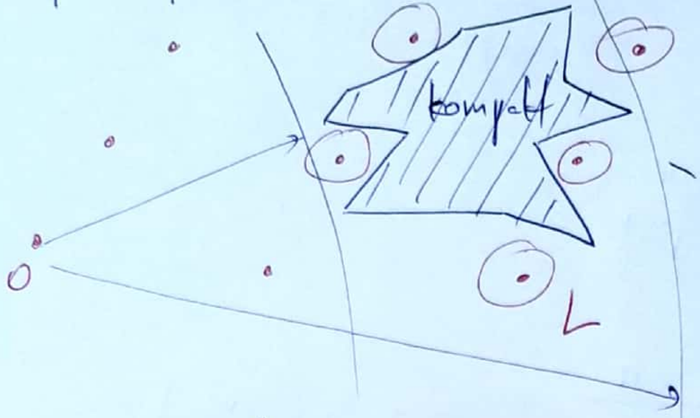
Weierstrass-ova $\wp$-funkcija:

$$\boxed{\wp(z) = \wp(z;L) := \frac{1}{z^2} + \sum_{\substack{l \in L \\ l \neq 0}} \left(\frac{1}{(z-l)^2} - \frac{1}{l^2} \right) \qquad (*)}$$

(L.4) Suma na desnoj strani $(*)$ konvergira apsolutno i uniformno za z u bilo kom kompaktnom podsk. od $\mathbb{C} \setminus L$

$$\left|\frac{1}{(z-\ell)^2}-\frac{1}{\ell^2}\right| = \left|\frac{-z^2+2z\ell}{(z-\ell)^2\ell^2}\right| = \left|\frac{2z-\frac{z^2}{\ell}}{\ell(\ell-z)^2}\right| \asymp \frac{1}{|\ell|^3}$$

za $\ell\neq 0$ i z u fiksiranom kompaktu



ograničen i odvojen od polova

• Red $\displaystyle\sum_{\ell\in L\setminus\{0\}} \frac{1}{|\ell|^s}$ konvergira za sve $s>2$

$$= \sum_{n\geq 1}\ \sum_{\substack{\ell\in L\\ n-1<|\ell|\leq n}} \frac{1}{|\ell|^s} \ll \sum_{n\geq 1}\frac{n}{n^s} = \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^{s-1}}<\infty$$

za $s-1>1$

broj tačaka rešetke u ovom prstenu je $O(n)$ (– posložite fund. domene koji imaju konstantnu, $O(1)$ površinu)

• Specijalno, f-a $\wp(z)$ je holomorfna svuda na $\mathbb{C}\setminus L$. (**)

(L5) Funkcija $\wp(z)\in \mathcal{E}_L$ i svi njeni polovi su tačno polovi reda 2 u tačkama rešetke L.

• Ako fiksiramo tačku rešetke $\ell\in L$ i primenimo razmatranje iz dokaza (L4) na funkciju

$$\wp(z)-\frac{1}{(z-\ell)^2}$$

("centar računa" je u $z=\ell$ umesto specijalnog $z=0$)

- zaključujemo da je $\wp(z) - \frac{1}{(z-\ell)^2}$ holomorfna u okolini $z=\ell$, što znači da je $z=\ell$ pol reda 2.

+ primedba (**) $\longrightarrow$ nema drugih polova.

- Dalje, L je grupa, pa u (*) svako ℓ možemo zameniti sa $-\ell$.

Ako onda zamenimo $-z$ dobijamo: direktno iz (*):

$$\wp(-z) = \wp(z)$$

- Zbog uniformne konvergencije na kompaktima, red (*) možemo diferencirati član-po-član:

$$\wp'(z) = -2 \sum_{\ell \in L} \frac{1}{(z-\ell)^3}$$

Primetimo, $\wp'(z)$ je neparna fja

Odavde je očigledno $\wp'(z+\ell_0) = \wp'(z)$, $\forall z \in \mathbb{C} \setminus L$, $\forall \ell_0 \in L$

Izvod meromorfne je meromorfna, pa je $\wp' \in \mathcal{E}_L$ eliptička!

- Na kraju, dokažimo da je i $\wp$ eliptička: posmatrajmo

$$P(z) := \wp(z+\omega_1) - \wp(z)$$

$$P'(z) = \wp'(z+\omega_1) - \wp'(z) = 0, \quad \forall z$$

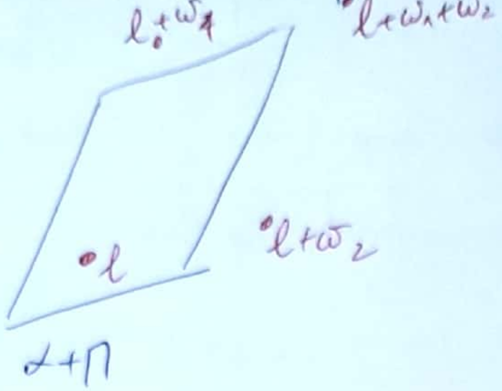
$\rightarrow$ $P(z) = C$ = konst.

$$C = P\left(-\frac{\omega_1}{2}\right) = \wp\left(\frac{\omega_1}{2}\right) - \wp\left(-\frac{\omega_1}{2}\right) = 0 \rightarrow \omega_1\text{-periodičnost}$$

ω_2 - periodičnost - slično.

$\blacktriangle$

Primedba: U svakom translatu $\alpha+\Pi$ iz formulacije L.3, $\wp(z)$ ima tačno 2 nule (2 različite, ili jednu reda 2)



4 Opis polja eliptičkih funkcija

Teorema 6 Za svaku rešetku $L \leq \mathbb{C}$ je

$$\boxed{\mathcal{E}_L = \mathbb{C}(\wp, \wp')}$$

tj. svaka eliptička f-ja za L je racionalni izraz po $\wp(z;L)$ i $\wp'(z,L)$.

Još preciznije, za svaku $f(z) \in \mathcal{E}_L$, $\exists\, g(x), h(x) \in \mathbb{C}(x)$ takve da je

$$\boxed{f(z) = g(\wp(z)) + \wp'(z)\, h(\wp(z))}$$

∇

$$f(z) = \underbrace{\frac{f(z)+f(-z)}{2}}_{\text{parna eliptička}} + \underbrace{\frac{f(z)-f(-z)}{2}}_{\text{neparna eliptička}}$$

$$= \frac{f(z)+f(-z)}{2} + \wp'(z)\,\frac{f(z)-f(-z)}{2\wp'(z)}$$

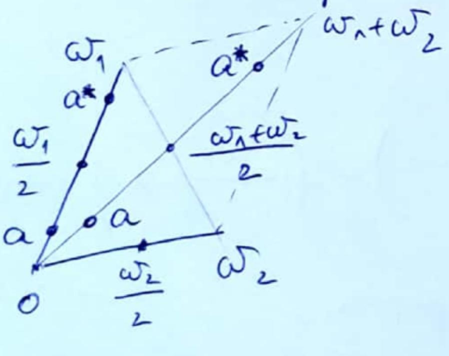
• Dakle, dovoljno je pokazati:
potpolje $\mathcal{E}_L^+ \subset \mathcal{E}_L$ parnih eliptičkih funkcija za L je generisano Weierstrass-ovom fom $\wp(z)$ tj.

$$\boxed{\mathcal{E}_L^+ = \mathbb{C}(\wp)} \;?$$

Ideja: napraviti fu koja ima iste nule i polove kao $f(z)$, koristeći samo fje oblike $\wp(z) - u$, $u \in \mathbb{C}$.
Onda će količnik te fje i $f(z)$ biti eliptička fja bez polova, a prema (L1), ona mora biti const.

• $\Pi' = \{ a\omega_1 + b\omega_2 \mid 0 \le a < 1,\ 0 \le b < 1 \}$ tačan fundamentalni paralelogram

tj.
Π' je baš skup predstavnika svih različitih koseta iz $\mathbb{C}/L$



(i) Neka je $a \in \Pi' \setminus \{0\}$ nula parne eliptičke fje $f(z)$ koja nije u $\frac{1}{2}L$ tj. $a \notin \{ \frac{\omega_1}{2}, \frac{\omega_2}{2}, \frac{\omega_1+\omega_2}{2} \}$

$a^* := \omega_1 + \omega_2 - a$, ako je a u unutrašnjosti Π'
$:= \omega_1 - a$
$:= \omega_2 - a$ } ako je na ivici

$$f(a^* - z) = f(\omega_1 + \omega_2 - a - z) \underset{\text{eliptička}}{=} f(-a-z) \underset{\text{parna}}{=} f(a+z)$$

Ako je a <u>nula reda m</u> tj.

$$f(a+z) = b_m z^m + b_{m+1} z^{m+1} + \dots \qquad (b_m \neq 0)$$

onda je

$$f(a^* + z) = f(a-z) = b_m(-z)^m + b_{m+1}(-z)^{m+1} + \dots$$

tj. i <u>a^* je nula reda m</u>.

(ii) Neka je a nula fje $f(z)$ koja pripada $\frac{1}{2}L$ tj.

$$a \in \left\{ \frac{\omega_1}{2}, \frac{\omega_2}{2}, \frac{\omega_1+\omega_2}{2} \right\}$$

U ovom slučaju, red m nule a mora biti <u>paran</u>:

Npr. za $a = \frac{\omega_1}{2}$, ako je

$$f(a+z) = f\left(\frac{\omega_1}{2} + z\right) = b_m z^m + b_{m+1} z^{m+1} + \dots$$

onda je

$$f(a-z) \underset{\text{eliptička}}{=} f\left(\frac{\omega_1}{2} - z - \omega_1\right) = f\left(-\frac{\omega_1}{2} - z\right) \underset{\text{parna}}{=} f\left(\frac{\omega_1}{2} + z\right) = f(a+z)$$

pa je

$$b_m z^m + O(z^{m+1}) = b_m(-z)^m + O(z^{m+1})$$

$b_m \neq 0 \longrightarrow m$ parno.

• Neka je sada:

$\{a_i\}$ lista nula f-je $f(z)$ u Π'

- ako nula nije iz $\frac{1}{2}L$, uključujemo je sa višestrukošću, ali za svaki par $a \longleftrightarrow a^*$ biramo tačno jednu

- ako je nula jedna od $\frac{\omega_1}{2}, \frac{\omega_2}{2}, \frac{\omega_1+\omega_2}{2}$ i reda m, ubacujemo je u listu $\frac{m}{2}$ $(\in \mathbb{Z})$ puta

(dakle "izlistamo pola nula", bez 0)

$\{b_j\}$ lista polova f-je $f(z)$ u Π'

- napravljena na potpuno analogan način

("izlistamo pola polova", bez tačke 0)

Sve vrednosti a_i, b_j su $\neq 0$, pa su $\wp(a_i), \wp(b_j) \in \mathbb{C}$ konačne (jer $\wp$ ima jedini pol u 0 u Π').

• Zato je dobro def. eliptička f-ja

$$g(z) := \frac{\prod_i (\wp(z) - \wp(a_i))}{\prod_j (\wp(z) - \wp(b_j))} \in \mathbb{C}(\wp(z)) \qquad (2)$$

• Tvrdimo: $g(z)$ ima iste polove i nule kao i $f(z)$, uključujući višestrukost

(L1 $\rightarrow$ $\exists c \in \mathbb{C}$: $f(z) = c \cdot g(z)$)

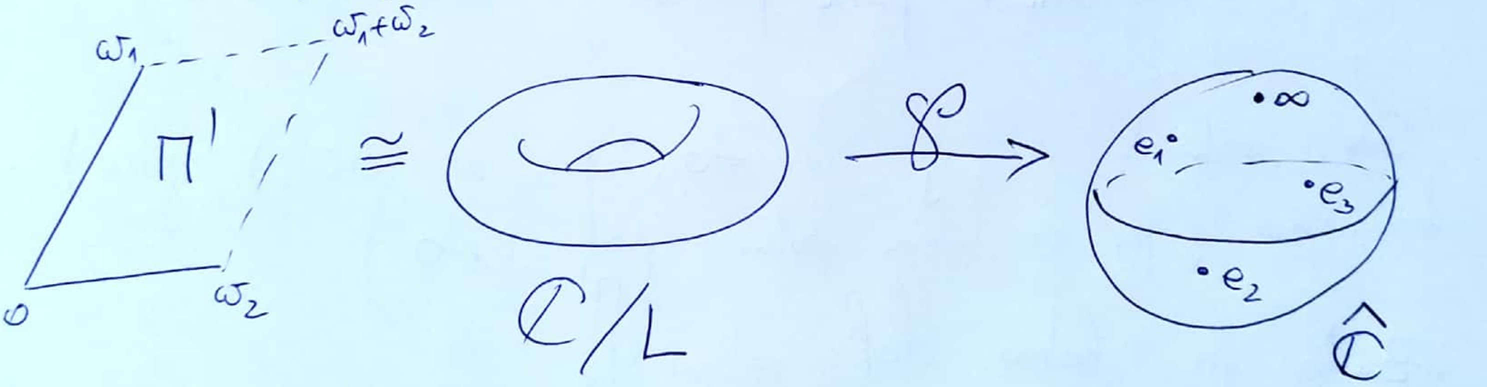
(L7) Za fiksirano $u \in \mathbb{C}$, eliptička funkcija $\wp(z) - u$ ima tačno dve nule ili jednu dvostruku nulu u Π'.

Sve nule izvoda $\wp'(z)$ su tačno $\frac{\omega_1}{2}$, $\frac{\omega_2}{2}$ i $\frac{\omega_1+\omega_2}{2}$, pa su vrednosti

$$\boxed{e_1 := \wp\left(\frac{\omega_1}{2}\right), \quad e_2 := \wp\left(\frac{\omega_2}{2}\right) \quad \text{i} \quad e_3 := \wp\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right)}$$

sve vrednosti parametra u za koje $\wp(z) - u$ ima dvostruku nulu. Vrednosti e_1, e_2, e_3 su međusobno različite.

Primedba: Dakle, Weierstrass-ova $\wp$-fja je "2-na-1" preslikavanje torusa na Riemannovu sferu $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, osim u 4 tačke e_1, e_2, e_3, ∞ koje imaju jednočlanu inverznu sliku:



$$\wp'\left(\frac{\omega_1}{2} + z\right) \underset{\text{eliptička}}{=} \wp'\left(\frac{\omega_1}{2} + z - \omega_1\right) = \wp'\left(-\frac{\omega_1}{2} + z\right) \underset{\text{neparna}}{=} -\wp'\left(\frac{\omega_1}{2} - z\right)$$

$$\longrightarrow \quad \wp'\left(\frac{\omega_1}{2}\right) = 0$$

Dvostruka nula f-je $\wp(z) - u$ je nula izvoda $\wp'(z)$.

Primenite razmatranje sa lista -5-, (L3), (L5) i primedbu posle (L5).

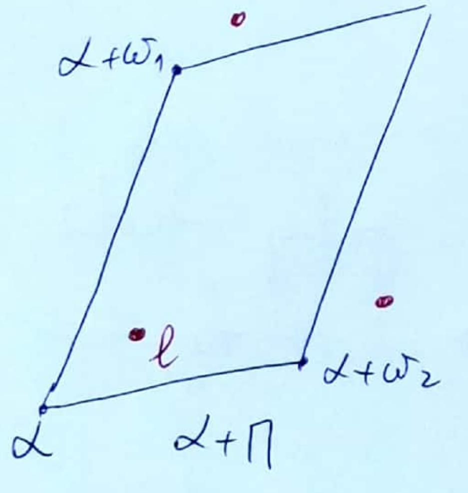
Dokaz tvrđenja i završetak dokaza (T6):

- $\boxed{\text{Na } \Pi' \setminus \{0\}}$, brojilac ni imenilac razlomka (2) nemaju polove. Dakle,
  - nule f-je g dolaze od nula faktora $\wp(z) - \wp(a_i)$ iz brojioca
  - polovi f-je g dolaze od nula faktora $\wp(z) - \wp(b_j)$ iz imenioca

Ali, iz (L7) znamo da $\wp(z) - u$
- ima dvostruku nulu u $z \in (\Pi' \setminus \{0\}) \cap \frac{1}{2} L$
- ima par prostih simetričnih nula z i z^*

Zbog konstrukcije f-je $g(z)$, tj. izbora listi $\{a_i\}$ i $\{b_j\}$, vidimo da $g(z)$ i $f(z)$ imaju <u>iste</u> nule/polove sa <u>istom</u> višestrukošću, svuda na $\Pi' \setminus \{0\}$.

- Ostaje još da provenimo šta se dešava $\boxed{\text{za } z = 0}$
  - Izaberimo $\alpha \in \mathbb{C}$ tako da granica fund. paralelograma $\alpha + \Pi$ ne sadrži nijednu tačku rešetke L, nijedan pol, nijednu nulu niti $f(z)$, niti $g(z)$ (to uvek možemo...)



$\alpha + \Pi$ sadrži tačno jednu tačku ℓ rešetke L

Na osnovu prethodnog, $f(z)$ i $g(z)$ imaju iste nule/polove za sve $z \in (\alpha + \Pi) \setminus \{\ell\}$.

$m_f :=$ red nule/pola f-je $f(z)$ u tački ℓ
(npr. $= 2$, ako f ima nulu reda 2,
$= -2$, ako f ima pol reda 2)

$m_g :=$ red nule/pola f-je $g(z)$ u tački ℓ

Onda imamo:

$$m_f + \boxed{\begin{pmatrix}\text{totalni red nula } f(z) \\ \text{u } (\alpha+\Pi)\setminus\{\ell\}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\text{totalni red polova } f(z) \\ \text{u } (\alpha+\Pi)\setminus\{\ell\}\end{pmatrix}}$$

L3 ← jer je f eliptička

$=$ 0 $=$

L3 ← jer je g eliptička

ovo je isto!

$$m_g + \boxed{\begin{pmatrix}\text{totalni red nula } g(z) \\ \text{u } (\alpha+\Pi)\setminus\{\ell\}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\text{totalni red polova } g(z) \\ \text{u } (\alpha+\Pi)\setminus\{\ell\}\end{pmatrix}}$$

$\longrightarrow$ $m_f = m_g$ ◢

<u>Primedba</u> Dakle, ako 2 eliptičke f-je imaju iste nule/polove svuda na Π, osim u jednoj tački, onda moraju imati isto ponašanje i u toj tački. (automatski)

Meromorfne funkcije

① Kompletna fja $f(z)$ definisana u probušenom disku oko z_0 $\{z : 0 < |z - z_0| < r\}$, za neko $r > 0$ ima <u>pol</u> u z_0, ako je fja $\frac{1}{f(z)}$, dodefinisana sa 0 u z_0, holomorfna u disku $\{|z - z_0| < r_1\}$.

② f holomorfna na otvorenom Ω, osim u $z_0 \in \Omega$

z_0 zovemo <u>izolovani singularitet</u> i može biti jednog od 3 tipa:

- removable (ako je f ograničena oko z_0)
- pol (ako $|f(z)| \to \infty$, $z \to z_0$)
- esencijalni singularitet (npr. $e^{1/z}$ ima esencijalni singularitet u 0)

③ Funkcija $f(z)$ na otvorenom Ω je <u>meromorfna</u>, ako postoji niz tačaka $\{z_0, z_1, z_2, \dots\}$ koji <u>nema</u> granične tačke u Ω i takav da je

- $f(z)$ holomorfna na $\Omega \setminus \{z_0, z_1, z_2, \dots\}$
- $f(z)$ ima <u>polove</u> u tačkama $\{z_0, z_1, z_2, \dots\}$