Предавања на Београдском Универзитету.

НЕБЕСКА МЕХАНИКА

од

М. МИЛАНКОВИЋА
проф. Универзитета

Издање Задужбине Луке Ћеловића-Требињца.

БЕОГРАД
1 9 3 5

Предавања на Београдском Универзитету.

НЕБЕСКА МЕХАНИКА

од

М. МИЛАНКОВИЋА
проф. Универзитета

Издање Задужбине Луке Ћеловића-Требињца.

БЕОГРАД
1935

Штампарија „Графички Институт“ — Кнез Милетина 15.

ПРЕДГОВОР

У овом уџбенику, штампаном сретствима задужбине нашег великог добротвора Луке Ћеловића—Требињца, обрађена је наука о кретању небеских тела модерним оруђем векторске анализе. Ова прва, доследна, примена векторског рачуна на проблеме класичне Небеске Механике показује сва његова преимућства над оруђем којим се, до сада, та наука служила. Она ми је послужила и при стварању теорије секуларног померања Земљиних полова, изграђене у београдској школи научника Примењене Математике. Мојим сарадницима на том пољу, господи професорима А. Билимовићу и В. Жардецком, који су ме и при штампању ове књиге свесрдно помогли, нека је овим изражена моја топла благодарност.

Београд, на Светог Саву, 1935.

М. Миланковић

ПРВИ ОДЕЉАК

ТРАНСЛАТОРНО КРЕТАЊЕ НЕБЕСКИХ ТЕЛА

ГЛАВА ПРВА

Постанак и развитак науке о кретању небеских тела.

§ 1. Халдејци и Египћани. Прве клице нашег знања о кретању небеских тела никле су у старој Месопотамији. Као да је природа сама одабрала тај крај, назван баштом света, за ту сетву! Све је изгледало онде као створено за систематско посматрање небеских појава: равно тле, кристалан ваздух, ведро небо, рани залазак сунца и ноћна хладовина после дневне жеге. Свештеницима Вавилоније стављено је посматрање неба у дужност, па су они, на високим кулама, исчекивали прву појаву Месечевог српа и тумачили небеске појаве. Јер ти су свештеници били, у првом реду, небески врачи, па се у том значењу очувало потоњим нараштајима халдејско име, остављајући свој жиг на целокупној астрономској делатности старих Вавилонаца, искључујући је њиме, за дуго времена, из области науке. Тек у новије доба, кад су пронађене библиотеке земљаних плочица, исписаних клиновим писмом, почело се правичније судити о раду халдејских посматрача неба. Са тих плочица могло се прочитати да су вавилонски свештеници били, заиста, дворски астролози и да су својим претсказивањима, која се могу пратити до у трећу хиљаду година пре Христа, држали у својим рукама највишу власт у држави. Ниједан важнији државни посао није предузиман док они нису упитани за савет. Могуће је, а и вероватно, да су они, продавајући будућност другима, осигусу знали тачно дужину године и упознали неједнаке дужине годишњих доба. Годину су поделили у дванаест месеци, а дан у дванаест двочасова. Одредили су тачно дужине средњег аномалистичког месеца и нашли да за 242 драконистичка обилажења (т. ј. она од чвора до чвора) Месеца или за 223 лунација (циклуса Месечевих мена) треба исто толико времена као за 19 драконистичких обилажења Сунца. Како се помрачења Сунца дешавају само онда када Сунце и Месец прођу у исти мах кроз чвор (пресек) њихових привидних путања, то ће се таква помрачења поновити после горње периоде времена коју су они назвали Сарос. Корак у корак, пратили су кретање планета и одредили велике периоде њиховог обилажења звезданог неба. Већ две хиљаде година пре Христа били су начисто с тиме да су зорњача и вечерњача једна те иста звезда, што су Грци увидели тек петнаест векова касније.

Да ли су Вавилонци небески свод распрострли до потпуне лопте, о томе се мишљења разилазе. На географској ширини Вавилона појављују се више од девет десетина небеске сфере изнад хоризонта, па нам зато корак до потпуне небеске сфере изгледа неминован. Но ваља имати у виду да такво сазнање није одговарало тадањим верским назорима, а како су верске предрасуде јаче од најочигледнијих чињеница, то је могуће да се Вавилонци нису усудили да изговоре оно што су сагледали, па је зато тек слободоумнији грчки народ објавио оно што су и Вавилонци увидели.

Пре но што приступимо Грцима, посветимо неколико речи астрономији старих Египћана. Она је била можда још старија од вавилонске, јер почетак првог египатског календарског рачунања пада у годину 4242 пре Христа. И египатски свештеници били су пажљиви посматрачи неба и одржавали су у Дендери, Мемфису и Хелиополису уређене звездаре. Разазнавали су се по небу веома добро, а своје грађевине управљали тачно по небеским правцима. Ишчекивајући из године у годину хелиакични излаз Сириуса (Сота), када се он први пут у години појави на јутарњем небу, увидели су да се не само тај излаз него и поплаве Нила померају постепено из године у годину да тек после 1460 година дођу на исто место у њиховом календару у којем је година бројала 365 дана. То је значило да је за време тог дугог интервала, који су они звали Сотисовом периодом, њихов календар заостао према току природе за целу годину дана. Делећи 365 са 1460 добива се да је њиховој календарској години недостајала четвртина дана па да дође у склад са током годишњих доба. Да се томе испомогну, они нису знали, хтели или смели па оставише то, као што ћемо видети, Александријцима.

§ 2. Грци. У почетку шестога века пре Христа пресађена су астрономска знања Вавилонаца и Египћана у Грчку. *Талес Милећанин* (око 630—540) био је тај који их је први донео у своју јонску отаџбину. По мајци пореклом из ФеницИје, он је извршио велика путовања која су га одвела у Египат, а сигурно и у Месопотамију где се је упознао са халдејским учењем о периодицитету Сунчевих помрачења. Само помоћу њега могао је претсказати помрачење Сунца од 28 маја 585 године и стећи тиме високи углед и назив светског мудраца. Он је, како се бар прича, учио да не само небески свод, него и Земља сама, имају облик лопте што, у колико се то тиче небеског свода, није нимало невероватно, јер је тај плод сазнања био у Вавилону толико сазрео да га је само требало узабрати. Сигурно је да је његов ученик и пријатељ *Анаксимандрос* (611—547) учио да небо има облик лопте, а да наша Земља, коју је замишљао у облику бубња, лебди у средишту те лопте. Слава логички образложеног учења да наша Земља има облик лопте припада грчкој философској школи Питагорејаца у јужној Италији. *Питагорас* (око 580—500) и његови ученици сматрали су да само такав облик Земље одговара захтеваној хармонији васионе па су они смислили први систем света. По том њиховом систему, лебди лоптаста Земља у средишту васионе, око тог средишта обрће се кристална сфера звезда некретница, а у овој се, повлачене од ње, обрћу седам даљих концентричних сфера од којих свака носи по једно од седам покретних небеских тела: Месец, Меркур, Венеру, Сунце, Марс, Јупитер и Сатурн. Полупречници ових кристалних сфера стоје у хармонијским пропорцијама па шта више, и једна, нама нечујна, музика сфера употпуњава ову хармонију васионе.

Тај Питагорејски систем света био је, стављајући Земљу у средиште васионе, геоцентричан. Но већ у самој тој школи отпоче постепени развитак тога система у правцу ка хелиоцентричном. *Филолаос* (у другој половини петога века пре Христа) померио је Земљу из центра васионе да би уњ ставио нејасно дефинисану Централну Ватру, а каснији Питагорејци *Хикетас Сиракужанин* и *Екфантос* учили су да се Земља обрће око своје осе, чиме изазива промену дана и ноћи и услед чега дотле замишљено обртање сфере звезда некретница постаје непотребно.

Учења Питагорејске школе стигла су у Атину у најсјајније доба овог града. *Анаксагорас* (око 500—428) донео их је, пошто се много напутовао, онамо и учио још да Месец захваљује Сунцу своју светлост и своје мене. Оптужен због овог учења за кривобоштво, спасао се смртне казне само на заузимање свога пријатеља Перикла. Тај догађај објашњава што је *Платон* (429—348) избегавао да заузме јасан став према новом учењу, па је сада немогуће одредити како је он о њему, у ствари, мислио. Сигурно је, међутим, да је у оно доба питање, да ли Земља мирује или се креће, стајало на дневном реду научне дискусије. Тако је Платонов ученик *Хераклеидес Понтикос* учио да се Земља обрће око своје осовине и тиме изазива промену дана и ноћи, око ње да обилазе Месец и Сунце, а око овога да се крећу остале планете, у најмању руку, Меркур и Венера. Други ученик Платонов, славни *Аристотелес* (384—322), определио се, напротив, сасвим за геоцентрични систем са мирујућом Земљом у средини васионе. Овакво учење великога философа, којим је несумњиво обуставио започету изградњу хелиоцентричног система, не смемо ипак огласити за ненаучно. Већ због тога не, што је Аристотелес, у опреци са мистичким расуђивањима Питагорејаца, цео проблем облика и кретања небеских тела ставио на чисто научну основу. Он је, пре свега, убедљивим научним разлозима, доказао да је Земља округла, позивајући се на то да је при сваком помрачењу Месеца, у којем год положају Земље и Месеца се оно десило, Земљина сенка ограничена кругом, што је могуће само при округлом облику саме Земље. Овоме доказу додао је и овај. Из појаве звезда над хоризонтом следује да је Земља округла и да није баш претерано велика, јер кад пођемо југу или северу, мења се изглед звезданог неба над хоризонтом осетно, тако да се звезде које пролазе кроз теме небеског свода, од њега удаљавају. Исто се тако многе јужне звезде виђају у Египту и на Кипру, које се у северним крајевима никад не виде, а друге, северније, звезде остају стално изнад хоризонта, док у јужним крајевима оне, као и остале, залазе под хоризонат.

Ова расуђивања доказују да је коначно решење питања о облику Земље дело Аристотелово. А што он није признао да се Земља креће, и то је имало својих научних разлога. Пре свега, појава теже говори за мирујућу Земљу, јер све што је тешко тежи ка центру света па би и Земља онамо пала кад се не би већ онде налазила. А када би се Земља обртала или, шта више, кретала унапред, морали бисмо звезде некретнице у различитим временима видети у различитом међусобном положају, што није случај

Ово су оба Аристотелова аргумента за мирујућу Земљу, од којих би други данас научно изразили речима да звезде некретнице не показују никакву паралаксу. Овим аргументима додао је, касније, Птолемајос још један који, вероватно, није ни Аристотелу био сасвим стран, и то овај. Кад би се Земља, заиста, обртала од запада према истоку, морали би се облаци, испод којих би Земља истрчавала, кретати према западу, а исто тако сваки у вис бачени или падајући предмет. Овај аргуменат може се обеснажити само принципом инерције, а од постављања оваквог принципа било се у оно доба још веома далеко. Без принципа инерције и без доказа да је паралакса звезда некретница неосетна, није се могао хелиоцентрични систем научно образложити. Зато је Аристотелово становиште одговарало ондашњем стању науке, а тај велики мислиоц био је тај који је основни проблем о кретању небеских тела бар јасно формулисао, а такво научно постављање проблема је скоро половина његовог решења. Узме ли се још у обзир да је Аристотелес на срце ставио свом унуку Калистену, који је са Александром Великим пошао у Вавилон, да прикупља записе о астрономским посматрањима Халдејаца, онда се могу потпуно оценити заслуге Ариститела за астрономску науку. Он је, у осталом, био духовни отац високе александријске школе којој је било суђено да реши основни проблем кретања небеских тела.

§ 3. Александријци. Када је Александар Велики освојио персијско царство, подигао је 332 године пре Хр. на морској обали Египта нову једну варош која је добила његово име. Када је он, девет година иза тога, склопио за навек своје очи, распала се његова огромна држава, коју поделише између себе његове војсковође као какав ратни плен. При тој деоби дође Египат под власт Птолемаја I, Лагија, који је Александрију одабрао за главни град своје државе. Та престоница Птолемајоваца — сви наследници првог носили су његово име — развила се брзо до најлепше вароши старога света и постала његово духовно средиште, особито онда када је Птолемајос II, *Филаделфос*, *основао славни александријски музеј*, највеличанственији дом науке старога света. Међу првим наставницима те високе школе наилазимо, још за време владавине првог Птолемаја, на познатог геометричара Еуклида који је и потоњим нараштајима био учитељ геометрије, јер су његови Елементи до сада доживели преко 1700 издања. Његови савременици били су *први александријски астрономи Тимохарис* и *Аристил* који су, настављајући систематски рад Халдејаца, нарочитим инструментима, армилама, одређивали положаје звезда на небеској сфери и саставили каталог тих звезда по њиховим сферним координатама. У оно доба стајала је Александрија у живом саобраћају са Вавилоном који је дошао под власт Селеуковаца, наследника једног од војсковођа Александрових. Грчка ученост доби значај светске, а у библиотекама Александрије прикупише се, почев од списа Аристотелових, сва научна блага средоземног света. Сви који беху жељни науке похиташе онамо, а први грчки научници добише позив да се у тамошњем музеју, *Високој Школи и Академији Наука у исти мах*, сасвим посвете научном раду. Па и они научници који, као што је то био случај са славним Сиракужанином Архимедом (287—212), нису живели у Александрији, стајали су у тако уској вези са александријском школом научника да их с правом можемо у њу убрајати.

Између 280 и 260 године пре Хр. учио је у Александрији и вршио онде астрономска посматрања *Аристарх са Самоса* (рођен око 310, година и место смрти непознати). Од његових научних списа очували су се само одломци и цитати, но већ ти мали остатци показују јасно да је он био један од највећих астронома старога света. Он је први предузео да премери небеске просторе. То сведочи његов мали спис «О величини и отстојањима Сунца и Месеца» који се очувао потомству на тај начин што је ушао у збирку названу «Мали Астроном» која је служила као уџбеник и употребљавала се, коментирана од Паноса, као увод у Птолемајов Зборник, до у средњи век. У том свом спису саопштава Аристарх да је Месец у тренутку када је тачно по пола осветљен, удаљен на небеском своду од Сунца 87 степени. То значи да тада Сунце, Земља и Месец образују правоугаони троугао, са правим углом код Месеца, а углом од 87 степени код Земље. Означимо ли отстојање Земље од Сунца са D, отстојање Месеца од Земље са d, то је горња чињеница изражена нашим данашњим математским ознакама једначином:

$$d : D = \cos \alpha,$$

где ваља ставити $\alpha = 87^0$. Пошто Сунце и Месец имају једнаке привидне величине, јер се та небеска тела при тоталним помрачењима Сунца таман поклапају, то следује, ако са S означимо стварни пречник Сунца, а са L стварни пречник Месеца,

$$L : S = d : D.$$

Аристарх је, сем тога, премерио пречник пресека коничне сенке Земљине на оном месту где Месец кроз њу пролази при тоталним и централним својим помрачењима, мерећи време потпуног улаза Месеца у ту сенку и време потпуног боравка Месечевог у тој сенци. На тај начин је нашао да је пречник сенке таман два пута толики колико пречник Месеца. Конус Земљине сенке је, због великог отстојања Земље од Сунца, толико шиљаст да је пречник његовог пресека на оном месту где тај конус додирује Земљу скоро једнак пречнику Земље T, а онде где додирује Сунце једнак пречнику Сунца S. Отстојање тих двају пресека је D, а трећи пресек конуса, којега је пречник, према мерењима Аристарховим, једнак $2L$, лежи с оне стране Земље у отстојању d. Одатле следује:

$$(T - 2L) : (S - T) = d : D.$$

Измерили се још привидни пречник δ Сунца или, што, према пређашњем, излази на исто, пречник Месеца, то је

$$\delta = S : D$$

познато, па се из предње четири једначине могу величине D, d, S, L изразити помоћу пречника Земље T.

На тај начин нашао је Аристарх исправан геометријски метод да премери, помоћу Земљиног пречника, отстојања Сунца и Месеца од Земље и величине тих небеских тела.

У практичној примени тог начина мерења био је Аристарх, не располажући са довољно усавршеним инструментима, мање сретне руке. Премеравање угла α испало му је нетачно (87^{0} место $89^{0}51'$), не мање оно привидног пречника Сунца (2^{0} место $32'$, да би касније, као што то Архимедес саопштава, нашао скоро тачан резултат од $30'$); при мерењу пресека Земљине сенке, на месту где Месец кроз њу пролази, погрешио је Аристарх за скоро четвртину праве вредности. Нису, дакле, та стварна мерења, која је касније Хипархос могао да, унеколико, исправи, велико дело Аристархово, него геометријски метод премеравања небеских простора. Од још већег значаја било је то што је он, тим мерењима, сазнао да је Сунце далеко веће од Земље и да отстојања небеских тела премашују далеко све дотадање претставе. Ненадмашна величина Сунца опредељавала му је место у средини васионе, а својим смелим духом, осетио је Аристарх да се најудаљенија небеска светла, звезде некретнице, налазе у толикој даљини која обеснажује Аристотелов аргуменат против кретања Земље. Јер ако је, као што је то Аристарх увидео, полупречник Земљине путање око Сунца бесконачно мален према полупречнику сфере звезда некретница, онда не можемо, услед годишњег кретања Земље, звезде некретнице виђати у току године у различитим међусобним отстојањима. Тим дубоким сазнањем била је створена поуздана научна основа на којој је Аристарх могао да сазида свој хелиоцентрични систем.

Од списа којим је Аристарх поставио и образложио тај свој хелиоцентрични систем није нам се очувао ни сам наслов. Но о том Аристарховом систему извештавају нас, у истом смислу, неколико старих писаца, а са толико појединости да га можемо потпуно реконструисати. Најважније и најпоузданије сведочанство даје нам Архимедес, млађи савременик Аристархов, у свом спису названом Аренариус. И Плутарх извештава опширније о Аристарховом хелиоцентричном систему, а спомињу га и Стобејон, Симплициус, Секстус и други. Из свих тих сведочанстава следује несумњиво да је Аристарх поставио хипотезу да Сунце мирује у центру васионе, да се сфера звезда некретница не обрће, а да се Земља креће око Сунца по кругу, обрћући се, при томе, око своје осе, нагнуте према путањи Земље. Овај систем не разликује се, својом суштином, од потоњег Коперниковог.

По споменутим сведочанствима, имао је Аристарх својих ученика, а његов систем својих присталица. За Халдејца *Селе-*

укоса из Селеукије, који је живео око половине другога века пре Хр., говори се да је Аристархов систем не само прихватио, него га и доказао. У чему се састојао тај доказ, не зна се.

Александријској школи припада и слава првог премеравања Земљине лопте, које је извршио *Ератостенес* (276—194), славни управник александријске библиотеке. Дознавши да се у Сијени, једном месту горњег Египта, а јужно од Александрије, налази један бунар у којем се Сунце једанпут у години, о подне најдужег дана, огледа, предузео је Ератостенес да, помоћу тога, измери величину наше Земље. У томе циљу измерио је, помоћу једног још од Аристарха израђеног инструмента, скафе, зенитско отстојање Сунца у Александрији, у само подне најдужега дана у години. То је отстојање, због огромне даљине Сунца, једнако централном углу што га полупречници повучени из средишта Земље према Сијени и Александрији међусобно затварају. Знајући тај угао и одговараравајући лук меридиана, ограничен Сијеном и Александријом, лако је израчунати полупречник и опсег највећега круга наше Земље. Онај лук мерио је, према податцима краљевских премеравача путева, 5000 стадија, а онај угао, мерен у лучној мери, једну педесетину пуног круга. Одатле је Ератостенес израчунао да опсег Земље мери 50.5000 = 250.000 стадија, резултат који, у колико нам је тачно позната дужина стадија, одговара неочекивано добро стварности.

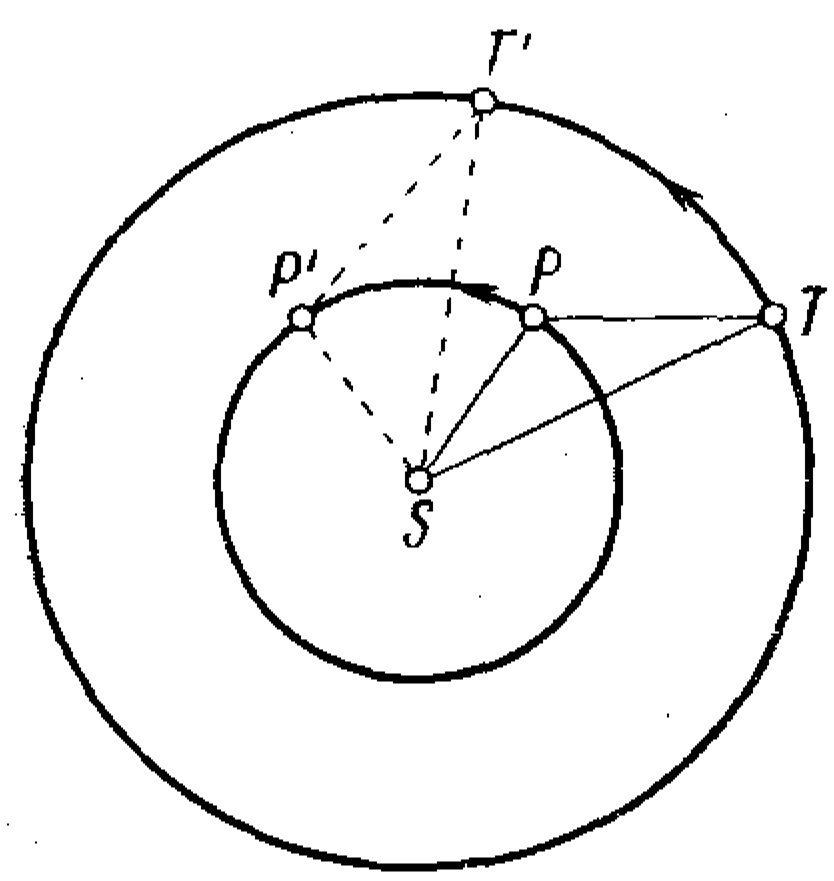
За време Ератостена извршена је у Александрији реформа старог египатског календара. Како нас о томе извештава један 1869 год. пронађени запис у камену (Канопски едикат), одлучило је 7 марта 238 год. пре Хр. египатско свештенство да свака четврта година буде преступна, са 366 дана. Ово правило о преступним годинама, изведено из староегипатске периоде Сотис, пресадио је, две сто година доцније, Александријац *Сосигенес* у Јулиански календар, где се до данас одржало.

Ова календарска реформа извршена је под владом Птолемаја III, Евергета, последњег од три велика владара птолемајског Египта. Његова владавина претставља, и у научном погледу, златно доба александријске периоде. То је доба обухватило век Архимеда и Ератостена и младе године највећег наследника Архимедовог на пољу геометрије. *Аполониос Пергејски* (око 260—170) учио је у Александрији код наследника Еуклидових геометрију и у тој вароши написао је своје дело о коничним пресецима, величанствени споменик александријске науке. Но Аполониос се бавио и проблемима астрономије, како то сведочи једна његова теорема саопштена у Птолемајовом Зборнику. *Важно би било знати* којим је поводом дошао Аполониос до те своје теореме. О томе нам Птолемајос ништа не саопштава, а спис Аполониов о том предмету није се сачувао. Покушајмо, ипак, да одговоримо на постављено питање, јер је оно од пресудног значаја за историју хелиоцентричног система.

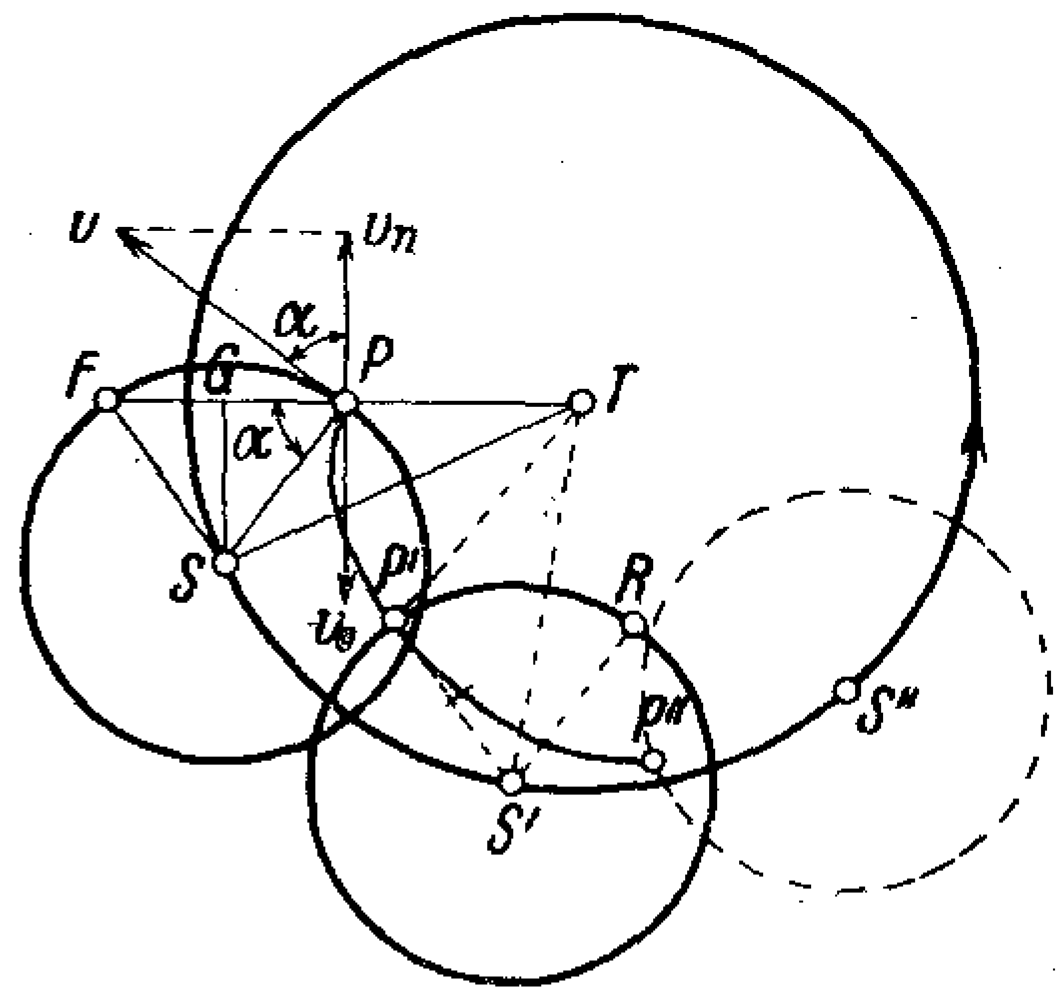
Сигурна је ствар да је Аполониос познавао Аристархово учење које је *никло, у доба његова рођења, у истој оној школи* у којој је и он, касније, учио и које је, као што смо чули, имало, и иза смрти Аристархове, својих присталица, међу којима је био можда и сам Аполониос, јер га Хиполитос спомиње уз Аристарха. Несумњиво је, на сваки начин, да је Аристархова наука стајала на дневном реду научне дискусије још за време боравка Аполонија у Александрији. О Аристарху говори, као што смо чули, Архимедес у своме Аренариусу. У томе делу спомиње се и Ератостеново премеравање Земље, па је зато то дело морало бити написано баш у доба Аполониовог боравка у Александрији. Сигурно је да се Аполониос упознао са тим списом Архимеда, јер је овај стајао у тесној вези са александријском школом и своје списе посвећивао александријским научницима Конону, Доситеју и Ератостену. Ако је, дакле, што нам изгледа несумњиво, Аполониос размишљао о Аристарховом систему, могао је он да се запита како би изгледала та Аристархова кретања небеских тела посматрана са Земље. Он је био несумњиво у стању да то питање реши геометријским расуђивањима на пример на следећи начин, при којем смо се, једноставности ради, послужили садашњим геометријском ознакама и оруђем.

Нека нам у сл. 1 претставља S Сунце, а T Земљу која, према Аристарховој науци, обилази око Сунца по кругу радиуса ST. Нека нам P претставља једну планету, рецимо Венеру, за коју је већ Хераклеидес Понтикос говорио да око Сунца описује круг, у нашем случају круг радиуса SP. Једноставности ради, претпоставимо да обе ове путање падају у раван слике. Почетни положаји уочених трију небеских тела нека буду, дакле, S, T и P. Смисао обилажења Земље и планете око Сунца означен је на слици стрелицом. Ако са τ_0 означимо време обилажења Земље око Сунца, мерено, данима, а са

τ време обилажења планете око Сунца, онда нам $\omega_0 = \frac{360^0}{\tau_0}$ и $\omega = \frac{360^0}{\tau}$ претстављају средња дневна кретања тих небеских тела око Сунца. Зато ће се уочена три небеска тела n дана иза почетног положаја налазити у положајима S, T', P', при чему је $\sphericalangle TST' = n\,\omega_0$; $\sphericalangle PSP' = n\,\omega$.



Сл. 1.



Сл. 2.

Посматрана са Земље, та ће се кретања одигравати овако. Нека нам, у сл. 2, T претставља Земљу. Нацртајмо у тој слици троугао TSP паралелан и конгруентан троуглу TSP слике 1. Релативна путања Сунца према Земљи претстављена је очигледно кругом $SS'S''$ радиуса TS; по тој привидној путањи креће се Сунце средњим дневним кретањем ω_0 у правцу означеном на слици стрелицом. n дана после почетног положаја S стићи ће Сунце у положај S', при чему је $\sphericalangle STS' = n\,\omega_0$. Почетни положај планете претстављен је у сл. 2 тачком P. Да нађемо положај P' планете n дана иза тог почетног положаја P треба да нацртамо троугао $TS'P'$ паралелан и конгруентан троуглу $T'SP'$ слике 1. Опишимо још око S и S' кругове са истим радиусом $SP = S'P'$, повуцимо $S'R$ паралелно са SP, то следује из упоредности зрака $S'R$, $S'P'$ сл. 2 са зрацима SP односно SP' сл. 1 да је $\sphericalangle RS'P' = n\,\omega$. Положај P' планете у сл. 2 је, према томе, такав као да се средиште круга описаног око S померило у S', а да се планет на том кругу за време од n дана кретао средњим дневним кретањем ω. Релативно кретање планете према Земљи може се, према горњем, схватити као сложено епициклично кретање: по периферији круга SS', названог концентар, путује, средњим дневним кретањем ω_0, центар једног другог круга, названог епицикл, а по периферији тога круга креће се планета средњим дневним кретањем ω. Планета описује при томе, релативно према Земљи, епицикличну криву $PP'P''\ldots$

Одговоримо још на питање, у којем ће положају планет, посматран се Земље, привидно тренутно застати, па затим обрнути правац свога кретања. То ће се очигледно десити онда кад обе компоненталне брзине његове, нормалне на радиусвектор, буду једнаке, а противног правца. Услед кретања епицикла по концентру, има планета у положају P брзину v_0, нормалну на радиусвектор TP, која је једнака $v_0 = \omega_0 \overline{TP}$, док је њена брзина, нормална на SP, услед кретања по епициклу, једнака $v = \omega \overline{SP}$. Компонента v_n ове брзине, нормална на TP, једнака је $v_n = v \cos\alpha = \omega \overline{SP} \cos\alpha$, па како v_0 и v_n треба да буду једнаке и да, као у слици, имају противан правац то следује одатле $\omega_0 \overline{TP} = \omega\, \overline{SP} \cos\alpha$. Продужимо ли праву TP до њеног пресека F са епициклом, то је, пошто је $\sphericalangle SPF = \alpha$, дуж $\overline{SP} \cos\alpha$ једнака половини PG тетиве PF. Зато је $\omega_0\, \overline{TP} = \omega\, \overline{PG}$ или

$$\overline{PG} : \overline{TP} = \omega_0 : \omega.$$

Овај резултат, претстављен овде математским обрасцем, налази се, изражен речима, у првој глави дванаесте књиге Птолемајовог Зборника и назван је Аполониовом теоремом.

Извођење ове теореме открило нам је и суштину теорије епицикала која је, као што ћемо видети, играла важну улогу у каснијој александријској астрономији. Аполониос се напомиње на више места као творац те теорије па се из претходнога јасно види да је до теорије не само могао, него и морао доћи, полазећи од Аристарховог хелиоцентричног система. Аристархова наука морала је бити, у најмању руку, радна хипотеза при стварању теорије епицикала, јер је то најприроднији постанак те теорије.

Била је велика недаћа по хелиоцентричну науку да је Аполониос напустио Александрију и отишао у Пергамон да, спријатељен са тамошњим краљем Аталосом, настави свој научни рад. Са Аполонијом је прекорачен врхунац александријског научног периода, после њега не беше никог више који би у стању и да разуме, а камо ли да продужи, научни рад Архимеда који је, као што то сведочи његов тек 1906 године пронађени спис Ефодос, био већ приступио изградњи основа инфинитезималног рачуна.

Хипархос из Никеје (у другој половини другог века пре Хр.), који је до недавна сматран за највећег астронома старога света, живео је већ у доба опадања александријске науке. То се осећа већ по томе што су од његових многобројних списа очувани само безначајни. И о његовом животу знамо веома мало. Вршио је (128 и 129 пре Хр.) посматрања неба на острву Родосу које је онда припадало египатској држави, боравио је сигурно и у Александрији, а био можда и у Вавилону. То се види из тога што је са халдејском астрономијом био толико добро упознат да је данас тешко одредити колико је оригиналан у својим учењима о којима смо извештени путем Птолемајовог Зборника. Подела круга у 360 степена, коју је он примењивао, сазнање о неједнакости годишњих доба, рачун са тетивама, т. ј. почетци тригонометрије, халдејског су порекла. Но Хипархос је сва та правила ставио на строго научну основу. Зато га можемо сматрати оцем тригонометрије. Неједнакости годишњих доба и годишњег кретања Сунца растумачио је, ставши на геоцентричко становиште, а не отступајући никако од кружних униформних кретања, тиме што је претпоставио да се Сунце креће равномерно по кружној али ексцентричној путањи. Центар те путање померио је, дакле, из Земље па је, због тога, у каснијој александријској астрономији, Аполониосов концентар замењен ексцентром. Тим се, заиста, могу једноставно растумачити неједнакости годишњих доба и, поред све униформности стварног кретања, неједнакости привидног кретања Сунца. Исто то сретство употребио је и у теорији кретања Месеца, служећи се при томе халдејским посматрањима тога кретања. Нарочиту срећу имао је са својим каталогом звезда у којем је саопштио њихове координате у погледу на еклиптику. Упоређујући га са каталогом Аристила и Тимохариса, пронашао је прецесију равнодневница. То је било његово највеће дело о којем ће још бити говора. Његове смо заслуге за мерење отстојања Сунца и Месеца већ споменули.

Нема сумње да је Хипархос био највећи астрономски посматрач старога века, но, баш због тога, није он имао смисла за смеле теорије, него се задовољио тиме да своја посматрања изврши што тачније и из њих извуче најнепосредније закључке; није имао ни стваралачког генија Архимедовог или Аполониовог нити космичког видокруга Аристарховог.

За време александријског рата Јулија Цезара, задесила је александријску науку велика несрећа: славна библиотека Музеја поста жртвом пламена. Иако је, ускоро затим, Маркус Антониус пренео богату библиотеку пергамонску у Александрију и присајединио је библиотеци која је чувана у храму Серапеиону, александријска школа није имала више правог полета. Године 30 пре Хр. ушао је, преко лешева Антониуса и Клеопатре, последње краљице птолемајског Египта, Октавиан у Александрију, Египат поста провинцијом римскога царства.

Све ове догађаје који су потресали стари свет ваља имати у виду ако хоћемо праведно да оценимо последњег великог астронома александријског о којем ћемо сада говорити.

Клаудиус Птолемајос (87—165 ?) стоји у завидном положају изнад свих астронома старога века тиме што је његово главно дело «Велики Зборник Астрономије» или «Велика Синтакса», названо касније, стапајући арапско «ал» са грчким «мегисте», «Алмагест», потпуно сачувано и дочекало своје штампање у великом броју рукописних егземплара. То дело је систематски скуп целокупног астрономског знања завршног периода александријског. Подељено је у две свеске и тринаест књига од којих прва служи као увод у којем су изложени основни погледи на састав васионе и потребна геометријска сретства астрономије са тригонометријским таблицама. Друга књига посвећена је, углавном, астрономској географији и мерењу времена. Трећа књига бави се кретањем Сунца, четврта и пета кретањем Месеца, а шеста помрачењима Сунца и Месеца. У петој књизи описана је и конструкција астрономских инструмената, која се у Александрији врло усавршила, сигурно радом познатога геодета и механичара *Херона Александријског* (око 100 пре Хр.) Друга свеска «суштина свега», како је Птолемајос сам назива, посвећена је, са својих седам књига, звездама, па садржи каталог 1022 звезде некретнице и врло цењену пишчеву теорију кретања пет старих планета. Властита и страна, старија, астрономска посматрања, нарочито она која је извршио Хипархос, искоришћавана су, а и седам вавилонских посматрања помрачења из раздобља од 721 до 383 пре Хр.

Као што се већ из овог кратког извештаја може видети, Птолемајово дело је, заиста, прави зборник знања славног александријског доба астрономије. У њему је Птолемајос заузео, ослањајући се на Хипарха, геоцентрично становиште, што се види већ из основних ставова изложених у почетку дела. То су ови:

1. Небески свод има облик лопте и обрће се као ова.

2. По свом облику, наша је Земља, сматрана као једна целина, такође округла.

3. Својим положајем, наша Земља заузима, као какав центар, средиште целокупног небеског свода.

4. Својом величином и отстојањем, наша Земља стоји према сфери звезда некретница у односу једне тачке.

5. Земља нема кретања које би изазвало промену њеног положаја.

Ови ставови образложени су и уздигнути изнад сваке сумње аргументима о којима смо већ код Аристотела говорили. Птолемајос напомиње, истина, и противно мишљење неких философа који су »сматрали небеску сферу непомичном и узели да се Земља око осе света обрће од запада према истоку«, али он, том приликом, не спомиње име Аристархово, иако његова генијална замисао прозире јасно кроз четврти горњи став. Без података о пореклу употребљава Птолемајос једну несумњиво Аристархову тригонометријску теорему и његов начин премеравања отстојања Сунца и Месеца. Само, приликом израчунавања дужине године, спомиње Птолемајос Аристарха, но са слабом оценом. И Аполониос, генијални творац теорије епицикала, спомиње се један једини пут, приликом извођења његове теореме о којој смо говорили, да, одмах затим, речима: »али ми...«, буде остављен у дубокој тами.

Као што се из ових примера види, Птолемајос не признаје радо заслуге других. У том погледу, чини он изузетак једино са Хипархом да би његовим ауторитетом поткрепио своја властита саопштења и ставља га изнад свих осталих астронома, изузимајући, природно, себе самога. Због тога говори покаткад и о Хипарху са извесне висине.

Због свега тога, не даје нам Птолемајов Зборник, поред све своје вредности и за историју, потпуну слику развитка александријске науке па смо зато баш у најважнијем питању, оном о међусобном ставу и о судбини двају главних система света, упућени на наслућивања и на друга сведочанства. Несумњиво је да су оба система света имала не само својих присталица него и своје школе у кругу александријских научника. Неко време, у доба Аристарха, Аполонија и Селеукоса, изгледа да је хелиоцентрични систем наилазио на признавање да га, појавом Хипарха, изгуби. Пролемајос, убеђени геоцентричар, избегава да говори о схватањима хелиоцентричара. Он искоришћава за властиту употребу њихове геометријске конструкције, али прећуткује њихов став. То је нарочито случај са теоријом епицикала која је, као што смо показали, вероватно изникла из хелиоцентричких расуђивања. Метода епицикала, схваћена као математско сретство, одговара, ако се број епицикала произвољно увећа, нашим данашњим развијањима у редове, па се зато помоћу сложених епицикала могу претставити најразноличнија кретања, како је то показао Мебиус у својој »Небеској Механици« (1843). Птолемајос је то сретство, као што то сам, и не без права, каже, искористио са успехом као нико пре њега. Он је тиме, да употребимо опет његове речи, извршио циновско дело, али је њиме прикрио праизвор теорије епицикала толико да је требало новог циновског дела да би се опет пронашао пут ка хелиоцентричном систему.

Птолемајос, ослањајући се у томе сасвим на Хипарха, дозвољава само униформна кретања по круговима, »јер само таква одговарају природи небеских бића којима је неправилност и неједнакост страна«, па тумачи тим кретањима све неједнакости хода небеских тела. Због тога је био принуђен да увећа број епицикала. Он се, као и Хипархос, послужио ексцентричним носиоцем епицикла, ексцентром, који је добио назив деферента. У својој веома цењеној теорији Месеца, претпоставио је Птолемајос да се центар тог деферента креће по једном даљем кружном носиоцу ретроградно. Да би могао да претстави кретања планета у ширину, дао је равнима епицикала потребне нагибе према еклиптици. Код оних планета које се крећу с оне стране Земљине путање, заменио је, чиме коначан ефекат није био промењен, међусобно деференат са епициклом, да не би радиус епицикла испао већи од радиуса деферента. Сва ова, са математског гледишта потпуно оправдана сретства, прикрила су потпуно стварни постанак епицикла и пут ка хелиоцентричном систему.

После Птолемаја није живео у Александрији нико више који би био у стању да тај пут пронађе, јер наследници Птолемаја, *Папос Александријски* (крај трећег века) и *Теон Александријски* (крај четвртог века) не беху друго но брижљиви коментатори његове књиге. Године 392 по Хр. разорила је пљачкашка руља, фанатизована од архиепископа Теофила, Серапеион, последње прибежиште александријске науке, а године 640 паде Александрија у руке Арапа.

§ 4. Средњи век. Са средњим веком пропадоше најдрагоценији плодови грчке науке. Није се више веровало да је Земља округла и да је небески свод обухвата са свију страна. Хришћанска вера није дозвољавала такву науку. Зато се пошло у схватању света унатраг, замишљајући да је Земља округла плоча са Јерусалимом у средини, запљускивана са свих страна океаном, а прекривена, заједно са морем, небом које има облик звона. Иза тога звона, на једном континенту на истоку, налазило се царство блажених. Тај се рај распростирао и изнад неба где су анђели управљали кретањем небеских тела; при томе је Сунце за време ноћи вођено око основице неба до свог поновног излаcка.

То је била, углавном, слика света раног средњег века. Да се такво схватање које је одговарало хришћанском веровању не би ничим уздрмало, забрањено је учење старих, паганских, класика. А када би црква била у недоумици како да одреди дане својих властитих празника, она је слала своје поклисаре у Шпанију да тамо од арапских научника добије потребна обавештења.

Млади народ Арапа, пун животне снаге и полета, раширио је за невероватно кратко време своју власт од Индије преко Северне Африке до у саму Шпанију. Брже но остали народи, утолио је жељу за разоравањем старе културе па се посветио њеној нези. Гајећи науке, а особито астрономију, спасили су Арапи од александријске астрономије што се још спасити могло. Оснивање су велике школе, подизане су звездаре, премеравана

Земља и вршена астрономска посматрања којима је прецесија равнодневница тачније одређена и откривено померање апсида. Састављани су каталози звезда, тригонометријске таблице и таблице кретања планета, а декадни систем и начин писања бројева, који је никао у Индији, пресађен је у Европу. Аристотелес, Еуклид, Архимедес, Аполониос, Херон и Птолемајос преведени су на арапски језик и нашли пута ка западним народима.

Плодови јелинске културе, сачувани и достављени хришћанској Европи посретством Арапа, прихваћени су овде са великим интересовањем и дали јак потстрек западњачкој науци. Када се претеча Коперников, учени кардинал *Никола Кузанус* (1401—1464), који је учио да се Земља креће, налазио, као изасланик папин, у Цариграду, није пропустио ову прилику а да оданде не понесе старих грчких рукописа у Италију. Године 1453 паде Цариград Турцима у руке, а ондашњи грчки научници избегоше у Рим где нађоше гостопримства код папе Николе V. Они донесоше старих рукописа и раширише познавање грчког језика. Први западњачки астрономи ове епохе, *Георг Пурбах* (1423—1461) и његов ученик *Јохан Милер, Региомонтанус,* (1436—1476) беху добри познаваоци александријске науке, па извршише или поправише латинске преводе Птолемаја и Архимеда. И генијални *Леонардо да Винчи* (1452—1519), који је нашу Земљу сматрао за звезду, познавао је добро списе сиракушког научника. Паду Цариграда следоваше брзим кораком други, не мање важни, светски догађаји: пронађена је Америка, нађен пут у Источну Индију, а Земља опловљена. Слика света средњег века није се могла више одржати, астрономија је постала неопходно потребно оруђе морепловца, препороду уметности следовао је препород науке.

§ 5. Коперник. Хелиоцентрични систем великога реформатора астрономије *Николе Коперника* (1473—1543) није друго до обнова хелиоцентричног система старих Грка. »Потрудио сам се, што сам више могао«, извештава он сам, »да прочитам поново све књиге старих философа до којих сам могао доћи, да видим е да ли је когод други био различитог мишљења о кретању небеских тела него што се сада то учи у школама математских наука. Тако сам нашао код Цицерона да је Хикетас Сиракужанин веровао да се Земља креће. После нађох и код

Плутарха да су и други били истог мишљења«. На другом месту његовог рукописа које је, чудноватим случајем, пребрисано пре штампања, стоји ово: »Вероватно је да је Филолаос претпоставио да се Земља креће, коју је претпоставку учинио и Аристарх са Самоса, како то неки саопштавају«.

Са учењем Аристарха упознао се Коперник, као што то Александар Хумболт с правом мисли, преко Плутарха, јер тог писца изрично означава као свој извор, а Плутарх говори на два разна места о Аристарху. Да ли је Коперник познавао и споменути извештај Архимедов о Аристарху, није сасвим сигурно. Многи мисле да није, јер прво потпуно издање Архимедових списа изашло је из штампе тек 1544 године. Но ваља узети у обзир да су списи Архимеда били познати западу већ 1281 године и, у време Кузануса, били довољно распрострањени у рукописним егземпларима. Јаков из Кремоне превео их је 1449 године на латински језик, године 1503 штампан је у Италији, у непотпуном издању, Гаурикусов латински превод Архимеда, а баш те године бавио се Коперник на студијама у Италији. Зато се не би смело казати да Коперник није познавао оно важно место о Аристарху у Архимедовом Аренариусу. Свакако је сигурно да је Коперник, било посретством Плутарха, било путем Плутарха и Архимеда, познавао хелиоцентрични систем Грка, а нарочито систем Аристархов. Но све то не умањује његову славу да је, снагом титана, поново сазидао порушено здање хелиоцентричке науке и поставио га на сигурну основу. Он је то извршио својим бесмртним делом: *De revolutionibus orbium coelestium*. 1543.

Коперникова зграда васионе има овај распоред. Непомична сфера звезда некретница спољна је граница те зграде. Корачајући према њеној унутрашњости, наилазимо прво на кружну путању Сатурна, обилажену за 30 година, даље на путању Јупитра са дванаестгодишњим обилажењем, затим на путању Марса који ју обилази за две године. На четвртом месту налази се годишња путања Земљина са епицикличком путањом Месеца. На петом месту кружи Венера у девет месеци, шесто место заузима Меркур који у 80 дана обилази своју путању. У средини целе ове зграде стоји Сунце, јер »где би било зањ лепшег места у овом дивном храму .... Тако управља Сунце, седећи на свом краљевском престолу, своју породицу звезда«.

По Копернику, врши наша Земља три разна кретања: 1. Дневно обртање око своје осе од запада према истоку, из којег следује привидно кретање свих звезда од истока према западу. 2. Годишње кретање око Сунца од запада према истоку, из којег следује привидно годишње кретање Сунца истог смисла обилажења. 3. Годишње конично кретање Земљине осе око нормале уздигнуте на раван еклиптике у обрнутом смислу пређашњих кретања.

Како је Коперник, без икакве потребе, претпоставио да би, иначе, Земљина оса стајала у чврстој вези са правом што спаја Земљу са Сунцем, то ово треће кретање треба, с једне стране, да осигура скоро непромењену ориентацију Земљине осе у простору за време њеног обиласка око Сунца, а, с друге стране, да тиме што периоде последњих двају кретања нису потпуно једнаке, растумачи прецесију равнодневница. Од овог трећег кретања остало је данас као прихваћено само лагано прецесионо кретање Земљине осе, пошто се увидело да слободно тело које ротира око своје осе одржава непромењену оријентацију те осе у простору.

Коперников систем је, у његовим основним цртама, идентичан хелиоцентричном систему старих Грка. И разлози које Коперник употребљава за доказ свога система налазе се, већим делом, код његових претходника. Отсуство годишње паралаксе звезда некретница тумачи Коперник, исто тако као и Аристарх, тиме што је полупречник Земљине путање бесконачно мален према отстојању звезда некретница. Аргуменат у корист хелиоцентричног система да се Меркур и Венера на небу никада много не удаљују од Сунца, а да нам остале планете изгледају најближе када су у опозицији према Сунцу, налази се забележен код Марциануса Капеле. Релативна природа свих кретања објашњена је била већ од Кузануса. Али је Коперник све те појаве и њихове узроке дубље прозрео но све његове претече и сложио их у логичну целину, па створио тиме потпун један систем који је заслужио његово име. Он је, изнад свега тога, и то је његова највећа и неприкосновена заслуга, размрсио клупче теорије епицикала и продро до њеног хелиоцентричног језгра.

Коперник је генијалним погледом увидео да, код планета које круже у унутрашњости Земљине путање, кретање по деференту не претставља ништа друго но слику кретања Земље око

Сунца, а кретање по епициклу стварно кретање планете око Сунца. Тим је нашао да је овде сразмера радиуса деферента према радиусу епицикла идентична сразмери отстојања Земље и отстојања планете од Сунца. Код осталих планета, где су, као што смо рекли, деферент и епицикл међусобно замењени, обратан је случај. Одабере ли се, према томе, радиус Земљине путање за јединицу дужине, то се могу из бројева Птолемајових, који нам дају односе радиуса епицикла и деферента, очитати отстојања планета од Сунца, мерена оном јединицом. На тај начин добивају се ова отстојања: Меркур 0,375, Венера 0,720, Марс 1,52, Јупитер 5,21, Сатурн 9,18.

Ове су вредности веома блиске стварности па показују колико је драгоценог материјала лежало скривено у Птолемајовом Зборнику. Да би из саопштених релативних вредности нашао стварне, узео је Коперник за полупречник Земљине путање Птолемајов број од 1210 Земљиних радија који далеко заостаје иза стварности. Но тиме се међусобне пропорције саставних делова Сунчевог система нису промениле. Због тога је Коперник смео да каже са пуним правом: »Они који су смислили епициклиčне кругове нису били у стању да нађу, а камо ли да израчунају оно што је најважније, облик света и сигурну симетрију његових делова«. А он ју је, заиста, израчунао.

Природно је да је Коперников систем имао својих недостатака, и астрономских и физикалних. Астрономских, што, у колико се тицало закона инерције, није био у стању да обори Птолемајов аргуменат. Но Коперник је Птолемајово тврђење да би се наша Земља, када би се заиста обртала, морала распасти, обеснажио тиме да би таква опасност угрозила у далеко већој мери сферу звезда некретница која би се, по Птолемају, морала обртати невероватном брзином. Томе је додао ово: »Ако узмемо у обзир бесконачно отстојање звезда некретница, онда смо једва у стању да замислимо да би оне биле у стању да превале своју огромну путању за 24 сата. А и зашто би се бесконачна васиона обртала око сићушне Земље«.

Ово су све убедљиви разлози генија који је био у стању да космички мисли, али је аргуменат, да би нам ротирајућа Земља при сваком нашем скоку у вис истрчала испод ногу, био приступачнији схватању обичних људи. Зато се велики посматрач неба, *Тихо Брахе* (1546—1601), поред свег високог поштовања према његовом творцу, устручавао да прихвати Коперников систем, постављајући свој властити. По том Брахеовом систему, стоји наша Земља непомично у средишту васионе, а око ње обилази Месец и Сунце, а око овог последњег остале планете. Цео овај систем обухваћен је сфером звезда некретница која се за 24 часа обрне око своје осе, повлачећи, при том свом дневном обртању, целокупну своју унутрашност.

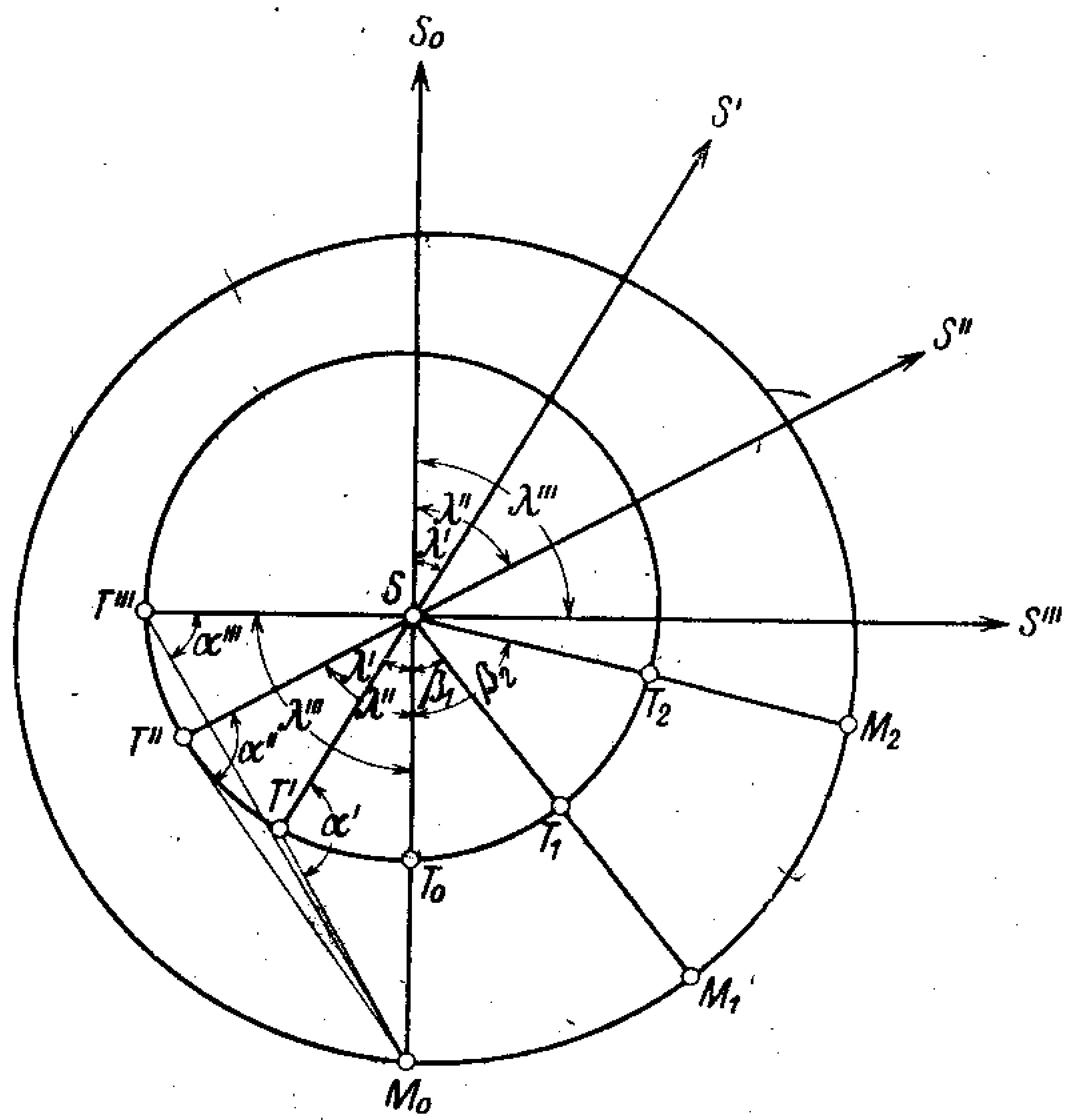
У Копернику и Тихо Брахеу оличена су два класична типа, Коперник је био Аристарх новог века, а Тихо његов Хипархос. Ненадмашив посматрач неба и, у првом реду, његов врач, стајао је Тихо Брахе, као и његов класични претеча, на халдејском тлу. Верујући само својим властитим опажањима, а при том признати ауторитет, био је он скоро несавладив противник хелиоцентричног система, као што је то био и Хипархос. Тако је изгледало да ће се и у новом веку поновити стара судбина хелиоцентричног система. Да се то није догодило, заслуга је Галилеја.

§ 6. **Галилео Галилеи** (1564—1642) сковао је властитим рукама два силна оружја којима је извојевао коначну победу Коперникове науке. Једно од њих била је Динамика, главна једна грана Механике. Он ју је, уклонивши, пре свега, сва унутрашња противуречја Аристотелове Механике, створио, нашао њоме законе слободног пада и пада на стрмој равни и законе косог хитца те продро до самог закона инерције. Тим је могао да обори главни аргуменат против хелиоцентричног система. Но још силније показало се у тој борби једно ново оружје, астрономски доглед, саграђен од Галилејеве руке. Када је, први од свих људи, овај доглед упро према небу, сагледао је Месечева брда, мене Венерине и месеце Јупитрове. Ови су месеци били очигледан доказ да се кретања небеских тела врше и око других средишта но што је Земља. Доглед је размрскао кристалну сферу звезда некретница, показујући да су те звезде безбројне и различно од нас удаљене. Сва ова сазнања определила су Галилеја да стане на страну Коперника и да се бори за његову науку. Он је то учинио својим духовитим *Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo, Tolemaico e Copernicano (1632)* са толиким налетом да је био због тога изведен пред суд инквизиције. Због сличног прекршаја био је, недавно пре тога, *Ђордано Бруно* (1548—1600) жив спаљен на ломачи, а Галилеи је умакао таквој судбини тиме што је опорекао своју науку. Али је победа била већ извојевана. Муње ума Коперника и Галилеја одбљеснуле су у дубине васионе толико силно да се једанпут сагледана истина није могла више прикрити.

Тако је хелиоцентричка наука старих Грка била поново васпостављена. Јер да се радило само о обнови те старе науке, то су признавали и сами следбеници Коперника. *Рајнхолд* (1511--1553), који је израчунао своје таблице планетског кретања усвајајући Коперников систем, говори о томе: »Морамо бити дубоко благодарни Копернику што је васпоставио праву науку о кретању небеских тела.» Па и црква сама признала је приоритет Грка у томе учењу. Године 1616 стављено је Коперниково дело на индекс осуђених, па се у том решењу, опозваном тек 1822, каже ово: «Света конгрегација сазнала је да се крива, светом писму супротна, наука Питагорејаца о кретању небеских тела, како је проповедају Коперник и неки други, сада шири и од многих прихваћа. Да се такво учење не би, на штету католичке истине, раширило, одлучила је света конгрегација да се дела Коперникова и свих осталих који исто уче забране догод се не исправе. Због тога се сва та дела овим указом забрањују и анатемишу.»

Тим смо се вратили опет Грцима, па нам остаје још да учинимо правду Хипарху и Птолемају. Данас знамо да се може говорити само о релативним кретањима. Истим правом којим говоримо о кретању планета око Сунца, можемо говорити о релативном кретању Сунца и планета око Земље. По садашњем стању науке су оба система, Птолемајов и Коперников, кинематски потпуно равноправна. Само једна, чисто практична, разлика постоји између та два становишта. Планете описују око Земље компликоване епицикличне путање, док је њихово кретање око Сунца далеко једноставније. Но баш та једноставност омогућила је проналазак закона Кеплера и Њутна, и тек тим законима смо прекорачили широки видокруг Александријаца.

§ 7. Кеплерови закони. Када је *Јоханес Кеплер* (1571—1630) постављен за наследника Тихо Брахеа у звању дворског астронома и царског математичара са боравиштем у Прагу, примио је он са тим звањем и драгоцене прибелешке о посматрањима неба која је извршио његов претходник. Служећи се тим научним материјалом и усвојивши Коперников хелиоцентрични систем, предузео је он да испита и математским језиком опише кретања планета око Сунца. Основна идеја која га је у том послу водила била је ова. Тихо Брахе је, двадесет непрекидних година, пажљиво пратио кретања планете Марса. Ова планета, због њене близине Земљи, великог ексцентрицитета њене путање и малог нагиба равни те путање према равни Земљине путање, био је најзгоднији небески објекат за предухват Кеплеров. Зато је он своја испитивања отпочео на путањи Марса и путањи Земље.



Сл. 3.

Због малог нагиба Марсове путање према равни Земљине путање, који нагиб не достиже ни пуна два степена, можемо узети да путање Земље и Марса, које имамо још да одредимо, леже у равни слике, а да су претстављене кривама $T_0\ T_1\ T_2$ .. односно $M_0\ M_1\ M_2$ . . . (сл. 3). Као полазну тачку наших разматрања одаберимо ону констелацију при којој се Марс налази у опозицији према Земљи, т. ј. ону при којој Сунце S, Земља T_0 и Марс M_0 леже, тим редом, у истој правој. Та је констелација само тренутна. Земља се креће брже око Сунца но њен сусед, па ће зато она извршити једно потпуно обилажење око Сунца док ће Марс за то време превалити тек нешто више од половине своје путање. Због тога ће се нова опозиција десити, после округло 800 дана, у положајима T_1 и M_1, идућа, после даљих 800 дана, у положајима T_2 и M_2. После петнаест пуних обилажења Земље око Сунца извршиће Марс 7,98 обилажења, т. ј. осма по реду од уочених опозиција десиће се у близини почетних положаја T_0 и M_0. Пошто су 7,98 Марсових обилажења једнаки 15 обилажења Земље, то обилажење U Марса око Сунца траје 686,98 дана. После времена U враћа се Марс, какавгод облик имала његова путања, у свој стари положај. После интервала времена U, протеклог иза тренутка прве од уочених опозиција, стићи Земља у положај T' док ће у том моменту Марс заузети положај M_0. После поновног истека времена U стићиће Земља у положај T'', после новог раздобја U у положај T''' и т. д., али свима тим разним положајима Земље одговара један те исти, непромењени положај M_0 Марса. Спојимо ли сада те разне положаје T', T'', T''' ... Земље са положајима S и M_0 Сунца односно Марса, који се нису променили, то добивамо троуглове $S M_0 T'$, $S M_0 T''$, $S M_0 T'''$.... који, сви редом, имају заједничку једну страну и то $S M_0$. Углови тих троугла, означени у слици са α', α'', α'''...., могу се одредити директним мерењем пошто они претстављају оне углове које затварају међусобно обе визуре управљене из појединих положаја T', T'', T''' ... Земље према Сунцу и Марсу. Ти су углови очито једнаки разлици геоцентричних лонгитуда ових двају небеских тела. Но и углови које смо означили са λ', λ'', λ''' ... могу се одредити астрономским посматрањем. Из положаја T_0 Земље изгледа нам Сунце пројицирано на небеску сферу у правцу $T_0 S_0$, а из положаја T' Земље, у правцу $T' S'$. Угао λ' једнак је, према томе, разлици геоцентричних лонгитуда Сунчевих при оним двама положајима Земље. То важи аналого и за углове λ'', λ'''.... Кеплер је био, према томе, у стању да из прибележака посматрања свога претходника нађе нумеричке вредности углова α', α'', α''' ..., λ', λ'', λ''' ... па је могао да из споменутих троуглова израчуна стране $\overline{ST'}$, $\overline{ST''}$, $\overline{ST'''}$...., т. ј. да математски претстави те радиусвекторе Земљине путање као функцију отстојања $\overline{SM_0} = d$ и углова λ, што их ти радиусвектори, повучени из сталне тачке S, затварају са сталном правом SM_0. Тим је био математски одређен не само облик Земљине путање него и ход Земљин по тој путањи. Пошто је извршио тај посао, могао је Кеплер да израчуна и облик Марсове путање и кретање Марса по њој. Као што је пре, из положаја M_0 Марса и дужине његовог радиусвектора SM_0 нађен облик Земљине путање, тако је сада било могуће, понављајући претходне рачуне за све опозиционе положаје $M_1 M_2 M_3 \ldots$ Марса, из већ одређеног облика Земљине путање претставити радиусвекторе $\overline{SM_0}, \overline{SM_1}, \overline{SM_2} \ldots$ Марсове путање као функцију променљивог угла β и времена. При томе су остале неодређене апсолутне величине радиусвектора Земљине односно Марсове путање, али су се оне могле изразити помоћу средњег отстојања Земље од Сунца као јединице. Овим начином нашао је Кеплер своја три закона планетског кретања. Прва два своја закона објавио је у свом делу *Astronomia nova de motibus stellae Martis.* 1609, а трећи у својим *Harmonices mundi.* 1619. Ти су закони ови:

I. Планете описују око Сунца елиптичне путање; у заједничкој жижи тих елипса налази се Сунце.

II. Радиусвектор повучен од Сунца до планете превлачи у једнаким деловима времена једнаке површине.

III. Квадрати времена обилажења појединих планета око Сунца стоје у пропорцији трећих потенција великих полуоса њихових путања.

Изразимо ове законе, да бисмо их касније могли применити језиком математике. При томе ћемо под путањом планете разумевати путању њеног тежишта, из разлога који ћемо касније упознати.

Нека нам $BCADB$ (сл. 4) претставља елиптичну путању једне од планета. AB је велика, а CD мала оса те елипсе. Жижа S ове елипсе нека буде она коју је заузело Сунце, онда се B зове перихелиум, а A афелиум планетске путање. Означимо са a велику, а са b малу полуосу, онда је $\overline{OS} = \overline{OF} = \sqrt{a^2 - b^2}$, па се број

$$e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \tag{1}$$

зове нумерички ексцентрицитет елипсе. Зато је

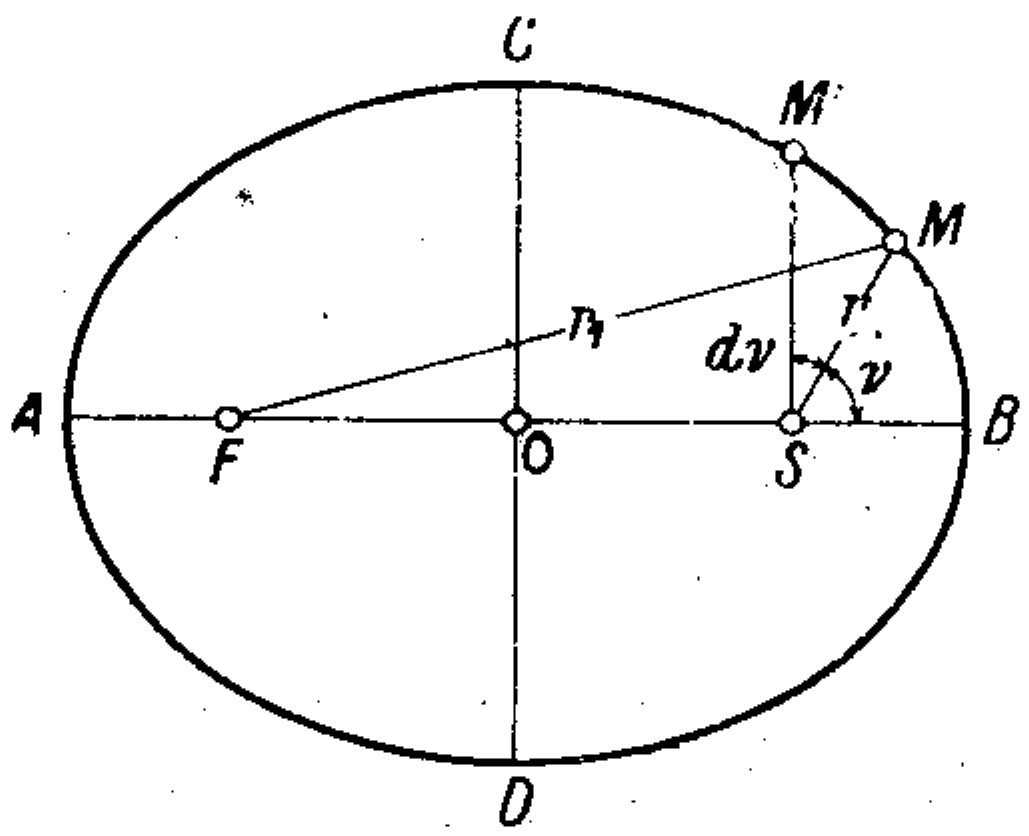
$$b^2 = a^2 - e^2 a^2. \tag{2}$$

Дуж

(3) $$p = \frac{b^2}{a}$$

зове се параметар елипсе.

Спојимо произвољну тачку M елипсе, т. ј. произвољан положај планете на њеној путањи, са жижама S и F па озна-



Сл. 4

чимо радиусвектор SM са r, а радиусвектор FM са r_1, онда је, према самој дефиницији елипсе,

$$r + r_1 = 2a$$

Угао BSM, који ћемо означити са v, зове се *права аномалија* планете. Из троугла FSM, где је $FS = 2ea$, следује по Карноовом обрасцу:

$$r^2_1 = (2\,e\,a)^2 + r^2 + 4\,e\,a\,r\cos v.$$

Ставимо овде за r_1 његову вредност $r_1 = 2a - r$, то добивамо

$$(1 + e\cos v)\,ar = a^2 - e^2a^2 = b^2,$$

т. ј.

(4) $$r = \frac{p}{1 + e\,\cos v}.$$

Ово је једначина планетске путање и математски изражај првог Кеплеровог закона.

Да други Кеплеров закон обухватимо математским обрасцем, означимо са dv прираштај праве аномалије који одговара бесконачно маленом временском интервалу dt. За време тог интервала пребрисао је радиусвектор r површину $dF = \frac{1}{2}\, r^2 dv$

бесконачно уског троугла MSM'. Количник

$$\frac{dF}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{dv}{dt} \tag{5}$$

зове се секторска брзина; она је, по другом Кеплеровом закону, константна, па је зато

$$\frac{dF}{dt} = \frac{1}{2} C,$$

где C означава једну константу која је, дакле, једнака двострукој секторској брзини. Зато је

$$r^2 \frac{dv}{dt} = C \tag{6}$$

математски изражај другог Кеплеровог закона.

Означимо са T време обилажења планете око Сунца. За то време пребрише радиусвектор целу површину πab ограничену елипсом планетске путање. Зато је секторска брзина претстављена и овим изразом:

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\pi a b}{T}$$

$C = \frac{2\pi ab}{T}$

па је зато

$$C = \frac{2\pi a b}{T}. \tag{7}$$

$\frac{1}{2} = \frac{2\pi ab}{T}$

Трећи Кеплеров закон претстављен је математски једначином

$$\frac{a^3}{T^2} = k, \tag{8}$$

$\frac{\pi^2 a^2 a(1-e^2)}{T}$

где је k један те исти број за све планете.

$\frac{\pi^2 a^3}{T}$

§ 8. Њутнов закон гравитације. Велики холандски научник *Христиан Хајгенс* (1629—1695), један од тројице класичара науке о кретању, саопштио је у своме делу *Horologium oscillatorium (Paris* 1673) да материјална тачка која се креће униформно по периферији круга има, у сваком свом положају, убрзање наперено стално према центру круга, па названо због тога центрипеталним убрзањем, које је, по својој величини, претстављено изразом $p_c = \frac{v^2}{a}$, где v означава линеарну брзину тачке, а a радиус њене кружне путање.

Из ове Хајгенсове теореме, чији је доказ саопштен тек 1703 године у посмртним делима Хајгенсовим, извели су, независно један од другог, три енглеска научника, Врен, Хук и *Халеј*, овај близак закључак. Претпоставили се, што не отступа много од стварности, да се планете крећу по кружним путањама, па означили се са a радиус такве једне путање, а са T време обилажења уочене планете око Сунца, то је, према горњим ознакама, $v = \frac{2\pi a}{T}$, т. ј. $p_c = 4\pi^2 \frac{a}{T^2}$. Како је, према трећем Кеплеровом закону, $\frac{a}{T^2} = \frac{k}{a^2}$, то је $p_c = 4\pi^2 k \frac{1}{a^2}$, што значи да планете подлеже убрзању, напереном према Сунцу, а инверзно пропорционалном квадрату радиуса планетске путање.

Далеко су замашније конзеквенције које је из Кеплерових закона извео *Исак Њутн* (1643—1727) и саопштио их у своме бесмртном делу *Philosophiae naturalis principia mathematica. London* 1687, пошто је тим делом подигао до крова зграду класичне Механике, отпочету од Галилеја и Хајгенса. Њутн је, као што је познато, био један од двају главних проналазача инфинитезималног рачуна, али се ипак није њиме послужио у том свом делу, него, да би био приступачан својим савременицима, класичним геометријским расуђивањима. Ми ћемо његове резултате извести овде служећи се модернијим оруђем науке.

Уочимо једну материјалну тачку која се креће произвољним кретањем у равни. Одаберимо у тој равни пол O и осу OX једног произвољног поларног координатног система, па означимо са r и v поларне координате уоченог положаја M посматране материјалне тачке (сл. 5). Означимо са $\mathfrak{r}$ вектор положаја тачке M према тачки O, а са $\mathfrak{r}_0$ јединични вектор тога правца, онда је

$$\mathfrak{r} = r\mathfrak{r}_0 . \tag{9}$$

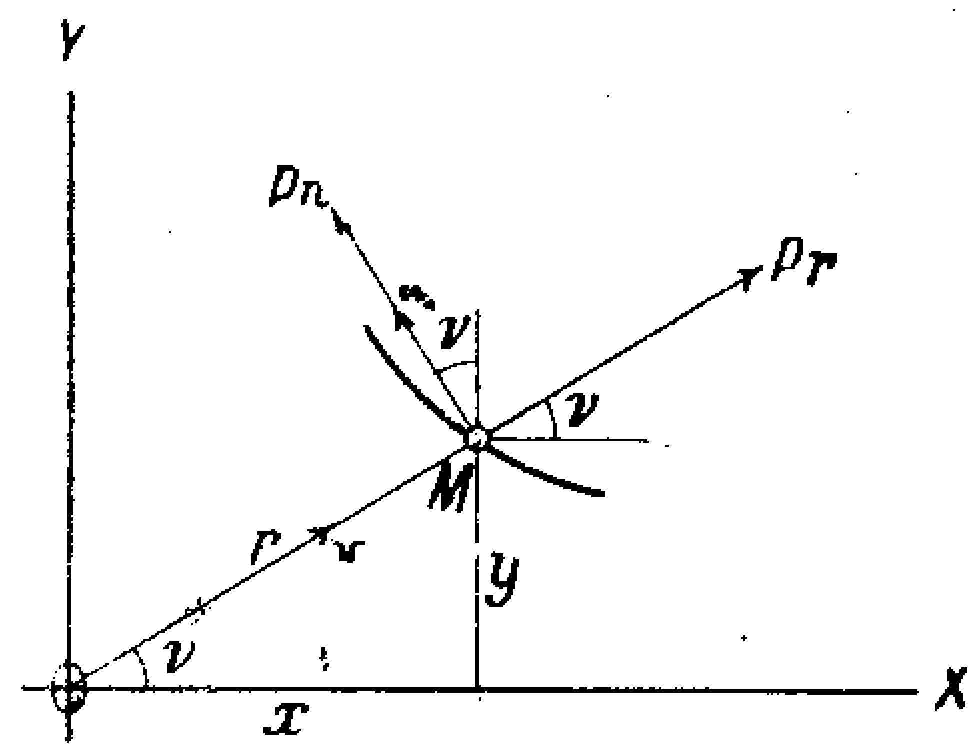
Извод по времену t овог израза претстављен је са

$$\frac{d\mathfrak{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\mathfrak{r}_0 + r\frac{d\mathfrak{r}_0}{dt},$$

па нам лева страна ове једначине претставља, као што је познато, вектор брзине

$$(10) \qquad \mathfrak{v} = \frac{d\mathfrak{r}}{dt}$$

уочене материјалне тачке. Исто нам тако претставља $\frac{d\mathfrak{r}_0}{dt}$ вектор брзине крајње тачке јединичног вектора $\mathfrak{r}_0$ при промени угла ν. Означимо ли са $\mathfrak{n}_0$ јединични вектор нормалан на век-



Сл. 5. сл. 2

тор $\mathfrak{r}_0$, а наперен у смислу растућег ν, то је онај вектор брзине претстављен са

$$(11) \qquad \frac{d\mathfrak{r}_0}{dt} = \frac{d\nu}{dt}\mathfrak{n}_0.$$

Стављајући

$$(12) \qquad v_r = \frac{dr}{dt}; \qquad v_n = r\frac{d\nu}{dt},$$

добивамо

$$(13) \qquad \frac{d\mathfrak{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\mathfrak{r}_0 + r\frac{d\nu}{dt}\mathfrak{n}_0$$

или

$$(14) \qquad \mathfrak{v} = v_r\,\mathfrak{r}_0 + v_n\,\mathfrak{n}_0.$$

Зато нам v_r и v_n претстављају компоненте брзине $\mathfrak{v}$ у правцима $\mathfrak{r}_0$ и $\mathfrak{n}_0$. Поновно извод од (13) по времену даје

$$\frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2} = \frac{d^2r}{dt^2}\mathfrak{r}_0 + \frac{dr}{dt}\cdot\frac{d\mathfrak{r}_0}{dt} + \frac{dr}{dt}\cdot\frac{dv}{dt}\mathfrak{n}_0 +$$
$$+ r\frac{d^2v}{dt^2}\mathfrak{n}_0 + r\frac{dv}{dt}\cdot\frac{d\mathfrak{n}_0}{dt},$$

при чему је, истим расуђивањима као при (13),

$$\frac{d\mathfrak{n}_0}{dt} = -\frac{dv}{dt}\mathfrak{r}_0.$$

Зато је

$$(15)\quad \frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2} = \left\{\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{dv}{dt}\right)^2\right\}\mathfrak{r}_0 + \left\{r\frac{d^2v}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\cdot\frac{dv}{dt}\right\}\mathfrak{n}_0.$$

Лева стране ове једначине претставља нам вектор акцелерације

$$(16)\qquad \mathfrak{p} = \frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2}$$

уочене материјалне тачке. Стављајући

$$(17)\qquad p_r = \frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{dv}{dt}\right)^2$$

$$(18)\qquad p_n = r\frac{d^2v}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\cdot\frac{dv}{dt} = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{dv}{dt}\right),$$

добивамо

$$(19)\qquad \mathfrak{p} = p_r\,\mathfrak{r}_0 + p_n\,\mathfrak{n}_0,$$

што значи да су p_r и p_n компоненте вектора акцелерације у правцима $\mathfrak{r}_0$ и $\mathfrak{n}_0$.

Применимо предње резултате на кретање планета, па положимо, у то име, пол O нашег координатног система у Сунце, а његову поларну осу наперимо према перихелу. Онда координате r и v имају значај дат им у претходном параграфу. Зато је, према једначини (6),

$$r^2\frac{dv}{dt} = C$$

где C означава једну константу. Стављајући ово у (18), добивамо

$$p_n = 0, \tag{20}$$

што значи да планета, у свакој тачци своје путање, подлежи само убрзању у правој која спаја планету са Сунцем. Да бисмо нашли скаларну величину тог убрзања, поступићемо овако. Како је

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{dv}\,\frac{dv}{dt},$$

а

$$\frac{dv}{dt} = \frac{C}{r^2},$$

то је

$$\frac{dr}{dt} = \frac{C}{r^2}\,\frac{dr}{dv} = -C\frac{d}{dv}\left(\frac{1}{r}\right),$$

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -C\,\frac{d^2}{dv^2}\left(\frac{1}{r}\right)\frac{dv}{dt} = -\frac{C^2}{r^2}\,\frac{d^2}{dv^2}\left(\frac{1}{r}\right),$$

па нам (17) даје овај, Бинеов, образац

$$p_r = -\frac{C^2}{r^2}\left[\frac{1}{r} + \frac{d^2}{dv^2}\left(\frac{1}{r}\right)\right]. \tag{21}$$

Из првог Кеплеровог закона, дакле из (4), следује

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{e}{p}\cos v,$$

т ј

$$\frac{d}{dv}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{e}{p}\sin v; \qquad \frac{d^2}{dv^2}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{e}{p}\cos v,$$

дакле

$$\frac{1}{r} + \frac{d^2}{dv^2}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{1}{p}.$$

Стављајући ово у (21), добивамо:

$$p_r = -\frac{C^2}{p}\cdot\frac{1}{r^2},$$

а примењујући (3) и (7),

(22) $$p_r = -4\pi^2 \frac{a^3}{T^2} \cdot \frac{1}{r^2},$$

т. ј. због (8),

(23) $$p_r = -4\pi^2 k \frac{1}{r^2}.$$

Константа k је, према трећем Кеплеровом закону, једна те иста за све планете, па је то исто случај и за константу

(24) $$\mu = 4\pi^2 k = 4\pi^2 \frac{a^3}{T^2}.$$

Зато је

(25) $$p_r = -\frac{\mu}{r^2}.$$

Стављајући ово и (20) у (19) добивамо:

(26) $$\mathfrak{p} = -\frac{\mu}{r^2}\,\mathfrak{r}_0.$$

Ова нам једначина казује да свака планета, у сваком свом положају, подлежи убрзању које је наперено према Сунцу, а чија је скаларна величина инверзно пропорционална квадрату отстојања планете од Сунца.

Довде се Њутново расуђивање разликује од онога његових претеча, дакако значајно, само тиме што важи за стварне, елиптичне, путање планета. Но Њутн је, дошавши до горњег резултата, пошао смелим кораком даље. Он је увидео и доказао на примеру Месеца да је нађено убрзање, по својој природи истоветно са познатим убрзањем Земљине теже. Њутн је генијалном интуицијом схватио да се привлачно дејство наше Земље, које се испољава при паду тешких тела, распростире у небеске просторе, дакле и до самог Месеца. Да то докаже, извршио је он овај рачун. На површини Земље, у отстојању R од Земљиног средишта, при чему R означава радиус Земљине кугле, подлеже слободна тела убрзању које, по мерењима Галилеја, износи округло 30 стопа по sec^2. Означимо ли средње отстојање Месеца од средишта Земље са a, то ће на том отстојању убрзање услед привлачног дејства Земље, пошто оно опада са квадратом отстојања, бити једнако:

$$p = \frac{R^2}{a^2} g.$$

Ако, дакле, за кретање Месеца око Земље важи исти закон као и за кретање планета око Сунца, онда мора, према добивеној једначини (22), бити:

$$p = -4\pi^2 \frac{a^3}{T^2} \cdot \frac{1}{a^2} = -\frac{4\pi^2 a}{T^2},$$

где T означава време обилажења Месеца око Земље.

Из предњих једначина следује:

$$g = -\frac{a^2}{R^2} \cdot \frac{4\pi^2 a}{T^2} = -\frac{4\pi^2 a^3}{R^2 T^2}.$$

О нумеричким вредностима величина a и T имао је Њутн ове доста тачне, податке: $a = 60{,}4\,R$; $T = 27^d\ 7^h\ 43^m\ 48^s = 2360628^s$, а Пикарово премеравање Земље, које је баш у оно доба извршено, дало је $R = 19.615.000$ стопа, па је Њутн са тим вредностима, применом горњег обрасца, добио $g = 30{,}62$ стопе по sec^2, дакле резултат који је добро одговорио стварности. Тиме је била доказана исправност Њутнове замисли.

Но Њутн се није зауставио ни на овом резултату. Увидевши да једно те исто тело подлежи, према његовом отстојању од средишта Земље, различитом убрзању, т. ј. да показује различиту тежину, увео је Њутн појам масе која је, као стварно обележје тела, непромењива. Тим је он, први од свију, одвојио појам масе од појма тежине. Ову тежину је дефинисао као производ масе и убрзања теже. Тим је био добивен општи појам силе као производа масе и убрзања што га та сила телу додељује. У исто доба поставио је Њутн свој познати принцип једнакости акције и реакције. Као последица тог пречишћавања појмова, следовала су следећа разматрања.

Помножимо ли једначину (26) са масом m уочене планете, то добивамо лево производ масе и убрзања планете, дакле силу која дејствује на планету:

$$\mathfrak{P} = -\mu \frac{m}{r^2} \mathfrak{r}_0. \tag{27}$$

Та сила наперена је, због знака минус, према Сунцу, па претставља силу којом Сунце привлачи планету. По принципу акције и реакције, привлачи планета Сунце истом таквом силом, но противног знака, а та сила мора бити производ масе M Сунца и његовог убрзања. Уведемо ли, према томе, нову једну величину f дефинисану једначином.

$$f = \frac{\mu}{M} \tag{28}$$

или, због (24), једначином

$$f = 4\pi^2 \frac{a^3}{T^2} \cdot \frac{1}{M}, \tag{29}$$

то добивамо, место (27),

$$\mathfrak{P} = -f \frac{Mm}{r^2} \mathfrak{r}_0 \tag{30}$$

Фактор μ имао је једну те исту нумеричку вредност за све планете, па то важи, због (28), и за фактор f. Употребљен у значењу које му даје једначина (29), он се показао исти и за Месец и за Земљину тежу. Због тога претставља f једну константу која важи за цео Сунчани систем и изражава једну општу особину материје нагомилане у том делу васионе. Када је Њутн дошао до овога сазнања, он је, обухвативши њиме целу васиону, увидео, а то су потврдила и сва каснија искуства, да једначина (30) важи за свака два делића материје у васиони. То сазнање изразио је овим својим законом опште гравитације:

Сваки делић материје у васиони привлачи сваки други делић силом која пада у праву тих делића, а има интензитет пропорционалан производу маса m_1 и m_2 тих делића, а инверзно пропорционалан квадрату њихвог отстојања r. Величина те силе претстављена је, дакле, изразом

$$P = f \frac{m_1 m_2}{r^2}. \tag{31}$$

При томе је фактор f пропорционалности једна универзална константа. У горњем изразу отпао је знак минус, пошто је «привлачи» једнозначно одређен правац те силе.

Њутновим законом поста одгонетнута хиљадугодишња загонетка планетског кретања и нова сазнања следоваше, сама од себе, из њега. Све неједнакости кретања планета и Месеца испољише се као природна последица тога закона и као јасни изражај међусобног привлачног дејства тих небеских тела. Не само да је тим природа тих неједнакости постала растумачена, оне су се могле израчунавати и пратити у прошлост и будућност. Показало се, а за комете убрзо иза постављања Њутновог закона, да он важи за сва небеска тела без изузетка, дакле и изван Сунчевог система. Прецесија равнодневница, коју је, као што смо чули, први констатовао Хипархос, нашла је Њутновим законом своје потпуно разјашњење, а исто тако, касније опажена, нутација Земљине осе. И облик наше Земље, а нарочито њена спљоштеност услед ротације доби, у свим појединостима, своје механичко и геометријско образложење. То исти важи и за прастаро питање о постанку морске плиме која се показала као непосредна последица привлачног дејства Сунца и Месеца. Тако се Њутнов закон, највеличанственији што га је икад смртни човек могао да докучи, показао као општи закон природе којем се покорава цела васиона. Из тога закона је изникла једна нова наука: Небеска Механика.

Литература: *Claudius Ptolemäus*, Handbuch der Astronomie. Uebersetzt von Manitius. Zwei Bände. Leipzig 1912-13. — *Nicolaus Copernicus*, Ueber die Kreisbewegungen der Weltkörper. Uebersetzt von Menzzer. Thorn 1879. — *Galileo Galilei* Le opere; edizione nazionale. Firenze 1890. — *Kepler, J.*, Opera omnia. Ed. Ch. Frisch. Francofurti 1858—71. — *Sir Isaac Newton* Mathematische Principien der Naturlehre. Uebersetzt von Wolfers. Berlin 1872.

Wolf R., Geschichte der Astronomie. München 1877. — *Rosenberger, F.*, Die Geschichte der Physik. Zwei Bände. Braunschweig 1882—90. — *Heller, A.*, Geschichte der Physik. Zwei Bände. Stuttgart 1882—84. *Dreyer, J. L. E.*, History of the Planetary System from Thales to Kepler. Cambridge 1906, — *Hoppe E.*, Mathematik und Astronomie im klassischen Altertum. Heidelberg 1911. — *Oppenheim, S*, Das astronomische Weltbild im Wandel der Zeit. Zweite Auflage. Leipzig 1912. — *Duhem, P.*, Le système du monde, histoire des doctrines cosmologiques.

5 tomes. Paris 1913—17. — *Troels-Lund*, Himmelsbild und Weltanschauung im Wandel der Zeiten. Uebersetzt von Bloch. Vierte Auflage. Leipzig 1920. — *Dannemann, Fr.*, Die Naturwissenschaften in ihrer Entwicklung und in ihrem Zussammenhange dargestellt. Vier Bände. Leipzig 1920—23. — *Heiberg, I. L.*, Geschichte der Mathematik und Naturwissenschaften im Altertum. München 1925.

Laplace P. S. de, Traité de Mécanique Céleste. 5 tomes. I. éd. Paris 1798—1825. IV, éd. Paris 1878—82. — *Pontécoulant, P. G. de*, Théorie analytique du système du monde. 2 tomes. Paris 1834—56. — *Leverrier, U. J. J.*, Recherches astronomiques. Annales de l' Observatoire de Paris 1855—77. — *Stockwell, J. N.*, Memoir on the secular variations of the elements of the orbits of the eight principal planets. Smithsonian contibutions to knowledge. Vol. XVIII. Washington 1873 — *Resal, M. H.*, Traité élémentaire de Mécanique Céleste. II. éd. Paris 1884. — *Dziobek, O.*, Die mathematischen Theorien der Planetenbewegungen. Leipzig 1888. — *Tisserand, F.*, Traité de Mécanique Céleste. 4 tomes. Paris 1889—96. — *Souchon, A.*, Traité d' Astronomie Théorique. Paris 1891. — *Herz, N.*, Artikel „Mechanik des Himmels“ in Valentiners Handwörterbuch der Astronomie. Breslau 1898. — *Charlier, C. V. L.*, Die Mechanik des Himmels. 2 Bände. Leipzig 1902—07. — *Poincaré, H.*, Leçons de Mécanique Céleste. 3 tomes. Paris 1905—10. — *Milankovitch, M.*, Théorie mathématique des phénomènes thermiques produits par la radiation solaire. Paris 1920. — *Andoyer, H.*, Cours de Mécanique Céleste. 2 tomes. Paris 1923—26. — *Moulton, F. R.*, Einführung in die Himmelsmechanik. Uebersetzt von Fender. Leipzig 1927. — *Milankovitch, M.*, Mathematiche Klimalehre und Astronomische Theorie der Klimaschwankungen. Bd. I, Teil A des Köppen — Geigerschen Handbuches der Klimatologie. Berlin 1930. — *Milankovitch, M*, Abschnitt „Stellung und Bewegung der Erde im Weltall“, im Band I des Gutenbergschen Handbuches der Geophysik. Berlin 1933.

ГЛАВА ДРУГА

Проблем двају тела.

§ 9. Постављање проблема. Иако се сви чланови нашег Сунчаног система међусобно привлаче, годишњи ход сваке поједине планете скоро је сасвим такав као кад би она стајала само под дејством привлачне силе Сунца. Узрок је томе тај, што маса Сунца надмашава далеко масе свих планета, па је због тога међусобно привлачно дејство тих планетских маса према дејству Сунчеве масе толико слабо да се оно испољава, као некакав мали поремећај, тек после дужих размака времена. Због тога претставља, тако названи, проблем двају тела полазну тачку науке о кретању небеских тела. Тај проблем изражен је овим задатком: *Два небеска тела привлаче се међусобно по Њутновом закону гравитације; нека се из заданих почетних услова одреди кретање тих двају тела у погледу на један координатни систем, сматран непомичним.*

§ 10. Векторски интеграли проблема. Да бисмо, без уштрба по општи значај следећих расуђивања, имали пред собом конкретан један случај, назовимо посматрана два тела Сунце и планету, па нека нам M означава масу Сунца, а m масу планете; тренутни положаји тежишта тих двају небеских тела у одабраном координатном систему нека буду одређени векторима положаја $\mathfrak{R}$ односно $\mathfrak{l}$. Релативни положај планете према Сунцу одређен је онда вектором положаја

$$(1) \qquad \mathfrak{r} = \mathfrak{l} - \mathfrak{R} \, .$$

Означимо ли са r скаларну величину или модуо вектора $\mathfrak{r}$, то је јединични вектор у правцу $\mathfrak{r}$ претстављен изразом

$$\mathfrak{r}_0 = \frac{\mathfrak{r}}{r}. \tag{2}$$

Сила којом Сунце привлачи планету претстављена је, према (30) прве главе, изразом $-f\frac{Mm}{r^2}\mathfrak{r}_0 = -f\frac{Mm}{r^3}\mathfrak{r}$, а сила којом планета привлачи Сунце изразом $f\frac{Mm}{r^3}\mathfrak{r}$. Зато су векторске једначине кретања ових двају небеских тела ове:

$$M\frac{d^2\mathfrak{R}}{dt^2} = f\frac{Mm}{r^3}\mathfrak{r} \tag{3}$$

$$\overset{m}{M}\frac{d^2\mathfrak{l}}{dt^2} = -f\frac{Mm}{r^3}\mathfrak{r}, \tag{4}$$

где t означава време.

Означимо са $\mathfrak{S}$ вектор положаја заједничког тежишта S, боље рећи центра маса M и m, то је, према самој дефиницији тог центра,

$$(M+m)\,\mathfrak{S} = M\,\mathfrak{R} + m\,\mathfrak{l}. \tag{5}$$

Први и други извод ове једначине по времену даје:

$$(M+m)\frac{d\mathfrak{S}}{dt} = M\frac{d\mathfrak{R}}{dt} + m\frac{d\mathfrak{l}}{dt} \tag{6}$$

$$(M+m)\frac{d^2\mathfrak{S}}{dt^2} = M\frac{d^2\mathfrak{R}}{dt^2} + m\frac{d^2\mathfrak{l}}{dt^2}. \tag{7}$$

Саберемо ли једначине (3) и (4), па добивени збир упоредимо са (7), то добивамо:

$$\frac{d^2\mathfrak{S}}{dt^2} = 0. \tag{8}$$

Овај израз претставља вектор акцелерације тежишта S, па како је он стално једнак нули, то се то тежиште креће праволинијски и униформно. Интегрисање претходне једначине даје:

$$(9) \qquad \frac{d\mathfrak{S}}{dt} = \mathfrak{B},$$

где је $\mathfrak{B}$ константан један вектор који претставља вектор брзине тежишта S. Интегрисањем претходне једначине добивамо:

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{B}t + \mathfrak{C},$$

где $\mathfrak{C}$ означава опет један константан вектор. Он је одређен иницијалним условима. Означимо ли са $\mathfrak{A}$ вектор положаја тежишта S у иницијалном моменту t_0, онда је за $t = t_0$; $\mathfrak{S} = \mathfrak{A}$, па зато

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{B}t_0 + \mathfrak{C},$$

т. ј.

$$(10) \qquad \mathfrak{S} = \mathfrak{B}(t - t_0) + \mathfrak{A}.$$

Вектори $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ одређени су иницијалним условима под којима разумевамо векторе положаја $\mathfrak{R}_0$ и $\mathfrak{l}_0$ уочених двају небеских тела у иницијалном моменту и векторе $\mathfrak{W}_0$ и $\mathfrak{V}_0$ њихових брзина. Зато су иницијални услови изражени једначинама:

$$(11) \qquad \left\{ \begin{array}{l} t = t_0 \\ \mathfrak{R} = \mathfrak{R}_0\, ; \quad \mathfrak{l} = \mathfrak{l}_0\, ; \quad \dfrac{d\mathfrak{R}}{dt} = \mathfrak{W}_0; \; \dfrac{d\mathfrak{l}}{dt} = \mathfrak{V}_0. \end{array} \right.$$

Стављајући (9), (10), (11) у (5) и (6), добивамо $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$.

Једначине (9) и (10) претстављају прва два векторска интеграла проблема двају тела, она којима је одређено кретање заједничког тежишта маса M и m.

Скратимо ли једначину (3) са M, а једначину (4) са m, па их одузмемо једну од друге, то добивамо:

$$\frac{d^2\mathfrak{l}}{dt^2} - \frac{d^2\mathfrak{R}}{dt^2} = -f\frac{M+m}{r^3}\mathfrak{r}.$$

Из (1) следује

$$\frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2} = \frac{d^2\mathfrak{l}}{dt^2} - \frac{d^2\mathfrak{R}}{dt^2},$$

т. ј.

$$(12) \qquad \frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2} = -f\frac{M+m}{r^3}\mathfrak{r}$$

или

$$m\frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2}=-f\frac{m\,(M+m)}{r^3}\,\mathfrak{r}. \tag{13}$$

Ово је диференцијална једначина кретања планете релативно према Сунцу. Та нам једначина казује да се планета креће тако као кад би Сунце стајало непомично, имало масу $(M+m)$, а привлачило планету по Њутновом закону. Претпоставка коју смо учинили у прошлој глави, сматрајући Сунце непомичним била је оправдана само тиме што је m према M тако малено да се $(M+m)$ може заменити са M.

Из (12) може се лако известити један трећи векторски интеграл проблема. Помножимо ли ту једначину векториелно са $\mathfrak{r}$, то добивамо, пошто је $[\mathfrak{r}\,\mathfrak{r}]=0$, ову једначину:

$$\left[\mathfrak{r}\,\frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2}\right]=0. \tag{14}$$

Како је према правилима векторске диференцијације:

$$\frac{d}{dt}\left[\mathfrak{r}\,\frac{d\mathfrak{r}}{dt}\right]=\left[\mathfrak{r}\,\frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2}\right],$$

то можемо једначину (14) заменити овом:

$$\frac{d}{dt}\left[\mathfrak{r}\,\frac{d\mathfrak{r}}{dt}\right]=0$$

која, интегрисана, даје:

$$\left[\mathfrak{r}\,\frac{d\mathfrak{r}}{dt}\right]=\mathfrak{C}, \tag{15}$$

где је $\mathfrak{C}$ један вектор који је независан од времена.

Геометријско значење добивеног векторског интеграла је ово. Напишемо ли га у облику:

$$\frac{[\mathfrak{r}\,d\mathfrak{r}]}{dt}=\mathfrak{C}, \tag{16}$$

то нам $d\mathfrak{r}$ претставља елеменат пута што га је планета релативно према Сунцу превалила за време интервала dt. Векториелни продукат $[\mathfrak{r}\,d\mathfrak{r}]$ претставља нам онај вектор који стоји нормално на равни вектора $\mathfrak{r}$ и $d\mathfrak{r}$, наперен на ону страну те равни са које, посматрано, кретање планете следује у директном смислу, т. ј. обрнуто сказаљки на сату, а којега је *скаларна величина или интензитет једнак површини паралелограма*, ограниченог векторима $\mathfrak{r}$ и $d\mathfrak{r}$. Та је површина једнака двострукој оној површини dF што ју је за време интервала dt пребрисао радиусвектор повучен од Сунца ка планети. Зато нам

$$\frac{1}{2}\frac{[\mathfrak{r}d\mathfrak{r}]}{dt}$$

претставља секторску брзину планете у векторском облику. Интеграл (16) изражава, дакле, други Кеплеров закон у векторском облику, казујући да је површина пребрисана у јединици времена вектором положаја $\mathfrak{r}$ планете константна, не само по својој скаларној величини, но и по својој оријентацији у простору. *Кретање планете око Сунца следује, дакле, константном секторском брзином у равни која, пролазећи кроз Сунце, стоји нормално на вектору* $\mathfrak{C}$. Тиме је одређена једнозначно раван планетске путање, смисао обилажења планете око Сунца и секторска брзина кретања.

Да одредимо, рачунски, *раван планетске путање, положимо у Сунце почетак једног ортогоналног координатног система* X—Y—Z (сл. 6), везанога са небеском сфером. Означимо са $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ јединичне векторе у правцу оса X, Y, Z тога система. Почетни положај планете, т. ј. онај који одговара времену $t=t_0$, нека буде M_0, координате ове тачке нека су x_0, y_0, z_0, онда је *њен вектор положаја:*

$$\mathfrak{r} = x_0\mathfrak{i} + y_0\mathfrak{j} + z_0\mathfrak{k}. \tag{17}$$

Релативна брзина планете према Сунцу претстављена је изразом:

$$\mathfrak{v} = \frac{d\mathfrak{r}}{dt} = \frac{d\mathfrak{l}}{dt} - \frac{d\mathfrak{R}}{dt}, \tag{18}$$

њена почетна вредност нека буде $\mathfrak{v}_0$, а v_1, v_2, v_3 њене координате. Онда је:

$$\mathfrak{v}_0 = v_1\mathfrak{i} + v_2\mathfrak{j} + v_3\mathfrak{k}. \tag{19}$$

Означимо са C_1, C_2, C_3 координате вектора $\mathfrak{C}$, то је

(20) $$\mathfrak{C} = C_1\mathfrak{i} + C_2\mathfrak{j} + C_3\mathfrak{k}.$$

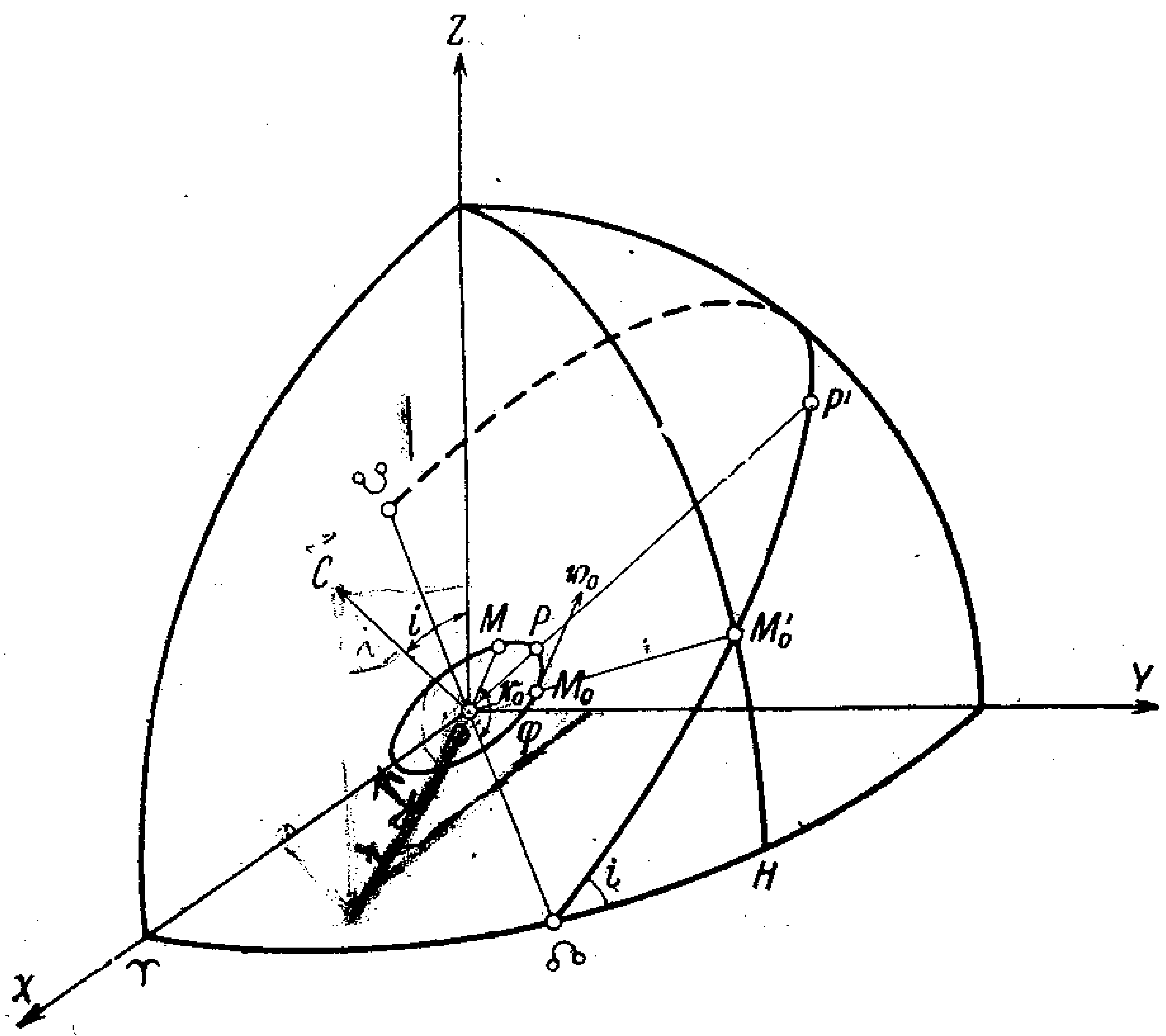
За $t = t_0$ добива једначина (15), због (18), овај облик:

(21) $$\mathfrak{C} = [\mathfrak{r}_0\,\mathfrak{v}_0]$$

или, због претходних једначина,

$$C_1\mathfrak{i} + C_2\mathfrak{j} + C_3\mathfrak{k} = \begin{vmatrix} \mathfrak{i} & \mathfrak{j} & \mathfrak{k} \\ x_0 & y_0 & z_0 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}.$$

Развијемо ли горњу детерминанту, то добивамо, множећи



Сл. 6.

добивену векторску једначину скаларно са $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$, ове три скаларне једначине:

(22) $$\begin{cases} C_1 = y_0 v_3 - z_0 v_2 \\ C_2 = z_0 v_1 - x_0 v_3 \\ C_3 = x_0 v_2 - y_0 v_1, \end{cases}$$

које нам дају координате вектора $\mathfrak{C}$; његов је модуо

$$C = \sqrt{C_1^2 + C_2^2 + C_3^2}. \tag{23}$$

Раван планетске путање стоји нормално на вектору $\mathfrak{C}$, па затвара због тога са равни $X-Y$ исти онај угао i што га затвара вектор $\mathfrak{C}$ са осом Z. Тај је угао дат једначином:

$$C_3 = C \cos i. \tag{24}$$

Угао i зове се *нагиб планетске равни*, он лежи између 0 и π; кад је већи од $\frac{\pi}{2}$ креће се планета ретроградно.

Раван планетске путање сече раван $X-Y$ дуж праве ☊ ☋ која се зове *линијом чворова*. Продорна тачка те праве са привидном небеском сфером у којој се планета успне изнад равни $X-Y$, у правцу позитивнога Z, зове се *узлазни чвор*. Угао Ω што га правац линије чворова, наперен ка узлазном чвору ☊, затвара са осом X, дакле лук γ ☊ небеске сфере, зове се *лонгитуда узлазног чвора*. Ту координату наћићемо на овај начин. Пројекција вектора $\mathfrak{C}$ у раван $X-Y$ има скаларну величину $C_a = C \sin i$, а затвара са осом X угао који ћемо означити са α. Зато је:

$$C_1 = C_a \cos\alpha = C \cos\alpha \sin i$$
$$C_2 = C_a \sin\alpha = C \sin\alpha \sin i.$$

Линија чворова стоји нормално на овој пројекцији, па њена страна, наперена према узлазном чвору ☊, затвара са осом X угао $\Omega = \alpha + \frac{\pi}{2}$. Зато је $\alpha = \Omega - \frac{\pi}{2}$. Стављајући ово у претходне једначине, добивамо:

$$C_1 = C \sin\Omega \sin i \tag{25}$$
$$C_2 = - C \cos\Omega \sin i. \tag{26}$$

Једначине (24), (25), (26) одређују једнозначно величине i и Ω, т. ј. положај равни планетске путање.

§ 11. Облик путање. Одаберимо у равни планетске путање поларни координатни систем тако да његов пол O лежи у центру Сунца, а његова поларна оса да је наперена према узлазном чвору, па означимо са φ и r поларне координате планете, то се амплитуда φ зове, у овом случају, *аргуменат латитуде*, а r *радиусвектор*. Двострука секторска брзина изражена је помоћу ових координата са $r^2 \frac{d\varphi}{dt}$, па зато једначина (16) добива овај скаларни облик:

$$r^2 \frac{d\varphi}{dt} = C. \tag{27}$$

Пошто радиусвектор r преставља модуо вектора положаја $\mathfrak{r}$, то је, према дефиницији скаларног продукта,

$$r^2 = (\mathfrak{r}\,\mathfrak{r}).$$

И диференцијали ових двају израза мораjу бити међусобно једнаки, па је зато:

$$rdr = \mathfrak{r}d\mathfrak{r}.$$

Означимо ли са v скаларну величину брзине $\mathfrak{v}$, то је, исто тако,

$$vdv = \mathfrak{v}d\mathfrak{v}.$$

Ако још, ради једноставнијег писања, ставимо

$$f\,(M+m) = \mu, \tag{28}$$

то једначина (12) добива, имајући још у виду (18), овај облик

$$\frac{d\mathfrak{v}}{dt} = -\frac{\mu}{r^3}\,\mathfrak{r}.$$

Помножимо ову једначину скаларно са $\mathfrak{v}dt = d\mathfrak{r}$, па заменимо, при томе, $\mathfrak{v}d\mathfrak{v}$ са vdv, а $\mathfrak{r}d\mathfrak{r}$ са rdr, то добивамо ову скаларну једначину:

$$vdv = -\frac{\mu}{r^2}\,dr. \tag{29}$$

Интеграцијом ове једначине добивамо:

$$v^2 = \frac{2\mu}{r} - \frac{\mu}{a}, \tag{30}$$

где a означава интеграциону константу коју ваља још одредити.

Да бисмо и предњу једначину интегрисали, т. ј. одредили зависност r од φ, дакле нашли облик планетске путање, поступићемо овако. Квадрат векторског израза (14) прве главе даје:

$$v^2 = v_r{}^2 + v_n{}^2,$$

т. ј. због (12)

$$v^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2. \tag{31}$$

Из (27) следује:

$$\frac{1}{dt} = \frac{C}{r^2}\frac{1}{d\varphi},$$

па је зато:

$$v^2 = \frac{C^2}{r^4}\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + \frac{C^2}{r^2}.$$

Како је:

$$\frac{d\frac{1}{r}}{d\varphi} = -\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\varphi}.$$

то је:

$$\frac{1}{r^4}\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 = \left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\varphi}\right)^2,$$

па зато:

$$v^2 = C^2\left[\left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\varphi}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\right]. \tag{32}$$

Из (30) и (32) следује:

$$\left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\varphi}\right)^2 + \frac{1}{r^2} = 2\frac{\mu}{C^2}\frac{1}{r} - \frac{\mu}{C^2}\cdot\frac{1}{a},$$

a'

т. ј.

$$\left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{1}{r} - \frac{\mu}{C^2}\right)^2 = \frac{\mu^2}{C^4} - \frac{\mu}{C^2}\frac{1}{a}$$

$$(33)\qquad \left\{\frac{\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{r}\right)}{\sqrt{\frac{\mu^2}{C^4} - \frac{\mu}{C^2}\cdot\frac{1}{a}}}\right\}^2 + \left\{\frac{\frac{1}{r} - \frac{\mu}{C^2}}{\sqrt{\frac{\mu^2}{C^4} - \frac{\mu}{C^2}\cdot\frac{1}{a}}}\right\}^2 = 1.$$

Ставимо ли

$$(34)\qquad \frac{\frac{1}{r} - \frac{\mu}{C^2}}{\sqrt{\frac{\mu^2}{C^4} - \frac{\mu}{C^2}\frac{1}{a}}} = \frac{\frac{1}{r} - \frac{\mu}{C^2}}{\frac{\mu}{C^2}\sqrt{1 - \frac{C^2}{\mu}\frac{1}{a}}} = z,$$

то добивамо, место (33), ову диференцијалну једначину:

$$\left(\frac{dz}{d\varphi}\right)^2 + z^2 = 1,$$

дакле

$$(35)\qquad d\varphi = \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}.$$

Интегрисањем ове једначине добивамо:

$$(36)\qquad \varphi = \arcsin z + \left(\omega - \frac{\pi}{2}\right),$$

при чему је $\left(\omega - \frac{\pi}{2}\right)$ уведено као интеграциона константа.

Добивамо, дакле,

$$\arcsin z = \frac{\pi}{2} + (\varphi - \omega),$$

т. ј.

$$(37)\qquad z = \cos(\varphi - \omega).$$

Из једначина (34) и (37) следује:

$$\frac{1}{r} - \frac{\mu}{C^2} = \frac{\mu}{C^2}\sqrt{1 - \frac{C^2}{\mu}\cdot\frac{1}{a}}\cos(\varphi - \omega),$$

т. ј.

$$(38) \qquad r = \frac{\frac{C^2}{\mu}}{1 + \sqrt{1 - \frac{C^2}{\mu} \cdot \frac{1}{a}} \cos(\varphi - \omega)}$$

Ово је поларна једначина планетске путање.

У претходној глави извели смо поларну једначину елипсе, претпостављајући да пол координатног система лежи у жижи елипсе, а да је поларна оса наперена према најближој тачки елипсе. Та једначина била је ова:

$$(39) \qquad r = \frac{p}{1 + e \cos v},$$

при чему је угао v назван правом аномалијом. Иста ова једначина важи за све коничне пресеке, само са том разликом да је за елипсу $e < 1$, за параболу $e = 1$, а за хиперболу $e > 1$. Зато нам једначина (38) претставља један конични пресек. Нумерички ексцентрицитет тог пресека дат је, као што то следује из упоређења (38) са (39), овим изразом:

$$(40) \qquad e = \sqrt{1 - \frac{C^2}{\mu} \frac{1}{a}}.$$

Према томе да ли је та величина, коју ваља узети позитивно, мања од јединице, једнака јединици или већа од јединице, претстављаће једначина (38) елипсу, параболу или хиперболу. Параметар тог коничног пресека дат је изразом:

$$(41) \qquad p = \frac{b^2}{a} = \frac{C^2}{\mu}.$$

Једначина путање масе m је, дакле, ова:

$$(42) \qquad r = \frac{p}{1 + e\cos(\varphi - \omega)}$$

Из (39) и (42) следује веза:

$$(43) \qquad v = \varphi - \omega$$

која нам пружа геометријско тумачење интеграционе константе ω. Ако нам M (сл. 6) претставља произвољну једну тачку планетске путање, φ њену амплитуду, а P перихел, то нам угао POM претставља праву аномалију v планете. Пошто је амплитуда перихела претстављена углом $\varphi - v = \omega$, то нам у (42) ω, претставља амплитуду перихела или *лонгитуду перихела, мерену од узлазног чвора.* Ако, дакле, P' претставља пројекцију перихела P, бачену из тачке O на небеску сферу, то је лонгитуда перихела, мерена од узлазног чвора, претстављена луком $\Omega P'$ небеске сфере.

Потребно је још одредити величине a, e и ω из иницијалних услова.

Из (40) следује:

$$1 - e^2 = \frac{C^2}{\mu} \frac{1}{\mathrm{a}},$$

а из једначине (41) и (2) прошле главе:

$$\frac{b^2}{a^2} = 1 - e^2 = \frac{C^2}{\mu} \cdot \frac{1}{a}, \tag{44}$$

па се из предњих двају једначина добива:

$$\mathrm{a} = a. \tag{45}$$

Интеграциона константа а претставља, дакле, велику полуосу планетске путање. Зато добивамо, место (30), ову једначину:

$$v^2 = \frac{2\mu}{r} - \frac{\mu}{a}, \tag{46}$$

т. ј.

$$a = \frac{\mu r}{2\mu - r v^2}. \tag{47}$$

Ако, дакле, r_0 и v_0 претстављају скаларне величине вектора $\mathfrak{r}_0$ и $\mathfrak{v}_0$, то је њима одређена велика полуоса a планетске путање:

$$a = \frac{\mu r_0}{2\mu - r_0 {v_0}^2}. \tag{48}$$

Значајно је да нумеричка вредност a велике полуосе путање зависи само од скаларних величина, а не од просторне оријентације вектора $\mathfrak{r}_0$ и $\mathfrak{v}_0$.

Када смо израчунали величину a, то се добива нумерички ексцентрицитет e путање помоћу једначине (44).

Ваља још да одредимо лонгитуду ω перихела, мерену од узлазног чвора. *Из (12) и (28) следује:*

$$\frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2} = -\frac{\mu}{r^3}\mathfrak{r}.$$

Помножимо ли ову једначину векториелно са $\mathfrak{C}$, то добивамо:

$$\left[\mathfrak{C}\frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2}\right] = -\frac{\mu}{r^3}[\mathfrak{C}\,\mathfrak{r}].$$

Из (15) следује, применом *познатог обрасца векторског рачуна:* $[\mathfrak{a}\,[\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}]] = \mathfrak{b}\,(\mathfrak{c}\,\mathfrak{a}) - \mathfrak{c}\,(\mathfrak{a}\,\mathfrak{b})$,

$$-[\mathfrak{C}\,\mathfrak{r}] = \left[\mathfrak{r}\left[\mathfrak{r}\frac{d\mathfrak{r}}{dt}\right]\right] = \mathfrak{r}\left(\mathfrak{r}\frac{d\mathfrak{r}}{dt}\right) - \frac{d\mathfrak{r}}{dt}(\mathfrak{r}\,\mathfrak{r}) = r\frac{dr}{dt}\mathfrak{r} - r^2\frac{d\mathfrak{r}}{dt},$$

т. ј.,

$$\left[\mathfrak{C}\frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2}\right] = \frac{\mu}{r^2}\frac{dr}{dt}\mathfrak{r} - \frac{\mu}{r}\frac{d\mathfrak{r}}{dt}.$$

Како је

$$\frac{d}{dt}\left[\mathfrak{C}\frac{d\mathfrak{r}}{dt}\right] = \left[\mathfrak{C}\frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2}\right]$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\mathfrak{r}\right) = -\frac{1}{r^2}\frac{dr}{dt}\mathfrak{r} + \frac{1}{r}\frac{d\mathfrak{r}}{dt},$$

то добивамо:

$$\frac{d}{dt}\left[\mathfrak{C}\frac{d\mathfrak{r}}{dt}\right] + \frac{d}{dt}\left(\frac{\mu}{r}\mathfrak{r}\right) = 0,$$

а после извршеног интегрисања,

$$\left[\mathfrak{C}\frac{d\mathfrak{r}}{dt}\right] + \frac{\mu}{r}\mathfrak{r} + \mathfrak{D} = 0, \tag{49}$$

где $\mathfrak{D}$ означава један *вектор који* је *независан* од времена.

Но како је, *због* (15), а *применом* споменутог обрасца векторског рачуна,

$$\left[\mathfrak{C}\,\frac{d\mathfrak{r}}{dt}\right]=-\left[\frac{d\mathfrak{r}}{dt}\left[\mathfrak{r}\,\frac{d\mathfrak{r}}{dt}\right]\right]=-\mathfrak{r}\left(\frac{d\mathfrak{r}}{dt}\cdot\frac{d\mathfrak{r}}{dt}\right)+\frac{d\mathfrak{r}}{dt}\left(\mathfrak{r}\,\frac{d\mathfrak{r}}{dt}\right)=$$

$$=-v^2\mathfrak{r}+r\,\frac{dr}{dt}\cdot\frac{d\mathfrak{r}}{dt},$$

то се, узимајући у обзир (46), добива једначина:

$$\mathfrak{D}=\left(\frac{\mu}{r}-\frac{\mu}{a}\right)\mathfrak{r}-r\,\frac{dr}{dt}\cdot\frac{d\mathfrak{r}}{dt}. \tag{50}$$

Радиусвектор r перихела B (сл. 4) има, пошто перихел има од пола O отстојање $a - ea$, ову вредност:

$$r=(1-e)\,a,$$

а вектор положаја перихела $\mathfrak{r}$, претстављен је, ако са $\mathfrak{n}_0$ означимо јединични вектор у правцу SB, изразом:

$$\mathfrak{r}=(1-e)\,a\,\mathfrak{n}_0.$$

Како у перихелу величина r достиже свој минимум, то је за перихел,

$$\frac{dr}{dt}=0.$$

Ставимо ли последња три израза у (50) то добивамо:

$$\mathfrak{D}=e\,\mu\,\mathfrak{n}_0. \tag{51}$$

Вектор $\mathfrak{D}$ наперен је, дакле, према перихелу и има скаларну величину $e\,\mu$.

Вектор $\mathfrak{D}$ може се, применом једначине (49), одредити из иницијалних услова: за $t=t_0$; $\mathfrak{C}=[\mathfrak{r}_0\,\mathfrak{v}_0]$; $r=r_0$; $\mathfrak{r}=\mathfrak{r}_0$; $\frac{d\mathfrak{r}}{dt}=\mathfrak{v}_0$, па је зато:

$$\mathfrak{D}=-[\mathfrak{C}\,\mathfrak{v}_0]-\frac{\mu}{r_0}\,\mathfrak{r}_0, \tag{52}$$

Како тај вектор има модуо $e\,\mu$, то је јединични вектор $\mathfrak{n}_0$ претстављен изразом:

$$\mathfrak{n}_0=-\frac{1}{e\mu}\,[\mathfrak{C}\,\mathfrak{v}_0]-\frac{1}{er_0}\,\mathfrak{r}_0. \tag{53}$$

Стављајући овамо изразе (20), (19), (17) добивамо:

$$
(54) \qquad \mathfrak{n}_0 = -\frac{1}{e\mu}\begin{vmatrix} \mathfrak{i} & \mathfrak{j} & \mathfrak{k} \\ C_1 & C_2 & C_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} - \frac{1}{er_0}(x_0\mathfrak{i}+y_0\mathfrak{j}+z_0\mathfrak{k}).
$$

Сада можемо лако одредити угао ω што га тај вектор затвара са линијом чворова. Јединични вектор $\mathfrak{h}_0$, наперен из O према узлазном чвору ☊ (сл. 6), претстављен је, пошто тај вектор лежи у равни $X - Y$, и затвара са осом X угао Ω, овим изразом:

$$
(55) \qquad \mathfrak{h}_0 = \cos\Omega\,\mathfrak{i} + \sin\Omega\,\mathfrak{j}.
$$

Јединични вектори $\mathfrak{h}_0$ и $\mathfrak{n}_0$ затварају између себе угао ω који је, према самој дефиницији скаларног продукта двају вектора, дат једначином:

$$
(56) \qquad \cos\omega = (\mathfrak{h}_0\,\mathfrak{n}_0)
$$

Стављајући овамо изразе (54) и (55) доб вамо, пошто су скаларни продукти јединичних вектора $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ или једнаки јединици или нули, једну скаларну једначину којом је угао ω изражен помоћу иницијалних услова.

На тај начин одређена је релативна путања масе m према маси M. Како се заједничко тежиште S тих двеју маса креће, према добивеним векторским интегралима, на потпуно одређен начин, праволинијски и униформно, то је тиме одређено и и апсолутно кретање маса M и m у одабраном координатном систему. Тежиште S дели стално вектор положаја $\mathfrak{r}$ масе m према маси M у обрнутој сразмери тих маса, па ће се зато оне, релативно према том тежишту, кретати тако да ће права која их спаја пролазити увек кроз то тежиште, а радиусвектори њихових путања бити претстављени изразом (42) који треба само помножити са $\frac{M}{M+m}$ односно $\frac{m}{M+m}$.

Те ће путање бити опет конични пресеци истог ексцентрицитета као и у (42), но смањеног параметра. Ако је $e < 1$, онда ће се обе масе кретати по другом Кеплеровом закону по елипсама око заједничког тежишта, а заједно са тим тежиштем, још вектором брзине $\mathfrak{V}$ у простору. Због тога ће обе те масе описивати у простору хеликоидалне криве, обавијене око двају ваљака који имају за базу споменуте елипсе, а за изводницу вектор $\mathfrak{V}$.

§ 12. Кретање по елиптичној путањи. Остаје још да математски опишемо кретање масе m по путањи чију смо једначину малочас извели. При томе ћемо се ограничити на случај планетскога кретања када је та путања елипса, т. ј. када је $e<1$. Зато ћемо масу m звати опет планетом.

Означимо ли са T време потпуног, сидеричког обиласка планете око Сунца, то ће за то време радиусвектор планете пребрисати целокупну површину $\pi a b$, ограничену елипсом планетске путање. Због тога је двострука секторска брзина претстављена изразом:

$$C = \frac{2\pi ab}{T}. \tag{57}$$

Из (41) следује:

$$C^2 = \mu \frac{b^2}{a} = \frac{4\pi^2 a^2 b^2}{T^2},$$

т, ј.

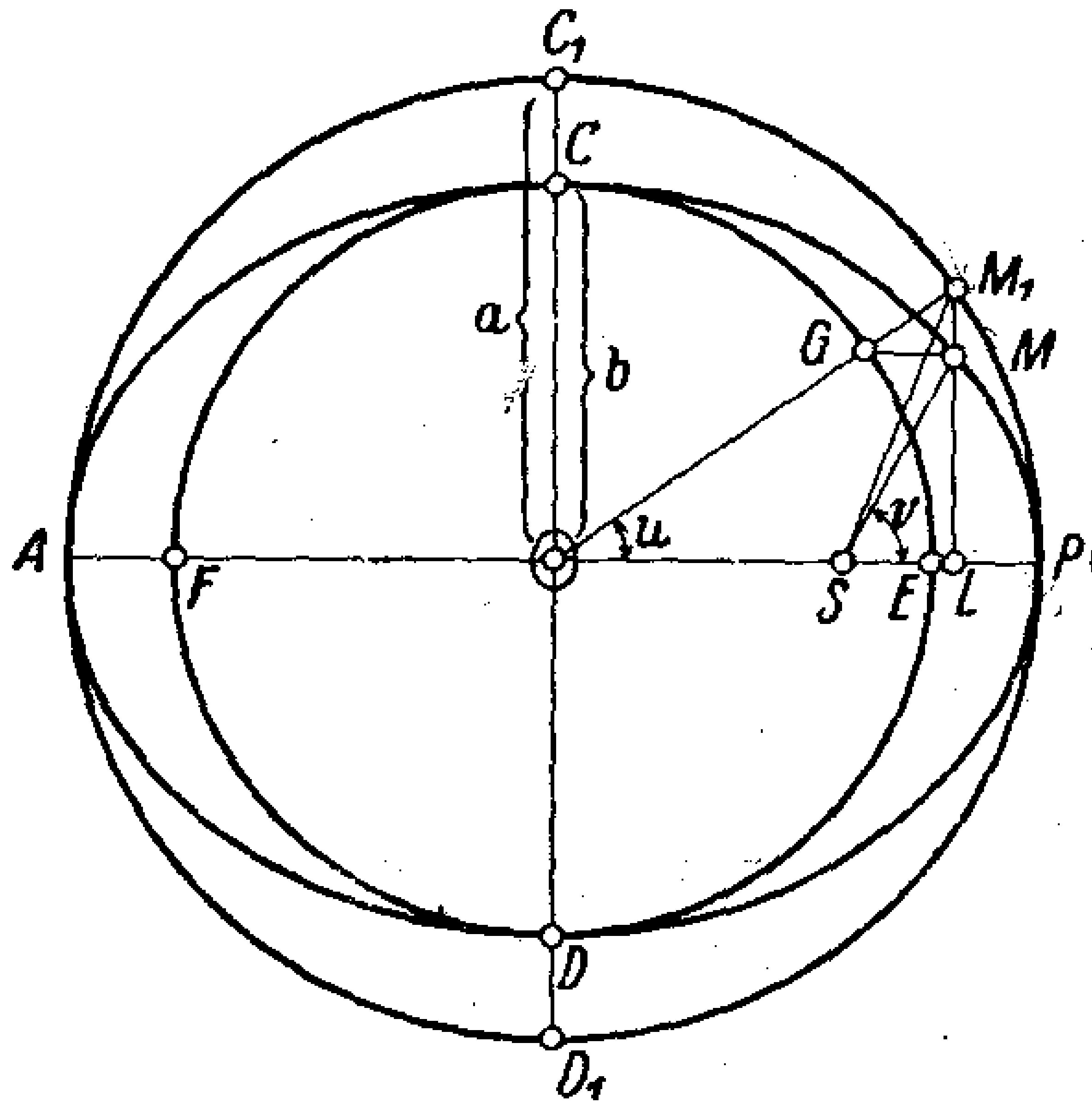
$$\mu = 4\pi^2 \frac{a^3}{T^2}. \tag{58}$$

Узимајући у обзир (28), добивамо:

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{f}{4\pi^2}(M+m). \tag{59}$$

Ова једначина изражава једну важну релацију између величина a и T, која није сасвим подударна са трећим Кеплеровим законом. По том је закону количник $\frac{a^3}{T^2}$ за све планете један те исти, што према предњој једначини не би био случај, јер присуство масе m у тој једначини мења вредност споменутог количника од планете до планете. Но пошто су масе планета веома малене према маси Сунца, то се у горњој једначини може m занемарити поред M, па се, на тај начин, добива подударност трећег Кеплеровог закона са законима Небеске Механике.

Кретање планете по њеној путањи следује по другом Кеплеровом закону, па се помоћу тога закона може положај планете у њеној путањи претставити као функција времена. Тај посао извршио је већ сам Кеплер на овај начин.



Сл. 7.

сл. 4

Кад су задане обе осе једне елипсе (сл. 7), онда се тачка елипсе која лежи на једној произвољној ординати LM_1 може наћи на овај начин. Опишимо преко тих обих оса, као пречника, кругове PC_1AD_1P и $ECFDE$, спојимо M_1 са средиштем O, па повуцимо GM паралелно са OP. Онда је M тражена тачка елипсе. Заиста, ако са a и b означимо обе полуосе елипсе, а са u угао POM_1, то је апсциса од M једнака $x = \overline{OL} = a\cos u$, а ордината $y = \overline{LM} = b\sin u$, па добивамо:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \cos^2 u + \sin^2 u = 1$$

што је, у ствари, једначина елипсе.

Како је $\overline{LM_1} = a\sin u$, т. ј. $\dfrac{\overline{LM}}{\overline{LM_1}} = \dfrac{a}{b}$, то елипса PCA настаје скраћивањем ордината круга PC_1A у сразмери $\dfrac{b}{a}$. Због тога стоје површине сектора PSM и PSM_1 елипсе односно круга у истој тој сразмери, па је зато:

$$\text{area } PSM = \frac{b}{a} \text{ area } PSM_1.$$

Нека нам сада елипса $PCADP$ претставља путању планете око Сунца, па нека нам S претставља ону жижу те елипсе у којој се налази Сунце, P перихел, а e ексцентрицитет елипсе. Онда је:

$$\text{area } PSM_1 = \text{area } POM_1 - \text{area } OSM_1 = \frac{1}{2} a^2 u - \frac{1}{2} a^2 e \sin u,$$

па зато:

$$\text{area } PSM = \frac{1}{2} a\, b\, (u - e \sin u).$$

Угао u који се појављује у предњој једначини зове се *ексцентрична аномалија.*

Сектор PSM елипсе расте, према другом Кеплеровом закону, пропорционално времену t. Означимо ли са τ *време пролаза планете кроз перихел,* то је време протекло од тог пролаза па до тренутка када је планета стигла у положај M једнако $(t - \tau)$. Помножимо ли тај интервал времена са секторском брзином $\frac{\pi\, a\, b}{T}$, то добивамо површину елипсиног сектора PSM. Зато је

$$\frac{\pi a b}{T}(t - \tau) = \frac{1}{2} a b\, (u - e \sin u),$$

т. ј.

$$\frac{2\pi}{T}(t - \tau) = u - e \sin u. \tag{60}$$

Количник

$$n = \frac{2\pi}{T} \tag{61}$$

претставља средњу угловну брзину планете или њено *средње кретање,* па је зато:

$$n\,(t - \tau) = u - e \sin u. \tag{62}$$

При томе је због (59) и (61) n дато једначином:

$$n^2 = f\frac{M+m}{a^3}. \tag{63}$$

Једначина (62) назива се *Кеплеровом једначином*; она даје везу између t и ексцентричне аномалије u. Да бисмо нашли везу између ексцентричне аномалије u и праве аномалије v, ваља поступити овако. Из троугла SLM следује $\overline{SM}^2 = \overline{SL}^2 + \overline{LM}^2$, т. ј.

$$\begin{aligned} r^2 &= (x - e\,a)^2 + y^2 = a^2\left[(\cos u - e)^2 + (1 - e^2)\sin^2 u\right] = \\ &= a^2\left[\cos^2 u - 2\,e\cos u + e^2 + \sin^2 u - e^2\sin^2 u\right] = \\ &= a^2(1 - e\cos u)^2 \end{aligned}$$

т. ј.

$$r = a(1 - e\cos u). \tag{64}$$

Из (41), (42), (43) и једначине (2) прве главе следује:

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1 + e\cos v}. \tag{65}$$

Последње две једначине дају:

$$1 - e^2 = (1 + e\cos v)(1 - e\cos u)$$

$$\cos v = \frac{\cos u - e}{1 - e\cos u}.$$

Зато је:

$$1 + \cos v = 2\cos^2\frac{v}{2} = \frac{(1-e)(1+\cos u)}{1 - e\cos u}$$

$$1 - \cos v = 2\sin^2\frac{v}{2} = \frac{(1+e)(1-\cos u)}{1 - e\cos u}$$

$$\operatorname{tang}^2\frac{v}{2} = \frac{1+e}{1-e}\,\frac{\dfrac{1-\cos u}{2}}{\dfrac{1+\cos u}{2}} = \frac{1+e}{1-e}\operatorname{tang}^2\frac{u}{2}$$

$$\text{(66)} \qquad \operatorname{tang} \frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tang} \frac{u}{2}.$$

Да нађемо, дакле, положај планете у њеној путањи који одговара времену t, треба применом једначине (62) наћи ексцентричну аномалију u планете, па затим помоћу (64) израчунати радиусвектор r, а помоћу (66) праву аномалију v. Време пролаза τ планете кроз перихел израчунава се из иницијалних услова на овај начин.

Нумеричка вредност φ_0 аргумента латитуде у иницијалном моменту је онај угао што га вектор положаја $\mathfrak{r}_0$ иницијалног момента затвара са јединичним вектором $\mathfrak{h}_0$, па је зато тај угао дат једначином:

$$\cos \varphi_0 = \left(\mathfrak{h}_0 \frac{\mathfrak{r}_0}{r_0} \right),$$

где је $\mathfrak{h}_0$ дато једначином (55), $\mathfrak{r}_0$ једначином (17), а r_0 једначином $r_0^2 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2$. Када се тај угао израчуна, онда је вредност праве аномалије у иницијалном моменту дата једначином $v_0 = \varphi_0 - \omega$. Помоћу (66) може се израчунати вредност u_0 ексцентричне аномалије у иницијалном моменту, па стављајући $t = t_0$; $u = u_0$ у (62) време τ.

Величина

$$\text{(67)} \qquad n\,(t-\tau) = 2\pi \frac{t-\tau}{T} = \zeta$$

назива се *средњом аномалијом* планете. Она је једнака правој аномалији оне фиктивне планете која би се кретала у равни планетске путање по кругу око Сунца униформном угловном брзином, а пролазила истовремено са стварном планетом кроз велику осу њене путање.

Разлика

$$\text{(68)} \qquad \xi = v - \zeta$$

између праве и средње аномалије планете зове се њена *једначина центра*.

§ 13. Елиптични елементи планетског кретања. До сада нисмо учинили још никакву претпоставку о просторној оријентацији употребљеног координатног система, пошто то није било од потребе за претходна теоретска расуђивања. У практичној примени те теорије потребно је тачно одредити положај координатног система. Тај се положај одабире овако: Раван $X—Y$ ваља положити у раван Земљине путање једне одређене епохе, на пример епохе 1,0 јануара 1900. Осу X ваља наперити према пролетњој тачки Υ (сл. 6) те исте епохе, а осу Z према северном полу еклиптике. Посматран са северне стране позитивни смер обилажења води, најкраћим путем, од осе X ка оси Y, у смислу противном сказаљки на сату.

У таквом једном координатном систему, може се, као што смо видели, положај равни планетске путање једнозначно одредити лонгитудом $\Omega = \text{arc}\, \Upsilon\, \Omega$ узлазног чвора и нагибом i равни путање. Оријентацију путањине елипсе одређивали смо, до сада, лонгитудом $\omega = \text{arc}\, \Omega P'$ перихела, мереном од узлазног чвора. Та се оријентација одређује у астрономској пракси лонгитудом Π, мереном од пролетне тачке Υ, а разумевајући под њом збир лукова $\Upsilon\, \Omega$ и $\Omega P'$ небеске сфере, који не леже у истом главном пресеку те сфере. Због тога је:

$$(69) \qquad \Pi = \text{arc}\, \Upsilon\, \Omega + \text{arc}\, \Omega P' = \Omega + \omega.$$

Елипса планетске путање одређена је једнозначно њеном великом полуосом a и њеним нумеричким ексцентрицитетом e. Тим величинама одређено је, при задатим масама M и m, једначином (63) средње кретање n планете, а једначином (61) њено сидерично време обилажења T. Потребно је још познавати положај планете у једном одређеном тренутку, па да се, из свих ових података, може израчунати положај планете у сваком произвољном моменту. Време τ пролаза планете кроз перихел, којим смо се до сада служили, претстављало је време једног одређеног положаја планете. Да бисмо у наше рачуне увели положај планете у једном одређеном моменту, поступићемо овако. Величина

$$(70) \qquad \lambda = \Pi + \nu$$

назива се *правом лонгитудом* планете, а величина

$$(71) \qquad l = \Pi + \zeta = \Pi + n(t - \tau) = \Pi - n\tau + nt$$

средњом лонгитудом планете. У иницијалном моменту $t = 0$, т. ј. у доба малочас одређене епохе од које бројимо време, има l вредност

$$(72) \qquad \varepsilon = \Pi - n\tau,$$

па се она назива *средњом лонгитудом епохе* и претставља тражену константу.

Свих шест елемената

$$(73) \qquad \Omega,\ i,\ \Pi,\ a,\ e,\ \varepsilon$$

зову се *елиптични елементи* или *елементи елиптичног кретања* планете.

§ 14. Проблем сателита, сведен на проблем двају тела. Нека нам m означава једну планету а m_1 сателит који око ње обилази. Означимо вектор положаја масе m са $\mathfrak{R}$, а вектор положаја масе m_1 са $\mathfrak{l}$, то је положај сателита према планети одређен вектором:

$$(74) \qquad \mathfrak{r} = \mathfrak{l} - \mathfrak{R}.$$

Сви сателити нашег планетског система круже у тако уским путањама око њихових планета да је скаларна величина r вектора $\mathfrak{r}$ веома малена према отстојању ϱ планете од Сунца. Због тога је дозвољено отстојање сателита од Сунца узети једнако ϱ, а, из истог разлога, претпоставити да су силе којима Сунце привлачи планету односно сателит, а које ћемо означити са $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F}'$, међусобно паралелне. Означимо ли, дакле, јединични вектор у правцу од планете према Сунцу са $\mathfrak{f}_0$, а масу Сунца са M, то дејствује на планету ова привлачна сила Сунца

$$\mathfrak{F} = f\frac{Mm}{\varrho^2}\mathfrak{f}_0,$$

а на сателит

$$\mathfrak{F}' = f\frac{Mm_1}{\varrho^2}\mathfrak{f}_0.$$

Ставимо ли

$$(75) \qquad f\frac{M}{\varrho^2} = k,$$

то је:

$$\mathfrak{F} = km\,\mathfrak{f}_0; \qquad \mathfrak{F}' = km_1\,\mathfrak{f}_0.$$

Ако не узмемо у обзир, због тога што су веома малена, привлачна дејства осталих чланова нашег планетског система, то дејствује на планету, поред силе $\mathfrak{F}$, још и привлачна сила сателита, претстављена изразом $f\dfrac{m\,m_1}{r^3}\,\mathfrak{r}$, а на сателит, поред силе $\mathfrak{F}'$, привлачна сила планете, претстављена изразом $-f\dfrac{m\,m_1}{r^3}\,\mathfrak{r}$. Због тога су диференцијалне једначине кретања планете односно сателита ове:

$$(76) \qquad m\frac{d^2\mathfrak{R}}{dt^2} = f\frac{m\,m_1}{r^3}\,\mathfrak{r} + km\,\mathfrak{f}_0$$

$$(77) \qquad m_1\frac{d^2\mathfrak{l}}{dt^2} = -f\frac{m\,m_1}{r^3}\,\mathfrak{r} + km_1\,\mathfrak{f}_0.$$

Збир ових двеју једначина даје:

$$(78) \qquad m\frac{d^2\mathfrak{R}}{dt^2} + m_1\frac{d^2\mathfrak{l}}{dt^2} = k\,(m+m_1)\,\mathfrak{f}_0$$

Ако нам тачка S претставља центар маса m и m_1, то је њен вектор положаја $\mathfrak{s}$ дат следећом једначином:

$$(79) \qquad (m+m_1)\,\mathfrak{s} = m\,\mathfrak{R} + m_1\,\mathfrak{l}.$$

Одавде следује:

$$(m+m_1)\frac{d^2\mathfrak{s}}{dt^2} = m\frac{d^2\mathfrak{R}}{dt^2} + m_1\frac{d^2\mathfrak{l}}{dt^2}\,.$$

Зато је, због (78) и (75),

$$(80) \qquad (m+m_1)\frac{d^2\mathfrak{s}}{dt^2} = f\,\frac{M\,(m+m_1)}{\varrho^2}\,\mathfrak{f}_0.$$

Ово је једначина кретања центра маса S. Она казује да се заједничко тежиште планете и њеног сателита креће око Сунца тако као да је у том тежишту концентрисана маса $(m+m_1)$, а ова да је привлачена од Сунца.

Скратимо ли једначину (76) са m, а једначину (77) са m_1, па одузмемо ли једну од друге, то добивамо једначину:

$$\frac{d^2\mathfrak{l}}{dt^2}-\frac{d^2\mathfrak{R}}{dt^2}=-f\frac{(m+m_1)}{r^3}\mathfrak{r}.$$

Пошто је, због (74),

$$\frac{d^2\mathfrak{l}}{dt^2}-\frac{d^2\mathfrak{R}}{dt^2}=\frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2},$$

то следује:

$$(81)\qquad m_1\frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2}=-f\frac{m_1(m+m_1)}{r^3}\mathfrak{r}.$$

Ово је диференцијална једначина кретања сателита око планете. Она казује да се сателит креће око планете тако као кад би ова била непомична, имала масу $(m+m_1)$ и само она дејствовала по Њутновом закону на сателит. Тиме је проблем сателита редукован на проблем двају тела. Означимо ли, дакле, време обилажења сателита око планете са T_1, а са a_1 велику полуосу његове релативне путање око планете, то добивамо, користећи се једначином (59) из проблема двају тела:

$$(82)\qquad f(m+m_1)=4\pi^2\frac{a_1^3}{T_1^2}.$$

Означимо ли са T време обилажења планете око Сунца, а са a велику полуосу планетске путање, то је, исто тако:

$$(83)\qquad f(M+m+m_1)=4\pi^2\frac{a^3}{T^2}.$$

Из последњих двају једначина следује:

$$\frac{m+m_1}{M+m+m_1}=\left(\frac{a_1}{a}\right)^3\left(\frac{T}{T_1}\right)^2.$$

Маса m_1 је, углавном, толико малена према маси m да је, у предњем изразу, можемо занемарити; то исто важи, у још већој мери, за масу m у односу према маси M. Зато је, доста тачно

$$\frac{m}{M} = \left(\frac{a_1}{a}\right)^3 \left(\frac{T}{T_1}\right)^2. \tag{84}$$

Служећи се овом једначином, може се из времена обилажења сателита и велике полуосе његове путање израчунати однос масе m планете према маси M Сунца.

На овај начин је Њутн у својим принципијима израчунао масе Земље, Јупитра и Сатурна. Планете Уранус и Нептун биле су онда још непознате, а исто тако и Марсови сателити.

ГЛАВА ТРЕЋА

Општи интеграли проблема n тела.

§ 15 Проблем n **тела.** Уочимо произвољан број небеских тела која се привлаче по Њутновом закону. Задатак, да се из иницијалних услова одреди кретање тих тела, зове се проблем n тела Небеске Механике. Изразимо тај задатак језиком математске анализе. Означимо, у то име, са m_1, m_2, m_3 . . . . . m_n масе уочених небеских тела, а са $\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \mathfrak{r}_3 \ldots \ldots \mathfrak{r}_n$ векторе положаја њихових тежишта у једном одабраном координатном систему који сматрамо непомичним. Привлачне силе које дејствују између двеју произвољних маса m_i и m_k тога материјалног система могу се математски претставити на овај начин.

Релативни положај масе m_k према маси m_i претстављен је вектором

$$\mathfrak{l}_{ik} = \mathfrak{r}_k - \mathfrak{r}_i \,.$$

Ако са ϱ_{ik} означимо модуо вектора $\mathfrak{l}_{ik}$, то нам $\dfrac{\mathfrak{l}_{ik}}{\varrho_{ik}}$ претставља јединични вектор правца од m_i ка m_k, а $\dfrac{\mathfrak{l}_{ki}}{\varrho_{ki}}$ јединични вектор противнога правца. Како ϱ_{ik} и ϱ_{ki} претстављају дужи које ваља увек сматрати позитивнима, то је увек:

$$\varrho_{ik} = \varrho_{ki}.$$

Из претходнога следује да маса m_k дејствује на масу m_i силом која је претстављена следећим изразом:

$$f m_i\, m_k \frac{1}{\varrho_{ik}^2} \cdot \frac{\mathfrak{l}_{ik}}{\varrho_{ik}} = f m_i\, m_k \frac{\mathfrak{r}_k - \mathfrak{r}_i}{\varrho_{ik}^3}.$$

Привлачна дејства осталих маса $m_1, m_2 \ldots . m_n$ на масу m_i добићемо ако у горњем изразу индекс k заменимо са 1, 2, 3 . . . . n. Због тога ће једначина кретања масе m_i бити ова:

$$m_i \frac{d^2\mathfrak{r}_i}{dt^2} = \sum_k f m_i\, m_k \frac{\mathfrak{r}_k - \mathfrak{r}_i}{\varrho_{ik}^3},$$

при чему се знак збира односи на све масе система са јединим изузетком масе m_i. Ова нам једначина претставља, у исти мах, једначину кретања сваке произвољне масе $m_1, m_2, \ldots . m_n$ система, ако само индекс i заменимо са 1, 2, 3, . . . n. Зато нам n векторских једначина:

$$m_i \frac{d^2\mathfrak{r}_i}{dt^2} = \sum_k f m_i\, m_k \frac{\mathfrak{r}_k - \mathfrak{r}_i}{\varrho_{ik}^3};\quad i = 1, 2, 3 \ldots n \tag{1}$$

претстављају диференцијалне једначине кретања маса $m_1, m_2 \ldots m_n$. Ово су све диференцијалне једначине другога реда, па би њихова потпуна интеграција дала $2n$ векторских или $6n$ скаларних једначина, којима би вектори положаја и вектори брзина тих n маса били изражени као функције времена. Садашњим математским сретствима могуће је, међутим, извести само три векторска и један скаларни тих интеграла. Ти се интеграли зову општи интеграли проблема n тела.

§ 16. Општи интеграли проблема *n* тела. У једначинама (1) појављује се свака комбинација двеју произвољних маса m_i и m_k два пута. Стоји ли, у тима једначинама, лево израз $m_i \frac{d^2\mathfrak{r}_i}{dt^2}$, онда се десно, у назначеном збиру, појављује члан $f m_i\, m_k \frac{\mathfrak{r}_k - \mathfrak{r}_i}{\varrho^3_{ik}}$, а када лево стоји израз $m_k \frac{d^2\mathfrak{r}_k}{dt^2}$, онда се десно појављује члан $f m_k\, m_i \frac{\mathfrak{r}_i - \mathfrak{r}_k}{\varrho^3_{ki}}$. Како је $\varrho_{ik} = \varrho_{ki}$, то су ти парови чланова, из којих је састављен целокупан скуп десних страна горњих једначина, опште претстављени овим:

$$f m_i m_k \frac{\mathfrak{r}_k - \mathfrak{r}_i}{\varrho_{ik}^3}; \qquad f m_i m_k \frac{\mathfrak{r}_i - \mathfrak{r}_k}{\varrho_{ik}^3}.$$

Саберемо ли, према томе, свих n једначина (1), то се де- а страна тога збира може расчланити у саме такве парове, како сваки такав пар даје:

$$f m_i m_k \frac{\mathfrak{r}_k - \mathfrak{r}_i}{\varrho_{ik}^3} + f m_i m_k \frac{\mathfrak{r}_i - \mathfrak{r}_k}{\varrho_{ik}^3} = 0,$$

› ће цела десна страна тога збира бити једнака нули, па зато лева. Тако добивамо:

$$\sum_{i=1}^{i=n} m_i \frac{d^2\mathfrak{r}_i}{dt^2} = 0. \tag{2}$$

Помножимо ли једначине (1), редом, векторијелно са $\mathfrak{r}_1$, ... $\mathfrak{r}_n$, па саберемо ли их затим, то ће у десном збиру сваки ;говарајући пар чланова дати:

$$f \frac{m_i m_k}{\varrho_{ik}^3}\left\{[\mathfrak{r}_i(\mathfrak{r}_k - \mathfrak{r}_i)] + [\mathfrak{r}_k(\mathfrak{r}_i - \mathfrak{r}_k)]\right\} =$$

$$= f \frac{m_i m_k}{\varrho_{ik}^3}\left\{[\mathfrak{r}_i \mathfrak{r}_k] + [\mathfrak{r}_k \mathfrak{r}_i]\right\} = 0,$$

а ће зато десна страна тога збира бити једнака нули, а зато лева. Због тога је:

$$\sum_{i=1}^{i=n} m_i \left[\mathfrak{r}_i \frac{d^2\mathfrak{r}_i}{dt^2}\right] = 0. \tag{3}$$

Помножимо ли једначине (1), редом, скаларно са $d\mathfrak{r}_1$, $\mathfrak{r}_2$ .... $d\mathfrak{r}_n$ па саберемо ли их, то ће у десном збиру сваки д споменутих парова дати:

$$f \frac{m_i m_k}{\varrho_{ik}^3}\left\{(\mathfrak{r}_k - \mathfrak{r}_i)\,d\mathfrak{r}_i + (\mathfrak{r}_i - \mathfrak{r}_k)\,d\mathfrak{r}_k\right\} =$$

$$= -f \frac{m_i m_k}{\varrho_{ik}^3}(\mathfrak{r}_k - \mathfrak{r}_i)(d\mathfrak{r}_k - d\mathfrak{r}_i).$$

$$(\mathfrak{r}_k - \mathfrak{r}_i)(d\mathfrak{r}_k - d\mathfrak{r}_i) = \mathfrak{l}_{ik}\, d\mathfrak{l}_{ik} = \varrho_{ik}\, d\varrho_{ik},$$

то се сваки овај пар редукује на $-f\dfrac{m_i\, m_k}{\varrho_{ik}^2}\, d\varrho_{ik}$, па је зато:

$$(4) \qquad \sum_{i=1}^{i=n} m_i \frac{d^2\mathfrak{r}_i}{dt^2}\, d\mathfrak{r}_i = -f\sum_i\sum_k \frac{m_i\, m_k}{\varrho_{ik}^2}\, d\varrho_{ik}\,.$$

У горњем двоструком збиру десне стране појављује се свака комбинација маса m_i и m_k само поједанпут, пошто је сваки од горњих парова дао само по један члан.

Диференцијалне једначине (2), (3) и (4), које смо на тај начин добили, могу се лако интегрисати. Из (2) следује:

$$(5) \qquad \sum_{i=1}^{i=n} m_i \frac{d\mathfrak{r}_i}{dt} = \mathfrak{B}\,,$$

где $\mathfrak{B}$ означава један константни вектор, независан од времена.

Интеграцијом претходне једничине добивамо:

$$(6) \qquad \sum_{i=1}^{i=n} m_i\, \mathfrak{r}_i = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}t\,,$$

где је вектор $\mathfrak{A}$ независан од времена.

Како је, сасвим опште,

$$\frac{d}{dt}\left[\mathfrak{r}_i\, \frac{d\mathfrak{r}_i}{dt}\right] = \left[\mathfrak{r}_i\, \frac{d^2\mathfrak{r}_i}{dt^2}\right],$$

то можемо једначину (3) заменити овом:

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{i=n} m_i \left[\mathfrak{r}_i\, \frac{d\mathfrak{r}_i}{dt}\right] = 0\,.$$

Интеграција ове једначине даје:

$$(7) \qquad \sum_{i=1}^{i=n} m_i \left[\mathfrak{r}_i\, \frac{d\mathfrak{r}_i}{dt}\right] = \mathfrak{C},$$

где $\mathfrak{C}$ претставља опет један константан вектор.

И једначина (4) може се лако интегрисати. Њена десна страна је, у ствари, диференцијал скаларнога израза:

$$U = f \sum_{i} \sum_{k} \frac{m_i \, m_k}{\varrho_{ik}}, \tag{8}$$

у којем се, као што смо већ напоменули, свака комбинација маса m_i и m_k појављује само поједанпут. Скалар U назива се *функцијом сила* посматраног материјалног система. Како је:

$$\frac{d\mathfrak{r}_i}{dt} = \mathfrak{v}_i \,; \qquad \frac{d^2\mathfrak{r}_i}{dt^2}\, d\mathfrak{r}_i = \frac{d\mathfrak{v}_i}{dt}\, d\mathfrak{r}_i = \mathfrak{v}_i \, d\mathfrak{v}_i = v_i \, dv_i \,,$$

при чему $\mathfrak{v}_i$ претставља вектор брзине масе m_i, а v_i његов модуо, то се једначина (4) може заменити овом:

$$\sum_{i=1}^{i=n} m_i \, v_i \, dv_i = dU \,.$$

Интеграција те једначине даје:

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{m_i \, v_i^2}{2} = U + h \,, \tag{9}$$

при чему h означава интеграциону константу.

Нађена три векторска интеграла (5), (6), (7) и скаларни (9) који се, сви заједно, могу заменити са десет скаларних једначина, зову се општи интеграли проблема n тела.

Оба векторска интеграла (5) и (6) називају се интегралима тежишта, и то из овог разлога. Вектор положаја $\mathfrak{S}$ тежишта, боље рећи, центра маса $m_1, m_2 \ldots . m_n$ дат је, према самој својој дефиницији, једначином:

$$M \mathfrak{S} = \sum_{i=1}^{i=n} m_i \, \mathfrak{r}_i \,, \tag{10}$$

где

$$M = \sum_{i=1}^{i=n} m_i \tag{11}$$

означава целокупну масу посматраног материјалног система. Пошто је вектор брзине $\mathfrak{B}$ тежишта претстављен са

$$\mathfrak{B} = \frac{d\mathfrak{S}}{dt},$$

то добивамо диференцијацијом једначине (10) по времену:

$$M\mathfrak{B} = \sum_{i=1}^{i=n} m_i \frac{d\mathfrak{r}_i}{dt}. \tag{12}$$

Из (5) и (12) следује:

$$\mathfrak{B} = \frac{1}{M}\mathfrak{B}, \tag{13}$$

а из (6) и (10)

$$\mathfrak{S} = \frac{1}{M}\mathfrak{A} + \frac{1}{M}\mathfrak{B}\,t. \tag{14}$$

Једначина (13) казује да је вектор брзине тежишта целокупног система један константан вектор, због чега се то тежиште креће у простору праволинијски и униформно. Путања тога тежишта претстављена је, у векторском облику, једначином (14) у којој t игра улогу параметра; $\frac{\mathfrak{A}}{M}$ је вектор почетног положаја тежишта за $t = 0$.

Векторски интеграл (7) назива се и интегралом површина, а то због овога. Израз $\left[\mathfrak{r}_i \frac{d\mathfrak{r}_i}{dt}\right]$ претставља, као што смо то већ у проблему двају тела образложили, двоструку вредност ориентиране површине коју вектор положаја $\mathfrak{r}_i$ масе m_i пребрише у јединици времена. Једначина (7) казује да је векторски збир свих ориентисаних површина пребрисаних од вектора положаја $\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2 \ldots \mathfrak{r}_n$ у јединици времена, а помножених, пре сабирања, са одговарајућим масама, један сталан вектор.

Интеграли (5) и (6) које можемо писати и у овом облику:

$$\sum_{i=1}^{i=n} m_i\, \mathfrak{v} = \mathfrak{B} \tag{15}$$

$$(16) \qquad \sum_{i=1}^{i=n} m_i \, [\, \mathfrak{r}_i \, \mathfrak{v}_i \,] = \mathfrak{C}$$

називају се и интегралима количине кретања или интегралима импулса, а то због овога. Вектор

$$(17) \qquad \mathfrak{P} = m_i \, \mathfrak{v}_i$$

назива се количином кретања или импулсом масе m_i . Из последњих трију следују ове две једначине:

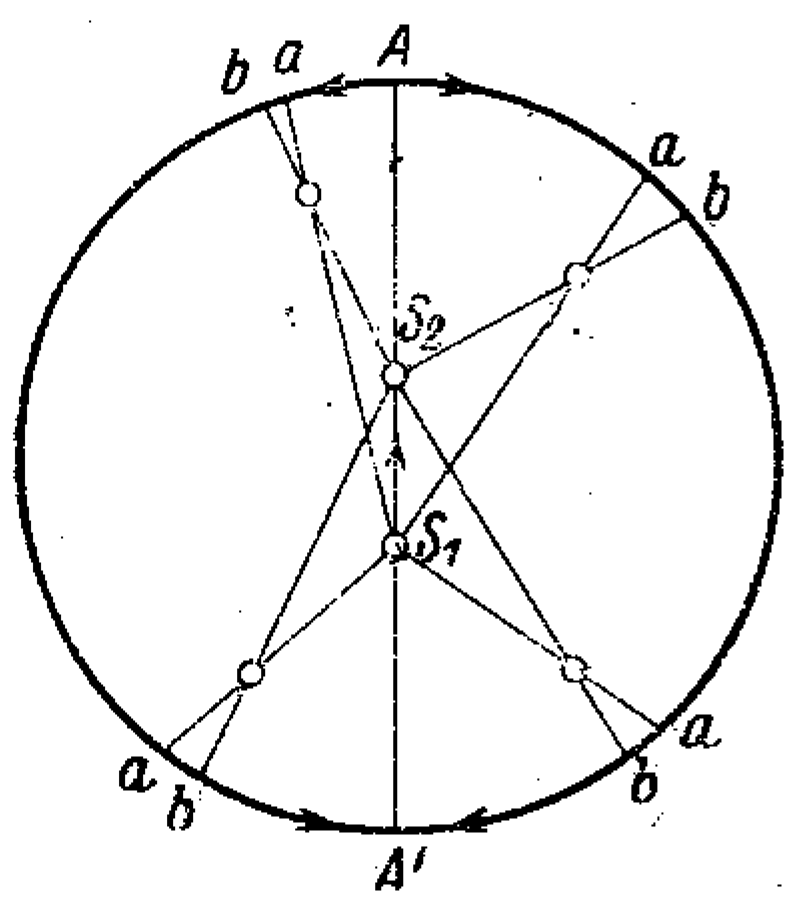
$$\sum_{i=1}^{i=n} \mathfrak{P}_i = \mathfrak{B}; \qquad \sum_{i=1}^{i=n} [\, \mathfrak{r}_i \, \mathfrak{P}_i \,] = \mathfrak{C}.$$

Оне казују да је збир импулса свих маса система, а и збир њихових момената обзиром на тачку O, независан од времена.

Интеграл (9) назива се интегралом живе силе, јер лева страна те једначине претставља живу силу посматраног материјалног система.

§ 17. Транслаторно кретање Сунчевог система. Општи интеграли проблема n тела дозвољавају, примењени на наш Сунчев систем, праволинијско униформно кретање тежишта тог система према систему звезда некретница, што је већ Њутн увидео. Полазећи од тога сазнања, покушао је, први, В. Хершел, а за њим и многи други астрономи, да одреде то кретање нашег планетског система по методу којега је основна идеја ова.

Положај тежишта планетског система зависи од тренутне констелације планета према Сунцу. Због огромне масе Сунца, лежи то тежиште увек у близини самога Сунца, па се, при истовременој опозицији свих планета, може удаљити од центра Сунца највише за 2,2 полупречника Сунчева. Како је годишња паралакса звезда некретница толико малена да је тек у прошлом веку могла бити констатована, то је отстојање звезда некретница од планетског система толико огромно да стајалиште земаљског посматрача можемо без икакве осетне грешке идентификовати са тежиштем планетског система. Нека буде, дакле, S_1 (сл. 8) положај тога тежишта у времену t_1. Креће ли се тежиште планетског система у правцу A' A, то ће у једном другом моменту t_2 времена стајалиште посматрача бити друго, па нека буде претстављено тачком S_2. Претпоставимо да звезде некретнице немају властитог кретања, онда ће оне из стајалишта S_1 посматрачевог изгледати пројициране у тачке a небеске сфере, а из стајалишта S_2 у тачке b. Транслаторно кретање планетског система има, према томе, за последицу да се звезде некретнице од тачке A небеске сфере привидно удаљују да би се, крећући се по главним круговима небеске сфере положеним кроз тачке A и A', приближавале тачки A'. Властита кретања звезда некретница помућавају ову једноставну слику и отежавају знатно тачно одређивање тачака A и A' небеске



Сл. 8.

сфере, од којих се A зове апекс, а A' антиапекс. Зато је било потребно користити се статистичким методама, па се, на тај начин, нашло да се цео наш планетски систем креће брзином од каквих 20 километара у секунди према оној тачки звезданог неба којој одговара ректасцензија од округло 270°, а деклинација од округло 30°.

При томе кретању црта тежиште планетског система праву линију, око ове се обавија путања тежишта Сунчевог, непрекорачавајући саопштену максималну елонгацију. Планете описују, при томе, елиптичне, због кретања Сунца лако заталасане хеликоидалне линије, а висина хода тих линија пропорционална је времену обилажења појединих планета.

§ 18. Лапласова инвариабилна раван. Транслаторна кретања свих чланова нашег планетског система одређују, према резултатима § 16, један вектор $\mathfrak{C}$, независан од времена. Тај смо вектор одредили уз претпоставку да познајемо апсолутна кретања у простору или бар кретања према једном координатном систему који можемо сматрати као непомичан. Но ми апсолутна кретања у простору не само да не познајемо, него не можемо, према садашњем схватању науке, о њима ни говорити, нити смо у стању да одаберемо једну непомичну тачку у простору. Због тога можемо говорити само о релативним кретањима. Зато постављамо питање како стоји са вектором $\mathfrak{C}$, ако почетак O нашег координатног система положимо у једну одређену тачку нашег планетског система, а тај координатни систем ориентишемо тако да се не заокреће према небу звезда некретница. Вектор положаја тачке O у бившем, мирујућем координатном систему, на који су се односили расуђивања и ознаке § 16, нека буде означен са $\mathfrak{R}$, онда су, употребом споменутих ознака, вектори положаја маса $m_1, m_2 \ldots . m_n$ у новом систему претстављени са

$$(\mathfrak{r}_1 - \mathfrak{R}), \qquad (\mathfrak{r}_2 - \mathfrak{R}), \quad \ldots . . (\mathfrak{r}_n - \mathfrak{R}).$$

Одаберимо још једну, другу, тачку M нашег планетског система која се, у уоченом моменту, креће у првом мирујућем систему брзином $\mathfrak{v}_0$, онда су релативне брзине маса m_1, $m_2 \ldots$ $\ldots m_n$ према тачки M претстављене изразима:

$$(\mathfrak{v}_1 - \mathfrak{v}_0), \qquad (\mathfrak{v}_2 - \mathfrak{v}_0), \quad \ldots . . (\mathfrak{v}_n - \mathfrak{v}_0).$$

Конструишимо сада један вектор $\mathfrak{E}$ на исти начин као и вектор $\mathfrak{C}$ § 16, само са том разликом да векторе апсолутног положаја заменимо са векторима релативног положаја према тачки O, а векторе апсолутних брзина са векторима релативних брзина према тачки M. Тај ће вектор онда бити претстављен изразом:

$$\mathfrak{E} = \sum_{i=1}^{i=n} m_i \left[(\mathfrak{r}_i - \mathfrak{R})(\mathfrak{v}_i - \mathfrak{v}_0) \right]. \tag{18}$$

Извршимо назначена множења у горњем изразу и извадимо пред знак збира оно што је у њему заједничко. На тај начин добивамо:

$$\mathfrak{C} = \sum m_i\,[\,\mathfrak{r}_i\,\mathfrak{v}_i\,] - \sum m_i\,[\,\mathfrak{R}\,\mathfrak{v}_i\,] - \sum m_i\,[\mathfrak{r}_i\,\mathfrak{v}_0] + \\ + \sum m_i\,[\mathfrak{R}\,\mathfrak{v}_0]$$

$$\mathfrak{C} = \sum m_i\,[\,\mathfrak{r}_i\,\mathfrak{v}_i\,] - [\,\mathfrak{R}\sum m_i\,\mathfrak{v}_i\,] + [\mathfrak{v}_0\sum m_i\,\mathfrak{r}_i\,] + \\ + [\mathfrak{R}\,\mathfrak{v}_0]\sum m_i\,.$$

Како је према (11), (10), (12) и (16)

$$\sum m_i = M\,; \qquad \sum m_i\,\mathfrak{r}_i = M\,\mathfrak{S}\,; \qquad \sum m_i\,\mathfrak{v}_i = M\,\mathfrak{V};$$
$$\sum m_i\,[\,\mathfrak{r}_i\,\mathfrak{v}_i\,] = \mathfrak{C},$$

то добивамо:

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{C} - M\,\{[\mathfrak{R}\,\mathfrak{V}] + [\mathfrak{S}\,\mathfrak{v}_0] - [\mathfrak{R}\,\mathfrak{v}_0]\}. \tag{19}$$

Овај израз није независан од времена, јер су у њему $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{v}_0$, $\mathfrak{S}$ променљиве величине.

Положимо сада почетак O нашег координатног система у тежиште планетског система, ставимо, дакле, $\mathfrak{R} = \mathfrak{S}$, то добивамо:

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{C} - M\,[\mathfrak{S}\,\mathfrak{V}].$$

Оставимо ли почетак O нашег координатног система у произвољној тачки планетског система, али зато положимо тачку M, према којој меримо релативне брзине, у тежиште планетског система, то ваља у (19) ставити $\mathfrak{v}_0 = \mathfrak{V}$, па добивамо:

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{C} - M\,[\mathfrak{S}\,\mathfrak{V}].$$

Сместимо ли, на послетку, обе тачке сравњивања O и M у тежиште планетског система, то ваља у (19) ставити $\mathfrak{R} = \mathfrak{S}$, $\mathfrak{v}_0 = \mathfrak{V}$, па добивамо:

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{C} - M\,[\mathfrak{S}\,\mathfrak{V}]. \tag{20}$$

Видимо, дакле, да у сва три случаја добивамо један те исти вектор $\mathfrak{C}$. Потражимо извод тога вектора по времену. Он је претстављен изразом:

$$\frac{d\mathfrak{C}}{dt} = \frac{d\mathfrak{C}}{dt} - M\left[\frac{d\mathfrak{S}}{dt}\,\mathfrak{V}\right] - M\left[\mathfrak{S}\,\frac{d\mathfrak{V}}{dt}\right].$$

$\mathfrak{C}$ и $\mathfrak{B}$ су, као што смо то показали у § 16, константни вектори, па је зато $\frac{d\mathfrak{C}}{dt} = \frac{d\mathfrak{B}}{dt} = 0$, а како је још $\frac{d\mathfrak{S}}{dt} = \mathfrak{B}$ то из предње једначине следује:

$$\frac{d\mathfrak{E}}{dt} = 0, \tag{21}$$

што значи да је вектор $\mathfrak{E}$ независан од времена.

Тако нам и релативна кретања у планетском систему одређују, при одговарајућем избору тачака сравњивања O и M, један вектор $\mathfrak{E}$ непомичан према мирујућем координатном систему звезда некретница.

Раван која стоји нормално на вектору $\mathfrak{E}$ има непромењиву оријентацију у простору, па се зове *Лапласова инвариабилна раван*.

Координате вектора $\mathfrak{E}$ у координатном систему еклиптике произвољне једне епохе могу се израчунати помоћу једначине (18) из сваке тренутне међусобне констелације чланова планетског система и из њихових релативних брзина. Када су те координате, које ћемо означити са E_1, E_2, E_3 израчунате, онда су, на исти начин на који смо у § 10 одредили раван планетске путање, нагиб i и лонгитуда Ω узлазног чвора инвариабилне равни дати овим једначинама:

$$\left\{\begin{aligned} E &= \sqrt{E_1^2 + E_2^2 + E_3^2} \\ E_3 &= E \cos i \\ E_1 &= E \sin \Omega \sin i \\ E_2 &= -E \cos \Omega \sin i, \end{aligned}\right. \tag{22}$$

чиме је њен положај једнозначно одређен.

ГЛАВА ЧЕТВРТА

Проблем трију тела.

§ 19. Центар атракције трију тела. Ако је, у проблему n тела, $n=3$, онда се тај проблем редукује на проблем трију тела. Означимо ли, као и до сада, масе тих трију тела са m_1, m_2, m_3 а њихове векторе положаја са $\mathfrak{r}_1$, $\mathfrak{r}_2$, $\mathfrak{r}_3$, онда су векторске једначине кретања тих небеских тела, обзиром на (1) § 15, ове:

$$(1) \qquad m_i \frac{d^2\mathfrak{r}_i}{dt^2} = \sum_k f\, m_i\, m_k \frac{\mathfrak{r}_k - \mathfrak{r}_i}{\varrho_{ik}^3} \qquad i=1,\, 2,\, 3,$$

где f означава гравитациону константу, а ϱ_{ik} отстојање маса m_i и m_k при чему ваља у десном збиру узети у обзир само комбинације различитих двеју од уочених трију маса.

Ове три векторске једначине другог реда дале би, потпуно интегрисане, 6 векторских или 18 скаларних интеграла, којима би вектори положаја и вектори брзина уочених трију маса били претстављени као функције времена. Од тих 18 скаларних интеграла познајемо, као што је показано у § 16, само њих 10, па је проблем трију тела, у општем случају, нерешљив садањим сретствима математике. Само у специјалним случајевима могуће је, као што ћемо видети, решити тај проблем у његовој потпуности, у коначном облику.

Пре но што приступимо изналажењу тих егзактних решења проблема, извешћемо неке корисне конзеквенције из горњих једначина кретања. Означимо ли Њутнове атракционе силе које дејствују на масе m_1, m_2, m_3 уочених трију тела, тим редом, са $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$, $\mathfrak{P}_3$, то је, према основној особини једначине кретања слободнога тела,

$$(2) \qquad m_i \frac{d^2\mathfrak{r}_i}{dt^2} = \mathfrak{P}_i\ ; \quad i = 1, 2, 3.$$

Из једначине (2) § 16, следује онда:

$$(3) \qquad \sum_{i=1}^{i=3} \mathfrak{P}_i = 0,$$

или

$$(4) \qquad \mathfrak{P}_1 + \mathfrak{P}_2 + \mathfrak{P}_3 = 0,$$

док нам једначина (3) § 16, даје:

$$(5) \qquad \sum_{i=1}^{i=3} [\, \mathfrak{r}_i \, \mathfrak{P}_i \,] = 0$$

т. ј.

$$(6) \qquad [\mathfrak{r}_1 \mathfrak{P}_1] + [\mathfrak{r}_2 \mathfrak{P}_2] + [\mathfrak{r}_3 \mathfrak{P}_3] = 0 .$$

Силе $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$, $\mathfrak{P}_3$, леже, све три, у равни која пролази кроз тренутне положаје маса m_1, m_2, m_3, зато се силе $\mathfrak{P}_1$ и $\mathfrak{P}_2$ секу у једној тачки Г те равни. Померимо ли тачку O, на коју се односе вектори положаја $\mathfrak{r}_1$, $\mathfrak{r}_2$; $\mathfrak{r}_3$ у тачку Г, то је, пошто силе $\mathfrak{P}_1$ и $\mathfrak{P}_2$ пролазе кроз ту тачку,

$$[\mathfrak{r}_1 \mathfrak{P}_1] = [\mathfrak{r}_2 \mathfrak{P}_2] = 0,$$

па је зато због (6)

$$[\mathfrak{r}_3 \mathfrak{P}_3] = 0,$$

што значи да и сила $\mathfrak{P}_3$ пролази кроз тачку Г. Све три силе $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$, $\mathfrak{P}_3$ пролазе, дакле, кроз једну те исту тачку равни уочених трију тела. Ту тачку назваћемо, отступајући од назива који сам јој дао 1901 године, *центром атракције* посматраних трију тела.

Према резултатима § 16, креће се заједничко тежиште S посматраних трију тела праволинијски и униформно у простору.

Положимо ли почетак O нашег координатног система у то тежиште S и оријентишемо ли га тако да се не заокреће према систему звезда некретница, то можемо тај координатни систем, према општим принципима Рационалне Механике, сматрати као инерцијални или мирујући координатни систем. Пада ли и центар атракције Γ стално у ту тачку, онда можемо и тај центар сматрати непомичним, па ће уочена три тела бити изложена дејству сила које пролазе кроз један непомичан центар. У таквом случају биће решење проблема знатно упрошћено, па се зато намеће питање: који услови треба да буду испуњени да центар Γ атракције пада стално у тежиште S посматраних трију тела?

Вектор положаја $\mathfrak{S}$ тежишта S према тачки O нашег координатног система дат је једначином:

$$M\,\mathfrak{S} = m_1\,\mathfrak{r}_1 + m_2\,\mathfrak{r}_2 + m_3\,\mathfrak{r}_3,$$

где је

$$(7) \qquad M = m_1 + m_2 + m_3.$$

Померимо ли тачку O у само тежиште S, то је $\mathfrak{S} = 0$, па зато:

$$(8) \qquad m_1\,\mathfrak{r}_1 + m_2\,\mathfrak{r}_2 + m_3\,\mathfrak{r}_3 = 0\,.$$

Тежиште маса m_1, m_2, m_3 лежи увек у троуглу ограниченом тим масама, па су вектори положаја маса $\mathfrak{r}_1$, $\mathfrak{r}_2$, $\mathfrak{r}_3$ наперени од тога тежишта. Силе $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$, $\mathfrak{P}_3$ које дејствују на масе m_1, m_2, m_3 падају увек у унутрашње углове тог троугла и наперене су ка центру атракције који лежи такође у унутрашњости троугла. Услов да центар атракције и тежиште падну заједно биће, дакле, изражен једначинама:

$$(9) \qquad \mathfrak{P}_1 = -\lambda\,\mathfrak{r}_1; \qquad \mathfrak{P}_2 = -\mu\,\mathfrak{r}_2; \qquad \mathfrak{P}_3 = -\nu\,\mathfrak{r}_3,$$

где су λ, μ, ν позитивни скаларни фактори. Саберемо ли ове једначине то добивамо због (4)

$$(10) \qquad \lambda\,\mathfrak{r}_1 + \mu\,\mathfrak{r}_2 + \nu\,\mathfrak{r}_3 = 0.$$

Помножимо једначине (10) и (8) векториелно са $\mathfrak{r}_3$, то добивамо:

$$\lambda\,[\mathfrak{r}_1\,\mathfrak{r}_3] = -\mu\,[\mathfrak{r}_2\,\mathfrak{r}_3]; \qquad m_1\,[\mathfrak{r}_1\,\mathfrak{r}_3] = -m_2\,[\mathfrak{r}_2\,\mathfrak{r}_3],$$

т. ј. делећи ове једначине једну са другом,

$$\frac{\lambda}{m_1} = \frac{\mu}{m_2}.$$

Векториелним множењем једначина (10) и (8) са $\mathfrak{r}_1$ добивамо:

$$\frac{\mu}{m_2} = \frac{\nu}{m_3}.$$

Зато је:

$$\frac{\lambda}{m_1} = \frac{\mu}{m_2} = \frac{\nu}{m_3} = k,$$

где k означава, пошто су λ, μ, ν, m_1, m_2, m_3 саме позитивне величине, један позитиван скалар. Због тога је:

$$(11) \qquad \lambda = km_1; \quad \mu = km_2; \quad \nu = km_3.$$

Сва ова расуђивања важе и онда када све три масе падну у исту праву, јер важе за ону констелацију која се бесконачно мало разликује од праве. Стављајући (11) у (9), добивамо:

$$(12) \quad \mathfrak{P}_1 = -km_1\,\mathfrak{r}_1; \quad \mathfrak{P}_2 = -km_2\,\mathfrak{r}_2; \quad \mathfrak{P}_3 = -km_3\,\mathfrak{r}_3$$

Елиминишемо ли из (9) помоћу (8) прво m_1, па затим m_2 и m_3, то добивамо ове три једначине:

$$(13) \quad \begin{cases} -M\,\mathfrak{r}_1 = m_2(\mathfrak{r}_2 - \mathfrak{r}_1) + m_3(\mathfrak{r}_3 - \mathfrak{r}_1) \\ -M\,\mathfrak{r}_2 = m_3(\mathfrak{r}_3 - \mathfrak{r}_2) + m_1(\mathfrak{r}_1 - \mathfrak{r}_2) \\ -M\,\mathfrak{r}_3 = m_1(\mathfrak{r}_1 - \mathfrak{r}_3) + m_2(\mathfrak{r}_2 - \mathfrak{r}_3). \end{cases}$$

Стављајући овако добивене вредности за $\mathfrak{r}_1$, $\mathfrak{r}_2$, $\mathfrak{r}_3$, у (12) добивамо:

$$(14) \quad \begin{cases} \mathfrak{P}_1 = \frac{k}{M} m_1 m_2 (\mathfrak{r}_2 - \mathfrak{r}_1) + \frac{k}{M} m_1 m_3 (\mathfrak{r}_3 - \mathfrak{r}_1) \\ \mathfrak{P}_2 = \frac{k}{M} m_2 m_3 (\mathfrak{r}_3 - \mathfrak{r}_2) + \frac{k}{M} m_2 m_1 (\mathfrak{r}_1 - \mathfrak{r}_2) \\ \mathfrak{P}_3 = \frac{k}{M} m_3 m_1 (\mathfrak{r}_1 - \mathfrak{r}_3) + \frac{k}{M} m_3 m_2 (\mathfrak{r}_2 - \mathfrak{r}_3). \end{cases}$$

Означимо ли стране троугла ограниченог масама m_1, m_2, m_3 са a, b, c, т. ј. ставимо ли:

$$(15) \quad \varrho_{1,2} = \varrho_{2,1} = c; \quad \varrho_{2,3} = \varrho_{3,2} = a; \quad \varrho_{3,1} = \varrho_{1,3} = b,$$

то добивамо из једначина (1) и (2):

$$(16) \quad \begin{cases} \mathfrak{P}_1 = \frac{f}{c^3} m_1 m_2 (\mathfrak{r}_2 - \mathfrak{r}_1) + \frac{f}{b^3} m_1 m_3 (\mathfrak{r}_3 - \mathfrak{r}_1) \\ \mathfrak{P}_2 = \frac{f}{a^3} m_2 m_3 (\mathfrak{r}_3 - \mathfrak{r}_2) + \frac{f}{c^3} m_2 m_1 (\mathfrak{r}_1 - \mathfrak{r}_2) \\ \mathfrak{P}_3 = \frac{f}{b^3} m_3 m_1 (\mathfrak{r}_1 - \mathfrak{r}_3) + \frac{f}{a^3} m_3 m_2 (\mathfrak{r}_2 - \mathfrak{r}_3) . \end{cases}$$

Не леже ли уочена три тела у једној правој, то су правци вектора $\mathfrak{r}_1$, $\mathfrak{r}_2$, $\mathfrak{r}_3$ различити, па из (14) и (16) следује:

$$(17) \quad \frac{k}{M} = \frac{f}{a^3} = \frac{f}{b^3} = \frac{f}{c^3},$$

т. ј.

$$(18) \quad a = b = c.$$

Леже ли, дакле, масе m_1, m_2, m_3 (које могу бити сасвим произвољне) на врховима произвољног равностраног троугла, то у сваком таквом случају центар атракције пада у заједничко тежиште тих трију маса.

Леже ли све три масе у истој правој, па узмемо ли, за сада, да су те масе поредане овим редом: m_1, m_2, m_3 и обележимо ли јединични вектор тога правца са $\mathfrak{i}$, то је:

$$(19) \quad \mathfrak{r}_3 - \mathfrak{r}_2 = a\mathfrak{i}; \quad \mathfrak{r}_1 - \mathfrak{r}_3 = -b\mathfrak{i}; \quad \mathfrak{r}_2 - \mathfrak{r}_1 = c\mathfrak{i}.$$

У таквом случају добивамо место једначина (14) и (16) ове:

$$(20) \quad \begin{cases} \mathfrak{P}_1 = \frac{k}{M} m_1 m_2 c\,\mathfrak{i} + \frac{k}{M} m_1 m_3 b\,\mathfrak{i} \\ \mathfrak{P}_2 = \frac{k}{M} m_2 m_3 a\,\mathfrak{i} - \frac{k}{M} m_2 m_1 c\,\mathfrak{i} \\ \mathfrak{P}_3 = -\frac{k}{M} m_3 m_1 b\,\mathfrak{i} - \frac{k}{M} m_3 m_2 a\mathfrak{i} \end{cases}$$

$$
(21)\quad \left\{\begin{aligned}
\mathfrak{P}_1 &= \frac{f}{c^2}\, m_1 m_2\, \mathfrak{i} + \frac{f}{b^2}\, m_1 m_3\, \mathfrak{i} \\
\mathfrak{P}_2 &= \frac{f}{a^2}\, m_2 m_3\, \mathfrak{i} - \frac{f}{c^2}\, m_2 m_1\, \mathfrak{i} \\
\mathfrak{P}_3 &= -\frac{f}{b^2}\, m_3 m_1\, \mathfrak{i} - \frac{f}{a^2}\, m_3 m_2\, \mathfrak{i}\,.
\end{aligned}\right.
$$

Из ових једначина следују ове три:

$$
(22)\quad \left\{\begin{aligned}
\frac{k}{fM}\,(m_2 c + m_3 b) &= \frac{m_2}{c^2} + \frac{m_3}{b^2} \\
\frac{k}{fM}\,(m_3 a - m_1 c) &= \frac{m_3}{a^2} - \frac{m_1}{c^2} \\
\frac{k}{fM}\,(m_1 b + m_2 a) &= \frac{m_1}{b^2} + \frac{m_2}{a^2}\,.
\end{aligned}\right.
$$

Од ових једначина само су ~~три~~ независне, јер трећа следује из првих двеју.

Ставимо ли

$$
(23)\qquad \frac{a}{c} = z\,,
$$

то је, због (19),

$$
(24)\qquad b = a + c
$$

дакле

$$
(25)\qquad a = cz; \qquad b = c\,(1+z)\,.
$$

Поделимо ли прву од једначина (22) са трећом, то добивамо употребом предњих означења:

$$
\frac{m_2 + m_3\,(1+z)}{m_1\,(1+z) + m_2\, z} = \frac{m_2\, z^2\,(1+z)^2 + m_3 z^2}{m_1\, z^2 + m_3\,(1+z)^2}\,,
$$

т. ј.

$$(26)\quad m_1 z^2 [1-(1+z)^3] + m_2 (1+z)^2 (1-z^3) + \\ + m_3 [(1+z)^3 - z^3] = 0.$$

Ова једначина коју је већ, другим начином, извео Лагранж, одређује међусобни положај маса m_1, m_2, m_3 поређаних, тим редом, у једној правој тако да њихов центар атракције падне у њихово заједничко тежиште.

Да бисмо одредили број реалних коренова једначине (26), поредајмо њене чланове по падајућим потенцијама непознате z Тако уређена, има та једначина овај облик:

$$(27)\quad (m_1+m_2) z^5 + (3m_1+2m_2) z^4 + (3m_1+m_2) z^3 - \\ - (m_2+3m_3) z^2 - (2m_2+3m_3) z - (m_2+m_3) = 0.$$

Пошто су масе m_1, m_2 m_3 позитивне, то ова једначина има једну промену знака и четири његова понављања. Зато она има, по познатом Декартовом правилу, највише један позитиван, а највише четири негативна реална корена. Тај позитивни корен има једначина (27) насигурно, пошто је непарног степена, а њен апсолутни члан је негативан. Да видимо да ли она има уопште негативних стварних коренова. Заменимо, да бисмо то одредили, у (26) z са $-y$. Онда добивамо:

$$(28)\qquad m_1 y^2 [1-(1-y)^3] + m_2 (1-y)^2 (1+y^3) + \\ + m_3 [(1-y)^3 + y^3] = 0$$

па питајмо да ли ова једначина може имати позитивних реалних коренова. Ако је y позитивно, то је, било $0 < y < 1$, било $y > 1$,

$$y^2 [1-(1-y)^3] > 0; \quad (1-y)^2 (1+y^3) > 0; \quad [(1-y)^3 + y^3] > 0,$$

што значи да су у једначини (28) коефициенти од m_1, m_2, m_3 позитивни; како су и масе m_1, m_2, m_3, позитивне, то тај израз не може бити једнак нули. Зато Лагранжова једначина не може имати негативних коренова, него само онај један позитиван, који одређује положај средње масе m_2 између обеју крајних m_1 и m_3.

Променимо ли ред маса тако да он буде овај: m_2, m_1, m_3 или овај: m_1, m_3, m_2, то добивамо по Лагранжовој једначини још две ове констелације које имају ту особину да њихов центар тракције пада у заједничко тежиште тих маса. Тима трима онстелацијама одређена је сразмера отстојања средње масе д обеју крајњих; апсолутна отстојања тих маса су, задржавајући само ону сразмеру, произвољна.

§ 20. Егзактна решења проблема трију тела. У једој својој класичној расправи о проблему трију тела, показао Лагранж да се тај проблем може решити у коначном облику ıмо у специјалним случајевима, па се њихова решења зову егıктна решења проблема трију тела. Користећи се резултатима эошлог параграфа, показаћемо да су ти случајеви они у којима констелација маса m_1, m_2, m_3 таква да се њихов центар гракције Γ подудара, за време целог кретања, са тежиштем S ıх маса. Ако је то случај, онда су, према (2) и (12), једначине эчених маса ове:

$$\frac{d^2\mathfrak{r}_i}{dt^2} = -k\mathfrak{r}_i \; ; \quad i = 1, 2, 3, \tag{29}$$

је k означава један скаларни фактор, који ће, ако се при крењу међусобна отстојања маса буду, но задовољавајући поављени услов подударности тачака Γ и S, мењала, бити функıја времена.

Да нађемо и испитамо та егзактна решења, замислимо да е масе m_1, m_2, m_3 налазе у иницијалном моменту $t=0$ у такэм међусобном положају да се њихов центар атракције Γ подудара са њиховим тежиштем, да се, дакле, те три масе налазе а врховима једног равностраног троугла или да су распоредане уж једне праве тако да њихова међусобна отстојања задовоавају једначину (26). Питајмо сада да ли је могуће масама m_1, m_2, m_3 дати такве иницијалне брзине да подударност центра гракције и тежишта буде одржавана за време целога кретања, т. ј. да констелација маса у сваком моменту t буде ıична оној у иницијалном моменту? То ће, као што ћемо видети, бити онда случај ако иницијални вектори брзина $\mathfrak{v}_1$, $\mathfrak{v}_2$, $\mathfrak{v}_3$ очених маса задовоље ове услове:

1. Ако ти вектори брзина падну у раван маса, која ће, след тога, бити непромењљива.

2. Ако вектори брзина буду са одговарајућим векторима положаја $\mathfrak{r}_1$, $\mathfrak{r}_2$, $\mathfrak{r}_3$ затварали исти угао θ.

3. Ако интензитети v_1, v_2, v_3 вектора брзина буду пропорционални модулима r_1, r_2, r_3 вектора положаја.

Ако је то случај, онда ће вектор положаја масе m_i по истеку времена dt бити векторски збир, т. ј. трећа страна троугла којега је једна страна $\mathfrak{r}_i$, а друга $\mathfrak{v}_i dt$. Како су углови што их те две стране међусобно затварају, према услову 2, за све три масе међусобно једнаки, а величине тих страна стоје, према услову 3, у истим размерама, то су сва три троугла, за $i = 1, 2, 3$ ограничена тежиштем S, положајем масе m_i у моменту $t = 0$ и у моменту dt, међусобно слична. Положаји маса m_1, m_2, m_3 биће по истеку времена dt такви као да су се радиусвектори r_1, r_2, r_3 маса m_1, m_2, m_3 заокренули за исти угао, а њихови модули пропорцинално се променули. Нова констелација маса биће, дакле, слична њиховој почетној констелацији. Да ће та констелација бити одржана и у идућем елементу времена, следује одатле што су акцелерације тих маса, т. ј. временски изводи њихових брзина, према једначини (29) пропорционални векторима положаја. Зато су у моменту dt испуњени услови 1, 2, 3, па тај моменат можемо сматрати као иницијални, одакле следује да ће и по истеку новог интервала времена dt сличност констелација остати одржана, што важи и за све остале моменте кретања.

Овај Лапласов доказ, којим је он заменио компликовано извођење Лагранжово, може се заменити овим аналитичким.

Положимо у тежиште S пол O поларног координатног система чија оса лежи у равни трију тела, па означимо са φ_1, φ_2, φ_3 углове што их радиусвектори r_1, r_2, r_3 уочених трију маса затварају са том осом, то су, према (12), § 8, радиалне односно на радиусвектор нормалне брзине маса претстављене са $\frac{dr_i}{dt}$, односно са $r_i \frac{d\varphi_i}{dt}$. Ако за иницијални моменат постоји ова сразмера радиусвектора:

$$\text{(30)} \qquad \text{за } t = 0 \qquad r_2 = \lambda r_1 ; \qquad r_3 = \mu r_1,$$

где су λ и μ фактори пропорционалитета, онда мора, према условима 2 и 3, иста та сразмера постојати и за оне компоненталне брзине. Зато мора бити:

$$(31) \qquad \text{за } t = 0 \qquad \frac{dr_2}{dt} = \lambda \frac{dr_1}{dt}; \qquad \frac{dr_3}{dt} = \mu \frac{dr_1}{dt}$$

$$(32) \qquad \text{за } t = 0 \qquad r_2 \frac{d\varphi_2}{dt} = \lambda\, r_1 \frac{d\varphi_1}{dt}; \qquad r_3 \frac{d\varphi_3}{dt} = \mu\, r_1 \frac{d\varphi_1}{dt}.$$

Из (30) и (32) следује:

$$(33) \qquad \text{за } t = 0 \qquad \frac{d\varphi_1}{dt} = \frac{d\varphi_2}{dt} = \frac{d\varphi_3}{dt}.$$

Из (30), (33) и (31) следује да је по истеку времена dt констелација уочених трију маса остала слична иницијалној, јер су углови φ_1, φ_2, φ_3 порасли за исте величине $d\varphi_1 = d\varphi_2 = d\varphi_3$, а радиусвектори добили прираштаје које стоје у сразмери тих радиусвектора. Зато се центар атракције није померио из непомичнога тежишта, па једначина (29) важи и по истеку временског интервала dt.

Ту једначину можемо, применом обрасца (15), § 8, раставити у две скаларне, јер добивамо:

$$-k\,\mathfrak{r}_i = \left\{\frac{d^2 r_i}{dt^2} - r_i\left(\frac{d\varphi_i}{dt}\right)^2\right\}\mathfrak{r}_i^0 + \left\{r_i\,\frac{d^2\varphi_i}{dt^2} + 2\,\frac{dr_i}{dt}\,\frac{d\varphi_i}{dt}\right\}\mathfrak{n}_0,$$

где $\mathfrak{r}_i^0$ означава јединични вектор у правцу радиусвектора, а $\mathfrak{n}_0$ онај који је нормалан на тај правац. Зато је $\mathfrak{r}_i = r_i\,\mathfrak{r}_i^0$, па ако предњу једначину помножимо скаларно са $\mathfrak{r}_i^0$, а затим са $\mathfrak{n}_0$, то добивамо, пошто је $(\mathfrak{r}_i^0\,\mathfrak{n}_0) = 0$, ове две једначине:

$$(34) \qquad \frac{d^2 r_i}{dt^2} + k r_i - r_i\left(\frac{d\varphi_i}{dt}\right)^2 = 0$$

$$(35) \qquad r_i\,\frac{d^2\varphi_i}{dt^2} + 2\,\frac{dr_i}{dt}\,\frac{d\varphi_i}{dt} = 0.$$

Ове једначине важе, пре свега, за иницијални моменат. Стављајући у њих (30), (31) и (33), добивамо:

$$(36) \qquad \text{за } t = 0 \qquad \frac{d^2 r_2}{dt^2} = \lambda\,\frac{d^2 r_1}{dt^2}; \qquad \frac{d^2 r_3}{dt^2} = \mu\,\frac{d^2 r_1}{dt^2}$$

$$(37) \qquad \text{за } t = 0 \qquad \frac{d^2\varphi_1}{dt^2} = \frac{d^2\varphi_2}{dt^2} = \frac{d^2\varphi_3}{dt^2},$$

услед чега је констелација уочених трију тела и по измаку даљег интервала времена dt слична иницијалној. Зато ће једначине (34) и (35) важити ако направимо њихове изводе по времену t, при чему треба и k сматрати као функцију времена. Те су једначине хомогене обзиром на r_i и његове изводе, па ћемо зато, даљом диференцијацијом тих једначина по времену и стављањем у њих предњих иницијалних услова, добити, корак по корак, ове резултате:

$$(38) \quad \begin{cases} \text{за } t = 0 & \\ \dfrac{d^n\varphi_1}{dt^n} = \dfrac{d^n\varphi_2}{dt^n} = \dfrac{d^n\varphi_3}{dt^n} & \\ r_2 = \lambda\, r_1; \quad r_3 = \mu\, r_1 & n = 1, 2, 3 \ldots \text{in inf.} \\ \dfrac{d^n r_2}{dt^n} = \lambda\, \dfrac{d^n r_1}{dt^n}; \qquad \dfrac{d^n r_3}{dt^n} = \mu\, \dfrac{d^n r_1}{dt^n} & \end{cases}$$

Како су r_i и φ_i, $i = 1, 2, 3$, функције времена, то за њих важи:

$$\varphi_i(t) = \varphi_i(0) + t\,\varphi_i'(0) + \frac{1}{2}\,t^2\varphi_i''(0) + \frac{1}{3.2}\,t^3\varphi_i'''(0) + \ldots$$

$$r_i(t) = r_i(0) + t\,r_i'(0) + \frac{1}{2}\,t^2 r_i''(0) + \frac{1}{3.2}\,t_3\, r_i'''(0) + \ldots$$

Стављајући у ове изразе релације (38), добивамо:

$$(39) \quad \begin{cases} \varphi_1(t) - \varphi_1(0) = \varphi_2(t) - \varphi_2(0) = \varphi_3(t) - \varphi_3(0), \\ r_2(t) = \lambda\, r_1(t); \qquad r_3(t) = \mu\, r_1(t). \end{cases}$$

Ове једначине казују ово: Радиусвектори маса m_1, m_2, m_3, затварају између себе, за време целога кретања, исте оне углове које су затварали у иницијалном моменту, а дужине тих радиусвектора задржавају своју међусобну пропорцију коју су имали у почетку кретања. Из тога следује, пре свега, да су путање свих трију маса међусобно сличне. То важи и за њихове међусобне констелације. Ако су се, према томе, масе m_1, m_2, m_3 налазиле на врховима равностраног троугла, оне ће се кретати тако као да се тај троугао окреће у својој равни око тежишта маса, растећи или стежући се, но задржавајући свој равнострани облик. Слично важи и за праволинијску констелацију маса која не мења свој праволинијски облик ни пропорцију распореда маса.

Радиусвектор сваке од посматраних маса пребрисава у једнаким деловима времена једнаке површине. То следује из једначине (34) коју можемо написати и у овом облику:

$$\frac{1}{r_i}\frac{d}{dt}\left(r_i^2\frac{d\varphi_i}{dt}\right)=0,$$

па затим интегрисати, чиме добивамо:

$$r_i^2\frac{d\varphi_i}{dt}=C_i, \tag{40}$$

где C_i означава једну константу једнаку двострукој секторској брзини у иницијалном моменту. Примењујући услове (30) и (32) добивамо

$$C_2=\lambda^2 C_1; \qquad C_3=\mu^2 C_1. \tag{41}$$

Секторске брзине односе се, дакле, као квадрати радиусвектора у иницијалном или другом којем моменту.

Ако питамо за облик путања посматраних трију тела, то је, због тога што су те три путање геометријски међусобно сличне, довољно испитати облик путање једнога од тих трију тела. Тим обликом и законом (40), који је индентичан другом Кеплеровом закону, одређено је и кретање тела по његовој путањи. Означимо ли са $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ стране троугла маса m_1, m_2, m_3, сматране за векторе, са тим смислом обилажења око троугла, то је:

$$(42)\quad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{r}_3-\mathfrak{r}_2&=\mathfrak{a}\\ \mathfrak{r}_1-\mathfrak{r}_3&=\mathfrak{b}\\ \mathfrak{r}_2-\mathfrak{r}_1&=\mathfrak{c}. \end{aligned}\right.$$

Онда добивамо помоћу једначина (13)

$$
(43)\quad \begin{cases} -M\mathfrak{r}_1 = m_2\mathfrak{c} - m_3\mathfrak{b} \\ -M\mathfrak{r}_2 = m_3\mathfrak{a} - m_1\mathfrak{c} \\ -M\mathfrak{r}_3 = m_1\mathfrak{b} - m_2\mathfrak{a}. \end{cases}
$$

Испитајмо прво случај када се уочена три тела налазе за време кретања на врховима равностраног троугла. У том случају имају вектори $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ исту скаларну величину $a = b = c$, па је

$$
(\mathfrak{a}\,\mathfrak{a}) = (\mathfrak{b}\,\mathfrak{b}) = (\mathfrak{c}\,\mathfrak{c}) = a^2.
$$

Како, сем тога, два узастопна од вектора $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{a}$ затварају између себе увек угао од 120^0, то је:

$$
(\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}) = (\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}) = (\mathfrak{c}\,\mathfrak{a}) = a\,.\,a\cos 120^0 = -\frac{1}{2}a^2.
$$

Ако, према томе, једначине (43) помножимо сваку скаларно са самом собом, то добивамо, пошто је $(\mathfrak{r}_1\,\mathfrak{r}_1) = r_1^2$; $(\mathfrak{r}_2\,\mathfrak{r}_2) = r_2^2$ $(\mathfrak{r}_3\,\mathfrak{r}_3) = r_3^2$,

$$
(44)\quad \begin{cases} M^2 r_1^2 = (m_2^2 + m_2 m_3 + m_3^2)\,a^2 \\ M^2 r_2^2 = (m_3^2 + m_3 m_1 + m_1^2)\,a^2 \\ M^2 r_3^2 = (m_1^2 + m_1 m_2 + m_2^2)\,a^2. \end{cases}
$$

Било је, према (17),

$$
(45)\qquad k = \frac{fM}{a^3}\,.
$$

Ставимо ли

$$
(46)\quad \begin{cases} \dfrac{(m_2^2 + m_2 m_3 + m_3^2)^{\frac{3}{2}}}{M^2} = \mathrm{M}_1 \\[2ex] \dfrac{(m_3^2 + m_3 m_1 + m_1^2)^{\frac{3}{2}}}{M^2} = \mathrm{M}_2 \\[2ex] \dfrac{(m_1^2 + m_1 m_2 + m_2^2)^{\frac{3}{2}}}{M^2} = \mathrm{M}_3, \end{cases}
$$

где M_1, M_2, M_3 имају димензију масе, то добивамо, елиминацијом од a из (44) и (45),

$$(47) \qquad k = \frac{fM_1}{r_1^3} = \frac{fM_2}{r_2^3} = \frac{fM_3}{r_3^3}.$$

Стављајући ово у једначине (29), добивамо да ће једначине кретања маса m_i бити ове:

$$(48) \qquad \frac{d^2\mathfrak{r}_i}{dt^2} = -fM_i \frac{\mathfrak{r}_i}{r_i^3} \qquad i = 1, 2, 3.$$

Ова једначина казује да се маса m_i креће око центра атракције Γ тако као да је из њега привлачена непокретном масом M_i по Њутновом закону. Та једначина постаје идентична једначини (12), § 10, из проблема двају тела ако у овој $(M+m)$ заменимо фиктивном масом M_i. Због тога ће путања масе m_i бити један коничан пресек. Ако су иницијални услови такви да је $e < 0$, онда ће та путања бити елипса. Путање осталих двеју маса биће сличне елипсе. Посматрана три тела кретаће се, дакле, покоравајући се закону површина (40), око њиховог тежишта, као заједничке жиже, по трима сличним елипсама тако да ће у сваком моменту та три тела ограничавати равнострани троугао који за време кретања мења свој положај и величину, али не свој равнострани облик. Када је тај троугао најмањи, пролазе сва три тела, у исти мах, кроз своје перицентричне положаје, а када је он највећи, кроз своје апоцентричне положаје.

Испитајмо још и други случај када се посматрана три тела крећу тако да леже увек у једној правој. У том случају ваља, због (42) и (19), ставити

$$\mathfrak{a} = a\,\mathfrak{i}; \qquad \mathfrak{b} = -b\,\mathfrak{i}; \qquad \mathfrak{c} = c\,\mathfrak{i}$$

$$\mathfrak{r}_1 = -r_1\,\mathfrak{i}; \qquad \mathfrak{r}_2 = \pm r_2\,\mathfrak{i}; \qquad \mathfrak{r}_3 = r_3\,\mathfrak{i},$$

при чему узимамо, као и до сада, да су масе поредане у правцу јединичног вектора $\mathfrak{i}$ овим редом: m_1, m_2, m_3. Због тога се код $\mathfrak{r}_1$ појављује на десној страни негативни, а код $\mathfrak{r}_3$ позитивни знак. Да ли ће $\mathfrak{r}_2$ бити позитивно или негативно, то зависи од тога да ли се тежиште S маса налази између m_1 и m_2 или између m_2 и m_3. Сада добивамо место једначина (43) ове:

$$
(49) \quad \left| \begin{aligned} M r_1 &= m_2 c + m_3 b \\ \pm M r_2 &= m_3 a - m_1 c \\ M r_3 &= m_1 b + m_2 a\,. \end{aligned} \right.
$$

Сем ових су, у овом случају, још у важности једначине (22), (23), (24), (25). Из тих једначина добивамо, бринући се само за масу m_1,

$$
(50) \qquad k = \frac{f}{r_1}\left(\frac{m_2}{c^2} + \frac{m_3}{b^2}\right).
$$

Елиминишемо ли из ове једначине, помоћу прве од једначина (49) и помоћу (25), b и c, то добивамо, стављајући

$$
(51) \quad \mathrm{M}_1 = \frac{[m_2 + m_3(1+z)]^2\,[m_2(1+z)^2 + m_3]}{M^2(1+z)^2}\,,
$$

где је M_1 једна константа која, због (26), зависи само од маса m_1, m_2, m_3 и има димензију масе,

$$
k = \frac{f\mathrm{M}_1}{r_1^3}\,.
$$

Једначина кретања масе m_1 биће, дакле:

$$
(52) \qquad \frac{d^2\mathfrak{r}_1}{dt^2} = -f\mathrm{M}_1\frac{\mathfrak{r}_1}{r_1^3}\,.
$$

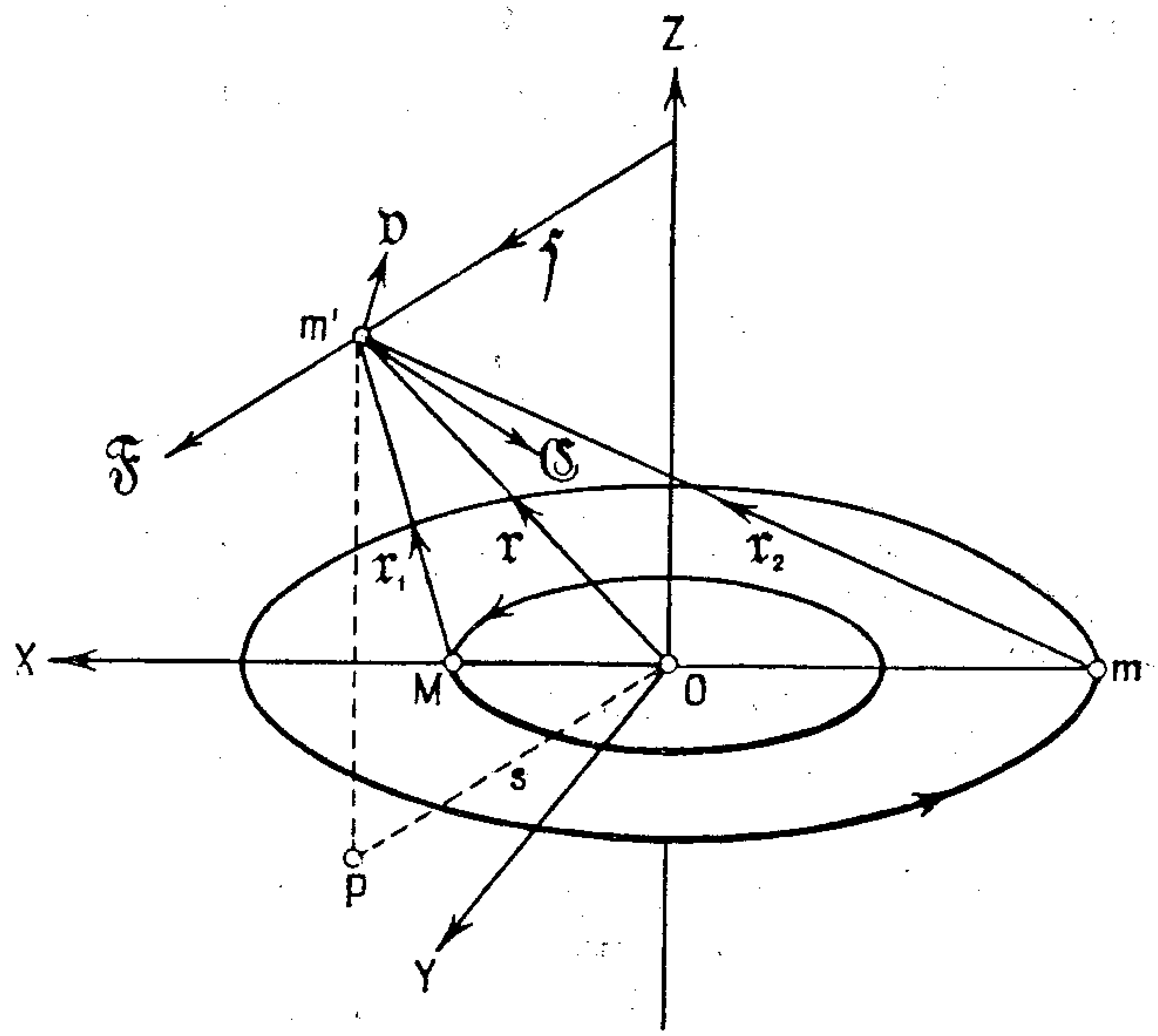
Оно казује да су, и у овом случају, путање маса конични пресеци, а, уз одговарајуће иницијалне услове, елипсе. У том се случају уочена тела крећу, остајући увек у једној правој, око њиховог тежишта, као заједничке жиже, по трима сличним елипсама, пролазећи, у исти мах, кроз своје екстремне положаје.

ГЛАВА ПЕТА

Астероидни проблем.

§ 21. Формулисање проблема. Ако је, у проблему трију тела, маса једнога од тих тела толико сићушна према масама осталих двају тела да није у стању да утиче на њихово кретање, онда ће се ова два тела, покоравајући се законима доказаним у проблему двају тела, кретати око свог заједничког тежишта по Кеплеровим елипсама. Ако су иницијални услови кретања ових двају главних тела такви да се она крећу, место по елипсама, по круговима, онда имамо пред собом један специјални случај проблема трију тела који се назива рестрингираним или астероидним проблемом. Овај потоњи назив потиче отуда што кретања астероида, сићушних небеских тела, која се крећу махом између путања Марса и Јупитра, испуњавају у великој мери претпоставке овог специјалног случаја проблема трију тела, јер се сваки поједини од тих астероида или планетоида креће под препондерантним утицајем привлачног дејства Сунца и Јупитра, ове највеће планете чија се путања може, у првој апроксимацији, сматрати за круг.

Да бисмо астероидни проблем изразили језиком математске анализе, означићемо масе главних двају тела са M односно са m, при чему нека буде $m \leqq M$. Раван у којој се та два тела крећу око заједничког тежишта по круговима, одабраћемо за раван $X-Y$ нашег координатног система којега почетак O нека лежи у тежишту маса M и m (сл. 9). Оса X тога координатног система нека пада стално у праву тих двеју маса, а нека буде наперена од m према M. Тај координатни систем обрће се, услед кретања тих двају тела, око своје осе Z, наперене тако да кретање маса, посматрано са позитивне гране те осе, следује у директном смислу, обрнуто сказаљки на сату. Оса Y нека је наперена тако да најкраћи заокретај позитивне гране, осе X у позитиву грану осе Y следује такође у позитивном смислу. Наш координатни систем је, дакле, као досадањи, енглески. Међусобно отстојање маса M и m, које је, према учињеној претпоставци, непромењиво, означићемо са a. Време T за које оба та тела обиђу око својих путања, т.ј. оно за које



Сл. 8.

се наш координатни систем обрне око своје осе Z, дато је, према (59), § 12, овом једначином:

$$f(M+m)=4\pi^2\frac{a^3}{T^2}, \tag{1}$$

а скаларна величина n угловне брзине те ротације, према (62), § 12, једначином:

$$n = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{f(M+m)}{a^3}}. \tag{2}$$

Ротација нашег координатног система претстављена је вектором $\mathfrak{w}$ који има правац осе Z, а којега модуо једнак n. Означимо ли јединичне векторе у правцу координатних оса са $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$, то је

$$\mathfrak{w} = n\mathfrak{k}. \tag{3}$$

Масу астероида, која је изванредно малена према масама M и m, означићемо са m'. Ако желимо да формирамо једначину релативног кретања масе m' обзиром на наш покретни координатни систем, то можемо, према теорији релативног кретања, тај систем сматрати за непомичан ако замислимо да на масу m' дејствују, сем гравитационих сила маса M и m, још ове две силе:

1. Центрифугална сила $\mathfrak{F}$, нормална на осу ротације, а интензитета $\frac{m' v^2}{\varrho}$, при чему v означава линеарну брзину тренутног положаја масе m' у систему, а ϱ радиус кривине путање тога положаја према непомичном координатном систему. Означимо ли, према томе, отстојање тренутног положаја масе m' од осе ротације Z са s, а са $\mathfrak{s}_0$ јединични вектор тога отстојања, наперен од осе Z, а нормалан на ту осу, то је:

$$\mathfrak{F} = \frac{m' n^2 s^2}{s} \mathfrak{s}_0 = m' n^2 \mathfrak{s} \tag{4}$$

где

$$\mathfrak{s} = s\mathfrak{s}_0$$

претставља векторски отстојање масе m' од осе Z.

2. Кориолисова сила која је, ако са $\mathfrak{v}$ означимо вектор брзине астероида у покретном координатном систему, претстављена овим изразом:

$$\mathfrak{C} = -2m' [\mathfrak{w}\,\mathfrak{v}] = 2\,m' [\mathfrak{v}\,\mathfrak{w}]. \tag{5}$$

Означимо ли са $\mathfrak{r}_1$ вектор положаја масе m' према маси M, а са $\mathfrak{r}_2$ вектор положаја масе m' према маси m, са r_1 и r_2

модуле вектора $\mathfrak{r}_1$ и $\mathfrak{r}_2$, то су силе Њутнове гравитације којом маса M односно маса m привлачи масу m' претстављене овим изразима:

$$\mathfrak{P}_1 = -f \frac{M m'}{r_1^3} \mathfrak{r}_1 \tag{6}$$

$$\mathfrak{P}_2 = -f \frac{m m'}{r_2^3} \mathfrak{r}_2. \tag{7}$$

Означимо ли са $\mathfrak{r}$ вектор положаја масе m' према почетку O нашег координатног система, то је једначина кретања астероида ова:

$$\frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2} = \mathfrak{P}_1 + \mathfrak{P}_2 + \mathfrak{F} + \mathfrak{C}, \tag{8}$$

т. ј., имајући у виду претходне једначине,

$$\frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2} = -fM \frac{\mathfrak{r}_1}{r_1^3} - fm \frac{\mathfrak{r}_2}{r_2^3} + n^2\, \mathfrak{j} + 2\,[\mathfrak{v}\,\mathfrak{w}]. \tag{9}$$

Ако питамо, да бисмо горњој једначини дали кондензованији облик, за градиенат скалара $\frac{fM}{r_1}$, товаља имати у виду да су, пошто је у овом изразу само r_1 променљиво, еквискаларне површине тога поља лопте са центром у маси M, градиенат стоји нормално на тим површинама, па да, због тога, он има правац јединичног вектора $\frac{\mathfrak{r}_1}{r_1}$, а да му је модуо једнак изводу скалара $\frac{fM}{r_1}$ по r_1, т. ј. једнак $-fM \frac{1}{r_1^2}$. Зато је

$$\operatorname{grad} fM \frac{1}{r_1} = -\frac{fM}{r_1^2} \frac{\mathfrak{r}_1}{r_1} = -fM \frac{\mathfrak{r}_1}{r_1^3}.$$

На исти начин добивамо и овај образац:

$$\operatorname{grad} fm \frac{1}{r_2} = -fm \frac{\mathfrak{r}_2}{r_2^3}.$$

Градиенат поља скалара $\frac{n^2}{2}s^2$ стоји нормално на еквискаларним површинама тога поља које су, пошто је само s промењиво, кружни цилиндри са осом Z. Зато тај градиенат има правац јединичног вектора $\mathfrak{f}_0$, његов модуо је једнак изводу скалара $\frac{n^2}{2}s^2$ по s, т. ј. једнак n^2s. Зато је

$$\text{grad}\ \frac{n^2}{2}s^2 = n^2 s\mathfrak{f}_0 = n^2\mathfrak{f}.$$

Ставимо ли, дакле,

$$W = fM\frac{1}{r_1} + mf\frac{1}{r_2} + \frac{n^2}{2}s^2, \tag{10}$$

то је

$$\text{grad}\ W = -fM\frac{\mathfrak{r}_1}{r_1^3} - fM\frac{\mathfrak{r}_2}{r_2^3} + n^2\mathfrak{f}, \tag{11}$$

па зато можемо једначину (9) написати у овом облику:

$$\frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2} = \text{grad}\ W + 2[\mathfrak{v}\mathfrak{w}]. \tag{12}$$

Ово је једначина кретања астероида којом је математски формулисан астероидни проблем.

§ 22. Поље скалара W и његове особине У једначини кретања астероида појављује се градиенат скаларног поља:

$$W = fM\frac{1}{r_1} + fm\frac{1}{r_2} + \frac{n^2}{2}s^2, \tag{13}$$

па је зато од важности испитати главне особине тога скаларног поља. То поље настаје суперпозицијом трију компоненталних скаларних поља. Еквискаларне површине тих компоненталних поља претстављене су једначинама:

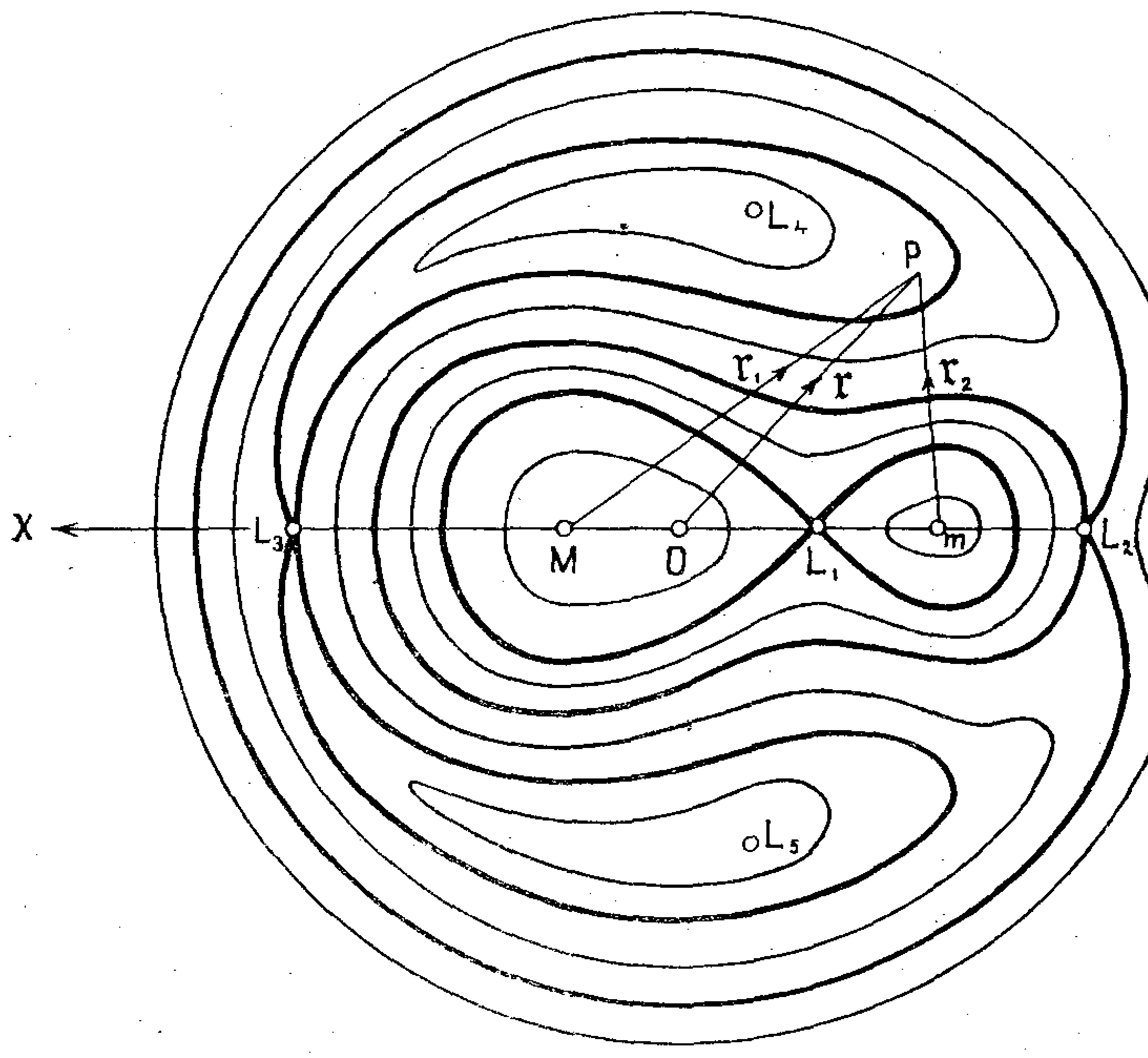
$$fM\frac{1}{r_1} = C_1; \quad fm\frac{1}{r_2} = C_2; \quad \frac{n^2}{2}s^2 = C_3, \tag{14}$$

где су r_1, r_2, s промењиве, а C_1, C_2, C_3 произвољне константе. Еквискаларне површине првог од ових поља су лопте са центром у M. Додељујући константи C_1 нумеричке вредности које расту у аритметској прогресији, опада радиус r_1 еквискаларних површина по хиперболном закону. Еквискаларне површине другог компоненталног поља су лопте са центром у m; њихов радиус r_2 опада, када C_2 расте у аритметској прогресији, такође по хиперболном закону. Еквискаларне површине трећег компоненталног поља су кружни цилиндри са осом Z. Када C_3 расте у аритметској прогресији, расте радиус s тих цилиндара по параболном закону. Како тачке M, m, O леже, све три, у оси Z, то су та компонентална поља, па слетствено и резултујуће поље скалара W, симетрична према равни $X-Z$, а и равни $X-Y$ нашег координатног система. Компонентална поља скалара W су, дакле, веома једноставна, па се даду лако геометријски претставити. Њихова геометријска претстава постаје нарочито једноставна ако се ограничимо на случај када се астероид креће у равни $X-Y$, што ћемо у будуће претпоставити. У таквом случају имамо пред собом једно равно поље скалара W и то у равни $X-Y$, па место еквискаларних површина имамо пред собом еквискаларне линије. Еквискаларне линије компоненталних поља су у овом случају кругови са центром у M, m односно O. Када су ти кругови нацртани за случај да константе C_1, C_2, C_3 расту у аритметској прогресији, онда се еквискаларне линије резултујућег поља

$$fM\frac{1}{r_1}+fm\frac{1}{r_2}+\frac{n^2}{2}s^2=C \tag{15}$$

добивају на тај начин да се међусобно споје оне тачке у којима константе C_1, C_2, C_3 дају исти збир. То је позната метода конструкције еквискаларних линија у електростатици. Тим начином су нађене и шематски претстављене еквискаларне линије, за случај $M=10m$, у сл. 10.

Из те слике може се разабрати ово: Еквискаларне линије су, што следује и из претходних расуђивања, симетричне према оси X, т. ј. према правој која спаја масе M и m. У непосредној околини тачке M, те су линије јајастог облика, а исто тако у околини тачке m. У тачки L_1 спајају се те две врсте линија у једну која има облик осмице. Око те, дебље извучене линије, која има у тачки L_1 сингуларну двојну тачку, обавијају се идуће, неукрштене, линије које имају облик меридијанског пресека пешчаног сата, обухватајући, у исти мах, масу M и m. Кроз тачку L_2 пролази једна, опет дебље извучена, линија којој је та тачка сингуларна. Унутрашња грана те криве, облика пешчаног сата, обухвата, као и досадање, обе масе M и m, док њена спољна грана, која има облик меридијанског пресека јабуке, обухвата



Сл. 10

целу прву грану. Идуће линије, обухваћене јабучастом граном претходне криве, не обухватају више масе M и m него имају облик потковица. У тачки L_3, новом сингуларитету, сличном оном у L_2, кроз коју пролази једна дебље извучена линија, почињу се те потковице делити у две засебне затворене гране од којих једна обухвата тачку L_4, а друга тачку L_5. О положају тих двеју тачака говорићемо доцније. У тима тачкама дегенеришу еквискаларне линије у изоловане тачке, стварајући тиме нова два сингуларитета. Линије које обухватају спољну грану криве која пролази кроз L_2 су једноставне затворене линије које се од јабучастог облика приближавају све више кружном облику и које не показују никаквих сингуларитета.

Веома пластичну претставу поља скалара W добивамо ако еквискаларне линије, нацртане у сл. 10, сматрамо за изохипсе једне топографске површине тако да нумеричка вредност константе C која одговара појединој еквискаларној линији означава висину изохипсе изнад равни $X—Y$. Онда та површина има овај облик. У околини маса M и m уздижу се два висока купаста брега која над тачкама M и m иду у бесконачност, јер је ту r_1 односно r_2 једнако нули, па скалар W постаје бесконачно велик. Та два брега састају се у једном превојном седлу изнад тачке L_1 у којој функција W има у правцу осе X своју минималну, а нормално на тај правац своју максималну вредност. Између осмичне линије која пролази кроз L_1 и линије облика пешчаног сата која пролази кроз L_2, топографска површина стално је у паду да се на спољној јабучастој грани криве која пролази кроз L_2 почне стално уздизати у вис до у бесконачност, јер са растућим s расте скалар W у бесконачност. Зато топографска површина има изнад тачке L_2 опет једно превојно седло, пошто она достизава у правцу X свој минимум, а нормално на тај правац, свој максимум, јер топографска површина опада према унутрашњости потковичастих линија, достизавајући изнад тачака L_4 и L_5 своје стварне најниже положаје. Због тога достизава топографска површина изнад тачке L_3 у правцу осе X свој минимум, а у правцу нормалном на ту осу свој максимум, зато она има изнад те тачке опет једно превојно седло.

Равно поље скалара W може се аналитички претставити најједноставније помоћу биполарних координата r_1 и r_2 на овај начин.

Стављајући (2) у (10), добивамо:

$$(16) \qquad W = fM\left\{\frac{1}{r_1} + \frac{m}{M}\frac{1}{r_2} + \frac{1}{2}\frac{M+m}{M}\frac{s^2}{a^3}\right\}.$$

Одаберимо једну произвољну тачку P у равни $X—Y$. Векторе положаја тачке према тачкама M, m, O означили смо са $\mathfrak{r}_1$, $\mathfrak{r}_2$, $\mathfrak{r} = \mathfrak{f}$. Означимо са $\mathfrak{a}$ вектор положаја тачке m према тачки M, онда је

$$\overrightarrow{MO} = \frac{m}{M+m}\mathfrak{a}; \quad \overrightarrow{Om} = \frac{M}{M+m}\mathfrak{a};$$

па зато следују из троуглова MOP и OmP ове две векторске једна чине:

$$\frac{m}{M+m}\mathfrak{a} + \mathfrak{s} = \mathfrak{r}_1$$

$$\frac{M}{M+m}\mathfrak{a} - \mathfrak{s} = -\mathfrak{r}_2.$$

Помножимо сваку од ових једначина скаларно са самом собом, то добивамо:

$$\frac{m^2}{(M+m)^2}a^2 + \frac{2m}{M+m}(\mathfrak{a}\,\mathfrak{s}) + s^2 = r_1^2$$

$$\frac{M^2}{(M+m)^2}a^2 - \frac{2M}{M+m}(\mathfrak{a}\,\mathfrak{s}) + s^2 = r_2^2.$$

Помножимо другу од ових једначина са $\frac{m}{M}$, па је саберимо са првом, то добивамо:

$$\frac{m^2+mM}{(M+m)^2}a^2 + \frac{M+m}{M}s^2 = r_1^2 + \frac{m}{M}r_2^2,$$

т. ј.

$$\frac{M+m}{M}s^2 = r_1^2 + \frac{m}{M}r_2^2 - \frac{m}{M+m}a^2.$$

Стављајући ово у једначину (16), добивамо:

$$(17) \quad W = fM\left\{\frac{1}{r_1} + \frac{m}{M}\frac{1}{r_2} + \frac{1}{2}\frac{r_1^2}{a^3} + \frac{1}{2}\frac{m}{M}\frac{r_2^2}{a^3} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2a}\frac{m}{M+m}\right\}.$$

Тим смо функцију W изразили помоћу биполарних координата r_1 и r_2. Прелаз од тих координата на ортогоналне x, y врло је једноставан, но за сада излишан. У функцији W појављује се једна адитивна константа коју можемо, пошто се у једначини кретања (12) појављује само градиенат те функције, без штете по важност једначине кретања, испустити као што то неки аутори чине, па скалар W заменити са овим:

$$(18)\qquad \Omega = fM\left\{\frac{1}{r_1} + \frac{m}{M}\frac{1}{r_2} + \frac{1}{2}\frac{r_1^2}{a^3} + \frac{1}{2}\frac{m}{M}\frac{r_2^2}{a^3}\right\}.$$

Како је

$$\operatorname{grad} W = \operatorname{grad} \Omega,$$

то место једначине кретања (12) можемо употребити и ову:

$$(19)\qquad \frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2} = \operatorname{grad} \Omega + 2\,[\mathfrak{v}\,\mathfrak{w}].$$

Од нарочитог интереса за познија испитивања су сингуларне тачке поља W или, што изалази на исто, поља Ω, о којима смо малочас говорили.

Једначина (17) омогућава нам да одредимо положаје тачака L_4 и L_5 у којима W достизава своју минималну вредност. Зато је ту

$$(20)\qquad \frac{\partial W}{\partial r_1} = 0\,; \qquad \frac{\partial W}{\partial r_2} = 0.$$

Користећи се једначином (17), добивамо:

$$(21)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial r_1} &= fM\left\{-\frac{1}{r_1^2} + \frac{r_1}{a^3}\right\} \\ \frac{\partial W}{\partial r_2} &= fm\left\{-\frac{1}{r_2^2} + \frac{r_2}{a^3}\right\}, \end{aligned}\right.$$

дакле због (20)

$$-\frac{1}{r_1^2} + \frac{r_1}{a^3} = 0$$

$$-\frac{1}{r_2^2} + \frac{r_2}{a^3} = 0,$$

т j.

(22) $$r_1 = r_2 = a\,.$$

Сингуларне тачке L_4 и L_5 образују, дакле, са тачкама M и m равностране троуглове. Како је, због (21),

$$\frac{\partial^2 W}{\partial r_1{}^2} = fM\left\{\frac{2}{r_1{}^3} + \frac{1}{a^3}\right\}$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial r_2{}^2} = fm\left\{\frac{2}{r_2{}^3} + \frac{1}{a^3}\right\}$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial r_1 \partial r_2} = 0,$$

то је за $r_1 = r_2 = a$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial r_1{}^2} = 3\,\frac{fM}{a^3}; \qquad \frac{\partial^2 W}{\partial r_2{}^2} = 3\,\frac{fm}{a^3}\,; \qquad \frac{\partial^2 W}{\partial r_1 \partial r_2} = 0,$$

дакле

$$\frac{\partial^2 W}{\partial r_1{}^2} > 0 \quad ; \quad \frac{\partial^2 W}{\partial r_2{}^2} > 0 \quad ; \quad \frac{\partial^2 W}{\partial r_1{}^2} \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial r_2{}^2} - \left(\frac{\partial^2 W}{\partial r_1 \partial r_2}\right)^2 > 0,$$

што значи да у тачкама L_4 и L_5 скалар W достизава стварно стоје минималне вредности.

Положаје осталих сингуларних тачака одредићемо овако. Замислимо да смо биполарне координате r_1, r_2 изразили помоћу ортогоналних x, y, онда је једначина произвољне од еквискаларних линиiа поља W ова:

$$W(x, y) - C = 0,$$

где C означава једну одређену константу. Координате x, y сингуларних тачака морају, као што је познато, сем горње, задовољити још ове две једначине:

(23) $$\frac{\partial W(x, y)}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial W(x, y)}{\partial y} = 0.$$

Како је градиенат равнога поља скалара W претстављен изразом:

$$\operatorname{grad} W = \frac{\partial W}{\partial x}\,\mathfrak{i} + \frac{\partial W}{\partial y}\,\mathfrak{j}\,,$$

то из претходних једначина следује да је у сингуларним тачкама L градиенат поља једнак нули. То следује и из основне особине градиента који стоји увек нормално на еквискаларним површинама, а у нашем случају равнога поља, нормално на еквискаларним линијама. Како у сингуларним тачкама немају те линије одређене тангенте, то немају ни одређене нормале, па је зато ту градиенат једнак нули. Помоћу те особине сингуларних тачака, можемо лако одредити њихов положај.

За тачку L_1, на пример, за коју је $\mathfrak{r}_1 = -r_1\mathfrak{i}$; $\mathfrak{r}_2 = r_2\mathfrak{i}$; $\mathfrak{f} = s\mathfrak{i}$, где $\mathfrak{i}$ означава јединични вектор у правцу позитивне гране осе X која је наперена од m ка M, имамо, према једначини (11),

$$\operatorname{grad} W = \left(fM\frac{1}{r_1^2} - fm\frac{1}{r_2^2} - n^2 s\right)\mathfrak{i},$$

па зато из услова да тај градиенат мора бити једнак нули следује:

$$fM\frac{1}{r_1^2} - fm\frac{1}{r_2^2} - n^2 s = 0. \tag{24}$$

Сем тога је

$$r_1 + r_2 = a, \tag{25}$$

јер смо са a означили међусобно отстојање маса M и m, а како је тежиште O маса M и m удаљено од M за $\frac{m}{M+m}a$, то је

$$s + \frac{m}{M+m}a = r_1. \tag{26}$$

Са последње три једначине одређене су једнозначно дужине r_1, r_2, s, т. ј. положај тачке L_1.

Ако у тачку L_1 ставимо астериод m', онда добивамо распоред маса M, m', m који је, као што ћемо одмах видети, идентичан са распоредом тих маса који одговара егзактном решењу проблема трију тела. Да то увидимо, употребимо, место горњих, ознаке примењене у §§ 19 и 20, т. ј. заменимо горе

$$\begin{array}{llllll} M, & m', & m, & a, & r_1, & r_2 \end{array}$$

са

$$\begin{array}{llllll} m_1, & m_2, & m_3, & b, & c, & a, \end{array}$$

онда добивамо место горњих једначина ове:

$$fm_1 \frac{1}{c^2} - fm_3 \frac{1}{a^2} - n^2 s = 0$$

$$c + a = b$$

$$s + \frac{m_3}{m_1 + m_3} b = c,$$

а место једначине (2) ову:

$$n^2 = \frac{f(m_1 + m_3)}{b^3}.$$

Елиминишући из прве од ових једначина, помоћу осталих, n и s, добивамо:

$$\frac{1}{b^3}(m_3 a - m_1 c) = \frac{m_3}{a^2} - \frac{m_1}{c^2}. \tag{27}$$

Ова је једначина идентична са другом од једначина (22), § 19, пошто у једначини (50), § 20 ваља за m_2 ставити масу m' астероида која је бесконачно малена, дакле $m_2 = 0$, а за r_1 отстојање масе M од тежишта O, дакле $c - s$, тако да је

$$k = \frac{f}{c-s} \frac{m_3}{b^2}$$

док из прве једначине (49), § 20 следује:

$$(m_1 + m_3)(c - s) = m_3 b,$$

тако да је

$$k = \frac{f(m_1 + m_3)}{b^3},$$

па стављајући ово у другу од једначина (22), § 19, добивамо једначину (27).

На исти начин можемо да докажемо да и положаји L_2 и L_3 одговарају онима које захтевају егзактна решења проблема трију тела, што је већ доказано за положаје L_4 и L_3. Зато можемо да кажемо: Тачке L_1, L_2, L_3, L_4, L_5 претстављају оне положаје у које треба ставити астероид, па да он са масама M и m образује оне констелације које одговарају егзактним решињима проблема трију тела. Прве три од тих тачака дате су Лангранжовом једначином (27), § 19, у којуваља ставити $m_1 = M$; $m_2 = 0$; $m_3 = m$, тако да она добива овај облик:

$$(28)\quad Mz^5 + 3\,Mz^4 - 3\,Mz^3 - 3\,mz^2 - 3\,mz - m = 0;$$

остале две тачке образују са масама M и m равнострани троугао.

До овог резултата можемо доћи и овим расуђивањем. У тачкама L је, као што смо видели, $\mathrm{grad}\ W = 0$. Ако се у такву тачку стави астероид са иницијалном брзином према покретном систему $\mathfrak{v} = 0$, онда следује из једначине кретања (12) да је у иницијалном моменту и $\frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2} = 0$. Астероид нема, дакле, у иницијалном моменту, ни брзине ни убрзања према покретном координатном систему. Како је, према томе, у иницијалном моменту, $\mathfrak{v} = 0$; $\frac{d\mathfrak{v}}{dt} = 0$, то значи да је брзина $\mathfrak{v}$ и у идућем моменту једнака нули. Сматрајући овај моменат за иницијални‘ следује да ће и у идућем и у свима даљим моментима брзина астероида бити једнака нули, па зато он неће променити свој положај у покретном координатном систему, т. ј. међусобна констелација маса M, m, m' неће се променити, него ће она, таква каква је, ротирати угловном брзином n око тежишта маса O.

Тачке L_1, L_2 L_3, L_4, L_5 зову се, из разлога који ћемо касније упознати, центри либрације поља W.

§ 23. Јакобијев интеграл. Хилова гранична крива.

Помножимо једначину кретања астероида

$$(29)\qquad \frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2} = \mathrm{grad}\ W + 2\,[\mathfrak{v}\,\mathfrak{w}]$$

скаларно са

$$\mathfrak{v} = \frac{d\mathfrak{r}}{dt},$$

то ће члан $2\mathfrak{v}[\mathfrak{v}\,\mathfrak{w}]$ испасти из те једначине, јер је $\mathfrak{v}[\mathfrak{v}\,\mathfrak{w}] = \mathfrak{w}[\mathfrak{v}\,\mathfrak{v}] = 0$, а пошто је $\frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2} = \frac{d\mathfrak{v}}{dt}$, то добивамо:

$$\mathfrak{v}\,d\mathfrak{v} = d\mathfrak{r}\,\mathrm{grad}\,W.$$

Но како је

$$d\mathfrak{r}\,\mathrm{grad}\,W = dW,$$

где dW претставља промену скалара W која одговара померању $d\mathfrak{r}$, то добивамо:

$$\mathfrak{v}\,d\mathfrak{v} = d\,W.$$

Интеграција ове једначине даје:

$$\frac{\mathfrak{v}^2}{2} = W + h.$$

где је h интеграциона константа. Означимо ли скаларну величину брзине $\mathfrak{v}$ са v, то је $\mathfrak{v}^2 = v^2$, па је зато:

$$\frac{v^2}{2} = W + h. \tag{30}$$

Овај интеграл диференцијалне једначине кретања астероида зове се Јакобијев интеграл

Константа h одређена је иницијалним условима. Ако се астероид налазио у иницијалном моменту на месту поља W на којем скалар W има вредност W_0 и ако је интензитет иницијалне брзине имао вредност v_0, онда је

$$h = \frac{v_0^2}{2} - W_0. \tag{31}$$

Константа h зависи само од иницијалног положаја и од скаларне вредности иницијалне брзине, а не од њеног правца.

Из Јакобијевог интеграла извео је Хил ову интересантну конзеквенцију. Лева страна једначине (30), квадрат реалне величине, не може никада постати негативна. Зато је

$$(32) \qquad W + h \geqq 0.$$

Скалар W, претстављен изразом (10), је увек позитиван, јер садржи саме позитивне величине. Збир $W + h$ може, према томе, само онда бити једнак нули ако су иницијални услови такви да је константа h негативна. Претпоставимо да је то случај и да је константа h једнака $-h_0$, где h_0 претставља једну позитивну величину која је већа од минималне вредности скалара W, достигнуте у тачкама L_4 и L_5, онда због (32), за време целог кретања астероида, мора бити задовољен услов

$$(33) \qquad W - h_0 \geqq 0 \qquad W \geqq h_0,$$

па нам једначина

$$(34) \qquad W = h_0$$

претставља једну одређену еквискаларну површину поља W кроз коју астероид не може да прође. Ако је та површина затворена и ако се астероид налази у њеној унутрашњости, онда она ограничава један део простора који астероид не може да остави. Ако се кретање врши у равни X—Y, као што ћемо претпоставити, онда место горње површине имамо једну линију. Та се линије зове Хилова гранична крива. Испитајмо, користећи се сликом 10 и топографском претставом поља W, датом у претходном параграфу, када ће постојати таква гранична крива.

Ако су иницијални услови такви да константа h_0 одговара којој јајастој еквискаларној линији која се обавила око тачке M, па ако се астероид у иницијалном моменту налазио у унутрашњости те јајасте линије, онда она претставља граничну криву преко које астероид не може да пређе, а област равни X—Y, ограничена том кривом, ону област у којој ће се астероид стално да креће, јер та област задовољава услов (33). Слично је и са јајастим линијама које обавијају положај масе m. У таквом случају можемо астероид назвати сателитом масе M односно масе m. Ако константу h_0 смањимо толико да она лежи испод оне вредности која одговара осмичној линији што пролази кроз тачку L_1, а изнад оне вредности која одговара којој од линија облика пешчаног сата, па ако се астероид налази у унутрашњости ове потоње линије, онда она претставља опет једну граничну криву преко које астероид не може да пређе. Ако је константа h_0 толика да је достигла своју минималну вредност претходног случаја, т. ј. ону вредност која одговара тачки L_2, а астероид се налази изван јабучасте линије која пролази кроз ту тачку, онда та јабучаста линија ограничује изнутра област астероида који не може да прекорачи ту јабучасту криву, него се креће изван ње, немајући спољне границе своје области. Исто важи и за јабучасте линије које обавијају ону која пролази кроз тачку L_2. Ако су иницијални услови такви да константа h_0 одговара једној таквој јабучастој линији онда астероид, ако се налази ван области ограничене таквом линијом не може ући у ту област, па је област у којој се он креће ограничена изнутра но не споља. Слично важи и за потковичасте линије и оне које имају облик сузе, а обавиле се око тачке L_4 или L_5. Ако константа h_0 одговара једној таквој линији, па се астероид налази изван области која је том линијом обавијена, он не може ући у ту област.

§ 24. Периодичне путање, симетричне према оси X. Помножимо ли једначину (12) са m', онда нам лева страна те једначине претставља силу $\mathfrak{P}$ под чијим се утицајем креће астероид, па је

$$\mathfrak{P} = m' \operatorname{grad} W + 2\, m' [\mathfrak{v}\, \mathfrak{w}]. \tag{35}$$

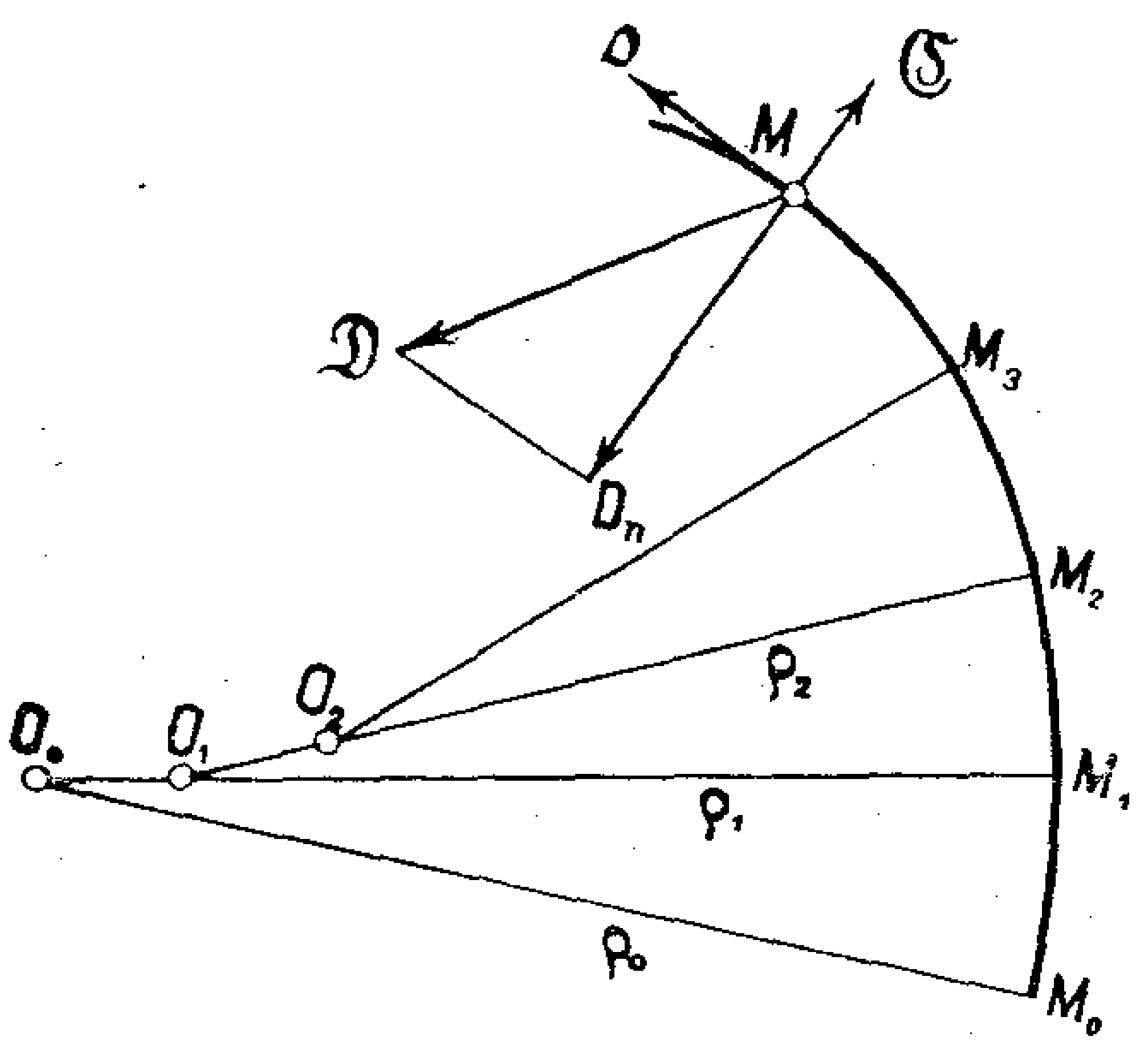
Претпоставимо да се астероид креће у равни $X—Y$ и да у произвољном моменту има положај M, а вектор брзине $\mathfrak{v}$ (сл. 11). Тим положајем и том брзином, дата нам је и сила $\mathfrak{P}$ која у том положају дејствује на астероид. Она је резултанта двеју сила: силе $\mathfrak{D} = m' \operatorname{grad} W$ и силе $\mathfrak{C} = 2m' [\mathfrak{v}\, \mathfrak{w}]$. Прва од тих сила има правац градиента поља W у тачки M, а друга сила стоји, према дефиницији векториелног продукта, нормално на вектор брзине $\mathfrak{v}$. Она је због (3) претстављена изразом:

$$\mathfrak{C} = 2m'n\, [\mathfrak{v}\, \mathfrak{k}],$$

а како вектор $\mathfrak{k}$ стоји нормално на равни $X—Y$ то сила $\mathfrak{C}$ пада у ту раван, стоји нормално на вектору $\mathfrak{v}$, а има интензитет

$2m'nv$. На коју страну нормале у тачки M је та сила наперена, то зависи од смисла обилажења астероида по његовој путањи. У нашем случају она је наперена онако како је то у слици претстављено.

Израчунајмо компоненту D_n силе $\mathfrak{D}$ која пада у нормалу путање, т.ј. у исту праву у коју пада и сила $\mathfrak{C}$. Означимо елеменат у правцу нормале, т. ј. у правцу радиуса кривине, са $\partial\varrho$, то, према дефиницији градиента, та компонента има интензитет $D_n = m'\frac{\partial W}{\partial \varrho}$, а наперена је према оној страни нормале на којој скалар W расте. Узмимо да је тај правац онај како је у слици



Сл. 11

означен, онда компонента силе $\mathfrak{P}$, нормална на тангенту путање, има интензитет

$$(36) \qquad P_\rho = m' \frac{\partial W}{\partial \varrho} - 2m' n v.$$

Ова је сила индентична центрипеталној сили која дејствује на мобилну масу m', а која сила има интензитет

$$(37) \qquad P_\rho = m' \frac{v^2}{\varrho},$$

где ϱ означава радиус кривине путање.

Из предњих двеју једначина следује:

$$\frac{v^2}{\varrho} = \frac{\partial W}{\partial \varrho} - 2n\,v\,, \tag{38}$$

а из Јакобијевог интеграла (30)

$$v^2 = 2W + 2h. \tag{39}$$

Из последњих двеју једначина добивамо:

$$\frac{2W + 2h}{\varrho} = \frac{\partial W}{\partial \varrho} - 2n\sqrt{2W+2h}\,,$$

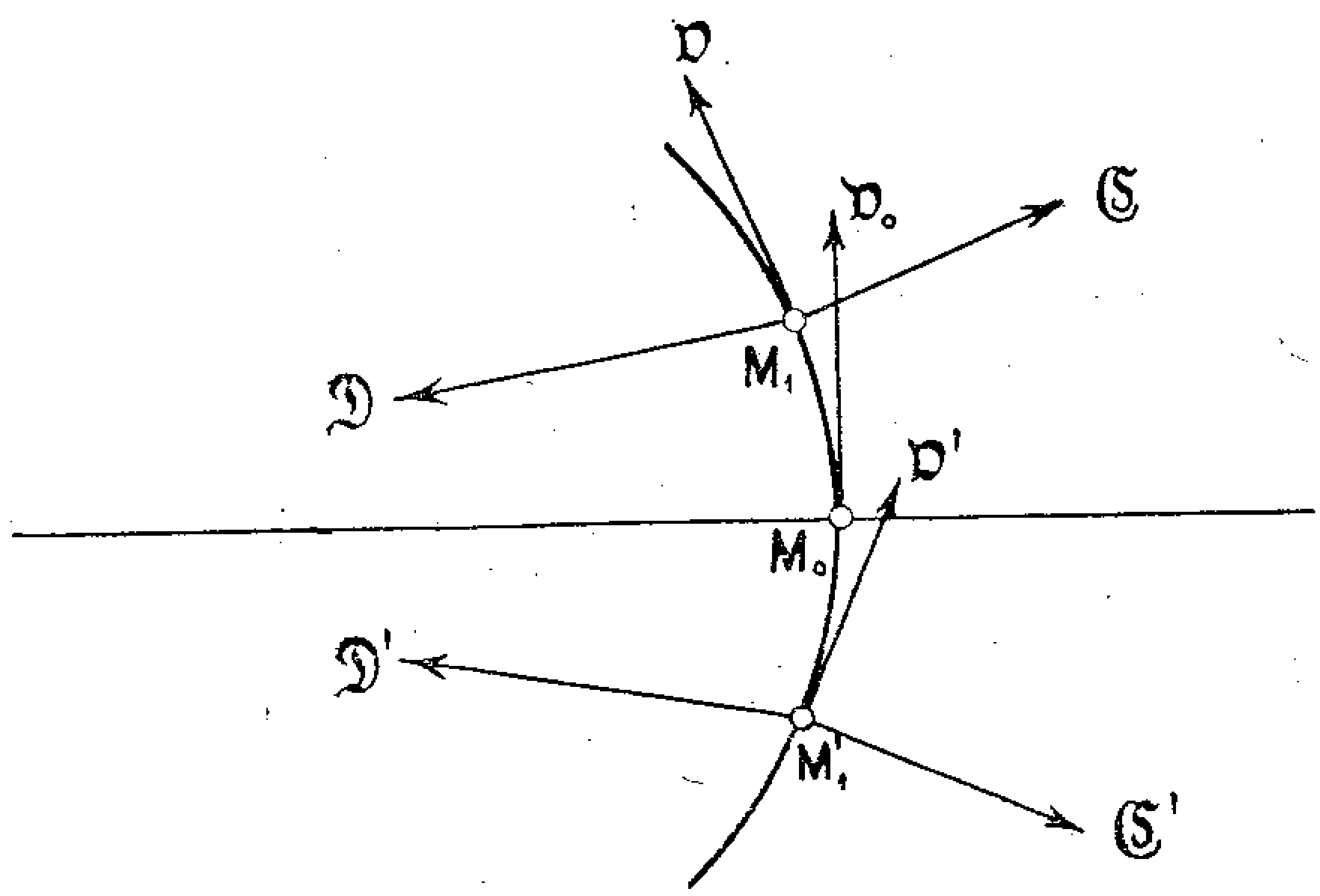
т. ј.

$$\varrho = \frac{2W + 2h}{\dfrac{\partial W}{\partial \varrho} - 2n\,\sqrt{2W+2h}}\,. \tag{40}$$

Положајем астероида и његовом брзином дат нам је, дакле, и радиус кривине његове путање, чиме је омогућена конструкција те путање, тачка по тачку, на овај начин.

Нека се астероид налазио у иницијалном моменту у положају M_0 за који је $W = W_0$ и нека има иницијалну брзину $\mathfrak{v}_0$ интензитета v_0. Тим је, пре свега, одређена нумеричка вредност константе h Јакобијевог интеграла једначином (30). Правцем брзине $\mathfrak{v}_0$ одређена је вредност извода $\dfrac{\partial W}{\partial \varrho}$ скалара нормално на тај правац. Зато можемо помоћу (40) израчунати дужину радиуса кривине ϱ_0 у тачки M_0. Опишемо ли тим радиусом, из центра кривине O_0, малени лук M_0M_1, онда долазимо до тачке M_1 за коју можемо, пошто је њом дат нови положај астероида и нови правац његове брзине, израчунати нумеричке вредности W и $\dfrac{\partial W}{\partial \varrho}$, а помоћу једначине (40) дужину ϱ_1 радиуса кривине у тачки M_1. Тако можемо, од тачке до тачке, конструисати путању астероида. У колико буду били кружни елементи, из којих састављамо ту путању, мањи, у толико ће конструкција путање бити тачнија. Та се тачност може произвољно потенцирати ако ову геометријску конструкцију заменимо рачуном.

Претпоставимо да се астероид налазио, у иницијалном моменту, у једној тачки M_0 осе X и да је вектор иницијалне брзине $\mathfrak{v}_0$ био нормалан на ту осу па замислимо да смо, служећи се претходном методом, конструисали оне делове путање астероида који следују иницијалном моменту и оне који су му претходили, то је лако увидети да ће ти делови путање бити међусобно симетрични према оси X, јер су у тачкама M_1 и M'_1 симетричним према оси X, а које ограничавају елементарне лукове $M_0 M_1$ и $M_1' M_0$, баш због тога што је вектор брзине $\mathfrak{v}$ у тачки M_1 наперен од осе X, а вектор брзине $\mathfrak{v}'$ у тачки M'_1 наперен према тој оси, Кориолисове силе $\mathfrak{C}$ и $\mathfrak{C}'$, према дефиницији векториелног продукта, симетричне према оси X. Како је и поље скалара W симетрично према тој оси, то ћемо у тачкама M_1 и M_1' добити исте радиусе кривине, па ћемо, настав-



Сл. 12

љајући конструкцију путање, добити је такву да ће цела та путања бити симетрична према оси X. Ако, дакле, астероид, на ма којем месту своје путање, пресече осу X нормално, онда та путања мора бити симетрична према оси X. Ако сада варирамо иницијалне услове, било да мењамо иницијални положај M_0 дуж осе X, било да мењамо интензитет v_0 иницијалне брзине, било да мењамо та оба иницијална услова, а са њима и константу h, дотле док не добијемо такву путању астероида која ће, и по други пут, пресећи нормално осу X, онда ће та путања постати затворена. Крећући се по таквој путањи, астероид ће стизати у своје бивше положаје на тој путањи увек оном брзином којом је пре прошао кроз те положаје, јер према Јакобијевом интегралу, та брзина зависи, при датој константи h, само од нумеричке вредности скалара W на оном месту на које је астероид стигао. Зато ће се после једног потпуног обиласка астероида око његове путање поновити његово кретање истим оним брзинама којима је пре тога кроз њу пролазио. Његово кретање биће периодично и претстављаће једно периодично решење астероидног проблема. Служећи се овом основном идејом и изводећи је рачунски, Г. Х. Дарвин је први конструисао и испитао такве периодичне путање астероида, симетричне према оси.

§ 25. Периодична решења у околини центара либрације. Желимо ли да векторску једначину кретања астероида

$$\frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2} = \text{grad}\, W + 2\,[\mathfrak{v}\,\mathfrak{w}] \tag{41}$$

заменимо скаларнима, то ваља имати у виду да је у општем случају, када астероид није ограничен на раван X—Y, његов вектор положаја $\mathfrak{r}$ претстављен са

$$\mathfrak{r} = x\,\mathfrak{i} + y\,\mathfrak{j} + z\,\mathfrak{k}, \tag{42}$$

где су x, y, z координате астериода, а $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ јединични вектори у правцу координатних оса. Одавде следује:

$$\mathfrak{v} = \frac{d\mathfrak{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\,\mathfrak{i} + \frac{dy}{dt}\,\mathfrak{j} + \frac{dz}{dt}\,\mathfrak{k} \tag{43}$$

$$\frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\,\mathfrak{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\,\mathfrak{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\,\mathfrak{k}. \tag{44}$$

Градиенат скалара W претстављен је, аналитички, овим изразом:

$$\text{grad}\; W = \frac{\partial W}{\partial x}\,\mathfrak{i} + \frac{\partial W}{\partial y}\,\mathfrak{j} + \frac{\partial W}{\partial z}\,\mathfrak{k}, \tag{45}$$

а било је, према (3),

$$\mathfrak{w} = n\mathfrak{k}. \tag{46}$$

Координате вектора $\mathfrak{w}$ су, дакле, 0, 0, n, па је зато векториелни продукат $[\mathfrak{v}\mathfrak{w}]$ претстављен детерминантом:

$$
(47) \qquad [\mathfrak{v}\,\mathfrak{w}] = \begin{vmatrix} \mathfrak{i} & \mathfrak{j} & \mathfrak{k} \\ \frac{dx}{dt} & \frac{dy}{dt} & \frac{dz}{dt} \\ 0 & 0 & n \end{vmatrix} = n\frac{dy}{dt}\mathfrak{i} - n\frac{dx}{dt}\mathfrak{j}.
$$

Ставимо ли (42) до (47) у (41), то мора постојати једнакост за коефициенте од $\mathfrak{i}$, односно од $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$, с леве и десне стране добивене једначине. На тај начин, или множећи ту једначину скаларно са $\mathfrak{i}$, па затим са $\mathfrak{j}$, односно $\mathfrak{k}$, добивамо ове три скаларне једначине:

$$
(48) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{d^2x}{dt^2} - 2n\frac{dy}{dt} = \frac{\partial W}{\partial x} \\ &\frac{d^2y}{dt^2} + 2n\frac{dx}{dt} = \frac{\partial W}{\partial y} \\ &\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{\partial W}{\partial z}\,. \end{aligned} \right.
$$

Налази ли се астероид у равни $X - Y$, то падају силе $\mathfrak{F}$ $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$ претстављене обрасцима (4), (6), (7), у ту раван, па зато лежи grad W, који је једнак збиру тих вектора, у равни $X - Y$. Зато је, због (45), $\frac{\partial W}{\partial z} = 0$, а због горњих једначина, $\frac{d^2z}{dt^2} = 0$. Ако се, дакле, у иницијалном моменту, астероид налази у равни $X - Y$, па ако и његова иницијална брзина пада у ту раван, онда он ту раван неће оставити, јер његова брзина и убрзање падају, у том моменту, па и у свима осталима, у ту раван. У таквом је случају његово кретање регулисано првим двема од једначина (48) или, ако место једначина (10) и (12) употребимо једначине (18) и (19), овим двема једначинама:

$$
(49) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{d^2x}{dt^2} - 2n\frac{dy}{dt} = \frac{\partial \Omega}{\partial x} \\ &\frac{d^2y}{dt^2} + 2n\frac{dx}{dt} = \frac{\partial \Omega}{\partial y}\,. \end{aligned} \right.
$$

Ове једначине омогућавају коначна периодична решења у близини центара либрације. Видели смо да је у свима тима центрима градиенат од W и од Ω једнак нули, па је зато, ако са a, b означимо координате уоченог центра либрације,

$$\begin{cases} x = a; \qquad y = b \\ \operatorname{grad} \Omega = \dfrac{\partial \Omega}{\partial x} \mathrm{i} + \dfrac{\partial \Omega}{\partial y} \mathrm{j} = 0 \end{cases}$$

или, једноставније писано,

$$\frac{\partial \Omega}{\partial a} = 0 ; \qquad \frac{\partial \Omega}{\partial b} = 0 . \tag{50}$$

Претпоставимо да се астероид налазио у иницијалном моменту у близини центра либрације (a, b) и да за време целог свог кретања неће, што имамо накнадно да проверимо, оставити непосредну околину тога центра, онда су његове координате претстављене са

$$\begin{cases} x = a + \xi \\ y = b + \eta, \end{cases} \tag{51}$$

где су a и b константе, а ξ и η променљиве величине које остају, због горње претпоставке, увек мале. Зато можемо функције $\dfrac{\partial \Omega}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial \Omega}{\partial y}$ развити по Тејлоровом обрасцу у ред и занемарити све чланове који садржавају више потенције од ξ и η. На тај начио добивамо:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Omega}{\partial x} = \dfrac{\partial \Omega}{\partial a} + \xi \dfrac{\partial^2 \Omega}{\partial a^2} + \eta \dfrac{\partial^2 \Omega}{\partial a . \partial b} \\ \dfrac{\partial \Omega}{\partial y} = \dfrac{\partial \Omega}{\partial b} + \xi \dfrac{\partial^2 \Omega}{\partial a . \partial b} + \eta \dfrac{\partial^2 \Omega}{\partial b^2}, \end{cases} \tag{52}$$

при чему смо увели ове покраћене ознаке:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial a} = \left\{ \frac{\partial \Omega}{\partial x} \right\}_{a,\, b} ; \qquad \frac{\partial \Omega}{\partial b} = \left\{ \frac{\partial \Omega}{\partial y} \right\}_{a,\, b} ,$$

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial a^2} = \left\{ \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} \right\}_{a,\, b} ; \qquad \frac{\partial^2 \Omega}{\partial b^2} = \left\{ \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2} \right\}_{a,\, b} ;$$

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial a \,.\, \partial b} = \left\{ \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x \,.\, \partial y} \right\} a, b \,.$$

Из (51) следује:

$$(53) \quad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{d\xi}{dt}\,; & \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{d\eta}{dt} \\ \dfrac{d^2x}{dt^2} = \dfrac{d^2\xi}{dt^2}\,; & \dfrac{d^2y}{dt^2} = \dfrac{d^2\eta}{dt^2}\,. \end{cases}$$

Стављајући (52) и (53) у (49), а узимајући у обзир (50), добивамо:

$$(54) \quad \begin{cases} \dfrac{d^2\xi}{dt^2} - 2n\dfrac{d\eta}{dt} = \dfrac{\partial^2 \Omega}{\partial a^2}\,\xi + \dfrac{\partial \Omega}{\partial a \,.\, \partial b}\,\eta \\ \dfrac{\partial^2\eta}{dt^2} + 2n\dfrac{\partial\xi}{dt} = \dfrac{\partial^2 \Omega}{\partial a . \partial b}\,\xi + \dfrac{\partial^2 \Omega}{\partial b^2}\,\eta\,. \end{cases}$$

Ове једначине важе само за непосредну околину тачке (a, b). Оне су линеарне, па ће зато бити задовољене партикуларним интегралима:

$$(55) \qquad \xi = A\,e^{\lambda t}\,; \qquad \eta = B\,e^{\lambda t}\,,$$

где A, B, λ означавају константе које ћемо још одредити. Како је

$$(56) \quad \begin{cases} \dfrac{d\xi}{dt} = A\,\lambda\,e^{\lambda t}; & \dfrac{d\eta}{dt} = B\,\lambda\,e^{\lambda t} \\ \dfrac{d^2\xi}{dt^2} = A\lambda^2\,e^{\lambda t}\,; & \dfrac{d^2\eta}{dt^2} = B\,\lambda^2 e^{\lambda t}\,, \end{cases}$$

то видимо, стављајући (55) и (56) у једначине (54), да ће оне бити задовољене ако буде:

$$A\,\lambda^2 - 2n\,B\,\lambda = A\,\frac{\partial^2 \Omega}{\partial a^2} + B\,\frac{\partial^2 \Omega}{\partial a . \partial b}$$

$$B\,\lambda^2 + 2n\,A\,\lambda = A\,\frac{\partial^2 \Omega}{\partial a\,\partial b} + B\,\frac{\partial^2 \Omega}{\partial b^2}\,,$$

т. ј.

$$
(57) \quad \begin{cases} A\left(\lambda^2 - \dfrac{\partial^2 \Omega}{\partial a^2}\right) - B\left((2n\lambda + \dfrac{\partial^2 \Omega}{\partial a . \partial b}\right) = 0 \\ A\left(2n\lambda - \dfrac{\partial^2 \Omega}{\partial a . \partial b}\right) + B\left(\lambda^2 - \dfrac{\partial^2 \Omega}{\partial b^2}\right) = 0 . \end{cases}
$$

Из ових једначина ваља одредити константе A и B. Те су једначине линеарне и хомогене алгебарске једначине, па ће оне, сем тривијалних коренова $A = B = 0$, имати и других ако детерминанта коефицијената од A и B буде једнака нули. Тим условом добивамо једначину:

$$
(58) \quad \begin{vmatrix} \lambda^2 - \dfrac{\partial^2 \Omega}{\partial a^2} , & -\left(2n\lambda + \dfrac{\partial^2 \Omega}{\partial a . \partial b}\right) \\ 2n\lambda - \dfrac{\partial^2 \Omega}{\partial a . \partial b}, & \lambda^2 - \dfrac{\partial^2 \Omega}{\partial b^2} \end{vmatrix} = 0,
$$

т. ј.

$$
(59) \quad \lambda^4 - \left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial a^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial b^2} - 4n^2\right)\lambda^2 + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial a^2} \cdot \frac{\partial^2 \Omega}{\partial b^2} - \left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial a . \partial b}\right)^2 =
$$

Решимо ли ову једначину по λ^2, па усвојимо, из разлога које ћемо касније упознати, само онакав корен који је реалан и негативан, онда ћемо за λ добити два корена овога облика:

$$
(60) \qquad \lambda_1 = i\nu \; ; \qquad \lambda_2 = -i\nu,
$$

где i означава имагинарну јединицу, а ν један реалан број. Са ова два корена даће нам једначине (57) два бесконачна низа коренова за A и B или два пара таквих коренова: A_1, B_1, и A_2, B_2, при чему можемо A_1 и B_1, односно A_2 и B_2 помножити произвољним бројем, па да једначине (57) буду опет задовољене. Те нам једначине дају, у ствари, само разломке $\dfrac{A_1}{B_1}$ и $\dfrac{A_2}{B_2}$ који су, као што је познато, једнаки сразмери субдетерминаната уз прву или другу врсту детерминанте (58). Зато је, узимајући у обзир другу врсту те детерминанте,

$$(61)\quad \frac{A_1}{B_1}=\frac{2n\lambda_1+\frac{\partial^2\Omega}{\partial a.\partial b}}{\lambda_1^2-\frac{\partial^2\Omega}{\partial a^2}};\qquad \frac{A_2}{B_2}=\frac{2n\lambda_2+\frac{\partial^2\Omega}{\partial a.\partial b}}{\lambda_2^2-\frac{\partial^2\Omega}{\partial a^2}}.$$

Општи интеграли диференцијалних једначина (54) су, дакле, ови:

$$(62)\quad \begin{cases} \xi=A_1\,e^{i\nu t}+A_2\,e^{-i\nu t}\\ \eta=B_1\,e^{i\nu t}+B_2\,e^{-i\nu t}. \end{cases}$$

Примењујући познати образац

$$e^{\pm i\nu t}=\cos\nu t\pm i\sin\nu t,$$

због којега смо и усвојили само имагинарне коренове једначине (59), можемо једначинама (62) дати овај облик:

$$(63)\quad \begin{cases} \xi=(A_1+A_2)\cos\nu t+i\,(A_1-A_2)\sin\nu t\\ \eta=(B_1+B_2)\cos\nu t+i\,(B_1-B_2)\sin\nu t. \end{cases}$$

A_1 и A_2 су коњуговани комплексни бројеви, јер A_2 настаје из A_1 ако λ_1 заменимо са λ_2, т. ј. $i\nu$ са $-i\nu$. Исто важи и за B_1 и B_2. Зато можемо ставити:

$$(64)\quad \begin{cases} A_1=\frac{a_1}{2}-i\,\frac{a_2}{2}; & A_2=\frac{a_1}{2}+i\,\frac{a_2}{2}\\ B_1=\frac{b_1}{2}-i\,\frac{b_2}{2}; & B_2=\frac{b_1}{2}+i\,\frac{b_2}{2}, \end{cases}$$

где нам a_1, a_2, b_1, b_2 претстављају реалне бројеве. Стављајући (64) у (63), добивамо:

$$(65)\quad \begin{cases} \xi=a_1\cos\nu t+a_2\sin\nu t\\ \eta=b_1\cos\nu t+b_2\sin\nu t. \end{cases}$$

Из ових једначина следује:

$$(66)\quad \begin{cases} \frac{d\xi}{dt}=-\,a_1\,\nu\sin\nu t+a_2\,\nu\cos\nu t\\ \frac{d\eta}{dt}=-\,b_1\,\nu\sin\nu t+b_2\,\nu\cos\nu t. \end{cases}$$

Иницијалним условима дат нам је положај и брзина астероида, т. ј.

$$(67)\quad \begin{cases} t=0 \\ \xi=\xi_0\,; \quad \eta=\eta_0\,; \quad \dfrac{d\xi}{dt}=v_1{}^0\,; \quad \dfrac{d\eta}{dt}=v_2{}^0\,. \end{cases}$$

Стављајући ово у (65) и (66), добивамо:

$$(68)\quad \xi_0=a_1; \quad \eta_0=b_1; \quad v_1{}^0=a_2\nu; \quad v_2{}^0=b\nu,$$

чиме би константе a_1, a_2, b_1, b_2 биле одређене. Но те константе треба да, помоћу једначина (64), задовоље обе једначине (61). Зато су иницијалним положајем одређене компоненте $v_1{}^0$, $v_2{}^0$, т. ј. сам вектор иницијалне брзине који није, дакле, произвољан. Ако су иницијални услови такви да су константе a_1, a_2, b_1, b_2 веома мале, онда ће, због (65), и координате ξ, η за време целог кретања остати малене, а астероид се кретати у непосредној околини центра либрације. Тим је испуњена претпоставка на коју су се ослањали претходни рачуни.

Координате ξ, η астероида су, као што то следује из једначина (65), периодичне функције времена са периодом T, при чему је

$$(69)\quad \frac{2\pi}{T}=\nu\,; \qquad T=\frac{2\pi}{\nu}\,,$$

па ће путања астероида бити једна затворена крива. Да одредимо ту путању, заокренимо наш координатни систем ξ—η којега почетак лежи у уоченом либрационом центру, а којега су осе паралелне са осама X, Y за угао φ, па означимо нове координате са ξ' и η'. Онда између координата ξ, η и ξ', η' постоји позната веза:

$$(70)\quad \begin{cases} \xi'=\xi\cos\varphi+\eta\sin\varphi \\ \eta'=-\xi\sin\varphi+\eta\cos\varphi\,. \end{cases}$$

Стављајући (65) у (70), добивамо:

$$(71)\quad \begin{cases} \xi'=(a_1\cos\varphi+b_1\sin\varphi)\cos\nu t+(a_2\cos\varphi+b_2\sin\varphi)\sin\nu t \\ \eta'=(-a_1\sin\varphi+b_1\cos\varphi)\cos\nu t-(a_2\sin\varphi-b_2\cos\varphi)\sin\nu t. \end{cases}$$

Уведимо сада три нове константе M_1, M_2, ε и одредимо, њих три, и угао φ тако да те четири величине задовољавају ове четири једначине:

$$
\left\{
\begin{aligned}
& a_1\cos\varphi + b_1\sin\varphi = M_1\sin\varepsilon; \quad a_2\cos\varphi + b_2\sin\varphi = M_1\cos\varepsilon \\
& -a_1\sin\varphi + b_1\cos\varphi = M_2\sin\varepsilon; \quad a_2\sin\varphi - b_2\cos\varphi = M_2\sin\varepsilon,
\end{aligned}
\right. \tag{72}
$$

онда добивамо:

$$
\left\{
\begin{aligned}
\xi' &= M_1 \sin(\varepsilon + \nu t) \\
\eta' &= M_2 \cos(\varepsilon + \nu t),
\end{aligned}
\right. \tag{73}
$$

т. ј.

$$\frac{\xi'}{M_1} = \sin(\varepsilon + \nu t)\,; \qquad \frac{\eta'}{M_2} = \cos(\varepsilon + \nu t)\,.$$

Ако квадрирамо и саберемо ове две једначине, добивамо:

$$\left(\frac{\xi'}{M_1}\right)^2 + \left(\frac{\eta'}{M_2}\right)^2 = 1 \tag{74}$$

као једначину путање астероида. Та је путања елипса. Крећући се по тој путањи и учествујући у ротацији покретног координатног система $X—Y$, астероид врда око центра либрације који је због тога добио своје име. Такве елиптичне путање могуће је, као што то показује детаљније испитивање у које се овде не можемо упуштати, положити око свих центара либрације, кроз сваку тачку његове околине. При томе треба иницијалне услове подесити тако да се астероид креће по својој путањи у обрнутом смислу кретања главних двају тела, а то зато што ће у таквом случају Кориолисова сила бити наперена према либрационом центру. Тај је центар, пошто у њему скалар Ω достизава свој минимум, а grad Ω је наперен од њега, положај лабилне равнотеже, па би се астероид постепено од њега удаљио кад га не би Кориолисова сила одржавала у његовој близини и тиме учинила његову путању стабилном.

ГЛАВА ШЕСТА

Сила поремећаја и њено поље.

§ 26. Дефиниција и математски израз силе поремећаја. Споменули смо, говорећи о проблему двају тела, да се планете крећу око Сунца скоро сасвим тако као кад би свака од њих стајала само под дејством привлачне силе Сунца. Слично важи и за сателите планета, који се крећу скоро сасвим тако као кад би сваки од њих стајао само под дејством привлачне силе своје планете. Зато можемо, и при строжијем испитивању кретања тих небеских тела, поћи од резултата добивених у проблему двају тела, па ове резултате постепено модификовати да бисмо добили тачну слику стварних кретања. При томе је потребно увести један нов појам, силу поремећаја, до којег долазимо на овај начин.

Нека нам m_k означава оно небеско тело и његову масу чије кретање хоћемо да испитамо, а m_0 оно небеско тело око којега се уочено небеско тело креће скоро елиптичним кретањем. Ако је m_k планета, онда нам, дакле, m_0 претставља Сунце; ако је m_k сателит, онда нам m_0 претставља његову планету. Кад не би било других небеских тела сем тих двају, онда би једначина кретања тела m_k била, према (13), § 9, ова:

$$m_k \frac{d^2\mathfrak{r}_k}{dt^2} = -f\, m_k\,(m_0 + m_k)\,\frac{\mathfrak{r}_k}{r_k^3}\,, \tag{1}$$

где $\mathfrak{r}_k$ означава вектор положаја масе m_k према маси m_0, а r_k модуо тога вектора. Зато је

$$(2) \qquad \frac{d^2\mathfrak{r}_k}{dt^2} = -f(m_0 + m_k)\frac{\mathfrak{r}_k}{r_k^3}\,.$$

Узмимо, за сада, још једно треће небеско тело m_i у обзир. Његово присуство пореметиће кретање небеског тела m_k, претстављено једначином (2), због чега ћемо тело m_i назвати оним које проузрокује поремећај, а тело m_k оним које подлежи том поремећају.

Означимо са $\mathfrak{r}_i$ вектор положаја тела m_i према телу m_0, са $\mathfrak{l}_{ik}$ вектор положаја тела m_k према телу m_i, а са ϱ_{ik} модуо овог потоњег вектора. Ако $\mathfrak{R}_0$, односно $\mathfrak{R}_k$, означава вектор положаја тела m_0, односно тела m_k, према једној непомичној тачки простора, онда су једначине кретања ових двају тела ове:

$$m_k \frac{d^2\mathfrak{R}_k}{dt^2} = -f\, m_k m_0 \frac{\mathfrak{r}_k}{r_k^3} - f\, m_k m_i \frac{\mathfrak{l}_{ik}}{\varrho_{ik}^3}$$

$$m_0 \frac{d^2\mathfrak{R}_0}{dt^2} = f\, m_k m_0 \frac{\mathfrak{r}_k}{r_k^3} + f\, m_i m_0 \frac{\mathfrak{r}_i}{r_i^3}\,.$$

Скратимо прву од ових двеју једначина са m_k, другу са m_0, одузмимо другу од прве, па узмимо у обзир да је

$$\mathfrak{R}_k - \mathfrak{R}_0 = \mathfrak{r}_k\,; \qquad \frac{d^2\mathfrak{R}_k}{dt^2} - \frac{d^2\mathfrak{R}_0}{dt^2} = \frac{d^2\mathfrak{r}_k}{dt^2}\,,$$

то добивамо:

$$(3) \qquad \frac{d^2\mathfrak{r}_k}{dt^2} = -f(m_0 + m_k)\frac{\mathfrak{r}_k}{r_k^3} - f\, m_i \left(\frac{\mathfrak{l}_{ik}}{\varrho_{ik}^3} + \frac{\mathfrak{r}_i}{r_i^3}\right).$$

Вектор $-\dfrac{\mathfrak{l}_{ik}}{\varrho_{ik}^3}$ може се претставити као градиенат скалара $\dfrac{1}{\varrho_{ik}}$, при чему треба m_i сматрати за непомично, а m_k за покретно. Заиста, у том случају су еквискаларне површине од $\dfrac{1}{\varrho_{ik}}$ лопте са центром у m_i, градиенат стоји нормално на тим површинама, има, дакле, правац јединичног вектора $\dfrac{\mathfrak{l}_{ik}}{\varrho_{ik}}$, његов модуо једнак је изводу $-\dfrac{1}{\varrho_{ik}^2}$ од $\dfrac{1}{\varrho_{ik}}$, па је зато:

$$\operatorname{grad} \frac{1}{\varrho_{ik}} = -\frac{1}{\varrho_{ik}^2} \cdot \frac{\mathfrak{l}_{ik}}{\varrho_{ik}} = -\frac{\mathfrak{l}_{ik}}{\varrho_{ik}^3}.$$

И вектор $\frac{\mathfrak{r}_i}{r_i^3}$ може се сматрати као градиенат једне скаларне величине. Питамо ли за градиенат скалара $U_i = \frac{\mathfrak{r}_i\, \mathfrak{r}_k}{r_i^3}$, сматрајући, при томе, само m_k као покретно, то добивамо овај резултат. Према дефиницији скаларног продукта двају вектора, је

$$U_i = \frac{x r_i}{r_i^3} = \frac{x}{r_i^2},$$

где x претставља пројекцију вектора $\mathfrak{r}_k$ у вектор $\mathfrak{r}_i$. При образовању градиента треба r_i сматрати за константно, па је зато:

$$\operatorname{grad} U_i = \frac{1}{r_i^2} \operatorname{grad} x.$$

Еквискаларне површине од x су равни нормалне на вектор r_i, па зато grad x има правац јединичног вектора $\frac{\mathfrak{r}_i}{r_i}$, а његов модуо је $\frac{\partial x}{\partial x} = 1$. Зато је

$$\operatorname{grad} U_i = \operatorname{grad} \frac{\mathfrak{r}_i\, \mathfrak{r}_k}{r_i^3} = \frac{1}{r_i^2} \cdot \frac{\mathfrak{r}_i}{r_i} = \frac{\mathfrak{r}_i}{r_i^3}.$$

На тај начин добивамо:

$$\operatorname{grad} f m_i \left(\frac{1}{\varrho_{ik}} - \frac{\mathfrak{r}_i\, \mathfrak{r}_k}{r_i^3} \right) = - f m_i \left(\frac{\mathfrak{l}_{ik}}{\varrho_{ik}^3} + \frac{\mathfrak{r}_i}{r_i^3} \right).$$

Ставимо ли, дакле,

$$f m_i \left(\frac{1}{\varrho_{ik}} - \frac{\mathfrak{r}_i\, \mathfrak{r}_k}{r_i^3} \right) = R_k, \tag{4}$$

то добивамо, место (3), ову једначину:

$$\frac{d^2 \mathfrak{r}_k}{dt^2} = - f (m_0 + m_k) \frac{\mathfrak{r}_k}{r_k^3} + \operatorname{grad}_k R_k. \tag{5}$$

Индекс k показује да при образовању градиента треба само тачку m_k сматрати за покретну.

Кад бисмо место једног јединог тела m_i које изазива поремећај имали њих $(n-1)$ и то $m_1, m_2 \ldots m_n$ (m_k се овде не појављује), онда бисмо за R_k добили овај образац:

$$(6) \qquad R_k = \sum_i f m_i \left(\frac{1}{\varrho_{ik}} - \frac{\mathfrak{r}_i \, \mathfrak{r}_k}{r_i^3} \right).$$

У горњем збиру не појављује се маса m_k.

У овом новом случају добили бисмо, место једначине (5), n таквих једначина, додељујући индексу k редом нумеричке вредности $1, 2, \ldots k, \ldots n$, дакле,

$$(7) \quad \frac{d^2\mathfrak{r}_k}{dt^2} = -f(m_0 + m_k)\frac{\mathfrak{r}_k}{r_k^3} + \mathrm{grad}_k R_k ; \qquad k = 1, 2, \ldots n.$$

Упоредимо ли једначину (2), која важи за елиптично кретање масе m_k око масе m_0, са једначином (7), то видимо да се ова једначина разликује од прве само присуством свога члана

$$(8) \qquad \mathrm{grad}_k R_k = \mathfrak{S}_k .$$

Вектор $\mathfrak{S}_k$ називамо *силом поремећаја* или *силом пертурбације*, а скалар R_k *функцијом поремећаја* или *функцијом пертурбације*.

§ 27. Поље силе поремећаја и његова примена у статичкој теорији плиме. Ако усвојимо терминологију опште теорије физикалних поља, можемо Њутнов закон гравитације изразити и на овај начин, Сваки делић m масе у васиони изазива једно гравитационо поље које се из околине масе m шири у бесконачност и које је дефинисано вектором:

$$(9) \qquad \mathfrak{F} = -f \frac{m}{r^3} \mathfrak{r},$$

где f означава гравитациону константу, $\mathfrak{r}$ вектор положаја уочене тачке поља према маси m, а r модуо тога вектора. Ставимо ли на уочено место поља једну масу m', то се на њој показује гравитациона сила

$$\mathfrak{P} = -f\frac{m\,m'}{r^3}\,\mathfrak{r}\,, \tag{10}$$

т. ј. маса m привлачи масу m' по Њутновом закону. Вектор $\mathfrak{F}$ претставља, слично као и у електростатском пољу, ону силу која дејствује на јединицу масе.

У ствари се поља свих маса које се налазе у васиони međусобно суперпонирају, па би зато било могуће говорити о једном јединим пољу које обухвата целу васиону. Но како интезитет F поља масе m опада са квадратом отстојања r од те масе, то је могуће око сваке масе m ограничити једну област простора у којој је интензитет F поља масе m произвољно пута већи од интензитета силе $\Sigma\mathfrak{F}_i$ изазване свим осталим масама, тако да је у тој области утицај масе m толико препондерантан да се, при првом испитивању, само она узима у обзир, као што је то учињено у проблему двају тела.

Гравитационо поље изазвано једном јединим концентрисаном масом m, дакле поље (9) зовемо радиалним гравитационим пољем. Оно се може, као што смо видели, претставити као градиенат скалара:

$$W = f\frac{m}{r}\,. \tag{11}$$

Ако се маса m' налази, сем масе m, под утицајем још једне масе M која изазива поремећај кретања масе m', па ако се, као што је у претходном параграфу учињено, узму у обзир све привлачне силе које дејствују између маса M, m, m', онда је маса m' изложена, сем утицају поља (9), још и дејству градиента поља R_k претстављеног једначином (4). У тој једначини ваља, према ознакама које смо сада употребили, заменити m_i са M, $\mathfrak{r}_k$ са $\mathfrak{r}$, а ако вектор положаја масе m према маси M означимо са $\mathfrak{a}$, онда треба у (5) ставити $-\mathfrak{a}$ место $\mathfrak{r}$, а место r_i ставити a. Замењујући још ознаку $\mathfrak{l}_{ik}$ са $\mathfrak{f}$, а ϱ_{ik} са s, добивамо за функцију поремећаја овај образац:

$$R = fM\left(\frac{1}{s} + \frac{\mathfrak{a}\,\mathfrak{r}}{a^3}\right). \tag{12}$$

Маса m' налази се, дакле, под утицајем гравитационог поља које је градиент скалара:

$$U = W + R\,, \tag{13}$$

т. ј.

$$U = f\frac{m}{r} + fM\left(\frac{1}{s} + \frac{\mathfrak{a}\,\mathfrak{r}}{a^3}\right). \tag{14}$$

Испитајмо особине овога поља. Према дефиницији скаларног продукта двају вектора, је

$$\mathfrak{a}\,\mathfrak{r} = ax, \tag{15}$$

где x означава пројекцију вектора $\mathfrak{r}$ у вектор $\mathfrak{a}$. Зато је

$$U = f\frac{m}{r} + fM\frac{1}{s} + fM\frac{x}{a^2}\,. \tag{16}$$

Ово скаларно поље настаје суперпозицијом трију компоненталних поља. Еквискаларне површине првог од тих компоненталних поља су лопте са центром у m, еквискаларне површине другог компоненталног поља су лопте са центром у M, а еквискаларне површине трећег компоненталног поља су равни нормалне на праву која спаја масе M и m. Зато је резултујуће поље скалара U симетрично према тој правој, па су његове еквискаларне површине ротационе површине са осом у тој правој. Зато се при испитивању тога поља морамо бринути само о меридијанским пресецима тих еквискаларних површина.

Да изведемо једначине тих меридијанских пресека еквискаларних површина, поступићемо овако. Како је (сл. 13)

$$\mathfrak{s} = \mathfrak{a} + \mathfrak{r}\,, \tag{17}$$

то добивамо, множећи ову векторску једначину скаларно са самом собом,

$$s^2 = a^2 + 2\,(\mathfrak{a}\,\mathfrak{r}) + r^2. \tag{18}$$

Означимо са v угао што га вектор $\mathfrak{r}$ затвара са вектором $\mathfrak{a}$, то је, према дефиницији скаларног продукта двају вектора,

$$\mathfrak{a}\,\mathfrak{r} = a\,r\cos v\,. \tag{19}$$

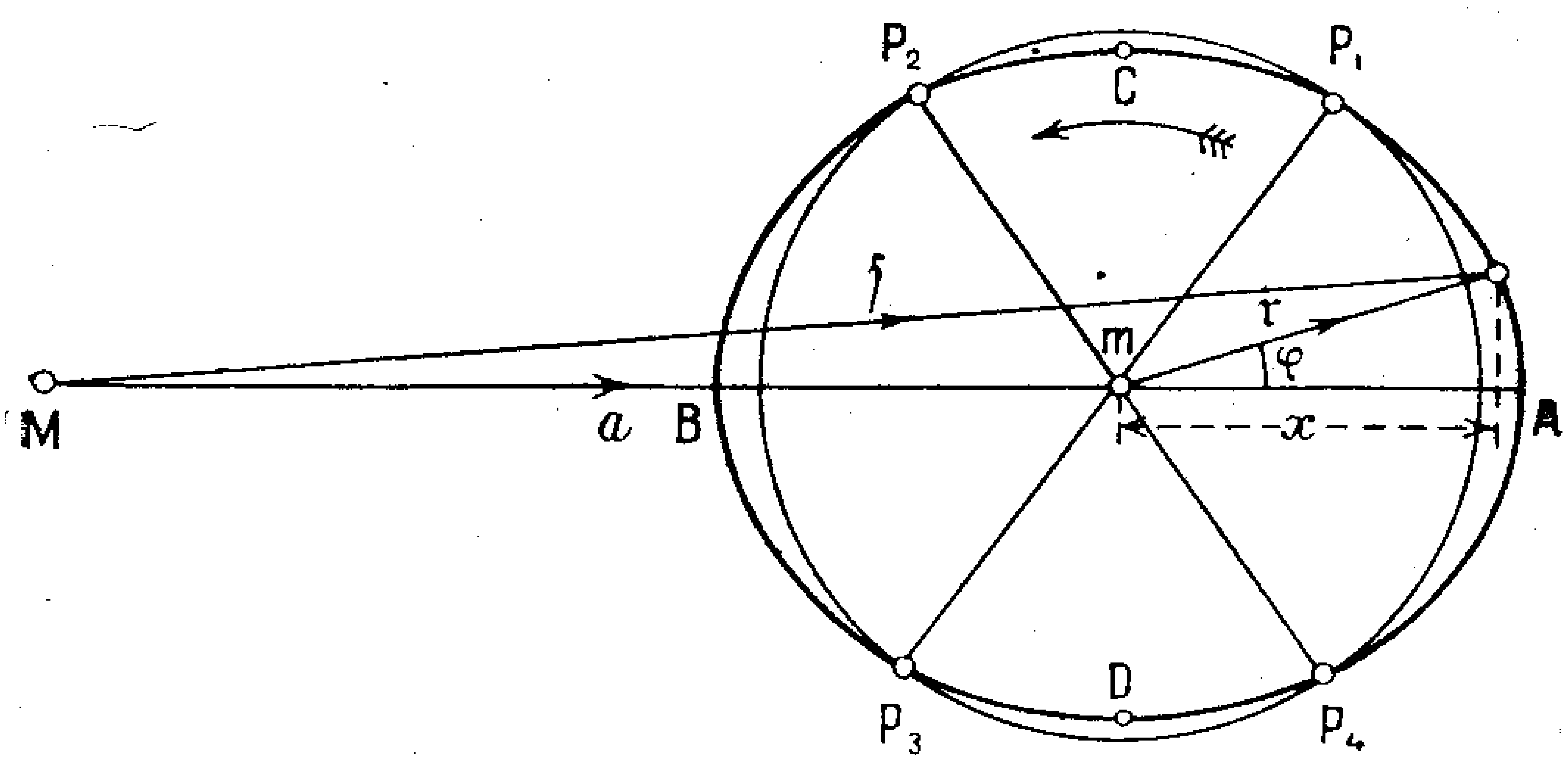
Стављајући ово у (18) и (14), добивамо:

$$U = f\frac{m}{r} + fM\left\{(a^2 + r^2 + 2ar\cos\nu)^{-\frac{1}{2}} + \frac{r}{a^2}\cos\nu\right\},$$

т. ј.

$$(20)\quad U = f\frac{m}{r} + \frac{fM}{a}\left\{(1 + \frac{r^2}{a^2} + 2\frac{r}{a}\cos\nu)^{-\frac{1}{2}} + \frac{r}{a}\cos\nu\right\}.$$

Ако се уочена тачка M поља налази у близини масе m, онда је $\frac{r}{a}$ мали број којега више потенције од друге можемо



Сл. 13

занемарити. Зато добивамо, применом биномског обрасца,

$$(1 + \frac{r^2}{a^2} + 2\frac{r}{a}\cos\nu)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}(\frac{r^2}{a^2} + 2\frac{r}{a}\cos\nu) +$$

$$+ \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{2\,.\,1}(\frac{r^2}{a^2} + 2\frac{r}{a}\cos\nu)^2 = 1 - \frac{1}{2}\frac{r^2}{a^2} -$$

$$-\frac{r}{a}\cos\nu + \frac{3}{2}\frac{r^2}{a^2}\cos^2\nu\,.$$

Стављајући ово у (20) добивамо:

$$U = f\frac{m}{r} + f\frac{M}{a} + \frac{1}{2}fM\frac{r^2}{a^3}(3\cos^2\nu - 1)\,.$$

Из овог израза можемо адитивну константу $f\frac{M}{a}$ испустити, пошто она не утиче ни на градиенат поља ни на облик еквискаларних површина које добивамо стављајући горњи израз једнак једној произвољној константи. Зато можемо писати:

$$U = f\frac{m}{r} + fM\frac{r^2}{a^3}(3\cos^2 \nu - 1)\,, \tag{21}$$

а за једначину меридијанских пресека еквискаларних површина поља U добивамо ову:

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{2}\frac{M}{m}\frac{r^2}{a^3}(3\cos^2 \nu - 1) = C, \tag{22}$$

где C означава једну произвољну константу.

Добивени резултати имају своје примене у статичкој теорији морске плиме, са којом ћемо се сада упознати.

У другом одељку овог дела показаћемо да наша Земља привлачи једну спољну масу m' скоро сасвим тако као кад би целокупна маса m Земљина била концентрисана у Земљином центру. Ако нам, према томе, у нашим претходним обрасцима m означава масу Земље концентрисану у једној тачки, а M масу Месеца концентрисану, у отстојању a од Земље, такође у једној тачки, па ако не узмемо у обзир центрифугалне силе проузроковане ротацијом Земље око њене осе и оне, изазване ротацијом дужи a око заједничког тежишта Земље и Месеца, пошто је утицај тих сила на појаву коју испитујемо без особитог значаја, онда нам једначина (22) претставља једну од еквискаларних површина поља атракција Земље и Месеца, и то у непосредној близини Земље, пошто смо при извођењу те једначине претпоставили да је $\frac{r}{a}$ један мали број. Налазећи се у том пољу атракције, мора која покривају нашу Земљу заузеће, под дејством сила тога поља, онај облик при којем огледало мора претставља једну од еквискаларних површина тога поља. Само у таквом случају је сила која дејствује на произвољан материјални делић морске површине нормална на ту површину, па није у стању да промени њен облик. Та површина биће, према оном што је напред речено, ротациона површина а њена оса биће права која спаја центар Земље са центром Месеца. Кад не би било Месеца, онда би та површина била лопта са једним извесним радиусом r_0, т. ј. место једначине (22), у којој би ваљало ставити $M=0$, имали бисмо једначину лопте. Услед присуства Месеца, та ће се лопта променити у једну ротациону површину која неће много отступати од лопте, па зато можемо ставити

$$r = r_0 + h\,, \tag{23}$$

где h означава једну малу величину. Зато је, примењујући биномни образац и занемарујући више потенције малога броја $\frac{h}{r_0}$,

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_0+h} = \frac{1}{r_0}\left(1+\frac{h}{r_0}\right)^{-1} = \frac{1}{r_0}\left(1-\frac{h}{r_0}\right). \tag{24}$$

Ставимо овај израз у једначину (22) на место првог члана њене леве стране, док у другом члану, малом због тога што је $\frac{r}{a}$ мало, можемо r заменити директно са r_0. На тај начин добивамо као једначину морске површине:

$$\frac{1}{r_0} - \frac{h}{r_0^2} + \frac{1}{2}\frac{M}{m}\frac{r_0^2}{a^3}(3\cos^2 v - 1) = C. \tag{25}$$

При томе нам h претставља отступање морског нивоа од лопте радиуса r_0. За $M=0$ треба предња једначина да даде $h=0$, па је зато:

$$\frac{1}{r_0} = C.$$

Стављајући ово у једначину (25), добивамо:

$$h = \frac{1}{2}\frac{M}{m}\frac{r_0^4}{a^3}(3\cos^2 v - 1). \tag{26}$$

Употребом означења

$$\frac{M}{m}\frac{r_0^4}{a^3} = k, \tag{27}$$

добивамо:

$$h = \frac{1}{2} k \left(3 \cos^2 \nu - 1\right). \tag{28}$$

Ова нам једначина претставља пресек површине мора са једном од оних равни које пролазе кроз центар Земље и центар Месеца. Тај пресек претстављен је у сл. 13 кривом $ACBDA$.

Како су корени једначине

$$3 \cos^2 \nu - 1 = 0,$$

$$\nu_1 = \pm 54^0 44' 8''; \qquad \nu_2 = \pm 125^0 15' 52'',$$

то добивамо ово:

$$\begin{cases} \nu = 0, \quad \nu = 180^0 \\ h = +k \end{cases} \qquad \begin{cases} \nu = \nu_1; \quad \nu = \nu_2 \\ h = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \nu = \pm 90^0 \\ h = -\frac{1}{2} k. \end{cases}$$

То значи да у тачкама A и B h достизава свој максимум k, у тачкама P_1, P_2, P_3, P_4, h је једнако нули, а у тачкама C и D h достизава свој минимум $-\frac{1}{2} k$.

Када би се Месец налазио у равни Земљина екватора, онда би, узимајући ту раван за раван слике, Земљина оса стајала у тачки m нормално на ту раван, а Земља би, посматрана са севера, ротирала око те осе у смислу као што је то у слици назначено стрелицом, док би хидросфера Земљина, издужена у правцу према Месецу, задржавала непромењени положај према том небеском телу. Земља и њени континенти обрну се према Месецу за 25^h, па би зато свако место на екватору Земљином обишло за 25^h целу контуру криве $ACBDA$, т. ј. прошло кроз два максимума и два минимума морског нивоа, па доживело у току дана две једнаке плиме и две једнаке осеке. Но Месец се, у своме обилажењу око Земље, удаљује и приближује равни Земљина екватора и тим добива цела појава компликованији ток, који се мења и тим када се на површини Земље удаљујемо од екватора. Сем тога изазива и Сунце, својим привлачним дејством, нешто слабију, али сличну појаву морске плиме која се суперпонира са оном изазваном Месецом. Да бисмо добили јасну слику свих тих појава, поступићемо овако:

У нашим претходним расуђивањима, претставља $\alpha = 180^0 - \nu$ онај угао што га радиус уоченог места Земљине површине затвара са правом напереном према Месецу. Тај је угао, због тога, једнак зенитском отстојању Месеца z, па је зато:

$$z = 180^0 - \nu. \tag{29}$$

Положимо ли кроз оба пола небеске сфере и кроз тренутни положај Месеца на тој сфери круг, то се део тога круга који лежи између небеског екватора и Месеца зове деклинација δ Месеца, а онај лук небеског екватора који лежи између пролетње тачке и оне тачке где онај први круг пресеца небески екватор зове ректасцензијом α Месеца. Звезданим временом θ називамо часовни угао пролетње тачке. Између величина z, δ α, θ и географске ширине φ уоченог места Земљине површине постоји, према основним обрасцима Сферне Астрономије, ова једначина:

$$\cos z = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos (\theta - \alpha). \tag{30}$$

Како је, због (29),

$$\cos^2 z = \cos^2 \nu ,$$

т. ј.

$$3 \cos^2 \nu - 1 = 3 \cos^2 \varphi \cos^2 \delta \cos^2 (\theta - \alpha) +$$
$$+ 6 \sin \varphi \cos \varphi \sin \delta \cos \delta \cos (\theta - \alpha) + 3 \sin^2 \varphi \sin^2 \delta - 1,$$

а пошто је

$$\cos^2 (\theta - \alpha) = \frac{1 + \cos 2 (\theta - \alpha)}{2},$$

то добивамо:

$$\begin{aligned} 3 \cos^2 \nu - 1 = {} & \frac{3}{2} \cos^2 \varphi \cos^2 \delta + 3 \sin^2 \varphi \sin^2 \delta - 1 + \\ & + \frac{3}{2} \sin 2\varphi \sin 2 \delta \cos (\theta - \alpha) + \\ & + \frac{3}{2} \cos^2 \varphi \cos^2 \delta \cos 2 (\theta - \alpha) . \end{aligned} \tag{31}$$

Овај израз ваља ставити у (28) да бисмо добили плиму h изазвану привлачним дејством Месеца.

На исти начин добивамо, ако са M' означимо масу Сунца, а са a' његово отстојање од Земље, стављајући

$$\frac{M'}{m}\frac{r_0^4}{a'^3}=k' \tag{32}$$

да је плима h', изазвана привлачним дејством Сунца претстављена изразом:

$$h'=\frac{1}{2}k'(3\cos^2\nu-1). \tag{33}$$

Сада треба у обрасцу (31) α заменити ректасцензијом Сунца, коју ћемо означити са α', а δ деклинацијом Сунца, коју ћемо означити са δ'. Целокупна плима

$$H=h+h', \tag{34}$$

изазвана дејством Месеца и Сунца претстављена је, стављајући

$$\begin{aligned}H_1 &= \frac{3}{2}k\cos^2\varphi\cos^2\delta\cos 2(\theta-\alpha)+\\ &+\frac{3}{2}k'\cos^2\varphi\cos^2\delta'\cos 2(\theta-\alpha')\end{aligned} \tag{35}$$

$$\begin{aligned}H_2 &= \frac{3}{2}k\sin 2\varphi\sin 2\delta\cos(\theta-\alpha)+\\ &+\frac{3}{2}k'\sin 2\varphi\sin 2\delta'\cos(\theta-\alpha')\end{aligned} \tag{36}$$

$$\begin{aligned}H_3 &= k\left(\frac{3}{2}\cos^2\varphi\cos^2\delta+3\sin^2\varphi\sin^2\delta-1\right)+\\ &k'\left(\frac{3}{2}\cos^2\varphi\cos^2\delta'+3\sin^2\varphi\sin^2\delta'-1\right),\end{aligned} \tag{37}$$

овим обрасцем:

$$H=H_1+H_2+H_3. \tag{38}$$

Најјаче променљива величина у горњим изразима је звездано време θ. Оно нарасте, мерено у лучној мери, за време једног звезданог дана за 2π, зато имају једноставне тригонометријске функције од Θ периоду једног звезданог дана, а функције од $2\,\theta$ полудневну периоду. Остале променљиве величине, екваторске координате α, δ Месеца и Сунца, мењају се спорије; периода Месечевих координата је месец дана, а Сунчевих, година дана. Када њихово мењање не бисмо узимали у обзир, имала би парцијална плима H_1 полудневну, а плима H_2 једнодневну периоду. Испитајмо дејство променљивости тих екваторских координата на чланове H_1, H_2, H_3, разматрујући те чланове сваки за себе.

Како је

$$\cos 2(\theta-\alpha') = \cos[2(\theta-\alpha)+2(\alpha-\alpha')] =$$
$$= \cos 2(\theta-\alpha)\cos 2(\alpha-\alpha') - \sin 2(\theta-\alpha)\sin 2(\alpha-\alpha'),$$

то добивамо:

$$H_1 = \cos 2(\theta \quad \alpha)\left[\frac{3}{2}k\cos^2\varphi\cos^2\delta + \right.$$
$$\left. + \frac{3}{2}k'\cos^2\varphi\cos^2\delta'\cos 2(\alpha-\alpha')\right] -$$
$$- \sin 2(\theta-\alpha)\frac{3}{2}k'\cos^2\varphi\cos^2\delta'\sin 2(\alpha-\alpha').$$

Уведимо две нове варијабилне a_1 и ε_1, дефинисане овим двема једначинама:

$$(39)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{3}{2}k\cos^2\varphi\cos^2\delta + \frac{3}{2}k'\cos^2\varphi\cos^2\delta'\cos 2(\alpha-\alpha') = \\ &\qquad = a_1\cos 2\varepsilon_1 \\ &\frac{3}{2}k'\cos^2\varphi\cos^2\delta'\sin 2(\alpha-\alpha') = a_1\sin 2\varepsilon_1, \end{aligned}\right.$$

то добивамо:

$$(40)\qquad H_1 = a_1\cos 2(\varepsilon_1+\Theta-\alpha),$$

док нам квадрирање и сабирање једначина (39), односно њихово дељење, даје:

$$(41)\quad a_1 = \frac{3}{2}\cos^2\varphi \cdot$$
$$\cdot\sqrt{k^2\cos^4\delta + k'^2\cos^4\delta' + 2kk'\cos^2\delta\cos^2\delta'\cos 2(\alpha-\alpha')}$$

$$(42)\quad \operatorname{tang} 2\varepsilon_1 = \frac{k'\cos^2\delta'\sin 2(\alpha-\alpha')}{k\cos^2\delta + k'\cos^2\delta'\cos 2(\alpha-\alpha')}.$$

Једначином (40) претстављена је парцијална плима H_1 једном осцилаторном функцијом времена, при чему су и амплитуда a_1 и периода T_1 осцилационе променљиве. У аргументу функције претставља $\theta-\alpha$ његов главни члан; он нарасте, пошто се θ и α мере у противном правцу, за 2π за време док се Земља обрне једанпут према Месецу, дакле за 25^h. Зато T_1 има средњу вредност од дванаест и по часова, па се ове осцилације називају полудневнима. Осцилујући том средњом периодом, амплитуда a_1 осцилације H_1 се постепено мења. Она достизава своју максималну вредност, услед промена ректасцензија α и α', када је: $\cos 2(\alpha-\alpha') = 1$, т. ј. $2(\alpha-\alpha') = 0$; $2(\alpha-\alpha') = 360^0$, дакле за

$$\alpha = \alpha'; \qquad \alpha = \alpha' + 180^0.$$

У првом случају налазе се Сунце и Месец у конјункцији, у другом у опозицији. Оба та случаја називају се сицигијама. Онда имамо или млад месец или пун. Тада су таласи плиме највећи. Они ће услед промена деклинација δ и δ' достићи свој највећи максимум кад $\cos^2\delta$ и $\cos^2\delta'$ достигну своју максималну вредност, т ј. ако, сем горње релације, буде било

$$\delta = 0; \qquad \delta' = 0.$$

То се дешава онда кад у доба равнодневница имамо пун или млад месец, а чворови Месечеве путање нађу се у равнодневницама. У доба сицигија, т. ј. када је испуњена релација $\alpha = \alpha'$ или $\alpha = \alpha' + 180^0$, је, због (42), $\varepsilon_1 = 0$. У то доба достизавају полудневни таласи плиме своју амплитуду за $\cos 2(\theta-\alpha) = 1$, т. ј. кад је $2(\theta-\alpha) = 0$; $2(\theta-\alpha) = 360^0$,

$$\theta = \alpha; \qquad \theta = \alpha + 180^0.$$

То се дешава у доба горње односно доње кулминације Месеца.

Амплитуда a_1 осцилације H_1 достизава своју минималну вредност за $\cos 2(\alpha-\alpha') = -1$; $2(\alpha-\alpha') = 180^0$; $2(\alpha-\alpha') = 540^0$, дакле када је

$$\alpha - \alpha' = 90^0; \qquad \alpha - \alpha' = 270^0.$$

То се дешава када се Сунце и Месец налазе у квадратури, т. ј. у доба прве и последње четврти Месеца. И тада је, према (42), $\varepsilon_1 = 0$ па полудневни таласи плиме достизавају своју амплитуду за $\theta = \alpha$; $\theta = 180^0 + \alpha$, т. ј. у време горње или доње кулминације полумесеца, која се дешава, у то доба, у 6^h у јутро или на вече.

У сва остала доба, сем споменутих двају, је $\varepsilon \neq 0$, а то значи да се кулминација таласа плиме не поклапа са кулминацијама Месеца.

У сваком моменту опада, према (41), амплитуда a_1 са географском ширином φ па је највећа на екватору.

Исто тако као што смо парцијалну плиму H_1 претставили једном осцилацијом променљиве амплитуде и фазе, можемо исто то учинити и са парцијалном плимом H_2.

Како је:

$$\cos(\theta - \alpha') = \cos(\theta - \alpha)\cos(\alpha - \alpha') - \sin(\theta - \alpha)\sin(\alpha - \alpha'),$$

то добивамо за H_2

$$H_2 = \cos(\theta - \alpha)\left[\frac{3}{2} k \sin 2\varphi \sin 2\delta + \frac{3}{2} k' \sin 2\varphi \sin 2\delta' \cos(\alpha - \alpha')\right] -$$
$$- \sin(\theta - \alpha) \frac{3}{2} k' \sin 2\varphi \sin 2\delta' \sin(\alpha - \alpha').$$

Уведимо две нове варијабилне a_2 и ε_2, дефинисане овим двема једначинама:

$$\frac{3}{2} k \sin 2\varphi \sin 2\delta + \frac{3}{2} k' \sin 2\varphi \sin 2\delta' \cos(\alpha - \alpha') = a_2 \cos \varepsilon_2$$

$$\frac{3}{2} k' \sin 2\varphi \sin 2\delta' \sin(\alpha - \alpha') = a_2 \sin \varepsilon_2$$

или овим двема које добивамо квадрирањем и сабирањем односно дељењем предњих двеју једначина:

$$(43)\quad a_2 = \frac{3}{2}\sin 2\varphi \,.$$
$$.\sqrt{k^2 \sin^2 2\delta + k'^2 \sin^2 2\delta' + 2\,k\,k' \sin 2\delta \sin 2\delta' \cos(\alpha - \alpha')}$$

$$(44)\quad \operatorname{tang} \varepsilon_2 = \frac{k' \sin 2\delta' \sin(\alpha - \alpha')}{k \sin 2\delta + k' \sin 2\delta' \cos(\alpha - \alpha')}\,.$$

Сада добивамо за H_2

$$(45)\qquad H_2 = a_2 \cos(\varepsilon_2 + \theta - \alpha).$$

Амплитуда a_2 ових таласа, која се мења временом, обично је мања од амплитуде a_1. Она садржава: место $\cos^2\delta$, $\cos^2\delta'$ функције $\sin 2\delta$, $\sin 2\delta'$. Како деклинација Месеца лежи у границама $-28^0\,36' < \delta < +28^0\,36'$, а деклинација Сунца у границама $-23^0\,27' < \delta' < +23^0\,27'$, то је

$$-0{,}841 < \sin 2\delta < +0{,}841\ ; \qquad -0{,}730 < \sin 2\delta' < +0{,}730$$
$$+0{,}771 < \cos^2\delta < +1\ ; \qquad +0{,}842 < \cos^2\delta' < +1$$

па су зато чланови израза (41) обично већи но они израза (43).

Средња вредност периоде парцијалне плиме H_2 је, пошто је главни члан аргумента $\theta-\alpha$, 25^h ; зато се њени таласи зову једнодневни.

Амплитуда a_2 те једнодневне парцијалне плиме достизава, у колико то зависи од ректасцензија, своју максималну вредност када је $\alpha-\alpha' = 0$, т. ј. $\alpha = \alpha'$, дакле у доба младога месеца, а своју минималну вредност када је $\alpha-\alpha' = 180^0$, дакле у доба пуног месеца. У оба је случаја, због (44), $\varepsilon_2 = 0$, час плиме поклапа се са кулминацијом Месеца. У колико то зависи од деклинација, достизава a_2 своју максималну вредност када су оне највеће. Дневна осцилација не појављује се, због фактора $\sin 2\varphi$ у (43), на екватору и на половима Земље никада, а на осталима је ширинама једнака нули када је $\delta = 0$, $\delta' = 0$, т, ј. када Сунце и Месец прођу, у исти мах, кроз небески екватор.

Парцијална плима H_3 садржи само квадрате тригонометријских функција од δ и δ', па због тога достиже она исту висину за позитивне и негативне вредности деклинације Месеца односно Сунца. Због тога је њена периода, у колико зависи она од δ, пола месеца дана, а у колико зависи од δ', пола године. Она је у околини екватора, због саопштених граница између којих варирају δ и δ', увек позитивна; ту је средњи ниво мора виши но што би био без привлачног дејства Месеца и Сунца.

Статичка теорија обухватила је суштину појаве морске плиме. Ако таласе морске плиме, опажане на лицу Земљином, разложимо у једноставне хармонијске осцилације, онда се периоде тих осцилација поклапају са периодама елиптичког привидног кретања Сунца и Месеца и периодама свих њихових неједнакости, изазваних међусобним поремећајима. Најјаче морске плиме опажају се, заиста, у доба сицигија, а најслабије у доба квадратура. И дневна осцилација уско је везана на деклинацију Сунца и Месеца. У набројаним појавама постоји сагласност између теорије и стварности. Но иначе има великих размимоилажења. По статичкој теорији плиме, а према једначини (28), разлика између максималне и минималне воде што је Месец може да изазове била би $H = k - (-\frac{1}{2}k) = \frac{3}{2}k$, а она што је Сунце може да постигне $H' = \frac{3}{2}k'$. Целокупна разлика између најниже и највише воде била би $\frac{3}{2}(k + k')$. Користећи се обрасцима (27) и (32), добили бисмо. пошто је

$$r_0 = 6377\ km\ ; \quad \frac{r_0}{a} = \frac{1}{59{,}678}\ ; \quad \frac{r_0}{a'} = \frac{1}{23480}\ ; \quad \frac{M}{m} = \frac{1}{82}\ ;$$

$$\frac{M'}{m} = 322000\ ,$$

свега 0,78 m као највећу плиму постигнуту Сунцем и Месецом. Стварно постигнуте плиме су, међутим, далеко веће, а исто се тако опажана времена највише и најниже воде не подударају са онима што их даје статичка теорија. Узрок је тому тај што море, следујући својим огледалом промене еквискаларних површина поремећаја, својим замахом далеко их прекорачава. Зато морска плима није хидростатска појава, но хидродинамична. Ту појаву обухватила је, добрим делом, и квантитативно, тек динамичка теорија плиме која изалази из оквира овога дела.

ГЛАВА СЕДМА

Метод варијације констаната у једначинама кретања небеских тела.

§ 28. Лагранжов метод варијације констаната. Видели смо да за непоремећено кретање планете или сателита важи једначина (2), § 26, а за поремећено једначина (7) Избацимо сада индекс k, који постаје излишан, то те две једначине добивају овај облик:

$$\frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2} = -f(m_0+m)\frac{\mathfrak{r}}{r^3} \tag{1}$$

$$\left(\frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2}\right) = -f(m_0+m)\frac{\mathfrak{r}}{r^3} + \operatorname{grad} R. \tag{2}$$

У једначини (2) смо ставили леви члан у заграду да бисмо на тај начин означили да се он односи на померећено кретање.

Интеграл једначине (1), познат из проблема двају тела, може се симболички претставити са

$$\mathfrak{r} = F(t, \mathfrak{r}_0, \mathfrak{v}_0), \tag{3}$$

где t претставља време, $\mathfrak{r}_0$ вектор иницијалног положаја планете, а $\mathfrak{v}_0$ њен иницијалан вектор брзине. Овим симболичким означењем не мислимо да кажемо да се $\mathfrak{r}$ може векторским операцијама извести из $\mathfrak{r}_0$, $\mathfrak{v}_0$ и t, него само то да се координате x, y, z вектора $\mathfrak{r}$, могу изразити помоћу координата x_0, y_0, z_0 вектора $\mathfrak{r}_0$, координата v_1, v_2, v_3 вектора $\mathfrak{v}_0$ и пом ћу времена

t. Место ових шест координата можемо употребити шест других скаларних констаната $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6$ помоћу којих се може изразити вектор положаја $\mathfrak{r}$ непоремећног кретања, па зато писати:

$$\mathfrak{r} = F(t, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6). \tag{4}$$

Служећи се рачунским једним поступком који је Лагранж усавршио и назвао методом варијације констаната, можемо горњи образац сматрати и као интеграл једначине (2) ако само константе $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6$ сматрамо за функције $u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6$, времена t, па ставимо

$$\mathfrak{r} = F(t, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6), \tag{5}$$

где $u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6$ претстављају функције времена.

Оваквим поступком могли бисмо $\mathfrak{r}$ претставити као функцију времена на бесконачно много начина кад не бисмо функције u подвргли извесним условима. Векторска једначина (5) еквивалентна је трима скаларним па зато можемо, по слободном избору, одабрати три таква услова који ће се, као што ћемо видети, моћи обухвати једном јединем векторском једначином.

Како $u_1, u_2, u_3, u_4\ u_5\ u_6$ ваља сматрати за функције времена, то је извод од (5) по времену претстављен овим обрасцем.

$$\left(\frac{d\mathfrak{r}}{dt}\right) = \frac{\partial}{\partial t} F(t, u_1, u_2\ u_3, u_4, u_5, u_6) + \\ + \sum_{i=1}^{i=6} \frac{\partial}{\partial u_i} F(t, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6) \frac{du_i}{dt}. \tag{6}$$

Подвргнимо сада функције $u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6$ наговештеној векторској условној једначини:

$$\sum_{i=1}^{i=6} \frac{\partial}{\partial u_i} F(t, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6) \frac{du_i}{dt} = 0. \tag{7}$$

Тим условом захтевамо ово. Из једначина (6) и (7) следује:

$$\left(\frac{d\mathfrak{r}}{dt}\right) = \frac{\partial}{\partial t} F(t, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\ u_6). \tag{8}$$

Сматрамо ли нумеричке вредности од $u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6$ које одговарају једном одређеном временском моменту t за константе, то се путања

$$(9)\quad \mathfrak{r} = F(t, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6), \qquad u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6 = \text{const.},$$

израчуната са тим нумеричким вредностима, зове непоремећена путања тренутка t. Из предње једначине следује, диференцијацијом по t,

$$(10)\qquad \frac{d\mathfrak{r}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} F(t, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6)\ ,$$

дакле из (8) и (10)

$$(11)\qquad \left(\frac{d\mathfrak{r}}{dt}\right) = \frac{d\mathfrak{r}}{dt}\ .$$

Постављеним условом захтевамо, дакле, да у уоченом тренутку t непоремећена и поремећена путања имају исти вектор брзине, т. ј. да се додирују.

Поновна диференцијација једначине (8) по времену, у којој треба величине u сматрати за функције времена, даје:

$$(12)\qquad \left(\frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2}\right) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} F(t, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6) + \\ + \sum_{i=1}^{i=6} \frac{\partial^2}{\partial u_i\, \partial t} F(t, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6) \frac{du_i}{dt}\ .$$

Сада можемо, пошто не постоји више опасност неспоразума, у (7) и (12) за $F(t, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6)$ ставити образац (4) у којем ваља величине $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6$ сматрати за функције времена. На тај начин добивамо ове две једначине:

$$(13)\qquad \sum_{i=1}^{i=6} \frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial c_i} \frac{dc_i}{dt} = 0$$

$$(14)\qquad \left(\frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2}\right) = \frac{\partial^2 \mathfrak{r}}{\partial t^2} + \sum_{i=1}^{i=6} \frac{\partial \dot{\mathfrak{r}}}{\partial c_i} \cdot \frac{dc_i}{dt}\ .$$

При томе смо, због једноставнијег писања, ставили $\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial t} = \dot{\mathfrak{r}}$.

Ставимо ли у (14) обрасце (2) и (1), при чему је овај потоњи, пошто се у њему c сматрају за константе, једнак $\frac{\partial^2 \mathfrak{r}}{\partial t^2}$, то добивамо:

$$\sum_{i=1}^{i=6} \frac{\partial \dot{\mathfrak{r}}}{\partial c_i} \frac{dc_i}{dt} = \operatorname{grad} R . \tag{15}$$

Обе векторске једначине (13) и (15) могу се заменити са шест скаларних једначина помоћу којих се могу израчунати временски изводи $\frac{dc_1}{dt}, \frac{dc_2}{dt}, \frac{dc_3}{dt}, \frac{dc_4}{dt}, \frac{dc_5}{dt}, \frac{dc_6}{dt}$ свих шест елемената. Тај рачун може се упростити ако другу од споменутих једначина помножимо са $\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial c_k}$, а прву са $-\frac{\partial \dot{\mathfrak{r}}}{\partial c_k}$, па обе једначине саберемо. На тај начин добивамо:

$$\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial c_k} \sum_{i=1}^{i=6} \frac{\partial \dot{\mathfrak{r}}}{\partial c_i} \frac{dc_i}{dt} - \frac{\partial \dot{\mathfrak{r}}}{\partial c_k} \sum_{i=1}^{i=6} \frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial c_i} \frac{dc_i}{dt} = \frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial c_k} \operatorname{grad} R,$$

т. ј.

$$\sum_{i=1}^{i=6} \left(\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial c_k} \cdot \frac{\partial \dot{\mathfrak{r}}}{\partial c_i} - \frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial c_i} \cdot \frac{\partial \dot{\mathfrak{r}}}{\partial c_k} \right) \frac{dc_i}{dt} = \frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial c_k} \operatorname{grad} R . \tag{16}$$

Уведимо ова симболичка означења:

$$\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial c_k} \cdot \frac{\partial \dot{\mathfrak{r}}}{\partial c_i} - \frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial c_i} \frac{\partial \dot{\mathfrak{r}}}{\partial c_k} = [k, i] \tag{17}$$

и узмимо у обзир да је

$$\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial c_k} \operatorname{grad} R = \frac{\partial R}{\partial c_k}, \tag{18}$$

то можемо једначину (16) заменити овом:

$$\sum_{i=1}^{i=6} [k, i] \frac{dc_i}{dt} = \frac{\partial R}{\partial c_k} \tag{19}$$

Ова једначина важи за $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, па зато добивамо ових шест једначина:

$$
(20)\quad \begin{cases}
[1,1]\dfrac{\partial c_1}{dt}+[1,2]\dfrac{dc_2}{dt}+\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot+[1,6]\dfrac{dc_6}{dt}=\dfrac{\partial R}{\partial c_1}\\
[2,1]\dfrac{dc_1}{dt}+[2,2]\dfrac{dc_2}{dt}+\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot+[2,6]\dfrac{dc_6}{dt}=\dfrac{\partial R}{\partial c_2}\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
[6,1]\dfrac{dc_1}{dt}+[6,2]\dfrac{dc_2}{dt}+\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot+[6,6]\dfrac{dc_6}{dt}=\dfrac{\partial R}{\partial c_6}
\end{cases}
$$

§ 29 Особине Лагранжових заграда. Изрази дефинисани једначином (17), т. ј. једначином

$$
(21)\qquad [k,i]=\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial c_k}\cdot\frac{\partial \dot{\mathfrak{r}}}{\partial c_i}-\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial c_i}\cdot\frac{\partial \dot{\mathfrak{r}}}{\partial c_k}
$$

зову са Лагранжове заграде. Они претстављају, у смислу векторске анализе, разлику двају скаларних продуката од по два вектора, зато су Лагранжове заграде скаларне величине, исто тако као што нам и израз (18) претставља један скалар.

Лагранжове заграде имају ове значајне особине. Из њихове дефиниционе једначине (21) следује, пре свега, да је

$$
(22)\qquad [k,k]=0,
$$

дакле

$$
[1,1]=[2,2]=[3,3]=[4,4]=[5,5]=[6,6]=0,
$$

а сем тога,

$$
(23)\qquad [i,k]=-[k,i].
$$

Због тога се број различитих комбинација $[i, k]$; i=1, 2 . . . 6; k=1, 2 . . . 6, не узимајући у обзир њихов знак, редукује на петнаест.

Диференцијацијом израза (21) по времену t, а употребом означења $\ddot{\mathfrak{r}}$ за други извод $\mathfrak{r}$, добивамо:

$$
\frac{d[k,i]}{dt}=\frac{\partial \dot{\mathfrak{r}}}{\partial c_k}\cdot\frac{\partial \dot{\mathfrak{r}}}{\partial c_i}+\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial c_k}\cdot\frac{\partial \ddot{\mathfrak{r}}}{\partial c_i}-\frac{\partial \dot{\mathfrak{r}}}{\partial c_i}\cdot\frac{\partial \dot{\mathfrak{r}}}{\partial c_k}-\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial c_i}\frac{\partial \ddot{\mathfrak{r}}}{\partial c_k},
$$

т. ј.

$$(24) \qquad \frac{d[k,i]}{dt} = \frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial c_k} \cdot \frac{\partial \ddot{\mathfrak{r}}}{\partial c_i} - \frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial c_i} \cdot \frac{\partial \ddot{\mathfrak{r}}}{\partial c_k}.$$

Из (1) следује:

$$(25) \qquad \ddot{\mathfrak{r}} = -f(m_0 + m)\frac{\mathfrak{r}}{r^3} = \operatorname{grad} U,$$

при чему је, као што је лако увидети,

$$(26) \qquad U = f(m_0 + m)\frac{1}{r}$$

па зато добивамо место (24)

$$(27) \qquad \frac{d[k,i]}{dt} = \frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial c_k} \cdot \frac{\partial \operatorname{grad} U}{\partial c_i} - \frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial c_i} \cdot \frac{\partial \operatorname{grad} U}{\partial c_k}.$$

Како је

$$\frac{\partial}{\partial c_i}\left(\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial c_k} \operatorname{grad} U\right) = \frac{\partial^2 \mathfrak{r}}{\partial c_i \partial c_k} \operatorname{grad} U + \frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial c_k} \frac{\partial \operatorname{grad} U}{\partial c_i}$$

$$\frac{\partial}{\partial c_k}\left(\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial c_i} \operatorname{grad} U\right) = \frac{\partial^2 \mathfrak{r}}{\partial c_i \partial c_k} \operatorname{grad} U + \frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial c_i} \frac{\partial \operatorname{grad} U}{\partial c_k},$$

то добивамо одузимајући другу од ових једначина од прве и узимајући у обзир (27)

$$\frac{d[k,i]}{dt} = \frac{\partial}{\partial c_i}\left(\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial c_k} \operatorname{grad} U\right) - \frac{\partial}{\partial c_k}\left(\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial c_i} \operatorname{grad} U\right).$$

Сем тога је

$$\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial c_k} \operatorname{grad} U = \frac{\partial U}{\partial c_k}; \qquad \frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial c_i} \operatorname{grad} U = \frac{\partial U}{\partial c_i}$$

па зато добивамо

$$(28) \qquad \frac{d[k\,i]}{dt} = \frac{\partial}{\partial c_i}\left(\frac{\partial U}{\partial c_k}\right) - \frac{\partial}{\partial c_k}\left(\frac{\partial U}{\partial c_i}\right) = 0.$$

Ова једначине казује да су изрази $[k,i]$ независни од времена, па се зато могу израчунати из иницијалних услова или из стања кретања у којем другом произвољном тренутку времена.

§ 30. О избору констаната за варијацију. У претходним расуђивањима није учињена никаква ограничавајућа претпоставка о константама c за варијацију, сем те да се помоћу тих констаната може једнозначно претставити вектор $\mathfrak{r}$ непоремећеног кретања, дефинисан једначином (3). Кад бисмо за те константе одабрали координате вектора положаја $\mathfrak{r}_0$ и вектора брзине $\mathfrak{v}_0$ било којег одређеног тренутка $t=t_0$, т. ј. кад бисмо ставили

$$(29) \qquad c_1 = x_0;\; c_2 = y_0;\; c_3 = z_0;\; c_4 = v_1;\; c_5 = v_2;\; c_6 = v_3,$$

онда би ток рачуна био овај. Како је

$$t = t_0; \quad \mathfrak{r} = \mathfrak{r}_0, \quad \dot{\mathfrak{r}} = \dot{\mathfrak{r}}_0$$

и како се Лагранжове заграде, независне од времена, могу израчунати стављајући $t = t_0$, то би оне, у овом случају, биле претстављене обрасцем:

$$(30) \qquad [k, i] = \frac{\partial \mathfrak{r}_0}{\partial c_k} \cdot \frac{\partial \dot{\mathfrak{r}}_0}{\partial c_i} - \frac{\partial \dot{\mathfrak{r}}_0}{\partial c_i} \cdot \frac{\partial \mathfrak{r}_0}{\partial c_k}.$$

Положимо у масу m_0, дакле у Сунце ако m претставља планету, што ћемо, да бисмо имали конкретан случај пред собом, претпоставити, почетак O нашег координатног система $X—Y—Z$, како је он био дефинисан у §§ 10 и 13, и означимо јединичне векторе у правцу тих координатних оса са $\mathfrak{n}_1, \mathfrak{n}_2, \mathfrak{n}_3$, то је:

$$(31) \qquad \begin{cases} \mathfrak{r}_0 = x_0\, \mathfrak{n}_1 + y_0\, \mathfrak{n}_2 + z_0\, \mathfrak{n}_3 \\ \dot{\mathfrak{r}}_0 = v_1\, \mathfrak{n}_1 + v_2\, \mathfrak{n}_2 + v_3\, \mathfrak{n}_3, \end{cases}$$

дакле због (29)

$$(32) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \mathfrak{r}_0}{\partial c_1} = \mathfrak{n}_1; \quad \dfrac{\partial \mathfrak{r}_0}{\partial c_2} = \mathfrak{n}_2; \quad \dfrac{\partial \mathfrak{r}_0}{\partial c_3} = \mathfrak{n}_3 \\[2ex] \dfrac{\partial \mathfrak{r}_0}{\partial c_4} = \dfrac{\partial \mathfrak{r}_0}{\partial c_5} = \dfrac{\partial \mathfrak{r}_0}{\partial c_6} = 0 \end{cases}$$

$$
(33)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \mathfrak{r}_0}{\partial c_1} = \dfrac{\partial \dot{\mathfrak{r}}_0}{\partial c_2} = \dfrac{\partial \dot{\mathfrak{r}}_0}{\partial c_3} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial \dot{\mathfrak{r}}_0}{\partial c_4} = \mathfrak{n}_1\,; \quad \dfrac{\partial \dot{\mathfrak{r}}_0}{\partial c_5} = \mathfrak{n}_2\,; \quad \dfrac{\partial \dot{\mathfrak{r}}_0}{\partial c_6} = \mathfrak{n}_3\,. \end{cases}
$$

Од петнаест Лагранжових заграда, дефинисаних у прошлом параграфу, добивамо, стављајући (32) и (33) у (30), због познатих особина скаларних продуката јединичних вектора:

$$
(\mathfrak{n}_1\mathfrak{n}_1) = (\mathfrak{n}_2\mathfrak{n}_2) = (\mathfrak{n}_3\mathfrak{n}_3) = 1\,; \qquad (\mathfrak{n}_1\mathfrak{n}_2) = (\mathfrak{n}_2\mathfrak{n}_3) = (\mathfrak{n}_3\mathfrak{n}_1) = 0,
$$

само три Лагранжове заграде различите од нуле и то:

$$
(34)\quad [1,4] = -[4,1] = 1; \quad [2,5] = -[5,2] = 1\,; \quad [3,6] = -[6,3] = 1.
$$

Зато се једначине (20) редукују на ове:

$$
(35)\quad \begin{cases} \dfrac{dc_1}{dt} = -\dfrac{\partial R}{\partial c_4} & \dfrac{dc_4}{dt} = +\dfrac{\partial R}{\partial c_1} \\[2ex] \dfrac{dc_2}{dt} = -\dfrac{\partial R}{\partial c_5} & \dfrac{dc_5}{dt} = +\dfrac{\partial R}{\partial c_2} \\[2ex] \dfrac{dc_3}{dt} = -\dfrac{\partial R}{\partial c_6} & \dfrac{dc_6}{dt} = +\dfrac{\partial R}{\partial c_3} \end{cases}
$$

Интеграцијом ових једначина добили бисмо координате x_0, y_0, z_0, вектора $\mathfrak{r}_0$ и координате v_1, v_2, v_3, вектора $\dot{\mathfrak{r}}_0$ као функције времена, па би зато било:

$$
\mathfrak{r}_0 = f_1(t)\,; \qquad \dot{\mathfrak{r}}_0 = f_2(t)\,,
$$

а тим би, као што је показано у проблему двају тела, био одређен вектор положаја $\mathfrak{r}$ поремећеног кретања масе m у сваком тренутку t.

Овај избор констананата c није, до сада, нашао примене у рачуну планетских поремећаја који се уобичајено претстављају помоћу елиптичних елемената дефинисаних у § 13, јер је веза између тих елемената и горњих констананата c, као што смо видели у проблему двају тела, доста компликована. Уведу ли се, напротив, тако звани канонички елементи, везани са елиптичним елементима овим једначинама:

$$c_1 = -\tau\,; \quad c_2 = \Omega\,; \quad c_3 = \Pi - \Omega$$

$$c_4 = -\frac{f(m_0 + m)}{2a}\,, \qquad c_5 = \sqrt{f(m_0 + m)\, a\,(1 - e^2)}\cos i$$

$$c_6 = \sqrt{f(m_0 + m)\, a\,(1 - e^2)}\,,$$

онда се, употребом Јакоби-Намилтонових каноничних једначина и методом варијације констаната, добивају, за одредбу зависности каноничних елемената од времена, једначине које су идентичне са (35). Како је веза између тих каноничних елемената и елиптичних елемената веома једноставна, то се, тим начином, може лако одредити зависност елиптичних елемената од времена. Овај метод претпоставља познавање постанка, природе и употребе каноничних једначина, па претставља за нас један заобилазан пут. Због тога ћемо, класичним Лагранжовим методом, извести директним путем једначине које одређују зависност елиптичних елемената од времена, служећи се, при томе, алатом векторске анализе.

Употребимо ли елиптичне елементе, набројане у (73), § 13, па заменимо ли елементе Π и ε помоћу једначина (69) и (73), § 13, т. ј. помоћу

$$\omega = \Pi - \Omega\,; \qquad \varepsilon = \Pi - n\tau \tag{36}$$

елементима ω и τ или, стављајући, за сада, једноставности ради,

$$\varkappa = -n\tau \quad \text{т. ј.} \quad \varepsilon = \Pi + \varkappa, \tag{37}$$

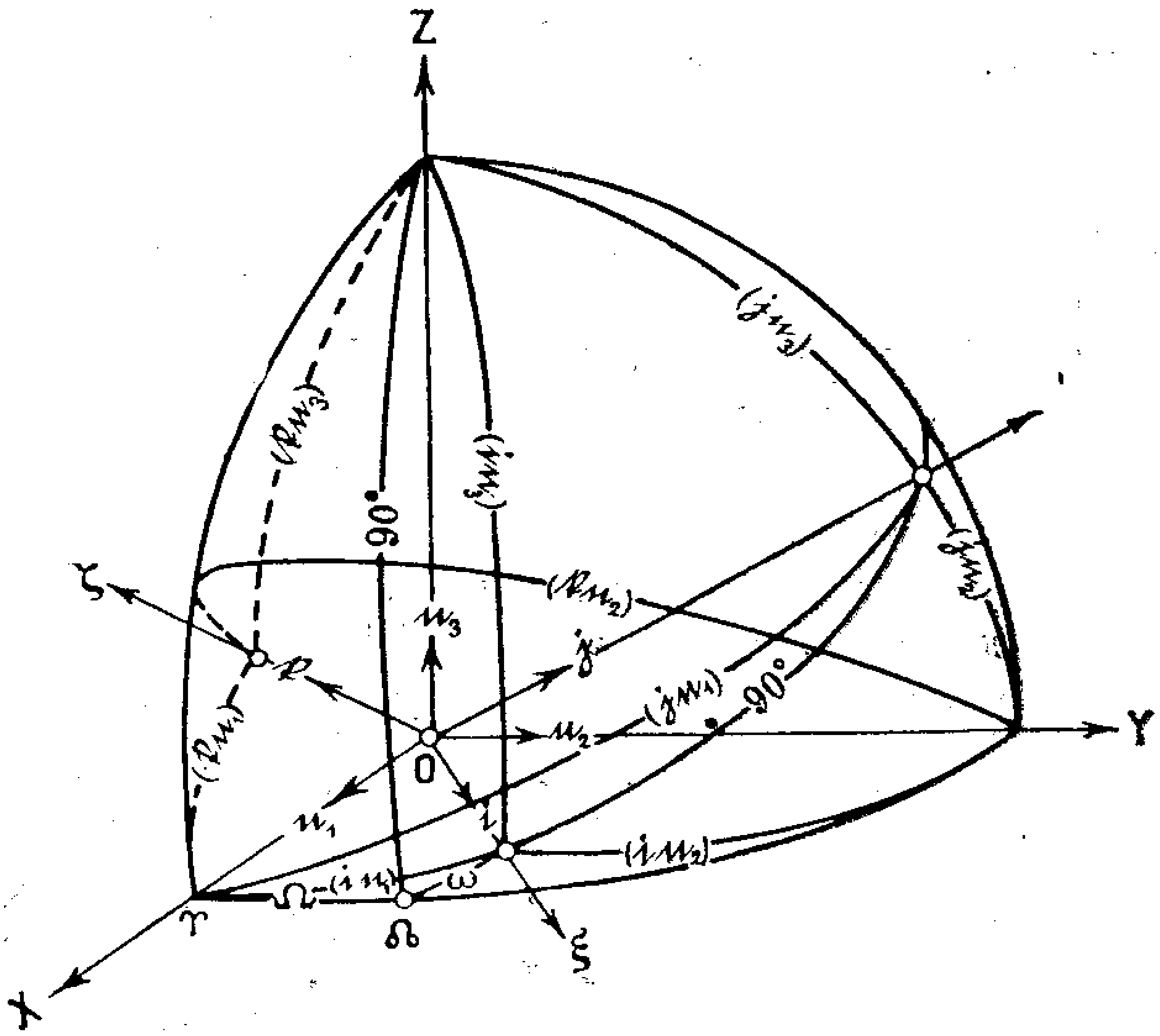
елементима ω и $\varkappa$, то можемо примењене елементе груписати у ове две групе.

$$(38) \quad \begin{cases} (\alpha) & \Omega,\ i,\ \omega \\ (\beta) & a,\ e,\ \varkappa \end{cases}$$

Елементи Ω и i групе (α) одређују, као што смо видели у проблему двају тела, једнозначно раван планетске путање, а елеменат ω исте групе даје нам лонгитуду перихела мерену од узлазног чвора, дакле положај велике осе елипсе планетске путање. Елементи a, e, $\varkappa$ групе (β) дају нам облик те елипсе и потребне податке о кретању планете по њој. Употребимо, сем већ примењеног координатног система $X-Y-Z$, који сматрамо непокретним, још један други, покретни, координатни систем

$\xi - \eta - \zeta$ (сл. 14) којега се почетак поклапа са почетком првога, а којега раван $\xi - \eta$ пада у раван планетске путање, при чему оса ξ нека буде наперена према перихелу; тај координатни систем нека буде, као и сви досадањи, енглески. Означимо са $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ јединичне векторе у правцу оса овог другог координатног система, то нам скаларни продукти

$$(\mathfrak{i}\mathfrak{n}_1), (\mathfrak{i}\mathfrak{n}_2), (\mathfrak{i}\mathfrak{n}_3); \ (\mathfrak{j}\mathfrak{n}_1), (\mathfrak{j}\mathfrak{n}_2), (\mathfrak{j}\mathfrak{n})_3; \ (\mathfrak{k}\mathfrak{n}_1), (\mathfrak{k}\mathfrak{n}_2), (\mathfrak{k}\mathfrak{n}_3)$$



Сл. 14

претстављају косинусе углова што их затварају између себе координатне осе ξ, η, ζ, X, Y, Z.

Из сл. 14 следује применом обрасца

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C$$

сферне тригонометрије да су ти скаларни продукти изражени помоћу елиптичних елемената овим обрасцима:

$$(39) \quad \left\{ \begin{aligned} (\mathfrak{i}\mathfrak{n}_1) &= \cos \Omega \cos \omega - \sin \Omega \sin \omega \cos i \\ (\mathfrak{i}\mathfrak{n}_2) &= \sin \Omega \cos \omega + \cos \Omega \sin \omega \cos i \\ (\mathfrak{i}\mathfrak{n}_3) &= \sin \omega \sin i \end{aligned} \right.$$

$$
(39)\quad \begin{cases}
(\mathfrak{j}\mathfrak{n}_1) = -\cos\Omega\sin\omega - \sin\Omega\cos\omega\cos i \\
(\mathfrak{j}\mathfrak{n}_2) = -\sin\Omega\sin\omega + \cos\Omega\cos\omega\cos i \\
(\mathfrak{j}\mathfrak{n}_3) = \cos\omega\sin i \\
(\mathfrak{k}\mathfrak{n}_1) = \sin\Omega\sin i \\
(\mathfrak{k}\mathfrak{n}_2) = -\cos\Omega\sin i \\
(\mathfrak{k}\mathfrak{n}_3) = \cos i\,.
\end{cases}
$$

Означимо координате тренутног положаја планете у непокретном координатном систему са x, y, z, а у покретном координатном систему са ξ, η пошто је $\zeta = 0$, јер се раван планетске путање поклапа са равни ξ—η, то је:

$$(40)\qquad \mathfrak{r} = x\,\mathfrak{n}_1 + y\,\mathfrak{n}_2 + z\,\mathfrak{n}_3$$

$$(41)\qquad \mathfrak{r} = \xi\,\mathfrak{i} + \eta\,\mathfrak{j}\,.$$

Множећи векторску векторску једначину (40) скаларно са $\mathfrak{n}_1$, а затим са $\mathfrak{n}_2$ односно са $\mathfrak{n}_3$, добивамо:

$$(42)\qquad (\mathfrak{r}\mathfrak{n}_1) = x; \qquad (\mathfrak{r}\mathfrak{n}_2) = y; \qquad (\mathfrak{r}\mathfrak{n}_3) = z.$$

Зато је

$$(43)\qquad \mathfrak{r} = (\mathfrak{r}\mathfrak{n}_1)\,\mathfrak{n}_1 + (\mathfrak{r}\mathfrak{n}_2)\,\mathfrak{n}_2 + (\mathfrak{r}\mathfrak{n}_3)\,\mathfrak{n}_3.$$

Стављајући у ову једначину место $\mathfrak{r}$, једно за другим, $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ добивамо ове три једначине:

$$
(44)\quad \begin{cases}
\mathfrak{i} = (\mathfrak{i}\,\mathfrak{n}_1)\,\mathfrak{n}_1 + (\mathfrak{i}\,\mathfrak{n}_2)\,\mathfrak{n}_2 + (\mathfrak{i}\,\mathfrak{n}_3)\,\mathfrak{n}_3 \\
\mathfrak{j} = (\mathfrak{j}\,\mathfrak{n}_1)\,\mathfrak{n}_1 + (\mathfrak{j}\,\mathfrak{n}_2)\,\mathfrak{n}_2 + (\mathfrak{j}\,\mathfrak{n}_3)\,\mathfrak{n}_3 \\
\mathfrak{k} = (\mathfrak{k}\mathfrak{n}_1)\,\mathfrak{n}_1 + (\mathfrak{k}\mathfrak{n}_2)\,\mathfrak{n}_2 + (\mathfrak{k}\mathfrak{n}_3)\,\mathfrak{n}_3\,.
\end{cases}
$$

Множећи ове изразе самим собом односно међусобно и водећи рачуна о споменутим особинама јединичних вектора, добивамо:

$$
(45)\quad \begin{cases}
(\mathfrak{i}\,\mathfrak{n}_1)^2 + (\mathfrak{i}\,\mathfrak{n}_2)^2 + (\mathfrak{i}\,\mathfrak{n}_3)^2 = 1 \\
(\mathfrak{j}\,\mathfrak{n}_1)^2 + (\mathfrak{j}\,\mathfrak{n}_2)^2 + (\mathfrak{j}\,\mathfrak{n}_3)^2 = 1 \\
(\mathfrak{k}\mathfrak{n}_1)^2 + (\mathfrak{k}\mathfrak{n}_2)^2 + (\mathfrak{k}\mathfrak{n}_3)^2 = 1
\end{cases}
$$

$$
(46)\quad \begin{cases} (\mathfrak{i}\,\mathfrak{n}_1)(\mathfrak{j}\,\mathfrak{n}_1)+(\mathfrak{i}\,\mathfrak{n}_2)(\mathfrak{j}\,\mathfrak{n}_2)+(\mathfrak{i}\,\mathfrak{n}_3)(\mathfrak{j}\,\mathfrak{n}_3)=0 \\ (\mathfrak{j}\,\mathfrak{n}_1)(\mathfrak{k}\mathfrak{n}_1)+\ \mathfrak{j}\,\mathfrak{n}_2)(\mathfrak{k}\mathfrak{n}_2)+(\mathfrak{j}\,\mathfrak{n}_3)(\mathfrak{k}\mathfrak{n}_3)=0 \\ (\mathfrak{k}\mathfrak{n}_1)(\mathfrak{i}\,\mathfrak{n}_1)+(\mathfrak{k}\mathfrak{n}_2)(\mathfrak{i}\,\mathfrak{n}_2)+(\mathfrak{k}\mathfrak{n}_3)(\mathfrak{i}\mathfrak{n}_3)=0\,. \end{cases}
$$

Пошто је, по природи јединичних вектора,

$$
\mathfrak{i}=[\mathfrak{j}\,\mathfrak{k}]\,;\quad \mathfrak{j}=[\mathfrak{k}\,\mathfrak{i}];\quad \mathfrak{k}=[\mathfrak{i}\,\mathfrak{j}]\,,
$$

го добивамо, стављајући овамо обрасце (44), место прве од ових едначина, а користећи се познатим обрасцем за векториелни ıродукат,

$$
(\mathfrak{i}\,\mathfrak{n}_1)\,\mathfrak{n}_1+(\mathfrak{i}\mathfrak{n}_2)\,\mathfrak{n}_2+(\mathfrak{i}\,\mathfrak{n}_3)\mathfrak{n}_3=\begin{vmatrix} \mathfrak{n}_1 & \mathfrak{n}_2 & \mathfrak{n}_3 \\ (\mathfrak{j}\,\mathfrak{n}_1) & (\mathfrak{j}\,\mathfrak{n}_2) & (\mathfrak{j}\,\mathfrak{n}_3) \\ (\mathfrak{k}\mathfrak{n}_1) & (\mathfrak{k}\mathfrak{n}_2) & (\mathfrak{k}\mathfrak{n}_3) \end{vmatrix}\,.
$$

Ова векторска једначина распада се, скаларном мултипликацијом $\mathfrak{n}_1, \mathfrak{n}_2, \mathfrak{n}_3$, у три скаларне па на тај начин, примењен ı на остале две од горњих једначина, добивамо:

$$
(47)\quad \begin{cases} (\mathfrak{i}\,\mathfrak{n}_1)=(\mathfrak{j}\,\mathfrak{n}_2)(\mathfrak{k}\mathfrak{n}_3)-(\mathfrak{j}\,\mathfrak{n}_3)(\mathfrak{k}\mathfrak{n}_2) \\ (\mathfrak{i}\,\mathfrak{n}_2)=(\mathfrak{j}\,\mathfrak{n}_3)(\mathfrak{k}\mathfrak{n}_1)-(\mathfrak{j}\,\mathfrak{n}_1)(\mathfrak{k}\mathfrak{n}_3) \\ (\mathfrak{i}\,\mathfrak{n}_3)=(\mathfrak{j}\,\mathfrak{n}_1)(\mathfrak{k}\mathfrak{n}_2)-(\mathfrak{j}\,\mathfrak{n}_2)(\mathfrak{k}\mathfrak{n}_1) \\[6pt] (\mathfrak{j}\,\mathfrak{n}_1)=(\mathfrak{k}\mathfrak{n}_2)(\mathfrak{i}\,\mathfrak{n}_3)-(\mathfrak{k}\mathfrak{n}_3)(\mathfrak{i}\,\mathfrak{n}_2) \\ (\mathfrak{j}\,\mathfrak{n}_2)=(\mathfrak{k}\mathfrak{n}_3)(\mathfrak{i}\,\mathfrak{n}_1)-(\mathfrak{k}\mathfrak{n}_1)(\mathfrak{i}\,\mathfrak{n}_3) \\ (\mathfrak{j}\,\mathfrak{n}_3)=(\mathfrak{k}\mathfrak{n}_1)(\mathfrak{i}\,\mathfrak{n}_2)-(\mathfrak{k}\mathfrak{n}_2)(\mathfrak{i}\,\mathfrak{n}_1) \\[6pt] (\mathfrak{k}\mathfrak{n}_1)=(\mathfrak{i}\,\mathfrak{n}_2)(\mathfrak{j}\,\mathfrak{n}_3)-(\mathfrak{i}\,\mathfrak{n}_3)(\mathfrak{j}\,\mathfrak{n}_2) \\ (\mathfrak{k}\mathfrak{n}_2)=(\mathfrak{i}\,\mathfrak{n}_3)(\mathfrak{j}\,\mathfrak{n}_1)-(\mathfrak{i}\,\mathfrak{n}_1)(\mathfrak{j}\,\mathfrak{n}_3) \\ (\mathfrak{k}\mathfrak{n}_3)=(\mathfrak{i}\,\mathfrak{n}_1)(\mathfrak{j}\,\mathfrak{n}_2)-(\mathfrak{i}\,\mathfrak{n}_2)(\mathfrak{j}\,\mathfrak{n}_1) \end{cases}
$$

Множећи једначину (41) скаларно, редом, са $\mathfrak{n}_1$, $\mathfrak{n}_2$, $\mathfrak{n}_3$, а ƴзимајући у обзир (42), добивамо:

$$
(48)\quad \begin{cases} x=\xi\,(\mathfrak{i}\,\mathfrak{n}_1)+\eta(\mathfrak{j}\,\mathfrak{n}_1) \\ y=\xi\,(\mathfrak{i}\,\mathfrak{n}_2)+\eta(\mathfrak{j}\,\mathfrak{n}_2) \\ z=\xi\,(\mathfrak{i}\,\mathfrak{n}_3)+\eta(\mathfrak{j}\,\mathfrak{n}_3) \end{cases}
$$

Стављајући ово (40) добивамо:

$$(49)\quad \mathfrak{r} = \{\xi(\mathfrak{i}\mathfrak{n}_1) + \eta(\mathfrak{j}\mathfrak{n}_1)\}\,\mathfrak{n}_1 + \{\xi(\mathfrak{i}\mathfrak{n}_2) + \eta(\mathfrak{j}\mathfrak{n}_2)\}\,\mathfrak{n}_2 + \{\xi(\mathfrak{i}\mathfrak{n}_3) + \eta(\mathfrak{j}\mathfrak{n}_3)\}\,\mathfrak{n}_3 \,.$$

Све величине у завијеним заградама овог обрасца ваља изразити помоћу елиптичних елемената. За скаларне продукте који се у њима појављују, то је већ учињено обрасцима (39) из којих следује да ти скаларни продукти зависе само од елемената Ω, i, ω групе (α), (38). Остаје још да изразимо координате ξ и η помоћу елиптичних елемената. У § 12 показано је да су координате планете обзиром на координатни систем, претстављен сликом 7, ове:

$$x = a\cos u\;;\quad y = b\sin u = a\sqrt{1-e^2}\sin u\;.$$

Померимо ли тај координатни систем, да би се поклопио са координатним системом $\xi-\eta$, дефинисаним малочас, паралелно до жиже S, дакле у правцу осе x за ea, то ће координате ξ и η бити претстављене овим обрасцима:

$$(50)\quad \begin{cases} \xi = a(\cos u - e) \\ \eta = a\sqrt{1-e^2}\sin u\,. \end{cases}$$

При томе је ексцентрична аномалија u претстављена као функција времена t Кеплеровом једначином (62), § 12, или, због (37), овом једначином:

$$(51)\quad u - e\sin u = nt + \varkappa.$$

Средње кретање n дато је једначином (63). § 12, или, ако ставимо

$$(52)\quad f(m_0 + m) = K^2,$$

једначином

$$(53)\quad n = Ka^{-\frac{3}{2}}$$

Предњим обрасцима претстављене су координате ξ и η елементима a, e, $\varkappa$, дакле елементима групе (β), (38) чиме је све приправљено за израчунавање Лагранжових заграда.

§ 31. Израчунавање Лагранжових заграда елиптичних елемената. Лагранжове заграде елиптичних елемената дефинисане су обрасцима:

$$(54) \qquad [k, i] = \frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial c_k} \cdot \frac{\partial \dot{\mathfrak{r}}}{\partial c_i} - \frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial c_i} \cdot \frac{\partial \dot{\mathfrak{r}}}{\partial c_k}$$

$$(55) \qquad \mathfrak{r} = \{\xi(\mathfrak{i}\mathfrak{n}_1) + \eta(\mathfrak{j}\mathfrak{n}_1)\}\,\mathfrak{n}_1 + \{\xi(\mathfrak{i}\mathfrak{n}_2) + \eta(\mathfrak{j}\mathfrak{n}_2)\}\,\mathfrak{n}_2 + \\ + \{\xi(\mathfrak{i}\mathfrak{n}_3) + \eta(\mathfrak{j}\mathfrak{n}_3)\}\,\mathfrak{n}_3,$$

при чему су скаларни продукти јединичних вектора претстављени као функције елиптичних елемената групе (α) једначинама (39), а координате ξ и η као функције елиптичних елемената групе (β) једначинама (50) и (51). При образовању извода $\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial c}$, да би он био стављен у образац (55), од пресудног је значаја да ли елиптични елеменат c_k односно c_i припада групи (α) или групи (β). Припада ли тај елеменат групи (α), што ћемо означити са c_α, онда су координате ξ и η независне од њега, па је зато

$$(56) \qquad \frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial c_k} = \left\{\xi\frac{\partial(\mathfrak{i}\mathfrak{n}_1)}{\partial c_\alpha} + \eta\frac{\partial(\mathfrak{j}\mathfrak{n}_1)}{\partial c_\alpha}\right\}\mathfrak{n}_1 + \left\{\xi\frac{\partial(\mathfrak{i}\mathfrak{n}_2)}{\partial c_\alpha} + \eta\frac{\partial(\mathfrak{j}\mathfrak{n}_2)}{\partial c_\alpha}\right\}\mathfrak{n}_2 + \\ + \left\{\xi\frac{\partial(\mathfrak{i}\mathfrak{n}_3)}{\partial c_\alpha} + \eta\frac{\partial(\mathfrak{j}\mathfrak{n}_3)}{\partial c_\alpha}\right\}\mathfrak{n}_3.$$

Припада ли тај елеменат групи (β), што ћемо означити са c_β, онда су скаларни производи јединичних вектора независни од њега, па је зато

$$(57) \qquad \frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial c_\beta} = \left\{\frac{\partial \xi}{\partial c_\beta}(\mathfrak{i}\mathfrak{n}_1) + \frac{\partial \eta}{\partial c_\beta}(\mathfrak{j}\mathfrak{n}_1)\right\}\mathfrak{n}_1 + \left\{\frac{\partial \xi}{\partial c_\beta}(\mathfrak{i}\mathfrak{n}_2) + \right. \\ \left. + \frac{\partial \eta}{\partial c_\beta}(\mathfrak{j}\mathfrak{n}_2)\right\}\mathfrak{n}_2 + \left\{\frac{\partial \xi}{\partial c_\beta}(\mathfrak{i}\mathfrak{n}_3) + \frac{\partial \eta}{\partial c_\beta}(\mathfrak{j}\mathfrak{n}_3)\right\}\mathfrak{n}_3.$$

При образовању извода $\frac{\partial \dot{\mathfrak{r}}}{\partial c}$ ваља имати у виду да само координате ξ и η зависе од времена t, па се зато тај извод добива ако у предња два обрасца ξ и η заменимо са $\dot{\xi}$ односно односно са $\dot{\eta}$.

Имајући претходно и познате особине јединичних вектора у виду, добивамо да ће, ако оба елиптична елемента припадају групи (α), њихова Лагранжова заграда, коју ћемо означити са $[k_\alpha, i_\alpha]$, бити претстављена обрасцем:

$$(58)\quad [k_\alpha, i_\alpha]=(\xi\dot{\eta}-\eta\dot{\xi})\left\{\frac{\partial(\mathrm{in}_1)}{\partial c_k}\cdot\frac{\partial(\mathrm{jn}_1)}{\partial c_i}-\frac{\partial(\mathrm{in}_1)}{\partial c_i}\cdot\frac{\partial(\mathrm{jn}_1)}{\partial c_k}+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial(\mathrm{in}_2)}{\partial c_k}\cdot\frac{\partial(\mathrm{jn}_2)}{\partial c_i}-\frac{\partial(\mathrm{in}_2)}{\partial c_i}\cdot\frac{\partial(\mathrm{jn}_2)}{\partial c_k}+\frac{\partial(\mathrm{in}_3)}{\partial c_k}\cdot\frac{\partial(\mathrm{jn}_3)}{\partial c_i}-\frac{\partial(\mathrm{in}_3)}{\partial c_i}\cdot\frac{\partial(\mathrm{jn}_3)}{\partial c_k}\right\}.$$

Припада ли елиптични елементи c_k групи (α), а елеменат c_i групи (β), онда је њихова Лагранжова заграда претстављена обрасцем:

$$[k_\alpha, i_\beta]=\left(\xi\frac{\partial\dot{\xi}}{\partial c_i}-\dot{\xi}\frac{\partial\xi}{\partial c_i}\right)\left\{(\mathrm{in}_1)\frac{\partial(\mathrm{in}_1)}{\partial c_k}+(\mathrm{in}_2)\frac{\partial(\mathrm{in}_2)}{\partial c_k}+(\mathrm{in}_3)\frac{\partial(\mathrm{in}_3)}{\partial c_k}\right\}+$$
$$+\left(\xi\frac{\partial\dot{\eta}}{\partial c_i}-\dot{\eta}\frac{\partial\eta}{\partial c_i}\right)\left\{(\mathrm{jn}_1)\frac{\partial(\mathrm{jn}_1)}{\partial c_k}+(\mathrm{jn}_2)\frac{\partial(\mathrm{jn}_3)}{\partial c_k}+(\mathrm{jn}_3)\frac{\partial(\mathrm{jn}_3)}{\partial c_k}\right\}+$$
$$+\left(\eta\frac{\partial\dot{\xi}}{\partial c_i}-\dot{\eta}\frac{\partial\xi}{\partial c_i}\right)\left\{(\mathrm{in}_1)\frac{\partial(\mathrm{jn}_1)}{\partial c_k}+(\mathrm{in}_2)\frac{\partial(\mathrm{jn}_2)}{\partial c_k}+(\mathrm{in}_3)\frac{\partial(\mathrm{jn}_1)}{\partial c_k}\right\}+$$
$$+\left(\xi\frac{\partial\dot{\eta}}{\partial c_i}-\dot{\xi}\frac{\partial\eta}{\partial c_i}\right)\left\{(\mathrm{jn}_1)\frac{\partial(\mathrm{in}_1)}{\partial c_k}+(\mathrm{jn}_2)\frac{\partial(\mathrm{in}_2)}{\partial c_k}+(\mathrm{jn}_3)\frac{\partial(\mathrm{in}_3)}{\partial c_k}\right\}.$$

Образујемо ли изводе једначина (45) и (46) по c_k, дакле по елементу групе (α), то добивамо:

$$(\mathrm{in}_1)\frac{\partial(\mathrm{in}_1)}{\partial c_k}+(\mathrm{in}_2)\frac{\partial(\mathrm{in}_2)}{\partial c_k}+(\mathrm{in}_3)\frac{\partial(\mathrm{in}_3)}{\partial c_k}=0$$

$$(\mathrm{jn}_1)\frac{\partial(\mathrm{jn}_1)}{\partial c_k}+(\mathrm{jn}_2)\frac{\partial(\mathrm{jn}_2)}{\partial c_k}+(\mathrm{jn}_3)\frac{\partial(\mathrm{jn}_3)}{\partial c_k}=0$$

$$(\mathrm{in}_1)\frac{\partial(\mathrm{jn}_1)}{\partial c_k}+(\mathrm{in}_2)\frac{\partial(\mathrm{jn}_2)}{\partial c_k}+(\mathrm{in}_3)\frac{\partial(\mathrm{jn}_3)}{\partial c_k}+(\mathrm{jn}_1)\frac{\partial(\mathrm{in}_1)}{\partial c_k}+$$
$$+(\mathrm{jn}_2)\frac{\partial(\mathrm{in}_2)}{\partial c_k}+(\mathrm{jn}_3)\frac{\partial(\mathrm{in}_3)}{\partial c_k}=0\,.$$

Зато добивамо за Лагранжову заграду $[k_\alpha, i_\beta]$ овај образац:

$$(59)\quad [k_\alpha, i_\beta]=\left(\xi\frac{\partial\dot{\eta}}{\partial c_i}-\dot{\xi}\frac{\partial\eta}{\partial c_i}-\eta\frac{\partial\dot{\xi}}{\partial c_i}+\dot{\eta}\frac{\partial\xi}{\partial c_i}\right)\cdot$$
$$\cdot\left\{(\mathrm{jn}_1)\frac{\partial(\mathrm{in}_1)}{\partial c_k}+(\mathrm{jn}_2)\frac{\partial(\mathrm{in}_2)}{\partial c_k}+(\mathrm{jn}_3)\frac{\partial(\mathrm{in}_3)}{\partial c_k}\right\}.$$

Припадају ли оба елиптична елемента c_k и c_i групи (β) онда је њихова Лагранжова заграда претстављена обрасцем:

$$[k_\beta, i_\beta]=\left(\frac{\partial\xi}{\partial c_k}\cdot\frac{\partial\dot{\xi}}{\partial c_i}-\frac{\partial\xi}{\partial c_i}\cdot\frac{\partial\dot{\xi}}{\partial c_k}\right)\left\{(\mathrm{in}_1)^2+(\mathrm{in}_2)^2+(\mathrm{in}_3)^2\right\}+$$
$$+\left(\frac{\partial\eta}{\partial c_k}\cdot\frac{\partial\dot{\eta}}{\partial c_i}-\frac{\partial\eta}{\partial c_i}\cdot\frac{\partial\dot{\eta}}{\partial c_k}\right)\left\{(\mathrm{jn}_1)^2+(\mathrm{jn}_2)^2+(\mathrm{jn}_3)^2\right\}+$$
$$+\left(\frac{\partial\xi}{\partial c_k}\cdot\frac{\partial\dot{\eta}}{\partial c_i}-\frac{\partial\xi}{\partial c_i}\cdot\frac{\partial\dot{\eta}}{\partial c_k}+\frac{\partial\dot{\xi}}{\partial c_i}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial c_k}-\frac{\partial\dot{\xi}}{\partial c_k}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial c_i}\right)\cdot$$
$$\cdot\left\{(\mathrm{in}_1)(\mathrm{jn}_1)+(\mathrm{in}_2)(\mathrm{jn}_2)+(\mathrm{in}_3)(\mathrm{jn}_3)\right\},$$

дакле, због (45) и (46), обрасцем:

$$(60)\quad [k_\beta, i_\beta]=\frac{\partial\xi}{\partial c_k}\cdot\frac{\partial\dot{\xi}}{\partial c_i}-\frac{\partial\xi}{\partial c_i}\cdot\frac{\partial\dot{\xi}}{\partial c_k}+$$
$$+\frac{\partial\eta}{\partial c_k}\cdot\frac{\partial\dot{\eta}}{\partial c_i}-\frac{\partial\eta}{\partial c_i}\cdot\frac{\partial\dot{\eta}}{\partial c_k}.$$

Из једначина (50) следује:

$$\dot{\xi}=\frac{d\xi}{dt}=-a\sin u\frac{du}{dt}$$
$$\dot{\eta}=\frac{d\eta}{dt}=a\sqrt{1-e^2}\cos u\frac{du}{dt},$$

а из једначине (51)

$$\frac{du}{dt}-e\cos u\frac{du}{dt}=n,$$

т, ј.

$$\frac{du}{dt}=\frac{n}{1-e\cos u}.$$

Зато је

$$(61)\quad \begin{cases} \dot{\xi} = -\dfrac{na \sin u}{1-e\cos u} \\[2ex] \dot{\eta} = \dfrac{na\sqrt{1-e^2}\cos u}{1-e\cos u}\,. \end{cases}$$

Једначине (50) и (61) дају:

$$\xi\dot{\eta} - \eta\dot{\xi} = \frac{na^2\sqrt{1-e^2}}{1-e\cos u}\left[(\cos u - e)\cos u + \sin^2 u\right],$$

т. ј. имајући у виду (53),

$$(62)\qquad \xi\dot{\eta} - \eta\dot{\xi} = na^2\sqrt{1-e^2} = K\sqrt{a(1-e^2)}.$$

Припада ли елеменат c_i групи (β), као што је то у обрасцу (59) претпостављено, то следује из претходне једначине:

$$(63)\qquad \frac{\partial}{\partial c_i}(\xi\dot{\eta} - \eta\dot{\xi}) = \xi\frac{\partial\dot{\eta}}{\partial c_i} - \dot{\xi}\frac{\partial\eta}{\partial c_i} - \eta\frac{\partial\dot{\xi}}{\partial c_i} + \\ + \dot{\eta}\frac{\partial\xi}{\partial c_i} = K\frac{\partial\sqrt{a(1-e^2)}}{\partial c_i}.$$

Ставимо ли (62) у (58), а (63) у (59), то добивамо место (58), (59), (60) ова три обрасца:

$$(64)\quad [k_\alpha, i_\alpha] = na^2\sqrt{1-e^2}\left\{\frac{\partial(\mathrm{in}_1)}{\partial c_k}\cdot\frac{\partial(\mathrm{jn}_1)}{\partial c_i} - \frac{\partial(\mathrm{in}_1)}{\partial c_i}\cdot\frac{\partial(\mathrm{jn}_1)}{\partial c_k} + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial(\mathrm{in}_2)}{\partial c_k}\cdot\frac{\partial(\mathrm{jn}_2)}{\partial c_i} - \frac{\partial(\mathrm{in}_2)}{\partial c_i}\cdot\frac{\partial(\mathrm{jn}_2)}{\partial c_k} + \frac{\partial(\mathrm{in}_3)}{\partial c_k}\cdot\frac{\partial(\mathrm{jn}_3)}{\partial c_i} - \frac{\partial(\mathrm{in}_3)}{\partial c_i}\cdot\frac{\partial(\mathrm{jn}_3)}{\partial c_k}\right\}$$

$$(65)\quad [k_\alpha, i_\beta] = K\frac{\partial\sqrt{a(1-e^2)}}{\partial c_i}\left\{(\mathrm{jn}_1)\frac{\partial(\mathrm{in}_1)}{\partial c_k} + (\mathrm{jn}_2)\frac{\partial(\mathrm{in}_2)}{\partial c_k} + \right.$$
$$\left. + (\mathrm{jn}_3)\frac{\partial(\mathrm{in}_3)}{\partial c_k}\right\}$$

$$(66)\quad [k_\beta, i_\beta] = \frac{\partial\xi}{\partial c_k}\cdot\frac{\partial\dot{\xi}}{\partial c_i} - \frac{\partial\xi}{\partial c_i}\cdot\frac{\partial\dot{\xi}}{\partial c_k} + \frac{\partial\eta}{\partial c_k}\cdot\frac{\partial\dot{\eta}}{\partial c_i} - \frac{\partial\eta}{\partial c_i}\frac{\partial\dot{\eta}}{\partial c_k},$$

дефинитивно уређена за израчунавање Лагранжових заграда елиптичних елемената. Приступимо сада том израчунавању!

Из (39) следује:

$$(67)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial(\mathfrak{i}\mathfrak{n}_1)}{\partial\Omega}=-(\mathfrak{i}\mathfrak{n}_2)\,, & \dfrac{\partial(\mathfrak{i}\mathfrak{n}_2)}{\partial\Omega}=(\mathfrak{i}\mathfrak{n}_1)\,, & \dfrac{\partial(\mathfrak{i}\mathfrak{n}_3)}{\partial\Omega}=0 \\ \dfrac{\partial(\mathfrak{j}\mathfrak{n}_1)}{\partial\Omega}=-(\mathfrak{j}\mathfrak{n}_2)\,, & \dfrac{\partial(\mathfrak{j}\mathfrak{n}_2)}{\partial\Omega}=(\mathfrak{j}\mathfrak{n}_1)\,, & \dfrac{\partial(\mathfrak{j}\mathfrak{n}_3)}{\partial\Omega}=0 \end{cases}$$

$$(68)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial(\mathfrak{i}\mathfrak{n}_1)}{\partial\omega}=(\mathfrak{j}\mathfrak{n}_1)\,, & \dfrac{\partial(\mathfrak{i}\mathfrak{n}_2)}{\partial\omega}=(\mathfrak{j}\mathfrak{n}_2)\,, & \dfrac{\partial(\mathfrak{i}\mathfrak{n}_3)}{\partial\omega}=(\mathfrak{j}\mathfrak{n}_3) \\ \dfrac{\partial(\mathfrak{j}\mathfrak{n}_1)}{\partial\omega}=-(\mathfrak{i}\mathfrak{n}_1)\,, & \dfrac{\partial(\mathfrak{j}\mathfrak{n}_2)}{\partial\omega}=-(\mathfrak{i}\mathfrak{n}_2)\,, & \dfrac{\partial(\mathfrak{j}\mathfrak{n}_3)}{\partial\omega}=-(\mathfrak{i}\mathfrak{n}_3) \end{cases}$$

$$(69)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial(\mathfrak{i}\mathfrak{n}_1)}{\partial i}=(\mathfrak{k}\mathfrak{n}_1)\sin\omega\,, & \dfrac{\partial(\mathfrak{i}\mathfrak{n}_2)}{\partial i}=(\mathfrak{k}\mathfrak{n}_2)\sin\omega \\ \dfrac{\partial(\mathfrak{i}\mathfrak{n}_3)}{\partial i}=(\mathfrak{k}\mathfrak{n}_3)\sin\omega\,, & \dfrac{\partial(\mathfrak{j}\mathfrak{n}_1)}{\partial i}=(\mathfrak{k}\mathfrak{n}_1)\cos\omega \\ \dfrac{\partial(\mathfrak{j}\mathfrak{n}_2)}{\partial i}=(\mathfrak{k}\mathfrak{n}_2)\cos\omega, & \dfrac{\partial(\mathfrak{j}\mathfrak{n}_3)}{\partial i}=(\mathfrak{k}\mathfrak{n}_3)\cos\omega. \end{cases}$$

Ако је

$$c_k=\Omega\;;\qquad c_i=\omega,$$

онда следује из (64), узимајући у обзир (67) и (68),

$$[\Omega,\omega]=na^2\sqrt{1-e^2}\left\{(\mathfrak{i}\mathfrak{n}_1)(\mathfrak{i}\mathfrak{n}_2)+(\mathfrak{j}\mathfrak{n}_1)(\mathfrak{j}\mathfrak{n}_2)-(\mathfrak{i}\mathfrak{n}_1)(\mathfrak{i}\mathfrak{n}_2)-(\mathfrak{j}\mathfrak{n}_1)(\mathfrak{j}\mathfrak{n}_2)\right\},$$

т. ј.

$$(70)\qquad [\Omega,\omega]=0.$$

Ако је

$$c_k=\Omega\;;\qquad c_i=i,$$

онда следује из (64), узимајући у обзир (67) и (69),

$$[\Omega,i]=na^2\sqrt{1-e^2}\left\{-(\mathfrak{i}\mathfrak{n}_2)(\mathfrak{k}\mathfrak{n}_1)\cos\omega+(\mathfrak{k}\mathfrak{n}_1)(\mathfrak{j}\mathfrak{n}_2)\sin\omega+\right.$$
$$\left.+(\mathfrak{i}\mathfrak{n}_1)(\mathfrak{k}\mathfrak{n}_2)\cos\omega-(\mathfrak{k}\mathfrak{n}_2)(\mathfrak{j}\mathfrak{n}_1)\sin\omega\right\}$$

$$[\Omega,i]=na^2\sqrt{1-e^2}\left\{[(\mathfrak{i}\mathfrak{n}_1)(\mathfrak{k}\mathfrak{n}_2)-(\mathfrak{i}\mathfrak{n}_2)(\mathfrak{k}\mathfrak{n}_1)]\cos\omega+[(\mathfrak{k}\mathfrak{n}_1)(\mathfrak{j}\mathfrak{n}_2)-\right.$$
$$\left.-(\mathfrak{k}\mathfrak{n}_2)(\mathfrak{j}\mathfrak{n}_1)]\sin\omega\right\},$$

т. ј. због (47)

$$[\Omega,i]=na^2\sqrt{1-e^2}\left\{-(\mathfrak{j}\mathfrak{n}_3)\cos\omega-(\mathfrak{i}\mathfrak{n}_3)\sin\omega\right\}$$

или због (39)

$$[\Omega, i] = -na^2\sqrt{1-e^2}\,\{\cos^2\omega \sin i + \sin^2\omega \sin i\},$$

дакле

(71) $$[\Omega, i] = -na^2\sqrt{1-e^2}\sin i.$$

Ако је

$$c_k = \omega; \qquad c_l = i,$$

онда следује, из (64), узимајући у обзир (68) и (69),

$$[\Omega\ i] = na^2\sqrt{1-\epsilon^2}\,\{(\mathfrak{jn}_1)(\mathfrak{kn}_1)\cos\omega + (\mathfrak{kn}_1)(\mathfrak{in}_1)\sin\omega + \\ + (\mathfrak{jn}_2)(\mathfrak{kn}_2)\cos\omega + (\mathfrak{kn}_2)(\mathfrak{in}_2)\sin\omega + (\mathfrak{jn}_3)(\mathfrak{kn}_3)\cos\omega + \\ + (\mathfrak{kn}_3)(\mathfrak{in}_3)\sin\omega\}$$

$$[\omega, i] = na^2\sqrt{1-\epsilon^2}\,\{[(\mathfrak{jn}_1)(\mathfrak{kn}_1) + (\mathfrak{jn}_2)(\mathfrak{kn}_2) + (\mathfrak{jn}_3)(\mathfrak{kn}_3)]\cos\omega + \\ + [(\mathfrak{kn}_1)(\mathfrak{in}_1) + (\mathfrak{kn}_2)(\mathfrak{in}_2) + (\mathfrak{kn}_3)(\mathfrak{in}_3)]\sin\omega\},$$

т. ј. због (46)

(72) $$[\omega, i] = 0.$$

Ако је

$$c_k = \Omega;\ \omega;\ i, \qquad c_l = \varkappa,$$

т. ј. ако c_k припада ма којем елементу групе (α), онда треба применити образац (65), но како је у њему, у овом случају,

$$\frac{\partial\sqrt{a(1-e^2)}}{\partial\varkappa} = 0,$$

то је

(73) $$[\Omega, \varkappa] = 0$$

(74) $$[\omega, \varkappa] = 0$$

(75) $$[i, \varkappa] = 0.$$

Ако је

$$c_k = \Omega;\ \omega;\ i, \qquad c_l = a,$$

онда треба применити образац (65), но као је у њему, у овом случају,

$$K \frac{\partial \sqrt{a(1-e^2)}}{\partial a} = \frac{1}{2} K a^{-\frac{1}{2}} \sqrt{1-e^2},$$

дакле због (53)

$$K \frac{\partial \sqrt{a(1-e^2)}}{\partial a} = \frac{1}{2} na \sqrt{1-e^2},$$

то образац (65) ваља заменити овим:

$$(65_a) \qquad [k_\alpha, a] = \frac{1}{2} na \sqrt{1-e^2} \left\{ (\mathfrak{jn}_1) \frac{\partial(\mathfrak{in}_1)}{\partial c_k} + (\mathfrak{jn}_2) \frac{\partial(\mathfrak{in}_2)}{\partial c_k} + (\mathfrak{jn}_3) \frac{\partial(\mathfrak{in}_3)}{\partial c_k} \right\}.$$

Ако је, дакле,

$$c_k = \Omega\,; \qquad c_i = a,$$

онда образац (65_a) добива, имајући у виду (67), овај облик:

$$[\Omega, a] = \frac{1}{2} na \sqrt{1-e^2} \left\{ -(\mathfrak{jn}_1)(\mathfrak{in}_2) + (\mathfrak{jn}_2)(\mathfrak{in}_1) \right\},$$

т. ј. због (47)

$$[\Omega, a] = \frac{1}{2} na \sqrt{1-e^2}\, (\mathfrak{kn}_3),$$

дакле због (39)

$$(76) \qquad [\Omega, a] = \frac{1}{2} na \sqrt{1-e^2} \cos i.$$

Ако је

$$c_k = \omega\,; \qquad c_i = a,$$

онда образац (65_a) добива, због (68), овај облик:

$$[\omega, a] = \frac{1}{2} na \sqrt{1-e^2} \left\{ (\mathfrak{jn}_1)^2 + (\mathfrak{jn}_2)^2 + (\mathfrak{jn}_3)^2 \right\},$$

т. ј. због (45)

$$(77) \qquad [\omega, a] = \frac{1}{2} na \sqrt{1-e^2}.$$

Ако је

$$c_k = i\,; \qquad c_i = a\,,$$

онда образац (65_a) добива, због (69), овај облик:

$$[i, a] = \frac{1}{2}\, na\, \sqrt{1-e^2}\,\{(\mathfrak{j}\mathfrak{n}_1)(\mathfrak{k}\mathfrak{n}_1) + (\mathfrak{j}\mathfrak{n}_2)(\mathfrak{k}\mathfrak{n}_2) + (\mathfrak{j}\mathfrak{n}_3)(\mathfrak{k}\mathfrak{n}_3)\}\,\sin\omega,$$

т. ј. због (46)

$$[i, a] = 0. \tag{78}$$

Ако је

$$c_k = \Omega\,;\ \omega\,;\ i\,; \qquad c_i = e\,,$$

онда је у обрасцу (65), због (53),

$$K\,\frac{\partial\sqrt{a(1-e^2)}}{\partial e} = -Ka^{\frac{1}{2}}\frac{e}{\sqrt{1-e^2}} = -na^2\frac{e}{\sqrt{1-e^2}},$$

па тај образац ваља заменити овим:

$$[k\alpha, e] = -na^2\frac{e}{\sqrt{1-e^2}}\left\{(\mathfrak{j}\mathfrak{n}_1)\frac{\partial(\mathfrak{i}\mathfrak{n}_1)}{\partial c_k} + (\mathfrak{j}\mathfrak{n}_2)\frac{\partial(\mathfrak{i}\mathfrak{n}_2)}{\partial c_k} + (\mathfrak{j}\mathfrak{n}_3)\frac{\partial(\mathfrak{i}\mathfrak{n}_3)}{\partial c_k}\right\}. \tag{65_b}$$

Упоредимо ли овај образац са обрасцем (65_a), то следује

$$[k_\alpha, e] = -\frac{2ae}{1-e^2}[k_\alpha, a]\,.$$

Стављајући овамо, једно за другим, $k_\alpha = \Omega, \omega, i$, то добивамо, због (76), (77) и (78), ове обрасце:

$$[\Omega, e] = -na^2\frac{e}{\sqrt{1-e^2}}\cos i \tag{79}$$

$$[\omega, e] = -na^2\frac{e}{\sqrt{1-e^2}}\,, \tag{80}$$

$$[i, e] = 0. \tag{81}$$

Да помоћу обрасца (66) нађемо Лагранжове заграде $[a, e]$, $[\varkappa, e]$, $[a, \varkappa]$ можемо, пошто те заграде, као што смо видели, не зависе од времена, дати времену t једну одређену вредност. Ова нека буде време пролаза τ кроз перихел, дакле, имајући у виду (37)и (53),

$$t=\tau=-\frac{\varkappa}{n}=-\frac{\varkappa}{K}a^{\frac{3}{2}}.$$

Вредност τ зависи од елемената a и $\varkappa$, што ваља имати у виду. Из Кеплерове једначине (62), § 12, следује да је

$$t=\tau \qquad u=0\,.$$

Зато једначине (50), (61) и (53) дају:

$$t=\tau\,; \qquad \xi=a(1-e)\,; \qquad \eta=0$$

$$\dot{\xi}=0\,; \qquad \dot{\eta}=\frac{na\sqrt{1-e^2}}{1-e}=na\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}=Ka^{-\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\,.$$

Одавде следује, пошто се у обрасцу за τ не појављује e,

$$\frac{\partial\xi}{\partial e}=-a\,; \qquad \frac{\partial\eta}{\partial e}=0$$

$$\frac{\partial\dot{\xi}}{\partial e}=0\,; \qquad \frac{\partial\dot{\eta}}{\partial e}=\frac{na}{(1-e)\sqrt{1-e^2}}\,.$$

Ставимо ли, према томе, у обрасцу (66) $c_l=e$, то он добива овај облик:

$$(66a) \qquad [k_\beta, e]=a\left\{\frac{\partial\dot{\xi}}{\partial c_k}\right\}_{t=\tau}+\frac{na}{(1-e)\sqrt{1-e^2}}\left\{\frac{\partial\eta}{\partial c_k}\right\}_{t=\tau}.$$

Како се остала два елемента a, $\varkappa$ групе (α) појављују у обрасцу за τ, то се за одређивање предњих извода морамо послужити обрасцима (50) и (61). Из тих образаца следује:

$$\frac{\partial \xi}{\partial c_k} = \frac{\partial \xi}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial c_k} = -a \sin u \frac{\partial u}{\partial c_k}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial c_k} = \frac{\partial \eta}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial c_k} = a\sqrt{1-e^2}\cos u\,\frac{\partial u}{\partial c_k}$$

$$\frac{\partial \dot{\xi}}{\partial c_k} = \frac{\partial \dot{\xi}}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial c_k} = -na\,\frac{\cos u - e}{(1-e\cos u)^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial c_k}$$

$$\frac{\partial \dot{\eta}}{\partial c_k} = \frac{\partial \dot{\eta}}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial c_k} = na\sqrt{1-e^2}\,\frac{-\sin u + e\sin 2u}{(1-e\cos u)^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial c_k}.$$

Стављајући сада $t=\tau$, т. ј. $u=0$, добивамо:

$$\left\{\frac{\partial \xi}{\partial c_k}\right\}_{t=\tau} = 0; \qquad \left\{\frac{\partial \eta}{\partial c_k}\right\}_{t=\tau} = a\sqrt{1-e^2}\left\{\frac{\partial u}{\partial c_k}\right\}_{t=\tau}$$

$$\left\{\frac{\partial \dot{\xi}}{\partial c_k}\right\}_{t=\tau} = -\frac{na}{1-e}\left\{\frac{\partial u}{\partial c_k}\right\}_{t=\tau}; \qquad \left\{\frac{\partial \dot{\eta}}{\partial c_k}\right\}_{t=\tau} = 0.$$

Ако ово ставимо у образац (66_a): добивамо:

$$[k_\beta, e] = 0.$$

Ставимо ли у овај образац за k_β елеменат a односно $\varkappa$, то добивамо:

$$(82) \qquad [a, e] = 0$$

$$(83) \qquad [\varkappa, e] = 0.$$

И Лагранжову заграду $[a, \varkappa]$ можемо наћи помоћу обрасца (66) дајући времену t вредност τ.

Из (51) следује:

$$\frac{\partial u}{\partial \varkappa} - e\cos u\,\frac{\partial u}{\partial \varkappa} = 1; \qquad \left\{\frac{\partial u}{\partial \varkappa}\right\}_{t=\tau} = \frac{1}{1-e}$$

па једначина (66) добива, узимајући у обзир горње обрасце, овај облик:

$$(66_b) \quad [a, \varkappa] = -\frac{na}{(1-e^2)}\left\{\frac{\partial \xi}{\partial a}\right\}_{t=\tau} - \frac{a\sqrt{1-e^2}}{1-e}\left\{\frac{\partial \dot{\eta}}{\partial a}\right\}_{t=\tau}$$

Из (50) следује:

$$\frac{\partial\xi}{\partial a} = \cos u - e\,; \qquad \left\{\frac{\partial\xi}{\partial a}\right\}_{t=\tau} = 1 - e\,.$$

Из (61) и (53) следује:

$$\dot{\eta} = K a^{-\frac{1}{2}} \sqrt{1-e^2}\,\frac{\cos u}{1-e\cos u}\,,$$

т. ј.

$$\frac{\partial\dot{\eta}}{\partial a} = -\frac{1}{2} K a^{-\frac{3}{2}} \sqrt{1-e^2}\,\frac{\cos u}{1-e\cos u} =$$

$$= -\frac{n}{2}\sqrt{1-e^2}\,\frac{\cos u}{1-e\cos u}$$

$$\left\{\frac{\partial\dot{\eta}}{\partial a}\right\}_{t=\tau} = -\frac{n}{2}\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\,.$$

Стављајући предње у образац (66_b), добивамо:

$$[a, \varkappa] = -\frac{na}{2}\,. \tag{84}$$

§ 32. Обрасци за временске изводе елиптичних елемената. Ставимо:

$$c_1 = a\,; \quad c_2 = e\,; \quad c_3 = \varkappa\,; \quad c_4 = \Omega\,; \quad c_5 = i\,; \quad c_6 = \omega\,,$$

онда следује из образаца (70) до (84) и имајући у виду да је $[k, k] = 0$, $[k, i] = -[i, k]$,

$$[1, 1] = 0\,; \qquad [1, 2] = 0\,; \quad [1, 3] = -\frac{1}{2}na\,;$$

$$[1, 4] = -\frac{1}{2}na\sqrt{1-e^2}\cos i\,; \; [1, 5] = 0\,; \quad [1, 6] = -\frac{na}{2}\sqrt{1-e^2}\,;$$

$$[2, 1] = 0\,; \quad [2, 2] = 0\,; \qquad [2, 3] = 0; \quad [2, 4] = na^2\frac{e}{\sqrt{1-e^2}}\cos i$$

$$[2, 5] = 0\,; \quad [2, 6] = na^2\frac{e}{\sqrt{1-e}}\,; \qquad [3, 1] = \frac{1}{2}na\,; \quad [3, 2] = 0\,;$$

$$[3, 3] = 0\,; \quad [3, 4] = 0\,; \qquad [3, 5] = 0\,; \qquad [3, 6] = 0;$$

$[4, 1] = \frac{1}{2} na\sqrt{1-e^2}\cos i$; $[4, 2] = -na^2 \frac{e\cos i}{\sqrt{1-e^2}}$; $[4, 3] = 0$;

$[4, 4] = 0$; $[4, 5] = -na^2\sqrt{1-e^2}\sin i$; $[4, 6] = 0$; $[5, 1] = 0$;

$[5, 2] = 0$; $[5, 3] = 0$; $[5, 4] = na^2\sqrt{1-e^2}\sin i$; $[5, 5[= 0$;

$[5, 6] = 0$; $[6, 1] = \frac{1}{2} na\sqrt{1-e^2}$; $[6, 2] = -na^2\frac{e}{\sqrt{1-e^2}}$;

$[6, 3] = 0$; $[6, 4] = 0$; $[6, 5] = 0$, $[6, 6] = 0$.

Због тога добивају једначине (20) овај облик:

$$
(85)\quad \left\{
\begin{aligned}
& -\frac{1}{2} na\frac{d\varkappa}{dt} - \frac{1}{2} na\sqrt{1-e^2}\cos i\frac{d\Omega}{dt} - \\
& \qquad\qquad -\frac{1}{2} na\sqrt{1-e^2}\,\frac{d\omega}{dt} = \frac{\partial R}{\partial a} \\
& \frac{na\, e\cos i}{\sqrt{1-e^2}}\cdot\frac{d\Omega}{dt} + \frac{na^2 e}{\sqrt{1-e^2}}\cdot\frac{d\omega}{dt} = \frac{\partial R}{\partial e} \\
& \frac{1}{2} na\frac{da}{dt} = \frac{\partial R}{\partial \varkappa} \\
& \frac{1}{2} na\sqrt{1-e^2}\cos i\,\frac{da}{dt} - \frac{na^2 e\cos i}{\sqrt{1-e^2}}\cdot\frac{de}{dt} - \\
& \qquad\qquad - na^2\sqrt{1-e^2}\sin i\,\frac{di}{dt} = \frac{\partial R}{\partial \Omega} \\
& na^2\sqrt{1-e^2}\sin i\,\frac{d\Omega}{dt} = \frac{\partial R}{\partial i} \\
& \frac{1}{2} na\sqrt{1-e^2}\,\frac{da}{dt} - \frac{na^2 e}{\sqrt{1-e^2}}\,\frac{de}{dt} = \frac{\partial R}{\partial \omega}.
\end{aligned}
\right.
$$

Из ових једначина следује:

$$
(86)\quad \left\{
\begin{aligned}
& \frac{da}{dt} = \frac{2}{na}\cdot\frac{\partial R}{\partial \varkappa} \\
& \frac{de}{dt} = \frac{1-e^2}{na^2 e}\cdot\frac{\partial R}{\partial \varkappa} - \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e}\cdot\frac{\partial R}{\partial \omega} \\
& \frac{di}{dt} = \frac{\cos i}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i}\cdot\frac{\partial R}{\partial \omega} - \frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i}\cdot\frac{dR}{\partial \Omega}
\end{aligned}
\right.
$$

$$
(86)\quad \begin{cases}
\dfrac{d\Omega}{dt} = \dfrac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i}\cdot\dfrac{\partial R}{\partial i} \\[2ex]
\dfrac{d\omega}{dt} = -\dfrac{\cos i}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i}\cdot\dfrac{\partial R}{\partial i} + \dfrac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e}\cdot\dfrac{\partial R}{\partial e} \\[2ex]
\dfrac{d\varkappa}{dt} = -\dfrac{1-e^2}{na^2 e}\cdot\dfrac{\partial R}{\partial e} - \dfrac{2}{na}\cdot\dfrac{\partial R}{\partial a}.
\end{cases}
$$

Вратимо се опет на уобичајене елиптичне елементе, т. ј. ставимо, према (36) и (37), $\omega = \Pi - \Omega$; $\varkappa = \varepsilon - \Pi$. У овим обрасцима се сем елемената ω и $\varkappa$, место којих хоћемо да уведемо Π и ε, појављује још елеменат Ω. Због тога треба провести ову трансформацију елемената: у једначинама (86) ваља групу елемената ω, $\varkappa$, Ω заменити групом Π, ε, Ω помоћу ових трију једначина:

$$
(87)\quad \begin{cases}
\Omega = \Omega \\
\omega = \Pi - \Omega \\
\varkappa = \varepsilon - \Pi.
\end{cases}
$$

Одавде следује да на левој страни једначина (86) треба извршити замену:

$$
(88)\quad \frac{d\Omega}{dt} = \frac{d\Omega}{dt}; \qquad \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\Pi}{dt} - \frac{d\Omega}{dt};
$$

$$
\frac{d\varkappa}{dt} = \frac{d\varepsilon}{dt} - \frac{d\Pi}{dt},
$$

а на десној:

$$
\frac{\partial R}{\partial \Omega} = \frac{\partial R}{\partial \Omega}\cdot\frac{\partial \Omega}{\partial \Omega} + \frac{\partial R}{\partial \Pi}\cdot\frac{\partial \Pi}{\partial \Omega} + \frac{\partial R}{\partial \varepsilon}\cdot\frac{\partial \varepsilon}{\partial \Omega}
$$

$$
\frac{\partial R}{\partial \omega} = \frac{\partial R}{\partial \Omega}\cdot\frac{\partial \Omega}{\partial \omega} + \frac{\partial R}{\partial \Pi}\cdot\frac{\partial \Pi}{\partial \omega} + \frac{\partial R}{\partial \varepsilon}\cdot\frac{\partial \varepsilon}{\partial \omega}
$$

$$
\frac{\partial R}{\partial \varkappa} = \frac{\partial R}{\partial \Omega}\cdot\frac{\partial \Omega}{\partial \varkappa} + \frac{\partial R}{\partial \Pi}\cdot\frac{\partial \Pi}{\partial \varkappa} + \frac{\partial R}{\partial \varepsilon}\cdot\frac{\partial \varepsilon}{\partial \varkappa}.
$$

Решимо ли једначине (87) по новим елементима, то добивамо:

$$\Omega = \Omega; \qquad \Pi = \omega + \Omega: \qquad \varepsilon = \varkappa + \omega + \Omega$$

па због тога:

$$(89)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial R}{\partial \Omega} = \dfrac{\partial R}{\partial \Omega} + \dfrac{\partial R}{\partial \Pi} + \dfrac{\partial R}{\partial \varepsilon} \\[2ex] \dfrac{\partial R}{\partial \omega} = \dfrac{\partial R}{\partial \Pi} + \dfrac{\partial R}{\partial \varepsilon} \\[2ex] \dfrac{\partial R}{\partial \varkappa} = \dfrac{\partial R}{\partial \varepsilon}\,. \end{cases}$$

Стављајући (88) и (89) у (86), па решавајући тај нови систем једначина по временским изводима нових елемената, добивамо следеће једначине:

$$(90)\quad \begin{cases} \dfrac{da}{dt} = \dfrac{2}{na}\,\dfrac{\partial R}{\partial \varepsilon} \\[2ex] \dfrac{de}{dt} = -\dfrac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e}\cdot\dfrac{\partial R}{\partial \Pi} - \sqrt{1-e^2}\,\dfrac{1-\sqrt{1-e^2}}{na^2 e}\cdot\dfrac{\partial R}{\partial \varepsilon} \\[2ex] \dfrac{d\varepsilon}{dt} = -\dfrac{2}{na}\cdot\dfrac{\partial R}{\partial a} + \dfrac{\operatorname{tang}\dfrac{i}{2}}{na^2\sqrt{1-e^2}}\cdot\dfrac{\partial R}{\partial i} + \\[2ex] \qquad\qquad + \sqrt{1-e^2}\,\dfrac{1-\sqrt{1-e^2}}{na^2 e}\cdot\dfrac{\partial R}{\partial e} \\[2ex] \dfrac{d\Omega}{dt} = \dfrac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i}\cdot\dfrac{\partial R}{\partial i} \\[2ex] \dfrac{di}{dt} = -\dfrac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i}\cdot\dfrac{\partial R}{\partial \Omega} - \\[2ex] \qquad\qquad - \dfrac{\operatorname{tang}\dfrac{i}{2}}{na^2\sqrt{1-e^2}}\left(\dfrac{\partial R}{\partial \Pi} + \dfrac{\partial R}{\partial \varepsilon}\right) \\[2ex] \dfrac{d\Pi}{dt} = \dfrac{\operatorname{tang}\dfrac{i}{2}}{na^2\sqrt{1-e^2}}\cdot\dfrac{\partial R}{\partial i} + \dfrac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e}\cdot\dfrac{\partial R}{\partial e}\,. \end{cases}$$

Ово су главни обрасци за израчунавање поремећаја планетског кретања.

ГЛАВА ОСМА

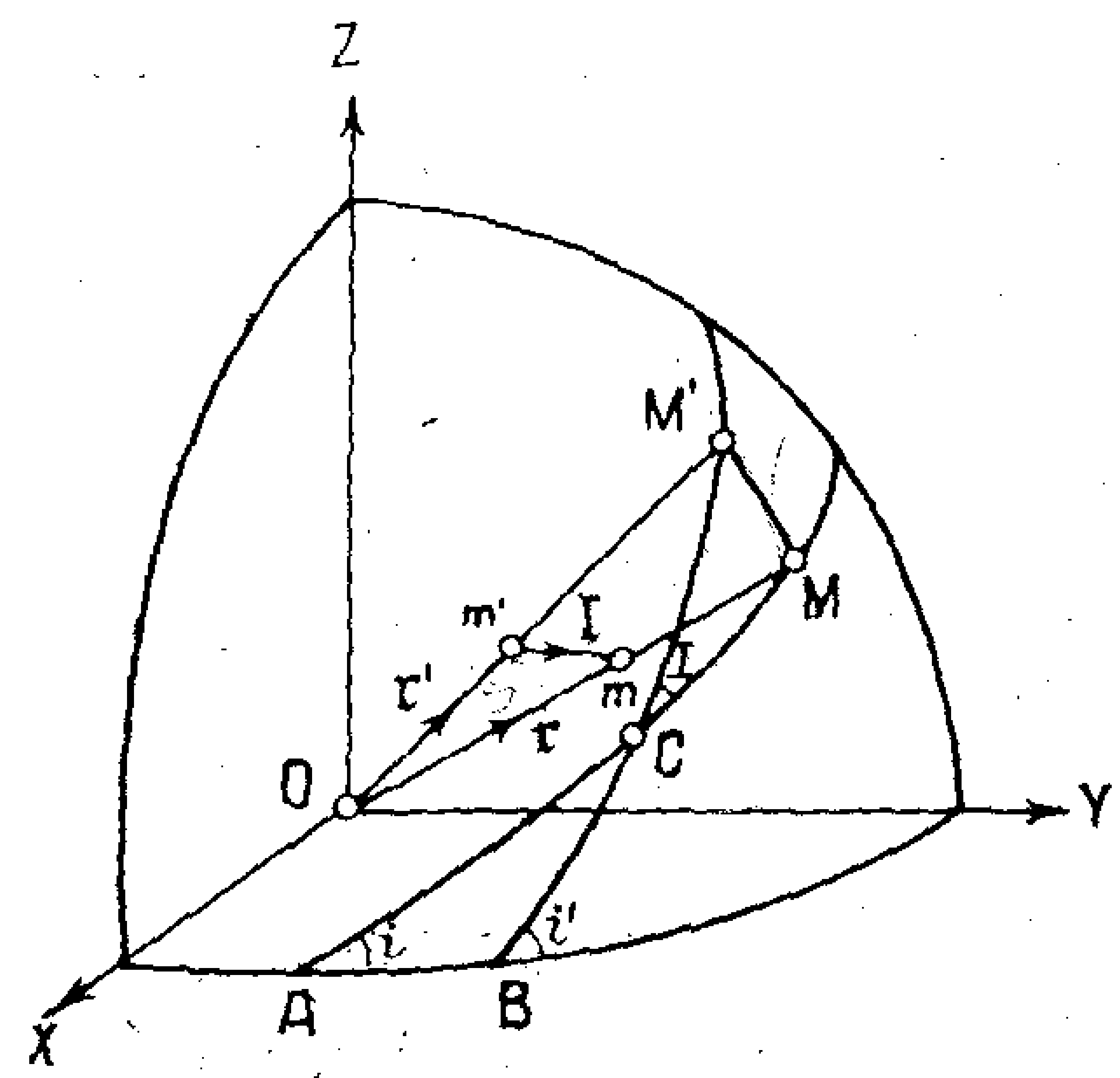
Рачун поремећаја кретања небеских тела.

§ 33. Развијање функције поремећаја у ред. Практично израчунавање поремећаја кретања небеских тела своди се на интегрисање једначина (90) прошлог параграфа. Пре но што се приступи тој интеграцији, потребно је функцију поремећаја R изразити помоћу елиптичних елемената. То се врши развијајући ту функцију у ред. Тај посао, који је чисто рачунска ствар, толико је опсежан да га је немогуће овде извршити у свима његовим појединостима. Због тога се морамо ограничити на то да у главним цртама опишемо поступак тога рачуна. При томе ћемо, да бисмо имали пред собом конкретан један случај, узети да је уочено небеско тело које подлежи поремећају једна од планета чију ћемо масу означити са m. Једноставности ради, узимамо, за сада, у обзир само једну од осталих планета која изазива поремећај; њену масу означићемо са m'. У таквом случају добива функција поремећаја R, према (4), § 26, овај облик:

$$R = fm'\left(\frac{1}{\varrho} - \frac{(\mathfrak{r}\,\mathfrak{r}')}{r'^3}\right), \tag{1}$$

где $\mathfrak{r}$ означава вектор положаја масе m према Сунцу, $\mathfrak{r}'$ вектор положаја масе m', а ϱ међусобно отстојање тих двеју маса.

Нека нам у сл. 15 $X-Y-Z$ претставља непомични координатни систем, дефинисан у § 13, ACM нека претставља пројекцију путање планете m пројицирану на небеску сферу из тачке O, а BCM' пројекцију путање планете m'. Тренутни положаји тих двеју планета нека буду m и m', а $\mathfrak{r}$ и $\mathfrak{r}'$ њихови вектори положаја. Нагиби путања маса m и m' нека буду означени са i односно i'. A и B претстављају узлазне чворове назначених двеју путања. Лучна отстојања тих двеју тачака од осе X претстављају нам лонгитуде Ω, Ω' тих узлазних чворова. Обе пројекције путања на небеској сфери секу се у тачки



Сл. 15

C. Сферни угао ACB означићемо са I; он претставља међусобни нагиб уочених двеју планетских путања. Означимо лукове AC и BC са α односно са α', то сферни троугао ABC има ове стране a, b, c и ове углове A, B, C:

$$(2) \quad \left| \begin{array}{lll} a = \alpha'; & b = \alpha; & c = \Omega' - \Omega \\ A = i; & B = 180^0 - i'; & C = I. \end{array} \right.$$

Сферна тригонометрија даје нам могућност да ново уведене елементе I, α, α' изразимо помоћу елиптичних елемената i, i, Ω, Ω'.

Означимо вектор положаја масе m према маси m' са $\mathfrak{l}$, а модуо тога вектора, као што је напред речено, са ϱ, то је:

$$\mathfrak{r} - \mathfrak{r}' = \mathfrak{l}\,.$$

Множећи ову векторску једначину са самом собом, то добивамо, пошто је $(\mathfrak{r}\,\mathfrak{r}) = r^2$; $(\mathfrak{r}'\,\mathfrak{r}') = r'^2$; $(\mathfrak{l}\,\mathfrak{l}) = \varrho^2$,

$$(3) \qquad r^2 - 2(\mathfrak{r}\,\mathfrak{r}') + r'^2 = \varrho^2.$$

Угао S што га вектори $\mathfrak{r}$ и $\mathfrak{r}'$ међусобно затварају мерен је луком MM' сферног троугла $MM'C$. Лукови AM и BM' претстављају нам, као што је у § 11 саопштено, аргументе латитуда маса m и m', које смо лукове означили са φ и φ'. Зато је у сферном троуглу MCM' : arc $MC = \varphi - \alpha$; arc $M'C = \varphi' - \alpha'$, због чега следује из тог троугла, применом обрасца сферне тригонометрије, саопштеног у § 30, ова једначина:

$$\cos S = \cos(\varphi - \alpha)\cos(\varphi' - \alpha') + \sin(\varphi - \alpha)\sin(\varphi' - \alpha')\cos I\,.$$

Како је:

$$\sin^2\frac{I}{2} = \frac{1 - \cos I}{2}\,; \qquad \cos I = 1 - 2\sin^2\frac{I}{2}\,,$$

то добивамо:

$$(4) \quad \cos S = \cos(\varphi - \varphi' + \alpha' - \alpha) - 2\sin(\varphi - \alpha)\sin(\varphi' - \alpha')\sin^2\frac{I}{2}\,.$$

Пошто је, према дефиницији скаларног продукта двају вектора,

$$(5) \qquad (\mathfrak{r}\,\mathfrak{r}') = rr'\cos S\,,$$

то добивамо из (3) и (5):

$$\frac{1}{\varrho} = (r^2 + r'^2 - 2rr'\cos S)^{-\frac{1}{2}}\,,$$

т. ј. због (4)

$$\frac{1}{\varrho} = \left\{r^2 + r'^2 - 2rr'\left[\cos(\varphi - \varphi' + \alpha' - \alpha) - 2\sin(\varphi - \alpha)\sin(\varphi' - \alpha')\sin^2\frac{I}{2}\right]\right\}^{-\frac{1}{2}},$$

или

$$(6) \qquad \frac{1}{\varrho} = \left\{[r^2 + r'^2 - 2rr'\cos(\varphi - \varphi' + \alpha' - \alpha)]\left[1 + \frac{4rr'\sin(\varphi - \alpha)\sin(\varphi' - \alpha')\sin^2\frac{I}{2}}{r^2 + r'^2 - 2rr'\cos(\varphi - \varphi' + \alpha' - \alpha)}\right]\right\}^{-\frac{1}{2}}.$$

Сем тога је, због (5) и (4),

$$(7) \qquad \frac{(\mathfrak{r}\,\mathfrak{r}')}{r'^3} = \frac{r}{r'^2}\left[\cos(\varphi - \varphi' + \alpha' - \alpha) - 2\sin(\varphi - \alpha)\sin(\varphi' - \alpha')\sin^2\frac{I}{2}\right].$$

Стављајући (6) и (7) у (1), добивамо:

$$(8) \qquad R = fm'\left\{\left[r^2 + r'^2 - 2rr'\cos(\varphi - \varphi' + \alpha' - \alpha)\right]^{-\frac{1}{2}} \cdot \left[1 + \frac{4rr'\sin(\varphi - \alpha)\sin(\varphi' - \alpha')\sin^2\frac{I}{2}}{r^2 + r'^2 - 2rr'\cos(\varphi - \varphi' + \alpha' - \alpha)}\right]^{-\frac{1}{2}} - \frac{r}{r'^2}\left[\cos(\varphi - \varphi' + \alpha' - \alpha) - 2\sin(\varphi - \alpha)\sin(\varphi' - \alpha')\sin^2\frac{I}{2}\right]\right\}.$$

Разломак који се појављује у предњем обрасцу има, пошто је I независно од $\mathfrak{r}$ и $\mathfrak{r}'$, ову максималну вредност:

$$\frac{4rr'}{r^2 + r'^2}\sin^2\frac{I}{2}.$$

Равни планетских путања имају, као што је познато, веома мале међусобне нагибе, због чега је нумеричка вредност горњег израза увек далеко мања од јединице. Због тога се други фактор првог члана завијене заграде обрасца (8) може по биномском обрасцу развити у апсолутно конвергентан ред. Учинимо ли то, онда добивамо место (8)

$$(9) \qquad R = fm'\left\{\left[r^2+r'^2-2rr'\cos(\varphi-\varphi'+\alpha'-\alpha)\right]^{-\frac{1}{2}} -\right.$$

$$-\ 2rr'\sin(\varphi-\alpha)\sin(\varphi'-\alpha')\sin^2\frac{I}{2}\left[r^2+r'^2-2rr'\cos(\varphi-\varphi'+\right.$$

$$\left.+\ \alpha'-\alpha)\right]^{-\frac{3}{2}} + 6\, r^2r'^2\sin^2(\varphi-\alpha)\sin^2(\varphi'-\alpha')\sin^4\frac{I}{2}\left[r^2+r'^2-\right.$$

$$\left.-\ 2rr'\cos(\varphi-\varphi'+\alpha'-\alpha)\right]^{-\frac{5}{2}} - + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\left.-\ \frac{r}{r'^2}\cos(\varphi-\varphi'+\alpha'-\alpha)+2\,\frac{r}{r'^2}\sin(\varphi-\alpha)\sin(\varphi'-\alpha')\sin^2\frac{I}{2}\right\}.$$

Овим обрасцем развијена је функција поремећаја у ред по растућим потенцијама од $\sin^2\frac{I}{2}$.

Радиусвектори r и r' мењају се, због скоро кружног облика планетских путања, између уских граница. Због тога можемо ставити:

$$(10) \qquad r = a(1+\varkappa); \qquad r' = a'(1+\varkappa'),$$

где a и a' означавају велике полуосе путања маса m и m', а где су $\varkappa$ и $\varkappa'$ променљиве, но према јединици веома мале величине.

Функција поремећаја R хомогена је функција од r и r'

$$(11) \qquad R = F(r, r'),$$

а степена -1, т. ј. те особине да ако у њој заменимо r и r' са kr и kr', онда је, као што то следује из обрасца (8),

$$(12) \qquad F(kr, kr') = \frac{1}{k}F(r\ r').$$

Заменимо ли, дакле, у (8) r и r' са изразима (10) или, што изалази на исто, са изразима

$$r = a(1+\varkappa')\frac{1+\varkappa}{1+\varkappa'} = a(1+\varkappa')\left(1+\frac{\varkappa-\varkappa'}{1+\varkappa'}\right); \qquad r = a'(1+\varkappa'),$$

онда можемо, према обрасцу (12), заједнички фактор $(1+\varkappa)$, извадити пред знак функције, подижући га на потенцију -1. На тај начин добивамо:

$$(13) \qquad R = \frac{1}{1+\varkappa'} F\left\{\left(a + a\,\frac{\varkappa-\varkappa'}{1+\varkappa'}\right), a'\right\}$$

Развијемо ли овај израз обзиром на a у Тејлоров ред, то добивамо:

$$(14) \qquad R = \frac{1}{1+\varkappa'}\left\{F(a, a') + \frac{\varkappa-\varkappa'}{1+\varkappa'}\cdot\frac{a}{1!}\frac{\partial F(a, a')}{\partial a} + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{\varkappa-\varkappa'}{1+\varkappa'}\right)^2 \frac{a^2}{2!}\frac{\partial^2 F(a, a')}{\partial a^2} + \ldots\right.$$

Коефицијенти $\left(\dfrac{\varkappa-\varkappa'}{1+\varkappa'}\right)^n$; $n = 1, 2, 3 \ldots$ овога реда могу се развити по потенцијама од $\varkappa$ и $\varkappa'$. Из (10) и (64), § 12, следује

$$\varkappa = -e\cos u, \qquad \varkappa' = -e'\cos u',$$

где e и e' означавају ексцентрицитете путања маса m и m', а u и u' њихове ексцентричне аномалије. Зато се ти коефицијенти могу развити по потенцијама од $e\cos u$ и $e'\cos u'$.

Изврше ли се сва та развијања, то ће функција R бити претстављена бесконачним збиром различитих тригометријских функција $\Phi_i\,(\varphi, \varphi', \alpha, \alpha', u, u')$ елемената $\varphi, \varphi', \alpha, \alpha', u, u'$, помножених коефицијентима $C_i(a, a', e, e', I)$ који су функције елемената $a, a', e, e', \sin^2\dfrac{I}{2}$. Зато ће R имати овај облик:

$$(15) \qquad R = \sum_i C_i\,(a, a', e, e', I)\,\Phi_i\,(\varphi, \varphi', \alpha, \alpha', u, u')\,.$$

Употребом једначина (62), (67) до (72) главе друге и образаца сферне тригонометрије који се односе на сферни троугао (2), могу се тригонометријски чланови од (15) развити у Фуријеове редове где ће се, у аргументима тригонометријских функција, појавити збирови многоструких од $e, e', \Pi, \Pi', \Omega, \Omega'$. Образац (8) сведочи да функција R не мења свој знак ако се промени знак аргумената тригонометријских функција, па ће се због тога у споменутим Фуријеовим редовима појавити само косинуси, а не синуси. Општи члан тога реда имаће, дакле, ако средње лонгитуде l и l' применом образаца (71), (72), § 13, заменимо са

$$(16) \qquad l = \varepsilon + nt \; ; \qquad l' = \varepsilon' + n't ,$$

овај аргуменат

$$(17) \quad D = j\,(nt + \varepsilon) + j'(n't + \varepsilon') + k\,\Pi + k'\Pi' + s\,\Omega + s'\Omega'$$

где су j, j', k, k', s, s' произвољни цели бројеви, позитивни, негативни или једнаки нули. Зато функција R има, ако се узме у обзир само једно тело m' које изазива поремећај, овај облик:

$$(18) \qquad R = f m' \sum C \cos D ,$$

при чему је, пошто се $\sin^2 \frac{I}{2}$ може изразити као функција од i, i',

$$(19) \qquad C = F\,(a\; a', e, e', i, i') .$$

Има ли сем масе m', која изазива поремећај, њих више m', m'', m''', онда се све те масе имају место m' редом узети у обзир. Коефициенти C опадају брзо са растућим апсолутним вредностима целих бројева j, j', k, k', s, s'.

§ 34. Интегрисање диференцијалних једначина поремећаја. Обрасцима (17) и (18) и (90), § 32, све је припремљено за израчунавање временских промена елиптичних елемената. Оне се добивају интегрисањем диференцијалних једначина (90), § 32. Та се интеграција може извршити само корак по корак, израчунавајући поремећаје првог, другог, трећег и т. д. реда. Поремећаји првог реда елиптичних елемената, које ћемо означити са $\delta_1 a_0$, $\delta_1 \Omega_0$, $\delta_1 e_0 \ldots$, добивају се на тај начин да се сви елиптични елементи који се налазе, било експлицитно, било посретством функције R, на десној страни једначина (90), сматрају константнима па зато назначе индексом нула. Тим ћемо индексом означити и њихову функцију R у којој је сада само t промењиво. На тај начин добивамо, место (90), шест одговарајућих једначина. Да растумачимо принцип и главне резултате тога рачуна, довољно је да напишемо две од тих једначина и то, као најпрегледније, прву и четврту. Оне имају облик:

$$(20) \quad \frac{d\delta_1 a_0}{dt} = \frac{2}{n_0 a_0} \frac{\partial R_0}{\partial \varepsilon_0}$$

$$(21) \quad \frac{d\delta_1 \Omega_0}{dt} = \frac{1}{n_0 a_0^2 \sqrt{1-e_0^2} \sin i_0} \cdot \frac{\partial R_0}{\partial i_0} .$$

При томе је, према (18) и (17), ако, једноставности ради, узмемо у обзир само масу m' која изазива поремећај,

$$(22) \quad R_0 = fm' \sum C_0 \cos D_0$$

$$(23) \quad C_0 = F(a_0, a'_0, e_0, e'_0, i_0, i'_0)$$

$$(24) \quad D_0 = j(n_0 t + \varepsilon_0) + j'(n_0 t + \varepsilon'_0) + k\Pi_0 + k'\Pi'_0 + s\Omega_0 + s'\Omega'_0 .$$

Интеграција горњих двеју једначина, а и оних које нисмо написали, своди се на квадратуре и то, у ствари, на једну једину $\int R_0 dt$, јер остале зависе од ове, пошто је:

$$\int \frac{\partial R_0}{\partial c_i} dt = \frac{\partial}{\partial c_i} \int R_0 dt .$$

Из (22) до (24) следује:

$$\frac{\partial R_0}{\partial \varepsilon_0} = - fm' \sum j \, C_0 \sin D_0$$

$$\frac{\partial R_0}{\partial i_0} = fm' \sum \frac{\partial C_0}{\partial i_0} \cos D_0 .$$

Стављајући ово у (20) и (21), добивамо интеграцијом:

$$(25) \quad \delta_1 a_0 = - \frac{2fm'}{n_0 a_0} \sum j \, C_0 \int \sin D_0 \, dt$$

$$(26) \quad \delta_1 \Omega_0 = \frac{fm'}{n_0 a_0^2 \sqrt{1-e_0^2} \sin i_0} \sum \frac{\partial C_0}{\partial i_0} \int \cos D_0 \, dt .$$

И остале четири једначине, које нисмо написали, воде на исте квадратуре.

Из (24) следује:

$$(27) \qquad \int \sin D_0 \, dt = - \frac{\cos D_0}{jn_0 + j'n'_0} \; ;$$

$$\int \cos D_0 \, dt = \frac{\sin D_0}{jn_0 + j'n'_0} \, .$$

Овде нисмо ставили на десној страни интеграционе контанте, јер ће се оне стопити са члановима нултога реда резултујућих интеграла, о којима ће одмах бити реч.

Стављајући (27) у (25) и (26), добивамо:

$$(28) \qquad \delta_1 a_0 = \frac{2fm'}{n_0 a_0} \sum \frac{jC_0 \cos D_0}{jn_0 + j'n'_0}$$

$$(29) \qquad \delta_1 \Omega_0 = \frac{fm'}{n_0 a_0^2 \sqrt{1 - e_0^2} \sin i_0} \sum \frac{\frac{\partial C_0}{\partial i_0} \sin D_0}{jn_0 + j'n'_0}$$

. . . .

У оним члановима функције поремећаја за које је

$$(30) \qquad j = j' = 0$$

е могу се применити обрасци (27), али је у таквим члановима, рема (24), D_0 константно, па је зато:

$$(31) \qquad \int \sin D_0 \, dt = t \sin D_0 \; ; \qquad \int \cos D_0 \, dt = t \cos D_0 \, .$$

У таквом случају следује из (25), (26), (30), (31), имајући виду (30),

$$(32) \qquad \delta_1 a_0 = 0$$

$$(33) \qquad \delta_1 \Omega_0 = \frac{fm't}{n_0 a_0^2 \sqrt{1 - e_0^2} \sin i_0} \sum \frac{\partial C_0}{\partial i_0} \cos D_0$$

. . . .

Израчунавање поремећаја другог реда своди се, у главном, а понављање предњег поступка, при чему се у обрасце (90), 32, стављају десно за елиптичне елементе њихове вредности претстављене горњим обрасцима. Ти ће поремећаји бити пропорционални квадратима m'^2 маса m' које изазивају поремећај. На сличан начин добивају се поремећаји вишега реда, па ће коначни обрасци за поремећаје било којег елиптичног елемента имати овај облик:

$$c = c_0 + \delta_1 c_0 + \delta_2 c_0 + \cdots \tag{34}$$

При томе је, обзиром на масу m' која изазива поремећај, c_0 нултога реда, па се израчунава из иницијалних услова; члан $\delta_1 c_0$ је првог, члан $\delta_2 c_0$ другог реда и т. д. Узимајући у обрасцу (2) § 28, масу m_0 главнога тела, т. ј. у нашем случају Сунца, за јединицу, биће масе m', m'', m''' свих планета редом веома мали бројеви. Због тога опадају чланови реда (34) толико брзо да ће само у изузетним случајевима бити потребно узети у обзир поремећаје трећег реда. Та конвергенција реда (34) била је услов за његово развијање.

§ 35. Класификација поремећаја. Поред класификације поремећаја у оне првог, другог, трећег и т. д. реда, као што је то учињено у прошлом параграфу, могу се ти поремећаји класификовати и на други начин. Функција поремећаја, претстављена обрасцима (22), (23), (24) периодична је функција времена. У тригонометријским члановима те функције, зависним од времена, појављује се време t у облику

$$(jn_0 + j'n'_0)\, t$$

у аргументима косинуса. Зато је сваки тај члан периодична функција времена са периодом T за коју важи једначина:

$$\frac{2\pi}{T} = jn_0 + j'n'_0 \,.$$

Одавде следује:

$$T = \frac{2\pi}{jn_0 + j'n'_0} \,. \tag{35}$$

Исту периоду имају тригонометријски чланови израза (28) и (29). Зато одговара сваком члану $C_0 \cos R_0$ функције поремећаја сличан члан у изразу за временске промене елиптичног елемента, а исте периоде. Такви се чланови зову *периодични чланови* или *периодичке неједнакости*, као што их обично у Астрономији називају. Периода тих неједнакости је, према обрасцу (35), у толико дужа, у колико је именитељ $(jn_0+j'n'_0)$ мањи. Како j и j' претстављају целе бројеве, позитивне и негативне, то би тај именитељ, сем случаја $j=j'=0$ о којем ћемо засебно говорити, могао постати једнак нули кад би било

$$jn_0+j'n'_0=0\,; \qquad \frac{n_0}{n'_0}=-\frac{j'}{j}\ ,$$

т. ј, када би средња кретања уочене планете која подлежи поремећају и оне која га изазива била строго комензурабилна. Тај идеални случај није остварен у кретању планета, али му се средња кретања Јупитра и Сатурна осетно приближују. За Јупитер односно Сатурн је, према таблици која ће бити саопштена у идућој глави,

$$n_0=299''13\,; \qquad n'_0=120''45$$

тако да је, мал те не,

$$2n_0=5n_0'.$$

Због тога чланови функције поремећаја за које је

$$j=2\,; \qquad j'=-5$$

изазивају поремећаје назване неједнакостима дугих периода. Како је, у наведеном примеру, довољно тачно, $5n'_0-2n_0=\dfrac{n_0}{74}$, то је периода те неједнакости 74 пута већа од времена обилажења Јупитра око Сунца, па има дужину од скоро 900 година.

Те неједнакости дугих периода значајне су због тога што се мали број $(jn_0+j'n'_0)$ појављује на десној страни образаца (28), (29) у именитељу, услед чега се ти поремећаји, поред свега тога што су C_0 и његови изводи мали, издвајају својом релативном величином.

Сем периодичних чланова, појавили су се у предњим обрасцима за поремећаје првог реда, а појављују се, природно, и у онима обрасцима који нису написани, чланови који садрже фактор t. На такав један члан наилазимо у обрасцу (33). Ти се чланови, као што смо видели, појављују када се стави $j=j'=0$. У поремећајима другог реда појавиће се, интегрисањем поремећаја првог реда, фактор t^2, у онима трећег реда фактор t^3 и т. д. Такви чланови зову се *секуларни поремећаји* или *секуларне неједнакости*.

Од великог је значаја да је, према (32), $\delta_1 a_0 = 0$, што значи да, догод узимамо у обзир само чланове са првим степенима маса, велике полуосе планетских путања не подлеже секуларним поремећајима. У том резултату, до којег су дошли, независно један од другог, Лаплас и Лагранж, садржан је Лапласов доказ стабилитета нашег планетског система, јер секуларна инваријабилност великих полуоса планетских путања осигурава планете од мућусобног судара. Касније су Поасон, Тисеран и Матије доказали да велике полуосе планетских путања не подлеже ни секуларним поремећајима другог реда.

§ 36. Осцилаторни карактер секуларних поремећаја; обрасци за њихово израчунавање. У обрасцима за поремећаје елиптичних елемената појавили су се, као што смо видели, секуларни чланови облика:

$$c_1 m' t + c_2 m'^2 t^2 + c_3 m'^3 t^3 + \ldots$$

где m' означава масу која изазива поремећај, а c сталне или периодичке коефициенте. Због тога што фактори m' m'^2 $m'^3 \ldots$ опадају веома нагло, могуће је те поремећаје израчунати помоћу горњих образаца довољном тачности за дуг низ година. Тим су задовољене, у пуној мери, потребе практичне астрономије, али не потребе геофизике у којој је Небеска Механика нашла, у последње доба, широку и плодну примену у испитивању климатских промена Земљине прошлости. Јер ако у предњи образац ставимо за време t велику нумеричку вредност, како је захтева Историја Земље, онда би чланови тога обрасца прекорачили оне границе до којих ти обрасци важе. Но ти чланови добили су свој облик само услед начина њиховог израчунавања, слично као што се развијањем тригонометријских функција у ред добива н. пр. за $f(t) = \sin kt$

$$f(t) = kt - \frac{1}{6}k^3t^3 + \cdots,$$

дакле ред из којега се, без познавања његовог постанка не би могао очитати његов осцилаторни карактер.

Да секуларне поремећаје претставимо у експлицитно осцилаторном облику, т. ј. помоћу тригонометријских функција времена, потребно је вратити се диференцијалним једначинама (90), § 32.

Уведимо, место e и Π, два друга елемента h и l, дефинисана овим двема једначинама:

$$h = e\sin\Pi\,; \quad l = e\cos\Pi, \tag{36}$$

где l не значи, као до сада, средњу лонгитуду, онда је:

$$\left\{\begin{aligned} \frac{dh}{dt} &= \sin\Pi\frac{de}{dt} + e\cos\Pi\frac{d\Pi}{dt} \\ \frac{dl}{dt} &= \cos\Pi\frac{de}{dt} - e\sin\Pi\frac{d\Pi}{dt}\,. \end{aligned}\right. \tag{37}$$

Из предње трансформације промењивих следује:

$$\frac{\partial R}{\partial e} = \frac{\partial R}{\partial h}\cdot\frac{\partial h}{\partial e} + \frac{\partial R}{\partial l}\cdot\frac{\partial l}{\partial e}$$

$$\frac{\partial R}{\partial \Pi} = \frac{\partial R}{\partial h}\cdot\frac{\partial h}{\partial \Pi} + \frac{\partial R}{\partial l}\cdot\frac{\partial l}{\partial \Pi},$$

т. ј. због (36)

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial e} &= \sin\Pi\frac{\partial R}{\partial h} + \cos\Pi\frac{\partial R}{\partial l} \\ \frac{\partial R}{\partial \Pi} &= e\cos\Pi\frac{\partial R}{\partial h} - e\sin\Pi\frac{\partial R}{\partial l}\,. \end{aligned}\right. \tag{38}$$

Ставимо у једначине (37) обрасце за $\frac{de}{dt}$ и $\frac{d\Pi}{dt}$ из (90), § 32, то добивамо, место прве од тих двеју једначина,

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e}\sin\Pi\,\frac{\partial R}{\partial \Pi} - \sqrt{1-e^2}\,\frac{1-\sqrt{1-e^2}}{na^2 e}\sin\Pi\,\frac{\partial R}{\partial \varepsilon} +$$

$$+\frac{\tang\frac{i}{2}}{na^2\sqrt{1-e^2}}\,e\cos\Pi\,\frac{\partial R}{\partial i} + \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e}\,e\cos\Pi\,\frac{\partial R}{\partial e},$$

т. ј. узимајући у обзир (36),

$$\frac{dh}{\partial t} = \frac{l\tang\frac{i}{2}}{na^2\sqrt{1-e^2}}\cdot\frac{\partial R}{\partial i} - \sqrt{1-e^2}\,\frac{1-\sqrt{1-e^2}}{na^2e^2}\,h\,\frac{\partial R}{\partial \varepsilon} +$$

$$+\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e}\left\{e\cos\Pi\,\frac{\partial R}{\partial \varepsilon} - \sin\Pi\,\frac{\partial R}{\partial \Pi}\right\}.$$

Из (36) следује:

$$h^2 + l^2 = e^2\,; \qquad \sqrt{1-e^2} = \sqrt{1-h^2-l^2}$$

$$\sqrt{1-e^2}\,\frac{1-\sqrt{1-e^2}}{na^2e^2} = \frac{\sqrt{1-e^2}\,\{1-(1-e^2)\}}{na^2e^2\,\{1+\sqrt{1-e^2}\}} =$$

$$= \frac{\sqrt{1-h^2-l^2}}{1+\sqrt{1-h^2-l^2}}\cdot\frac{1}{na^2},$$

а из (38)

$$e\cos\Pi\,\frac{\partial R}{\partial e} - \sin\Pi\,\frac{\partial R}{\partial \Pi} = e\,\frac{\partial R}{\partial l},$$

па зато добивамо, употребљујући исти поступак и за другу од једначина (37), ове две једначине:

$$(39)\quad\left\{\begin{aligned}
\frac{dh}{dt} &= \frac{\sqrt{1-h^2-l^2}}{na^2}\cdot\frac{\partial R}{\partial l} - \frac{\sqrt{1-h^2-l^2}}{na^2}\cdot\\
&\quad\cdot\frac{h}{1+\sqrt{1-h^2-l^2}}\cdot\frac{\partial R}{\partial \varepsilon} + \frac{l\tang\frac{i}{2}}{na^2\sqrt{1-h^2-l^2}}\cdot\frac{\partial R}{\partial i}\\
\frac{dl}{dt} &= -\frac{\sqrt{1-h^2-l^2}}{na^2}\cdot\frac{\partial R}{\partial h} - \frac{\sqrt{1-h^2-l^2}}{na^2}\cdot\\
&\quad\cdot\frac{l}{1+\sqrt{1-h^2-l^2}}\cdot\frac{\partial R}{\partial \varepsilon} - \frac{h\tang\frac{i}{2}}{na^2\sqrt{1-h^2-l^2}}\cdot\frac{\partial R}{\partial i}
\end{aligned}\right.$$

Уведимо, место i и Ω, два друга елемената p и q, дефинисана овим двема једначинама:

$$(40) \qquad p = \operatorname{tang} i \sin \Omega ; \qquad q = \operatorname{tang} i \cos \Omega ,$$

онда је

$$(41) \quad \begin{cases} \dfrac{dp}{dt} = \operatorname{tang} i \cos \Omega \dfrac{d\Omega}{dt} + \dfrac{\sin\Omega}{\cos^2 i} \cdot \dfrac{di}{dt} \\ \dfrac{dq}{dt} = - \operatorname{tang} i \sin \Omega \dfrac{d\Omega}{dt} + \dfrac{\cos\Omega}{\cos^2 i} \cdot \dfrac{di}{dt} . \end{cases}$$

Из предње трансформације променљивих следује:

$$\frac{\partial R}{\partial \Omega} = \frac{\partial R}{\partial p} \cdot \frac{\partial p}{\partial \Omega} + \frac{\partial R}{\partial q} \cdot \frac{\partial q}{\partial \Omega}$$

$$\frac{\partial R}{\partial i} = \frac{\partial R}{\partial p} \cdot \frac{\partial p}{\partial i} + \frac{\partial R}{\partial q} \cdot \frac{\partial q}{\partial i} ,$$

т. ј. због (40)

$$(42) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial R}{\partial \Omega} = \operatorname{tang} i \cos \Omega \dfrac{\partial R}{\partial p} - \operatorname{tang} i \sin \Omega \dfrac{\partial R}{\partial q} \\ \dfrac{\partial R}{\partial i} = \dfrac{\sin\Omega}{\cos^2 i} \cdot \dfrac{\partial R}{\partial p} + \dfrac{\cos\Omega}{\cos^2 i} \cdot \dfrac{\partial R}{\partial q} . \end{cases}$$

Ставимо у једначине (41) обрасце за $\dfrac{d\Omega}{dt}$ и $\dfrac{di}{dt}$ из (90), § 32, то добивамо, место прве од тих двеју једначина,

$$\frac{dp}{dt} = \frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}} \frac{\cos\Omega}{\cos i} \cdot \frac{\partial R}{\partial i} - \frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}} \cdot \frac{\sin\Omega}{\sin i \cos^2 i} \cdot \frac{\partial R}{\partial \Omega} -$$

$$- \frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}} \frac{\operatorname{tang} \frac{i}{2} \sin\Omega}{\cos^2 i} \left(\frac{\partial R}{\partial \Pi} + \frac{\partial R}{\partial \varepsilon} \right) ,$$

т. ј. узимајући у обзир (40),

$$\frac{dp}{dt}=\frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}\cos^3 i}\left\{\cos\Omega\cos^2 i\,\frac{\partial R}{\partial i}-\frac{\sin\Omega}{\operatorname{tang} i}\frac{\partial R}{\partial\Omega}\right\}-$$

$$-\frac{p}{na^2\sqrt{1-e^2}}\,\frac{\operatorname{tang}\frac{i}{2}}{\sin i\cos i}\left(\frac{\partial R}{\partial\Pi}+\frac{\partial R}{\partial\varepsilon}\right.$$

Из (42 следује)

$$\cos\Omega\cos^2 i\,\frac{\partial R}{\partial i}=\sin\Omega\cos\Omega\,\frac{\partial R}{\partial p}+\cos^2\Omega\,\frac{\partial R}{\partial q}$$

$$\frac{\sin\Omega}{\operatorname{tang} i}\frac{\partial R}{\partial\Omega}=\sin\Omega\cos\Omega\,\frac{\partial R}{\partial p}-\sin^2\Omega\,\frac{\partial R}{\partial q},$$

т. ј.

$$\cos\Omega\cos^2 i\,\frac{\partial R}{\partial i}-\frac{\sin\Omega}{\operatorname{tang} i}\frac{\partial R}{\partial\Omega}=\frac{\partial R}{\partial q}.$$

Како је

$$\frac{\operatorname{tang}\frac{i}{2}}{\sin i\cos i}=\frac{\dfrac{\sin\frac{i}{2}}{\cos\frac{i}{2}}}{2\sin\frac{i}{2}\cos\frac{i}{2}\cos i}=\frac{1}{2\cos i\cos^2\frac{i}{2}}$$

то добивамо, употребљујући исти поступак и за другу од једначина (41), ове две једначине:

$$(43)\quad\left\{\begin{aligned}\frac{dp}{dt}&=\frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}\cos^3 i}\cdot\frac{\partial R}{\partial q}-\\&\qquad-\frac{p}{2na^2\sqrt{1-e^2}\cos i\cos^2\frac{i}{2}}\left(\frac{\partial R}{\partial\Pi}+\frac{\partial R}{\partial\varepsilon}\right)\\\frac{dq}{dt}&=-\frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}\cos^3 i}\cdot\frac{\partial R}{\partial p}-\\&\qquad-\frac{q}{2na^2\sqrt{1-e^2}\cos i\cos^2\frac{i}{2}}\left(\frac{\partial R}{\partial\Pi}+\frac{\partial R}{\partial\varepsilon}\right).\end{aligned}\right.$$

Приступимо сада, применом предњих једначина, израчунавању секуларних промена елемената e, Π, i, Ω. У таквом рачунувању, као што смо већ казали у § 35, ставити $j = j' = 0$ или, што изалази на исто, задржати од функције R само њен секуларни део који ћемо означити са R_0, а из којега су избачени сви чланови који зависе од ε. Због тога је

$$\frac{\partial R_0}{\partial \varepsilon} = 0 .$$

Због тога добивамо из прве од једначина (90), § 32, да је

$$da = 0,$$

т. ј. да велике полуосе планетских путања не подлеже секуларним променама, резултат до којега смо дошли већ у § 34.

Ексцентрицитети e путања великих планета су веома мали, а исто тако и међусобни нагиби равни планетских путања. Зато је, избором координатног система $X—Y—Z$, могуће постићи да нагиби планетских путања према равни $X—Y$ буду веома малени. Занемарујући све више потенције од друге ексцентрицитета e и нагиба i у секуларном делу R_0 функције поремећаја, редукују се једначине (39) и (43) на ове:

$$(44) \qquad \frac{dh}{dt} = \frac{1}{na^2} \cdot \frac{\partial R_0}{\partial e} \qquad \qquad \frac{dl}{dt} = -\frac{1}{na^2} \cdot \frac{\partial R}{\partial h}$$

$$(45) \qquad \frac{dp}{dt} = \frac{1}{na^2} \cdot \frac{\partial R_0}{\partial q} \qquad \qquad \frac{dq}{dt} = -\frac{1}{na^2} \cdot \frac{\partial R_0}{\partial p} .$$

До ових једначина долазимо, без познавања структуре функције R_0, приближним путем, ако у једначинама (39) и (43) ставимо, на десној њиховој страни, $e^2 = 0$; $i = 0$ т. ј. $\cos i = 1$; $\operatorname{tang} \frac{i}{2} = 0$; $p = q = 0$.

Развијајући, по поступку описаном у § 33, функцију поремећаја у ред, налази се да се изводи секуларног њеног дела по елементима h, l, p, q могу претставити на овај начин. Узимајући, још увек, у обзир само једну масу m која подлежи поремећају и једну масу m' која га изазива, а означавајући са a

и a' велике полуосе њихових путања, које, као што смо чули, не подлеже секуларним поремећајима, а стављајући:

$$
(46)\quad \begin{cases} \{a, a'\} = a'\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{a^2}{a'^2}+\left(\frac{1\,.\,1}{2\,.\,4}\right)^2\frac{a^4}{a'^4}+\right. \\ \qquad\qquad \left. +\left(\frac{1\,.\,1\,.\,3}{2\,.\,4\,.\,6}\right)^2\frac{a^6}{a'^6}+\cdots\right] \\ \{a, a'\}' = -a'\left[\frac{a}{a'}-\frac{1\,.\,1}{2\,.\,4}\cdot\frac{a^3}{a'^3}-\frac{1\,.\,1\,.\,1\,.\,3}{4\,.\,2\,.\,4\,.\,6}\cdot\frac{a^5}{a'^5}-\right. \\ \qquad\qquad \left. -\frac{1\,.\,3\,.\,5\,.\,.\,1\,.\,1\,.\,3\,.\,5\,.\,7}{4\,.\,6\,.\,8\,.\,.\,2\,.\,4\,.\,6\,.\,8\,.\,10}\frac{a^7}{a'^7}-\cdots\right] \end{cases}
$$

$$
(47)\quad \begin{cases} (a, a') = -\dfrac{3m'a^2a'n\{a,a'\}'}{4(a'^2-a^2)^2} \\ [a, a'] = -\dfrac{3m'a\,n\,[a\,a'\{a, a'\}+(a^2+a'^2)\{a, a'\}']}{2(a'^2-a^2)^2}, \end{cases}
$$

добивамо:

$$
(48)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{na^2}\dfrac{\partial R_0}{\partial l} = (a, a')l - [a, a']l' \\ -\dfrac{1}{na^2}\dfrac{\partial R_0}{\partial h} = -(a, a')h + [a, a']h' \end{cases}
$$

$$
(49)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{na^2}\cdot\dfrac{\partial R_0}{\partial q} = -(a,a')q + (a,a')\,q' \\ -\dfrac{1}{na^2}\cdot\dfrac{\partial R_0}{\partial p} = (a, a')p - (a, a')p' \end{cases}
$$

где се h', l', p', q' односе на планету која изазива поремећај. Стављајући ове обрасце у (44) и (45), добивамо ове диференцијалне једначине:

$$
(50)\quad \begin{cases} \dfrac{dh}{dt} = (a, a')l - [a, a']l' \\ \dfrac{dl}{dt} = -(a, a')h + [a, a']h' \end{cases}
$$

$$(51) \begin{cases} \dfrac{dp}{dt} = -(a, a')q + (a, a')q' \\ \dfrac{dq}{dt} = (a, a')p - (a, a')p' \,. \end{cases}$$

Ове једначине претстављају поремећаје што их маса m' изазива на кретању масе m. Поремећаји што их маса m изазива на кретању масе m' дати су овим једначинама:

$$50_a) \begin{cases} \dfrac{dh'}{dt} = (a', a)l' - [a', a]l \\ \dfrac{dl'}{dt} = -(a', a)h' + [a', a]h \end{cases}$$

$$(51_a) \begin{cases} \dfrac{dp'}{dt} = -(a', a)q' + (a', a)q \\ \dfrac{dq'}{dt} = (a', a)p' - (a', a)p \,. \end{cases}$$

Једначине (50) и (50_a) чине систем од четири диференцијалне једначине за одредбу елемената h, l, h', l' као функција времена t. Изрази

$$(52) \begin{cases} h = N \sin (gt + \beta) \\ l = N \cos (gt + \beta) \end{cases}$$

$$(52_a) \begin{cases} h' = N' \sin (gt + \beta) \\ l' = N' \cos (gt + \beta) \end{cases}$$

где су N, N' g, β константе, задовољавају горњи систем ако је, као што то добивамо стављајући (52) и (52_a) у (50) и (50_a),

$$(53) \begin{cases} \{(a, a') - g\} N - [a, a'] N' = 0 \\ -[a', a] N + \{(a', a) - g\} N' = 0 \,. \end{cases}$$

Ове две алгебарске једначине су линеарне и хомогене обзиром на N и N' па ће, сем тривиалног решења $N = N' = 0$, дати и друга ако је детерминанта коефициената од N и N' једнака нули, т. ј. ако је

$$(54) \qquad \begin{vmatrix} \{(a,a')-g\} & -[a,a'] \\ -[a',a] & \{(a',a)-g\} \end{vmatrix} = 0$$

или

$$\{g-(a,a')\}\{g-(a',a)\} - [a,a'][a',a] = 0$$

т. ј.

$$(55) \qquad g^2 - \{(a,a')+(a',a)\}\, g = [a,a'][a',a] - (a,a')(a',a)\,.$$

Ова квадратична једначина даје, што следује из особина заграда (46) и (47), два реална корена која ћемо означити са g_1 и g_2. Систем хомогених једначина (53) даје нам, као што је познато, само сразмере непознатих, које се односе као субдетерминанте чланова прве или друге врсте детерминанте (54). Зато је

$$(56) \qquad \frac{N'}{N} = \frac{(a,a')-g}{[a,a']} = \frac{[a',a]}{(a',a)-g}\,.$$

Како смо за g добили два разна корена, то ћемо и за ову сразмеру добити две нумеричке вредности:

$$(57) \qquad \frac{N'_1}{N_1} = k_1\,; \qquad \frac{N'_2}{N_1} = k_2\,.$$

Зато добивамо два разна решења облика (52) (52_a) која ће, сабрана, задовољити систем диференцијалних једначина (50) и (50_a) и, садржавајући четири, још неодређене константе, претстављати опште интеграле тога система. Ти су интеграли, дакле, ови:

$$(58) \qquad \begin{cases} h = N_1 \sin(g_1 t + \beta_1) + N_2 \sin(g_2 t + \beta_2) \\ l = N_1 \cos(g_1 t + \beta_1) + N_2 \cos(g_2 t + \beta_2) \\ h' = k_1 N_1 \sin(g_1 t + \beta_1) + k_2 N_2 \sin(g_2 t + \beta_2) \\ l' = k_1 N_1 \cos(g_1 t + \beta_1) + k_2 N_2 \cos(g_2 t + \beta_2). \end{cases}$$

Константе g_1, g_2, k_1, k_2 одређене су једначинама (55), (56), (57), а још неодређене константе N_1, N_2, β_1, β_2, иницијалним условима. Заиста, ако је за $t = 0$; $e = e_0$, $\Pi = \Pi_0$, $e' = e_0'$, $\Pi' = \Pi_0'$, онда су, тим подацима, а употребом једначина (36), эдређене и нумеричке вредности нових елемената h_0, l_0, h_0', l_0' за иницијални моменат. Зато добивамо, стављајући $t = 0$ у (58), эве четири условне једначине:

$$
(59)\quad \begin{cases} h_0 = N_1 \sin\beta_1 + N_2 \sin\beta_2 \\ l_0 = N_1 \cos\beta_1 + N_2 \cos\beta_2 \\ h'_0 = k_1 N_1 \sin\beta_1 + k_2 N_2 \sin\beta_2 \\ l'_0 = k_1 N_1 \cos\beta_1 + k_2 N_2 \cos\beta_2 \end{cases}
$$

ојима су константе N_1, N_2, β_1, β_2 једнозначно одређене.

На исти начин ваља поступити и при решавању система иференцијалних једначина (51) и (51_a).

Ако имамо n планета $m_1, m_2, \ldots m_n$ које међусобно поремећавају своја кретања, онда добивају диференцијалне једначине 50) и (51) овај облик;

$$
(60)\quad \begin{cases} \dfrac{dh_k}{dt} = l_k \sum\limits_i (a_k, a_i) - \sum\limits_i [a_k, a_i]\, l_i \\ \dfrac{dl_k}{dt} = - h_k \sum\limits_i (a_k, a_i) + \sum\limits_i [a_k, a_i]\, h \\ \dfrac{dp_k}{dt} = - q_k \sum\limits_i (a_k, a_i) + \sum\limits_i (a_k, a_i)\, q_i \\ \dfrac{dq_k}{dt} = p_k \sum\limits_i (a_k, a_i) - \sum\limits_i (a_k, a_i)\, p_i \,. \end{cases} \qquad \begin{matrix} k = 1, 2, \ldots, n \\ i \neq k \end{matrix}
$$

Оваквих једначина имамо $4n$, при томе мора у заградама сне стране, као што је назначено, i бити различито од k. ι исти начин као и у случају двеју планета, добивамо, за овај шти случај, ове опште интеграле горњих диференцијалних (начина:

$$
(61)\quad \begin{cases} h_k = \sum\limits_{i=1}^{i=n} N_{k,i} \sin(g_i t + \beta_i) \\ l_k = \sum\limits_{i=1}^{i=n} N_{k,i} \cos(g_i t + \beta_i) \\ p_k = \sum\limits_{i=1}^{i=n} N'_{k,i} \sin(g_i' t + \beta_i') \\ q_k = \sum\limits_{i=1}^{i=n} N'_{k,i} \cos(g_i' t + \beta_i') \end{cases} \qquad k = 1, 2, \ldots n.
$$

Ставимо ли, због једноставнијег писања,

$$
(62)\quad \begin{cases} \sum\limits_{j} (a_k, a_i) = A_{k,k} \\ -[a_k, a_i] = A_{k,i} \qquad i \neq k, \end{cases}
$$

онда добивамо за одређивање констаната $g_1, g_2, \ldots, g_n$, место (54), ову једначину:

$$
(63)\quad \begin{vmatrix} (A_{1,1} - g) & A_{1,2} & A_{1,3} \ldots\ldots A_{1,n} \\ A_{2,1} & (A_{2,2} - g) & A_{2,3} \ldots\ldots A_{2,n} \\ A_{3,1} & A_{3,2} & (A_{3,3} - g) \ldots A_{3,n} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ A_{n,1} & A_{n,2} & A_{n,3} \ldots (A_{n,n} - g) \end{vmatrix} = 0.
$$

Ова једначина зове се секуларна детерминанта. Она је n-тог степена, због чега њених n коренова претстављају константе $g_1, g_2 \ldots g_n$. Сразмере њених субдетерминаната $\alpha_{m,i}$ било које њене врсте m дају сразмере констаната $N_{k,i}$:

$$
N_{k,1} : N_{k,2} : N_{k,3} : \ldots = \alpha_{m,1} : \alpha_{m,2} : \alpha_{m,3}.
$$

Остале константе одређене су иницијалним условима.

Истим начином одређују се и константе система за p_k и q_k. Из предњих образаца следују још ови важни резултати. Једначине (36), примењене на коју год планету m_k, дају:

$$
e_k^2 = h_k^2 + l_k^2 .
$$

Ставимо ли у ову једначину за h_k и l_k обрасце (61), то добивамо:

$$
(64)\quad e_k^2 = \sum_{i=1}^{i=n} N_{k,i}^2 + 2 \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{j=1}^{j=n} N_{k,i} \,.\, N_{k,j} \cos\left[(g_i - g_j)t + \beta_i - \beta_j\right],
$$

где у двоструком збиру треба да буде j увек различито од i, а да се свака комбинација тих двају индекса узме само једанпут, пошто смо пред збир ставили број 2.

Двоструки збир у предњој једначини достигао би своју могућу, апсолутно узету, максималну вредност кад би сви његови косинуси постали једнаки јединици, а имали такав знак да коефициенти $N_{k,i}$ помножени тим позитивним односно негативним јединицама, буду сви позитивни или сви негативни. Означимо ли са $|N_{k,i}|$, апсолутно узете, нумеричке вредности коефициената $N_{k,i}$, то је дакле,

$$lim.\ sup.\ e_k^2 = \sum_{i=1}^{i=n} N_{k,i}^2 + 2\sum_{i=1}^{i=1}\sum_{i=1}^{i=1} |N_{k,i}|\cdot|N_{k,j}|.$$

Десна страна ове једначине претставља нам потнуни квадрат збира апсолутних вредности коефицијената $N_{k,i}$ па је зато:

$$lim\ sup.\ e_k^2 = \left\{\sum_{i=1}^{i=n} |N_{k,i}|\right\}^2,$$

т. ј.

$$(65)\quad lim.\ sup.\ e_k = \sum_{i=1}^{i=n} |N_{k,i}| = |N_{k,1}| + |N_{k,2}| + \cdots + |N_{k,n}|.$$

Стављајући у овај образац нумеричке вредности коефицијената $N_{k,i}$, добивамо онај број који нумеричка вредност ексцентрицитета планетске путање не може никад да прекорачи.

Из једначина (36) и (61) следује:

$$(66)\quad \begin{cases} e_k \sin \Pi_k = \sum_{i=1}^{i=n} N_{k,i} \sin (g_i t + \beta_i) \\ e_k \cos \Pi_k = \sum_{i=1}^{i=n} N_{k,i} \cos (g_i t + \beta_i). \end{cases}$$

Нека је j један од n индекса i предњих образаца, онда је

$$\cos(\Pi_k - g_j t + \beta_j) = \cos \Pi_k \cos (g_j t + \beta_j) + \sin \Pi_k \sin (g_j t + \beta_j)\,.$$

Помножимо овај образац са e_k па ставимо, на десној страни његовој, за $e_k \sin \Pi_k$, $e_k \cos \Pi_k$ обрасце (66). Груписањем чланова десне стране тога обрасца, добивамо, у члановима где је i различито од j,

$$N_{k,i} \cos (g_i t + \beta_i) \cos (g_j t + \beta_j) + N_{k,i} \sin (g_i t + \beta_i) \sin (g_j t + \beta_j) = \\ = N_{k,i} \cos [\,(g_i - g_j)t + \beta_i - \beta_j\,],$$

а где је i једнако j:

$$N_{k,i} \cos^2 (g_j t + \beta_j) + N_{k,i} \sin^2 (g_j t + \beta_j) = N_{k,}\ .$$

Зато је

$$(67) \quad e_k \cos(\Pi_k - g_j t - \beta_j) =$$
$$= N_{k,j} + \sum_i N_{k,i} \cos[(g_i - g_j)t + \beta_i - \beta_j],$$

где у знаку збира ове једначине треба за i ставити све целе бројеве од 1 до n са изузетком броја j. Тај збир не може, својом апсолутном вредности, прекорачити збир апсолутних вредности коефицијената $N_{k,i}$ који су у њему садржани. Ако се десило да апсолутна вредност коефицијента $N_{k,j}$ надмашава збир апсолутних вредности свих осталих коефициената, онда десна страна једначине (67) не може постати једнака нули, па ма како било t. То значи да угао

$$\varphi = \Pi_k - g_j t - \beta_j$$

не може достићи вредност правог угла, него ће остати стешњен у извесним границама $-90^0 < -\varphi_0 < \varphi < +\varphi_0 < +90^0$, осцилујући између њих. Зато је

$$|\varphi| < \varphi_0 .$$

Угао Π_k, лонгитуду перихела, треба мерити онако како је то у § 13 показано, а исто тако и угао φ. Да бисмо јасније растумачили смисао добивеног резултата, узмимо да се раван планетске путање поклапа са равни $X-Y$ нашег координатног система. Тада нам Π_k претставља угао што га права повучена из почетка O координатног система према перихелу, дакле права велике осе планетске путање, затвара са осом X. Замислимо сада у равни $X-Y$, дакле у равни планетске путање, једну праву која пролази кроз тачку O, која је у иницијалном моменту $t=0$ затварала са осом X угао β_j, а која се креће, пролазећи стално кроз тачку O, у равни $X-Y$ константном угловном брзином g_j. Јасно је да ће угао α_k што та права буде у моменту t затварала са осом X бити претстављен овим обрасцем

$$\alpha_k = \beta_j + g_j t .$$

Из претходних једначина следује:

$$|\Pi_k - \alpha_k| < \varphi_0 .$$

Велика оса планетске путање, наперена према перихелу, не удаљује се, дакле, од поменуте праве никад више од угла φ_0. Како се та права без престанка обрће униформно у равни $X—Y$ око тачке O, то она гура или повлачи са собом велику осу планете m_k па њена угловна брзина g_i претставља, аналогно средњем кретању планете, растумаченом у § 12, средње кретање перихела. О таквом средњем кретању перихела може, као што то следује из претходних једначина, бити говора само онда ако апсолутна вредност једног од коефициената $N_{k,i}$ надмашава збир апсолутних вредности свих осталих таквих коефицијената.

На исти начин као што смо обрасцем (65) претставили крајњу границу ексцентрицитета планетске путање, можемо употребом једначина (40) и (61) извести сличан образац за крајњу границу нагиба i планетске равни.

Израчунавање нумеричких вредности величина N, g, β које ваља, решавајући секуларну детерминатску једначину (63), ставити у интеграле (61) да би се претставили међусобни секуларни поремећаји великих планета, огроман је посао. Зато није ни чудо да је тај рачун извршен, у својој потпуности, за минулих 150 година, свега три пута, од Лагранжа, Леверијеа и Стоквела. Лагранж је у својим рачунима узео у обзир само шест старих планета: Меркур, Венеру, Земљу, Марс, Јупитер и Сатурн; планета Уранус пронађена је баш за време Лагранжовог рада на том проблему. Леверије је извршио своје рачуне пре но што је пронашао Нептун, па зато је у њима узео у обзир само седам великих планета, тако да тек Стоквелови рачуни узимају у обзир свих осам тадањих великих планета.

Та нумеричка израчунавања показала су да ексцентрицитети планетских путања и нагиби њихових равни осцилују између уских граница, чиме је стабилитет нашег планетског система осигуран за огроман низ векова. Добивени нумерички резултати играју важну улогу у Астрономској Теорији климатских промена Земљине прошлости, наведеној на страни 40, у прегледу литературе.

ГЛАВА ДЕВЕТА

Планетски систем.

§ 37. Историјски податци. Када је Коперников хелиоцентрични систем био дефинитивно усвојен, морала се и наша Земља убројати у породицу планета која, по речима великога реформатора, окружава Сунце на његовом престолу. Цела та група небеских тела, заједно са Сунцем и Земљиним Месецом, добила је име »Сунчани систем«. Овај назив не одговара више потпуно нашим данашњим схватањима, јер се тај систем небеских тела не одликује од осталих присуством Сунца, јер таквих сунаца има у васиони безброј, него баш Сунчевим тамним пратиоцима који га обилазе, придржавани везом гравитације. Зато се, у новије доба, место горњега назива, одомаћило име »Планетски систем«. Нема сумње да и остала Сунца васионе, звезде некретнице, имају својих тамних пратиоца, али су нам они невидљиви па би нам само у изузетним случајевима, при пролазу испред свога сунца или поремећајем његовог кретања, могли да одаду своје присуство.

Још за време борби за васпостављање хелиоцентричке науке, увећан је, као што смо већ саопштили, наш планетски систем новим члановима, сателитима I, II, III, IV Јупитра, пронађеним 1610 од *Галилеја*, а у исто доба и од *Мариуса*. Исте године приметио је Галилеи на Сатурну нешто слично рукаткама, али је тек године 1656 успео *Хајгенс* да реши загонетку Сатурновог прстена. Њему је 1655 пошло за руком да пронађе највећег пратиоца Сатурновог, *Тишана*, а убрзо иза тога, пронашао је *Д. Касини* четири нова месеца Сатурнова, *Јапеша*

(1671), *Реу* (1672), *Тешиду* (1684), и *Дионv* (1684). После проналаска тих пет планетских трабаната протекло је више од века до проналаска нових.

Тринаестог априла 1781 пронашао је *В. Хершел* у јату близанаца небеско једно тело које је мењало свој положај, једну нову велику планету, која је добила име *Уранус*. Хершел је нашао и два сателита нове планете, *Оберона* и *Титанију* (1787), а иза тога (1789) и два пратиоца Сатурнова, *Мима* и *Енцелада*.

Када је извршено прво израчунавање путање ново пронађене планете Урануса, показало се да је он већ пре бивао виђан од разних посматрача који нису упознали његову планетску природу. *Флемстед* га је видео већ 1690, а иза тога још пет пута, *Лемоније* (1768, 1769), шта више, осам пута. Те старе позиције Урануса, употребљене за тачнију одредбу његове путање, убедиле су 1821 *Бувара* да се кретања Уранова не подударају са теоријом. Године 1845 предузео је *Леверије*, потстрекнут од Арагоа, да, обрнутим рачуном поремећаја, испита да ли која даља, непозната, планета не поремећава кретање Урануса, а у таквом случају, која би била путања и тадања позиција те непознате планете. Као резултат тога рачуна, добио је берлински астроном *Гале*, 23 септембра 1846, писмен извештај од Леверијеа у којем му овај саопштава рачуном добивену тадању позицију непознате планете, молећи га да ту планету потражи на небу. Већ на вече истога дана била је нова планета, која је добила име *Нептун*, пронађена на небу, на скоро истом оном месту које је било означено у писму Леверијеовом. Та планета пронађена је, дакле, оруђем Небеске Механике. Годину дана иза тога, пронашао је *Ласел* Нептуновог сателита.

Не треба прећутати да је *Адамс*, онда још студенат у Кембрицу, извршио слично израчунавање, са скоро истим резултатом, као и Леверије и саопштио га, већ октобра 1845, астроному *Ериу* који је пропустио да се њиме послужи. Израчунавање путање нове планете показало је, пратећи је том путањом у натраг, да је она већ 1795 била виђена од *Лаланда*, али сматрана за звезду некретницу; та Лаландова позиција била је од велике користи за тачно одређивање путање те планете која се споро креће по звезданом небу.

Године 1848 пронађен је Сатурнов сателит *Хиперион* од *Бонда* и његова сина, а независно од њих, и од *Ласела* који је

1851 пронашао и два месеца Уранова, *Ариела* и *Умбриела*. Године 1877 пронашао је *Хал* оба Марсова месеца, *Фобоса* и *Дејмоса*, 1892 нашао је *Барнар* Јупитров месец V, а ускоро иза тога, *Пикеринг* два Сатурнова сателита, *Фебу* (1898) и *Темис* (1905); исте године пронашао је *Перин* Јупитрове месеце VI и VII. Два даља Јупитрова месеца VIII и IX, пронађена су од *Мелота* (1908) односно од *Николзона* (1914).

Трећи Кеплеров закон дозвољава нам, као што смо видели; да из времена обилажења великих планета израчунамо њихова релативна отстојања од Сунца доста тачно. Из тога закона следују, ако отстојање Сунце-Земља одаберемо за јединицу, ова, на прву децималу заокружена, отстојања првих седам планета: 0,4; 0,7; 1,0; 1,5; 5,2; 9,5. Већ је Кеплеру упала у очи велика празнина између четврте и пете планете, т. ј. између Марса и Јупитра. Мишљење да се овде ради, заиста, о једној непопуњеној празнини, добило је свога ослонца када је 1766 витенбершки професор *Тициус* пронашао чудну једну законитост у отстојањима планета од Сунца. Напише ли се следећа геометријска прогресија са почетним чланом нула, који јој, у ствари, не припада, 0; 0,3; 0,6; 1,2; 2,4; 4,8; 9,6 па дода ли се сваком њеном члану број 0,4, то се долази до овога низа бројева: 0,4; 0,7; 1,0. 1,6; 2,8; 5,2; 10,0. Овај ред нам претставља, заиста неочекивано добро, отстојања пленета од Сунца, попуњавајући споменуту празнину бројем 2,8.

Када је, 1 јануара 1800, пронашао *Пиаци* једног новог члана нашег планетског система, малу планету *Церес*, па се показало да је радиус њене путање, мерен споменутом јединицом, једнак 2,8, мислило се да је тиме попуњена празнина о којој је малочас била реч. Брзо иза тога, пронађене су још три мале планете, *Палас* (1802) од *Олберса*, *Јуно* (1804, *Хардинг*) и *Веста* (1807, *Олберс*), а радиуси њихових путања мало се разликовали од радиуса путање Цереса, па се мислило да су све те четири планете остатци једне једине. Тек године 1847, увећена је та породица малих планета са три нова члана, а сада их имамо преко дванаест стотина на броју. Велике полуосе ових малих планета, или, како их још зову, планетоида и астероида, веома су различите (*Ерос* 1,458, *Хектор* 5,278), а како многе од њих имају велике ексцентрицитете, а и велике нагибе путања, то су оне не само испуниле него и далеко прекорачиле простор између Марса и Јупитра. Недавно, 24 априла 1932, пронађени и за време од 21 дана посматрани, па затим из вида изгубљени, планетоид 1932 Н А има толики ексцентрицитет путање да се у свом перихелу приближава Сунцу више но сама Венера.

Проналазак малих планета помагао је, својим потребама, веома развитак теорије одређивања путања небеских тела. Такво одређивање може се, као што је то већ Њутн показао, извршити ако постоје три међусобно временски довољно удаљена одређивана позиције уоченог небеског тела. Већ проналазак прве од малих планета, која се убрзо иза тога изгубила из вида, створио је потребу стварања и испитивања нових метода за одређивање путања па је, тим поводом, *Гаус* објавио (1809) своју теорију одређивања путања небеских тела. Прва одређивања путања, после оних која је Кеплер извео и о којима смо опширно говорили, извршена су од *Халеја* и то за комете. Она су показала да репатица која је при опсади Београда 1456 изазвала страх и трепет и репатице посматране у годинама 1531, 1607 и 1682 нису ништа друго до периодичне појаве једна те исте комете чију је путању Халеј одредио и која је добила његово име. Поновне појаве те комете у годинама 1759, 1835 и 1910 пружиле су прилику Небеској Механици да, израчунавањем тих повратака, опроба и докаже савршенство својих средстава. Помоћу те науке су рачуном идентификоване и старије појаве те комете које се, по кинеским забелешкама, могу пратити до у једанаести век пре Христа. Тако је Халејева комета постала типичним претставником ове класе небеских тела која се могу сматрати за пуноважне чланове нашег планетског система.

Још су стари Александријци, као што смо већ саопштили, предузели да геометријским методом премере међусобна отстојања небеских тела. Друга половина пете књиге Птолемајовог Зборника посвећена је тим питањима. Ту су саопштена ова расуђивања. Ако се посматрано небеско тело налази у таквој близини према Земљи да његово отстојање није бесконачно велико према димензијама Земље, као што је то, на пример, случај са Месецом, онда ће то имати за последицу да права повучена из центра Земље према том небеском телу неће бити паралелна визурној прави упереној према том истом телу из ока посматрачевог који се налази на једном месту Земљине површине. Те две праве затвараће између себе један угао за који се посматрано небеско тело различито пројицира на небеску сферу из обе споменуте тачке. Тај угао, *паралакси*, достизава, као што је лако увидети, своју максималну вредност онда када се посматрано небеско тело налази у равни хоризонта посматрачевог; онда је паралакса π_0 дата једначином $\sin \pi_0 = \frac{r}{d}$, где r означава радиус Земљине лопте, а d отстојање небеског тела од центра Земље. Угао π_0 је увек толико мален да његов синус можемо заменити са самим тим углом, мереним у лучној мери, па је зато $\pi_0 = \frac{r}{d}$. То је, у ствари, онај угао под којим би се указао радиус Земљине лопте, посматране са уоченог небеског тела. Познајемо ли тај угао, онда смо отстојање *d* премерили радиусом Земљине лопте.

Акександријци су покушали на разне начине да одреде паралаксе Месеца и Сунца. О *Аристарховом* раду на том питању већ смо говорили. Изгледа да је он, пошто је, спочетка рђаво премерени, привидни пречник Сунца исправио доцније на 30′, добио за паралаксу Месеца нумеричку вредност од 61′. *Хипархос* је написао о мерењима паралакса веће дело које је обухватило неколико књига, али се оно није сачувало. Из Алмагеста и из Папосове „Математске Збирке« знамо да је Хипархов метод у суштини једнак Аристарховом па се од овог разликује само оштријим резултатима посматрања. На тај начин нашао је Хипархос за Месечеву паралаксу вредност од 57′. *Птолемајос* је покушао да Месечеву паралаксу одреди упоређујући посматрања Месеца, вршена у Александрији, са резултатом теорије која је давала позиције Месеца обзиром на центар Земље. Нумеричка вредност паралаксе коју је Птолемајос на тај начин добио не разликује се, у ствари, од Хипархове. Кад је, на тај начин, паралакса Месеца била добивена, могла се, помоћу Аристарховог метода са конусом Земљине сенке, одредити и паралакса Сунца, јер тада је, из времена пролаза Месеца кроз ту сенку, тај конус био одређен па је ваљало ставити у тај конус Сунце на таквим отстојању да оно, посматрано са Земље, покаже такав привидни пречник какав је добивен директним посматрањем. На тај начин нашао је Птолемајос да се Сунце налази у отстојању од 1210 Земљиних радија, т. ј. да Сунчева паралакса има нумеричку вредност од 2′ 50″. Узме ли се у обзир да је стварна паралакса Месечева 57′ 2″, а Сунчева 8″,80, онда се може казати да су Александријци при мерењу отстојања Месеца дошли истини веома наблизо, али да су у мерењу отстојања Сунца силно погрешили, што није ни чудо. Паралакса Сунца је, као што то следује из претходног саопштења, толико сићушна да није могла бити измереним тадашњим средствима астрономских посматрања.

Александријски податци о паралаксама Месеца и Сунца примењивани су до дубоко у седамнаести век. Године 1650 измерио је *Венделин* на Мајорци по Аристарховом методу, али служећи се догледом, отстојање Месеца од Сунца у моменту једне од четврти и нашао га једнаким 89° 45′. Одавде следује Сунчева паралакса од 14″ која се већ прилично приближава стварности. Тачније мерење Сунчеве паралаксе извршио је 1672 *Рише* који је због тога посла отпутовао у Кајен у Јужној Америци да оданде посматра Марс. Из резултата таквих истовремених посматрања у Кајени и у Паризу, израчуната је Марсова паралакса, а из ове, помоћу трећег Кеплеровог закона, Сунчева са нумеричком вредности од 9″,5.

Године 1750 извршили су *Лакај* и *Лаланд* мерење Месечеве паралаксе на тај начин да је Лакај на Рту Добре Наде, а Лаланд у Берлину вршио посматрања Месеца. Добивени резултат био је 57′ 4″,7.

Када је *Халеј* године 1677 на Светој Јелени проучавао јужно небо и посматрао пролаз Меркура испред Сунца, дошао је на идеју да би се такви пролази доњих планета, а нарочито Венерин, могли искористити за одређивање Сунчеве паралаксе. Он је показао да се, ако два посматрача, довољно удаљена један од другог на Земљиној површини, тачно одреде тренутке улаза планете на Сунчеву плочу и излаза са ње, из тих података могу израчунати дужине и отстојања тетива пројицираних са она два гледишта, путањом планете на Сунчеву плочу, а тим одредити и Сунчева паралакса. Благодарећи том Халејевом предлогу, посматрана су оба идућа пролаза Венере испред Сунца, она у годинама 1761 и 1769, од многих, скоро по целој Земљиној површини распоређаних астронома, али је требало још скоро пола века док су резултати тих посматрања редуковани и од *Енкеа* искоришћени за израчунавање Сунчеве паралаксе за коју је добио вредност од 8″,57. Идућа два пролаза Венере испред Сунца, она у годинама 1874 и 1882, дала су, при још већем броју посматрача, Сунчеву паралаксу од 8″,80 која се, потврђена и другим методама, данас сматра за најпоузданију. Из тога броја следује средње отстојање Земље од Сунца од 149.500.000 километара. Сва остала отстојања у планетском систему могу се изразити том »астрономском јединицом« и тиме одредити главне мере тога система.

Тринаестог марта 1930 саопштила је Ловелова Опсерваторија у Флагстафу (Аризона) телеграфски научном свету да је 21 јануара 1930 у јату близанаца пронађена и од тога доба свакодневно праћена нова једна велика планета петнаестог степена привидне величине; у истом брзојаву саопштена је и позиција те планете. Од тога доба, пошто је прво одређивање путање те планете извршено, пошло је за руком пронаћи и старије положаје њене на разним фотографским плочама неба, а као најстарији, такав један снимак из године 1914. Користећи се тим податцима, одређени су елементи путање нове планете која је добила име *Плуто*. Ти елементи су ови:

$$
\begin{aligned}
\Omega &= 109^0\,21'\,39''\\
i &= 17^0\,6'\,58''\\
\Pi &= 222^0\,23'\,21''\\
a &= 39{,}60038\\
e &= 0{,}24609\\
\tau &= 1989 \text{ октобар } 2.\\
n &= 14''\,238\\
T &= 249{,}21 \text{ година.}
\end{aligned}
$$

Великим ексцентрицитетом и нагибом равни своје путање, ова се планета издваја од свих досадањих великих планета па се, у перихелу, приближује Сунцу више но Нептун. Маса Плутонова, само приближно одређена, превазилази масу Земље највише за половину.

§ 38. Састав планетског система. Наш планетски систем обухвата ове чланове:

1. Сунце, као централно тело.
2. Девет великих планета: Меркур, Венера, Земља, Марс, Јупитер, Сатурн, Уранус, Нептун, Плуто.
3. Велики број (преко 1200) малих планета, названих и планетоидима или астероидима, које су испуниле и прекорачиле простор између Марса и Јупитра.

4. Двадесет и седам планетских трабаната или сателита од којих један обилази Земљу, два Марс, девет Јупитер, десет Сатурн, четири Уранус, а један Нептун.

5. Знатан број периодичких комета од којих су 28 биле посматране бар у два обиласка око Сунца и безброј метеора и болида; многи од ових метеора крећу се уројевима.

У приложеним таблицама саопштени су елементи путања великих осам планета, податци о њиховим величинама, масама и ротацијама те податци о сателитима планета.

Из података саопштених у приложеним таблицама следује, пре свега, ово. Све планете имају исти смисао обилажења око Сунца. Посматрамо ли то њихово кретање са северне стране еклиптике, то оно следује од десна на лево, у обрнутом смислу сказаљке на сату. И ротација Сунца и свих планета, у колико нам је она позната, следује у истом смислу. Већ све ове правилности показују уску припадност чланова планетског система. Исти смисао обилажења показују и све мале планете, но не сви сателити. Из приложене таблице сателита видимо да су путање Јупитрових сателита VIII и IX, Сатурновог сателита Фебе, свију четири Уранових сателита и сателита Нептуновог нагнуте према еклиптици за више од деведесет степени па је зато њихово кретање ретроградно.

ЕЛЕМЕНТИ ПУТАЊА ВЕЛИКИХ ПЛАНЕТА
(1 јануар 1900, 0^h светског времена)

Планете	Средње дневно кретање у секундама	Сидерично време обилажења у данима	Средње отстојање од Сунца		Ексцентрицитет
			астр. јединице	мил. km.	
Меркур	14.732,42	87,969	0,38710	58	0,20561
Венера	5.767,67	224,701	0,72333	108	0,00682
Земља	3.548,19	365,256	1,00000	149	0,01675
Марс	1.886,52	686,980	1,52368	228	0,09331
Јупитер	299,13	4.332,589	5,20256	778	0,04833
Сатурн	120,45	10.759,23	9,55475	1.428	0,05589
Уранус	42,23	30.688,45	19,21814	2.873	0,04634
Нептун	21,53	60.181,3	30,10957	4.501	0,00900

Планета	Лонгитуда перихела	Лонгитуда узлазног чвора	Нагиб	Средња лонгитуда
Меркур	75° 53′ 50″	47° 8′ 41″	7° 0′ 11″	182° 16′ 17″
Венера	130 8 26	75 47 17	3 23 37	344 22 11
Земља	101 13 7	0 0 0	0 0 0	100 40 57
Марс	334 13 6	48 47 12	1 51 1	294 15 53
Јупитер	12 43 15	99 26 36	1 18 31	238 7 57
Сатурн	91 5 54	112 47 25	2 29 33	266 35 12
Уранус	171 32 55	73 28 38	0 46 21	244 12 33
Нептун	46 43 38	130 40 53	1 46 45	84 27 50

ВЕЛИЧИНЕ, МАСЕ И ТРАЈАЊА ОБРТАЈА СУНЦА И ПЛАНЕТА.

Име	Пречник екватора		Маса		Густина	Трајање обртаја
	(Земља=1)	Килом.	Сунце=1	Земља=1	Земља=1	
Меркур	0,37	4.700	1 : 6 000 000	0,06	1,1	88ᵈ ?
Венера	0,97	12.300	1 : 408 000	0,82	0,91	24ʰ ?
Земља	1	12.756	1 : 333 432	1	1,	23ʰ 56ᵐ 4ˢ
Марс	0,54	6.900	1 : 3 093 500	0,11	0,69	24ʰ 37ᵐ 23ˢ
Јупитер	11,14	142.000	1 : 1 047,3	318,36	0,25	9ʰ 55ᵐ
Сатурн	9,4	120.000	1 : 3 501,6	95,22	0,13	10ʰ 14ᵐ 24ˢ
Уранус	4,0	50.700	1 : 22 869	14,58	0,23	10ʰ 45ᵐ
Нептун	4,3	54.400	1 : 19 314	17,26	0,22	7ʰ 50ᵐ
Сунце	195,05	1.391.000	1	333 432	0,26	25ᵈ — 27ᵈ

ПОДАТЦИ О САТЕЛИТИМА ПЛАНЕТА

Сателит	Сидерично време обилажења дани	Отстојање од планете: у полупречницима планете	Отстојање од планете: у хиљадама *km*.	Ексцентрицитет путање	Нагиб путање
Земљин	27,32166	60,267	384,40	0,0549	5°,13
Марсов, Фобос	0,31891	2,77	9,15	0,0170	27 ,48
„ Дејмос	1,26244	6,95	22,85	0,0031	27 ,41
Јупитров, I	1,76914	5,91	421,50	0,0	2 ,16
„ II	3,55118	9,40	671	0,0	2 ,51
„ III	7,15455	14,99	1070	0,0	2 ,33
„ IV	16,68899	26,36	1881	0,1	2 ,36
„ V	0,49818	2,53	184	0,1	2 ,0
„ VI	250,611	160,0	11446	0,1550	28 ,93
„ VII	260,06	164,0	11884	0.2073	31 ,00
„ VIII	738,9	329,0	25610	0,38	151 ,11
„ IX	1745,0	351,0	27000	0,248	156 ,19
Сатурнов, Мимас	0,94242	3,07	181	0.0190	27 ,49
„ Енцеладус	1,37022	3,94	233	0,0046	28 ,07
„ Гетис	1,88780	4,88	287	0,0000	28 ,68
„ Дионе	2,73692	6,24	369	0,0020	28 ,07
„ Реа	4,51750	8,72	515	0,0009	28 ,38
„ Титан	15,94543	20,22	1193	0,0289	27 ,47
„ Темис	20,85	24,17	1426	0,23	39 ,10
„ Хиперион	21,27662	24,49	1445	0,119	27 ,35
„ Јапетус	79,33015	58,91	3476	0,029	18 ,47
„ Фебе	550,48	214,4	12650	0,1659	175 ,08
Уранов, Ариел	2,52038	7,71	177	0,0	97 ,97
„ Умбриел	4,14418	10,75	249	0,0	98 ,35
„ Титанија	8,70587	17,63	405	0.0	98 ,02
„ Оберон	13,46324	23,57	542	0,0	98 ,28
Нептунов, Тригон	5,87683	15 33	354	0.0	142, 67

Са јединим изузетком ново пронађене планете, Плута, крећу се све велике планете око Сунца у равнима које затварају међусобно веома оштре углове. И ексцентрицитети њихових путања су веома мали, тако да оне изгледају као кругови.

Масе свих великих планета, без изузетка, су веома малене према маси Сунца што важи, природно, још у већој мери за мале планете и за сателите. Маса највеће од свих планета, Јупитера, не достиже ни хиљадити део Сунчеве масе. Због њихових малених маса, а великих отстојања, покорава се годишње кретање њихово око Сунца у великој мери законима проблема двају тела.

Међусобни поремећаји кретања планета, о којима смо опширно говорили, веома су малени, да би се испољили у већој мери тек у току векова. Саопштења о тима поремећајима ваља надопунити овима. По Ајнштајновој теорији гравитације наступа већ у случају ако узмемо само Сунце и једну од планета у обзир, дакле, у опреци са Њутновом теоријом, већ у проблему двају тела, померање перихела планетске путање. То померање следује у смислу обилажења планете око Сунца па достизава, за време једног пуног обиласка планете око Сунца, ову вредност:

$$\delta\Pi = \frac{6\pi n^2 a^2}{c^2(1-e^2)}$$

где a означава, као и до сада, велику полуосу планетске путање, e њен ексцентрицитет, а n средње кретање; c означава брзину светлости. Користећи се овим обрасцем и претходним табеларним податцима, добивамо као померање перихела у току од сто јулианских година: за Меркур 42″89, за Венеру 8″607, за Земљу 3″831, за Марс 1″348. Ова кретања, од којих је нарочито прво доказано и опажањима, доста су малена према средњим кретањима перихела како она следују из рачуна поремећаја који даје н. пр. за средње кретање Меркурова перихела стогодишњу вредност од 546″. Поред све своје малоће, ова Ајнштајнова померења перихела могу нарасти до осетних величина у току геолошких времена, но до сада није се успело узети их у обзир у рачуну секуларних поремећаја.

Што се тиче отстојања и кретања сателита, важе у великој мери претпоставке учињене у § 14; зато се сателити крећу око својих планета по елиптичним путањама. При оштријем испитивању тога кретања, морају се узети у обзир његови поремећаји. То је нарочито потребно код Земљиног Месеца због његовог значаја у наутици. При кретању Месеца, Сунце је оно тело које изазива поремећај. Маса Сунчева је 333.000 пута већа од главнога тела при кретању Месеца, Земље. Но како је Сунце 390 пута даље од Месеца но Земља, то и ти поремећаји нису сувише велики па су се могли израчунати. Већ је *Њутн* главне неједнакости Месечевог кретања, опажене већ одавно, успео да растумачи својим законом гравитације, тако поремећаје Месечеве лонгитуде: *евекцију* (од $1^{0}17'$, пронађену од *Птолемаја*), *варијацију* (до $39'31''$, пронађену од *Абул Вефе*) и *годишњу неједнакост* (до $11'9''$, пронађену од *Тихо Брахеа*). И кретање апсидне линије и линије чворова Месечеве путање, које је већ Александријцима било познато и о којем ће још бити говора, могао је Њутн да изведе из свога закона. Број до сада теоретских израчунатих и посматрањем потврђених неједнакости Месечева кретања нарастао је на неколико стотина.

Код сателита спољних планета појављују се, поред поремећаја изазваних Сунцем, међусобни поремећаји тих сателита. Врло јаким поремећајима изложени су Јупитрови сателити VIII и IX, јер се налазе близу оне границе где утицај Сунца постаје јако осетан.

У погледу на њихову ротацију, могу се чланови нашег планетског система поделити у три, јасно одвојене, категорије. Типични претставник прве од тих категорија је само Сунце. Његово обртање није једнако обртању чврстога тела код којега све тачке његове имају исту угловну брзину, него је та брзина за разне зоне Сунчеве површине различита, опадајући од екватора према половима. Посматрањем Сунчевих пега, на пример, показало се да је трајање пуне једне ротације на екватору једнако 25 дана, а на хелиографској ширини од 40^{0} пуних 27 дана. Сличну такву зоналну ротацију показују Јупитер и Сатурн, а имају је, вероватно, и остале спољне планете.

Другој категорији припадају они чланови нашег планетског система код којих је трајање једне ротације једнако времену обилажења око њиховог главног тела. Типични претставник ове категорије је Земљин Месец. Трајање једне његове ротације савршено је једнако његовом времену обилажења око Земље.

Зато Месец показује Земљи увек исто лице. Кад не би она једнакост времена била потпуна, морали бисмо постепено сагледати целокупну површину Месечеву. Међутим, ми не видимо него нешто више од њезине половине, а тај вишак само због ексцентрицитета и нагиба његове путање и његове осе. По другом Кеплеровом закону, није, због оног ексцентрицитета, брзина којом се Месец креће по својој путањи стална, док је његова ротација око осе константна, због чега се Месец према Земљи заокреће нешто на лево и на десно, што се зове његовом *либрацијом* у лонгитуди. Нагиб његове путање и његове осе изазива сличну појаву, либрацију у латитуди.

Једнакост трајања Месечеве једне ротације са временом његовог обилажења око Земље није случајна и може се потпуно растумачити. Док се Месец налазио још у житком стању, изазивало је привлачно дејство Земљино на њему појаву сличну морској плими па се зато његова површина испупчила на месту најближем Земљи и на ономе које јој лежи диаметрално. Та испупчења, на правој која спаја центар Месеца са центром Земље, кочила су, као каква кочница, ротацију Месеца према Земљи, док она није сасвим пригушена. Охлађени и стврднути Месец задржао је тај, према Земљи нешто издужени, облик, а овај одржавао ту добивену оријентацију према Земљи; око тог положаја равнотеже врши Месец једну малу, али стварну, осцилацију која се назива физичком либрацијом. Меркур, а вероватно и сви планетски сателити, припадају, у погледу своје ротације, овој Месечевој категорији. Узрок једнакости времена њихове ротације и њихове револуције исти је као и код Месеца, при томе ваља Меркур сматрати за сателит Сунчев.

Трећој категорији припадају сви остали чланови нашег планетског система. О њиховој ротацији биће говора у другом одељку ове књиге.

ДРУГИ ОДЕЉАК

РОТАЦИОНО КРЕТАЊЕ НЕБЕСКИХ ТЕЛА

ГЛАВА ДЕСЕТА

Теореме и обрасци Рационалне Механике потребни за проучавање ротационих кретања небеских тела.

§ 39. Небеска тела као материјални системи. Сваки члан нашег планетског система претставља по један засебни материјални систем. И наша Земља, са својом хидросфером и атмосфером, претставља један такав систем у којем су заступљена сва три агрегатна стања материје. Сваки такав материјални систем можемо замислити расчлањен у произвољно много, толико ситних, делића да сваки такав делић можемо сматрати за материјалну тачку па на тај начин долазимо, коначно, до једног система материјалних тачака, за који важе ова расуђивања. Све материјалне тачке његове привлаче се међусобно по Њутновом закону, а бивају привлачене, по истом закону, и од делића осталих чланова планетског система. Ове потоње силе рачунаћемо у спољне силе уоченог материјалног система, док се привлачне силе између појединих делова уоченог небеског тела имају рачунати у његове унутрашње силе. Поред тих унутрашњих гравитационих сила дејствују у уоченом материјалном систему и друге унутрашње силе, молекуларне силе, напони, трење и све остале силе које одговарају агрегатном стању у посматраном делу уоченог материјалног система. Све се те силе покоравају Њутновом принципу акције и реакције, т. ј. сила $\mathfrak{p}_{ik}$ којом материјална тачка m_k дејствује на другу материјалну тачку m_i мора бити једнака, а противног правца, сили

$\mathfrak{p}_{ki}$ којом материјална тачка m_i дејствује на тачку m_k; обе те силе дејствују у истој правој, оној која спаја уочене две тачке. Та једнакост, а противни правац уочених двеју сила изражени су математски векторском једначином:

$$(1) \qquad \mathfrak{p}_{ik} + \mathfrak{p}_{ki} = 0.$$

Да математски изразимо још и то да обе те силе дејствују у истој правој, означимо са $\mathfrak{R}_i$ вектор положаја масе m_i, а са $\mathfrak{R}_k$ вектор положаја масе m_k обзиром на произвољну једну тачку упоређивања, онда је постављени услов изражен, очито, векторском једначином

$$(2) \qquad [\mathfrak{R}_i\, \mathfrak{p}_{ik}] + [\mathfrak{R}_k\, \mathfrak{p}_{ki}] = 0.$$

Из добивених двеју једначина могу се извести следеће теореме.

§ 40. Теореме о импулсима. Нека m_i буде произвољна једна материјална тачка уоченога система, а $\mathfrak{P}_i$ резултанта свих спољних сила које дејствују на њу. Резултанта свих унутрашњих сила које дејствују на m_i претстављена је, према ознакама усвојеним у прошлом параграфу, са $\sum_k \mathfrak{p}_{ik}$, при чему се назначени збир протеже на све тачке система. Замислимо у простору један непомични координатни систем $X_1-Y_1-Z_1$, са почетком у тачки O_1, па нека $\mathfrak{R}_i$ означава вектор положаја масе m_i обзиром на тај координатни систем, онда можемо материјалну тачку m_i под утицајем свих спољних и унутрашњих сила које на њу дејствују сматрати за слободну, због чега постоји једначина:

$$(3) \qquad m_i \frac{d^2\mathfrak{R}_i}{dt^2} = \mathfrak{P}_i + \sum_k \mathfrak{p}_{ik},$$

где t означава време.

Овакве једначине кретања могу се замислити написане за све материјалне тачке система, којих нека буде n на броју. При томе ваља индексу i доделити вредности $1, 2 \ldots . n$. На тај начин долазимо до ових n једначина:

$$(4) \qquad m_i \frac{d^2\mathfrak{R}_i}{dt^2} = \mathfrak{P}_i + \sum_k \mathfrak{p}_{ik}\,; \qquad i = 1, 2 \ldots n\,.$$

Образујемо ли збир свих n једначина (4), то ће се, на десној страни тога збира. појавити двоструки збир $\sum\limits_i \sum\limits_k \mathfrak{p}_{ik}$, а у њему свака комбинација индекса i и k по два пута, једанпут чланом $\mathfrak{p}_{ik}$, а други пут чланом $\mathfrak{p}_{ki}$. Како се ти двојни чланови међусобно потиру због (1), то долазимо до ове једначине:

$$(5) \qquad \sum m_i \frac{d^2\mathfrak{R}_i}{dt^2} = \sum \mathfrak{P}_i\,.$$

Помножимо ли једначине (4), једну за другом, векториелно са $\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2 \ldots \mathfrak{R}_n$ и образујемо ли збир тако добивених једначина, то ћемо, пошто се, као и у претходном случају, два и два члана $[\mathfrak{R}_i\, \mathfrak{p}_{ik}]$ и $[\mathfrak{R}_k\, \mathfrak{p}_{ik}]$, због (2), међусобно потиру, добити следећу једначину:

$$(6) \qquad \sum m_i \left[\mathfrak{R}_i \frac{d^2\mathfrak{R}_i}{dt^2} \right] = \sum [\mathfrak{R}_i\, \mathfrak{P}_i]\,.$$

Векторски збир

$$(7) \qquad \mathfrak{K} = \sum \mathfrak{P}_i$$

претставља нам резултанту свих спољних сила које дејствују на уочени материјални систем, а збир векторијелних производа

$$(8) \qquad \mathfrak{M}_1 = \sum [\mathfrak{R}_i\, \mathfrak{P}_i]$$

претставља нам моменат заокретања тих спољних сила обзиром на тачку O_1. Зато је

$$(9) \qquad \sum m_i \frac{d^2\mathfrak{R}_i}{dt^2} = \mathfrak{K}$$

$$(10) \qquad \sum m_i \left[\mathfrak{R}_i \frac{d^2\mathfrak{R}_i}{dt^2} \right] = \mathfrak{M}_1\,.$$

Извод

$$\frac{d\mathfrak{R}_i}{dt} = \mathfrak{B}_i \tag{11}$$

претставља нам вектор брзине материјалне тачке m_i у непокретном координатном систему па је зато

$$\frac{d^2\mathfrak{R}_i}{dt^2} = \frac{d\mathfrak{B}_i}{dt}\,. \tag{12}$$

Како је, сем тога,

$$\left[\mathfrak{R}_i \frac{d^2\mathfrak{R}_i}{dt^2}\right] = \frac{d}{dt}\left[\mathfrak{R}_i \frac{d\mathfrak{R}_i}{dt}\right] = \frac{d}{dt}\,[\mathfrak{R}_i\,\mathfrak{B}_i]\,,$$

то добивамо место (9) и (10) ове две једначине:

$$\frac{d}{dt}\sum m_i\,\mathfrak{B}_i = \mathfrak{K} \tag{13}$$

$$\frac{d}{dt}\sum m_i\,[\mathfrak{R}_i\,\mathfrak{B}_i] = \mathfrak{M}_1\,. \tag{14}$$

Ове једначине изражавању математским језиком теореме о импулсима. Већ је у § 16 казано да збир $\sum m_i\,\mathfrak{B}_i$ претставља целокупни импулс или количину кретања посматранога материјалнога система, а $\sum m_i\,[\mathfrak{R}_i\mathfrak{B}_i]$ моменат тога импулса или, другче казано, импулс обртања обзиром на тачку O_1. Ако је уочени материјални систем чврсто тело, онда се импулс обртања назива и замахом. Једначина (13) казује да је временски извод импулса једнак резултанти спољних сила, а једначина (14) да је временски извод импулса обртања једнак моменту заокретања спољних сила обзиром на тачку O_1.

§ 41. Теорема о кретању тежишта. Ако је S тежиште, боље рећи центар маса, посматраног материјалног система, а $\mathfrak{S}$ његов вектор положаја, то је

$$M\mathfrak{S} = \sum m_i\,\mathfrak{R}_i\,, \tag{15}$$

где

$$(16) \qquad M = \sum m_i$$

претставља целокупну масу уоченог материјалног система. Двоструком диференцијацијом обрасца (15) по времену t, добивамо:

$$M \frac{d^2\mathfrak{S}}{dt^2} = \sum m_i \frac{d^2\mathfrak{R}_i}{dt^2},$$

т. ј. због (9)

$$(17) \qquad M \frac{d^2\mathfrak{S}}{dt^2} = \mathfrak{K}.$$

Ова диференцијална једначина кретања тежишта S идентична је оној за слободну тачку масе M, која је изложена једино дејству резултанте $\mathfrak{K}$ спољних сила, претстављене обрасцем (7). *Одатле следује:*

Тежиште материјалног система креће се тако као кад би у њему сједињене биле све масе система и све његове спољне силе. Унутарње силе не утичу на кретање тежишта.

§ 42. Независност ротационог кретања од транслаторног. Претпоставимо, за сада, да је посматрани материјални систем једно чврсто тело, па питајмо за кретање тога тела око његовог тежишта. Да одговоримо на постављено питање, положимо почетак O_1 координатног система $X_1 - Y_1 - Z_1$, сматраног, за сада, за непомичног, у тежиште S и означимо тај нови координатни систем који се, без заокретања, креће транслаторно у простору са $X - Y - Z$, а његов почетак који лежи, као што смо уговорили, у тежишту S са O. Вектори положаја материјалних тачака $m_1, m_2 \ldots m_n$ обзиром на O нека буду означени са $\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2 \ldots \mathfrak{r}_n$. Онда је

$$(18) \qquad \mathfrak{R}_i = \mathfrak{S} + \mathfrak{r}_i; \qquad i = 1, 2, \ldots n,$$

а због (15),

$$M\mathfrak{S} = \sum m_i (\mathfrak{S} - \mathfrak{r}_i) = M\mathfrak{S} - \sum m_i \mathfrak{r}_i,$$

т. ј.

$$(19) \qquad \sum m_i \mathfrak{r}_i = 0$$

одакле следује

$$\sum m_i \frac{d^2 \mathfrak{r}_i}{dt^2} = 0 . \tag{20}$$

Ставимо (18) у (10), то добивамо:

$$\sum m_i \left[(\mathfrak{S} + \mathfrak{r}_i) \left(\frac{d^2 \mathfrak{S}}{dt^2} + \frac{d^2 \mathfrak{r}_i}{dt^2} \right) \right] = \mathfrak{M}_1 ,$$

т. ј.

$$M \left[\mathfrak{S} \frac{d^2 \mathfrak{S}}{dt^2} \right] - \left[\frac{d^2 \mathfrak{S}}{dt^2} \sum m_i \mathfrak{r}_i \right] + \left[\mathfrak{S} \sum m_i \frac{d^2 \mathfrak{r}_i}{dt^2} \right] +$$

$$+ \sum m_i \left[\mathfrak{r}_i \frac{d^2 \mathfrak{r}_i}{dt^2} \right] = \mathfrak{M}_1,$$

дакле, због (17), (19) и (20),

$$\sum m_i \left[\mathfrak{r}_i \frac{d^2 \mathfrak{r}_i}{dt^2} \right] = \mathfrak{M}_1 - [\mathfrak{S} \, \mathfrak{K}] . \tag{21}$$

Моменат заокретања спољних сила $\mathfrak{P}_i$ обзиром на тежиште S, т. ј. обзиром на покретну тачку упоређивања O, претстављен је са

$$\mathfrak{M} = \sum [\mathfrak{r}_i \, \mathfrak{P}_i] = \sum [(\mathfrak{R}_i - \mathfrak{S}) \mathfrak{P}_i] = \sum [\mathfrak{R}_i \, \mathfrak{P}_i] - [\mathfrak{S} \sum \mathfrak{P}_i],$$

т. ј. због (8) и (7), са

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 - [\mathfrak{S} \, \mathfrak{K}]. \tag{22}$$

Зато следује из (21) и (22)

$$\sum m_i \left[\mathfrak{r}_i \frac{d^2 \mathfrak{r}_i}{dt^2} \right] = \mathfrak{M} . \tag{23}$$

Кретање чврстог тела око његовог тежишта има три степена слободе па је зато то кретање једнозначно одређено претходном векторском једначином која је еквивалентна трима скаларнима. Та једначина, истога облика као једначина (10) при којој је тачка упоређивања O_1 сматрана непомичном, казује да се посматрано чврсто тело креће око свога тежишта тако као кад би то тежиште било непомично. То кретање зависи само од момента заокретања $\mathfrak{M}$ спољних сила, а не зависи од њихове резултанте $\mathfrak{K}$.

Једначине (17) и (23), узете заједно, изражавају теорему о независности транслаторног и ротационог кретања једног од другог. Према (17), редукује се проблем кретања слободног чврстог тела на проблем слободне материјалне тачке, а, према (23), проблем ротационог кретања чврстог тела око његовог тежишта на проблем обртања чврстог тела око једне његове непомичне тачке. Зато нисмо у првом одељку ове књиге, при описивању кретања тежишта небеских тела, морали водити рачуна о њиховим ротацијама око тежишта, а не морамо ни сада, проучавајући кретања небеских тела око њихових тежишта, узимати у обзир њихова транслаторна кретања, сем ако ова не мењају моменат заокретања спољних сила.

Једначине (17) и (23) не важе само за случај чврстога тела, него и за општији случај материјалног система који задовољава претпоставке учињене у § 39, но у овом случају, када посматрани материјални систем има више од шест степена слободе, није његово кретање одређено споменутим двема векторским једначинама.

§ 43. Употреба покретних координатних система. Истим начином којим смо из (10) извели једначину (14), следује из (23)

$$\frac{d}{dt}\sum m_i\,[\mathfrak{r}_i\,\mathfrak{v}_i]=\mathfrak{M} \tag{24}$$

где $\mathfrak{v}_i$ претставља вектор брзине материјалне тачке m_i обзиром на координатни систем $X-Y-Z$ који ћемо, од сада, звати укратко „мирујућим“, јер се у њему све тако дешава као кад би, заиста, мировао у простору. Из тога разлога ћемо кретања и брзине обзиром на тај систем звати апсолутнима.

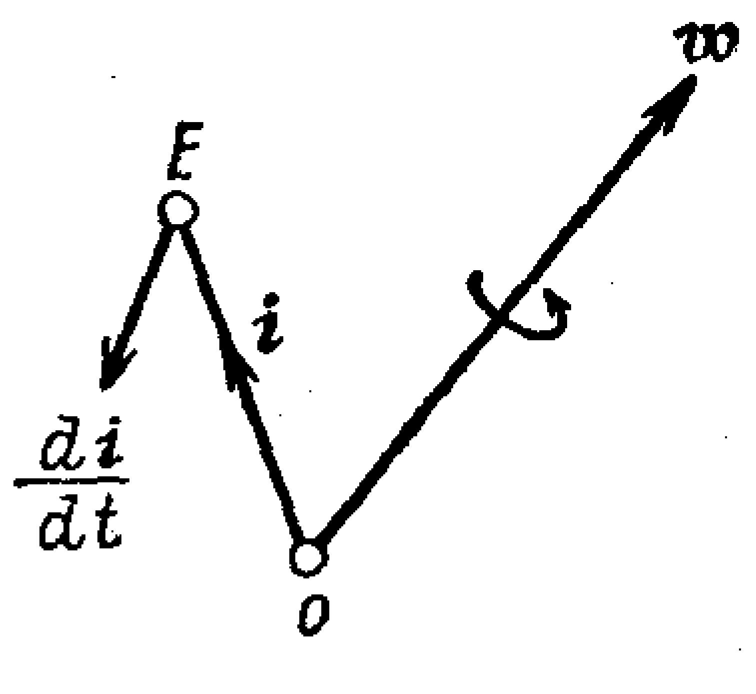
Вектор

$$\mathfrak{G}=\sum m_i\,[\mathfrak{r}_i\,\mathfrak{v}_i] \tag{25}$$

претставља нам, према напред уговореном, апсолутни импулс обртања уоченог материјалног система обзиром на тачку O па је, према претходном,

$$\frac{d\mathfrak{G}}{dt} = \mathfrak{M}. \tag{26}$$

Често пута је не само корисно, него потребно да при нашим разматрањима употребимо координатни систем $x-y-z$ који се обрће према мирујућем координатном систему. При томе ћемо претпоставити да се почетак покретног координатног система $x-y-z$ поклапа са почетком O мирујућег координатног система $X-Y-Z$ и да онај покретни систем врши у уоченом тренутку t према мирујућем систему ротацију која, према учињеној претпоставци, мора следовати око једне тренутне осе обртања која пролази кроз тачку O. Та ротација нека буде претстављена вектором $\mathfrak{w}$, т. ј. тај вектор нека пада у тренутну осу обртања, нека буде наперен на ону страну те осе са које, посматрано, обртање следује у позитивном смислу, т. ј. противно сказаљци на сату, а модуо *w* вектора $\mathfrak{w}$ нека буде једнак тренутној угаоној брзини обртања.



Сл. 16

Нека $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ претстављају јединичне векторе у правцу оса x, y, z, онда ће, услед обртања покретног система, крајње тачке тих вектора имати у тренутку t брзине које ће, као што то следује из приложене сл. 16, бити претстављене овим обрасцима:

$$\frac{d\mathfrak{i}}{dt} = [\mathfrak{w}\,\mathfrak{i}]\,; \quad \frac{d\mathfrak{j}}{dt} = [\mathfrak{w}\,\mathfrak{j}]\,; \quad \frac{d\mathfrak{k}}{dt} = [\mathfrak{w}\,\mathfrak{k}]\,. \tag{27}$$

Образујемо ли скаларни векторски производ $(\mathfrak{G}\,\mathfrak{i})$, онда је, по познатом правилу за диференцијацију таквог производа,

$$\frac{d}{dt}(\mathfrak{G}\,\mathfrak{i}) = \frac{d\mathfrak{G}}{dt}\,\mathfrak{i} + \mathfrak{G}\,\frac{d\mathfrak{i}}{dt}\,,$$

т. ј., због претходних једначина,

$$\frac{d\mathfrak{G}}{dt}\,\mathfrak{i} = \frac{d}{dt}(\mathfrak{G}\,\mathfrak{i}) - \mathfrak{G}\,[\mathfrak{w}\,\mathfrak{i}]\,. \tag{28}$$

Помножимо ли једначину (26) скаларно са $\mathfrak{i}$, онда добивамо због (28)

$$\frac{d}{dt}(\mathfrak{G}\,\mathfrak{i}) - \mathfrak{G}[\mathfrak{w}\,\mathfrak{i}] = (\mathfrak{M}\,\mathfrak{i})\,. \tag{29}$$

Две даље једначине истог облика добивају се замењујући $\mathfrak{i}$ са $\mathfrak{j}$ односно са $\mathfrak{k}$.

Означимо са G_1, G_2, G_3 координате вектора $\mathfrak{G}$ обзиром на покретни координатни систем, са w_1, w_2, w_3 координате вектора $\mathfrak{w}$, а са M_1, M_2, M_3 координате вектора $\mathfrak{M}$, онда је

$$\mathfrak{G} = G_1\,\mathfrak{i} + G_2\,\mathfrak{j} + G_3\,\mathfrak{k} \tag{30}$$

$$\mathfrak{w} = w_1\,\mathfrak{i} + w_2\,\mathfrak{j} + w_3\,\mathfrak{k} \tag{31}$$

$$\mathfrak{M} = M_1\,\mathfrak{i} + M_2\,\mathfrak{j} + M_3\,\mathfrak{k}. \tag{32}$$

Узме ли се још у обзир да је, по познатом правилу векторскога рачуна,

$$\mathfrak{G}\,[\mathfrak{w}\,\mathfrak{i}] = \begin{vmatrix} G_1 & G_2 & G_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

онда добивамо, место једначине (29) и оних двеју сличних које нисмо написали, ове три једначине:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{dG_1}{dt} + w_2 G_3 - w_3 G_2 &= M_1 \\ \frac{dG_2}{dt} + w_3 G_1 - w_1 G_3 &= M_2 \\ \frac{dG_3}{dt} + w_1 G_2 - w_2 G_1 &= M_3 \end{aligned} \right. \tag{33}$$

§ 44. Ојлерове једначине. Ако је посматрани матери-
ı систем једно чврсто тело, онда је од користи покретни
динатни систем $x-y-z$, о којем је у прошлом параграфу била
ıезати са тим чврстим телом. У том случају претставља вектор
исти мах, и тренутну ротациону брзину чврстог тела об-
и на мирујући координатни систем па је, због тога, апсо-
ı брзина материјалне тачке m_i претстављена изразом:

$$(34) \qquad \mathfrak{v}_i = [\mathfrak{w}\, \mathfrak{r}_i]\,.$$

Зато је импулс обртања, претстављен обрасцем (25), сада
к

$$(35) \qquad \mathfrak{G} = \sum m_i\, [\mathfrak{r}_i\, [\mathfrak{w}\, \mathfrak{r}_i]].$$

У случају чврстога тела, у којем је распоред маса конти-
ıн, треба горњи збир заменити интегралом

$$(36) \qquad \mathfrak{G} = \int [\mathfrak{r}\, [\mathfrak{w}\, \mathfrak{r}]]\, dm$$

шеним преко целокупне масе уоченог чврстог тела.

Како је, према познатом обрасцу векторског рачуна,

$$[\mathfrak{a}\, [\mathfrak{b}\mathfrak{c}]] = \mathfrak{b}(\mathfrak{c}\mathfrak{a}) - \mathfrak{c}\, (\mathfrak{a}\mathfrak{b}),$$

ıбивамо:

$$(37) \qquad \mathfrak{C} = \mathfrak{w} \int (\mathfrak{r}\, \mathfrak{r})\, dm - \int \mathfrak{r}\, (\mathfrak{w}\, \mathfrak{r})\, dm.$$

Означимо ли координате вектора положаја $\mathfrak{r}$ у покретном
ıинатном систему са x, y, z, то је

$$\mathfrak{r} = x\,\mathfrak{i} + y\,\mathfrak{j} + z\,\mathfrak{k}$$

$$(\mathfrak{r}\, \mathfrak{r}) = x^2 + y^2 + z^2$$

$$(\mathfrak{w}\, \mathfrak{r}) = w_1 x + w_2 y + w_3 z\,.$$

Ставимо ли ове обрасце у векторску једначину (37), то се
аспада, узимајући у обзир образац (30), у све три ска-
једначине:

$$(38)\quad \begin{cases} G_1 = w_1 \int (y^2+z^2)dm - w_2 \int xy\,dm - w_3 \int zx\,dm \\ G_2 = w_2 \int (z^2+x^2)dm - w_3 \int yz\,dm - w_1 \int xy\,dm \\ G_3 = w_3 \int (x^2+y^2)dm - w_1 \int zx\,dm - w_2 \int yz\,dm\,. \end{cases}$$

Ако је покретни координатни систем $x - y - z$ положен и везан тако са уоченим чврстим телом да се кординатне осе подударају са главним осама инерције тога тела или, још тачније речено, са централним осама инерције, будући да почетак тога координатног система лежи у самом тежишту уоченога тела, то су онда девиациони моменти тога тела обзиром на координатни систем једнаки нули, дакле

$$(39)\quad \int yz\,dm = 0\,; \qquad \int zx\,dm = 0\,; \qquad \int xy\,dm = 0,$$

а главни моменти инерције претстављени овим изразима:

$$(40)\quad A = \int (y^2+z^2)dm; \qquad B = \int (z^2+x^2)dm;$$

$$C = \int (x^2+y^2)dm.$$

Због свега овога, добивамо место једначина (38) ове:

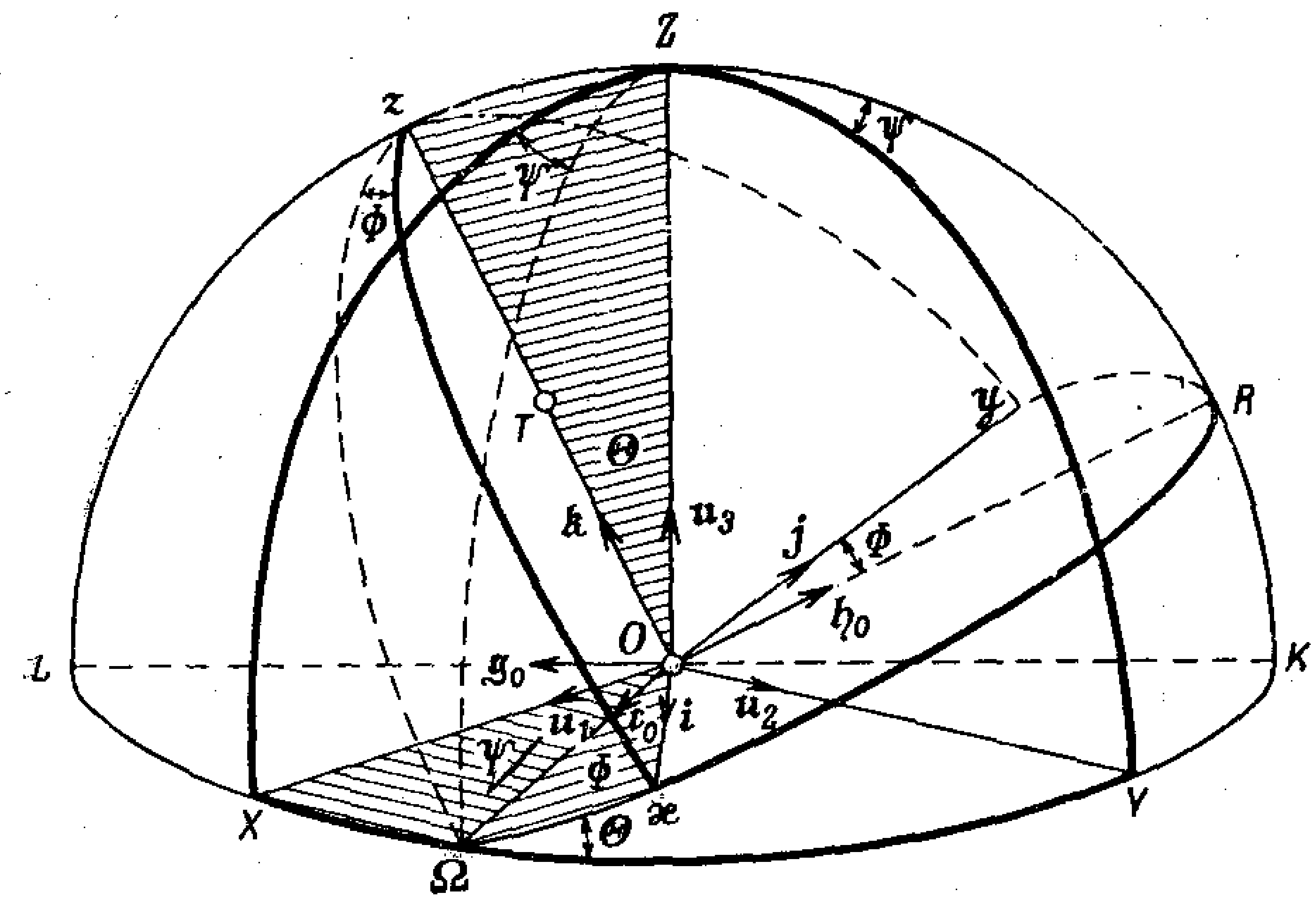
$$(41)\quad G_1 = Aw_1\,; \qquad G_2 = Bw_2\,; \qquad G_3 = Cw_3\,.$$

Стављајући ово у једначине (33), добивамо:

$$(42)\quad \begin{cases} A\,\dfrac{dw_1}{dt} + (C-B)\,w_2w_3 = M_1 \\ B\,\dfrac{dw_2}{dt} + (A-C)\,w_3w_1 = M_2 \\ C\,\dfrac{dw_3}{at} + (B-A)\,w_1w_2 = M_3 \end{cases}$$

Ове једначине, изведене (1758) од *Ојлера*, носе његово име.

§ **45. Ојлерови углови.** Замислимо да смо око заједничког почетка O мирујућег и покретног координатног система, као центра, описали једну лопту, онда продиру позитивне гране координатних оса тих двају система површину те лопте у тачкама X, Y, Z односно x, y, z (сл. 17) које нам, као темена, ограничавају два сферна троугла XYZ и xyz којима су и стране и углови једнаки по 90^0. Координатне равни $X-Y$ и $x-y$ секу се међусобно дуж праве $O\Omega$ која пролази кроз тачку O а која се зове *линијом чворова*. Она продорна тачка Ω те праве са споменутом лоптом, која задовољава услову да се по-



Сл. 17

зитивним смислом обилажења $x-y$ пролази кроз ту тачку на позитивну страну равни $X-Y$, т. ј. ону на коју је наперена позитивна грана осе Z, зове се *узлазни чвор*, а правац $O\Omega$ позитивна грана линије чворова. Раван положена кроз OZ и Oz, коју смо одабрали за раван слике, стоји нормално на линији чворова. Угао Ψ захваћен између осе X и линије чворова зове се *прецесиони угао*, налегли угао Φ, захваћен између линије чворова и осе x, зове се *ротациони угао*, а угао θ захваћен осама Z и z зове се *нутациони угао*. То су три Ојлерова угла која одређују положај покретног координатног система у мирујућем систему.

§ 46. Полходија и херполходија. Означимо ли, као и до сада, јединичне векторе у правцу оса x, y, z покретног координатног система са $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$, а јединичне векторе у правцу оса X, Y, Z мирујућег координатног система са $\mathfrak{n}_1$, $\mathfrak{n}_2$, $\mathfrak{n}_3$, онда је вектор ротације $\mathfrak{w}$ у покретном координатном систему претстављен обрасцем

$$\underline{\mathfrak{w}=w_1\mathfrak{i}+w_2\mathfrak{j}+w_3\mathfrak{k},} \tag{43}$$

а у мирујућем систему обрасцем

$$\underline{\mathfrak{w}=\omega_1\mathfrak{n}_1+\omega_2\mathfrak{n}_2+\omega_3\mathfrak{n}_3,} \tag{44}$$

где нам w_1, w_2, w_3 односно ω_1, ω_2, ω_3 претстављају координате вектора $\mathfrak{w}$ у покретном односно у мирујућем координатном систему. Ојлерови углови Ψ, Φ, θ дају нам везу између оба та система. Координате w_1, w_2, w_3 односно ω_1, ω_2, ω_3 изразићемо помоћу Ојлерових углова и њихових временских извода на овај начин. Сферни троугао XYZ (сл. 17) може се довести до поклапања са троуглом xyz помоћу три ротације. Заокренувши троугао XYZ око осе Z, т. ј. око јединичног вектора $\mathfrak{n}_3$, за угао Ψ, доћи ће он у положај ☊KZ, заокренувши га, иза тога, око линије чворова O☊ за угао θ, довешћемо га у положај ☊Rz, а заокренувши га, на послетку, око Oz, т. ј. око јединичног вектора $\mathfrak{k}$, за угао Φ, стићи ће он, заиста, у свој коначни положај xyz. Сва та заокретања следовала су у позитивном смислу, обрнуто сказаљки на сату.

Означимо са

$$\Psi'=\frac{d\Psi}{dt}\,; \qquad \theta'=\frac{d\theta}{dt}\,; \qquad \Phi'=\frac{d\Phi}{dt}$$

временске изводе Ојлерових углова, са $\mathfrak{c}_0$ јединични вектор који пада у правац позитивне гране линије чворова око које смо извршили другу од горњих ротација, то је резултујућа ротација $\mathfrak{w}$ која одговара временским променама Ψ', θ', Φ', Ојлерових углова претстављена са

$$(45) \qquad \mathfrak{w} = \Psi' \mathfrak{n}_3 + \theta' \mathfrak{c}_0 + \Phi' \mathfrak{k} \, .$$

Означимо са $\mathfrak{h}_0$ јединични вектор правца OR, то следује из сл. 17

$$\Psi' \mathfrak{n}_3 = (\Psi' \cos\theta)\, \mathfrak{k} + (\Psi' \sin\theta)\, \mathfrak{h}_0$$
$$(\Psi' \sin\theta)\mathfrak{h}_0 = (\Psi' \sin\theta \sin\Phi)\, \mathfrak{i} + (\Psi' \sin\theta \cos\Phi)\, \mathfrak{j}$$
$$\theta' \mathfrak{c}_0 = (\theta' \cos\Phi)\, \mathfrak{i} - (\theta' \sin\Phi)\, \mathfrak{j} \, ,$$

т. ј.

$$(46) \quad \mathfrak{w} = (\Psi' \sin\theta \sin\Phi + \theta' \cos\Phi)\, \mathfrak{i} + \\ + (\Psi' \sin\theta \cos\Phi - \theta' \sin\Phi)\, \mathfrak{j} + (\Psi' \cos\theta + \Phi')\, \mathfrak{k} \, .$$

Истим начином добивамо, ако са $\mathfrak{g}_0$ означимо јединични вектор правца OL,

$$\theta' \mathfrak{c}_0 = (\theta' \cos\Psi)\mathfrak{n}_1 + (\theta' \sin\Psi)\, \mathfrak{n}_2$$
$$\Phi' \mathfrak{k} = (\Phi' \cos\theta)\mathfrak{n}_3 + (\Phi' \sin\theta)\, \mathfrak{g}_0$$
$$(\Phi' \sin\theta)\, \mathfrak{g}_0 = (\Phi' \sin\theta \sin\Psi)\mathfrak{n}_1 - (\Phi' \sin\theta \cos\Psi)\, \mathfrak{n}_2 \, ,$$

т. ј. због (45)

$$(47) \quad \mathfrak{w} = (\theta' \cos\Psi + \Phi' \sin\theta \sin\Psi)\mathfrak{n}_1 + \\ + (\theta' \sin\Psi - \Phi' \sin\theta \cos\Psi)\mathfrak{n}_2 + (\Psi' + \Phi' \cos\theta)\mathfrak{n}_3 .$$

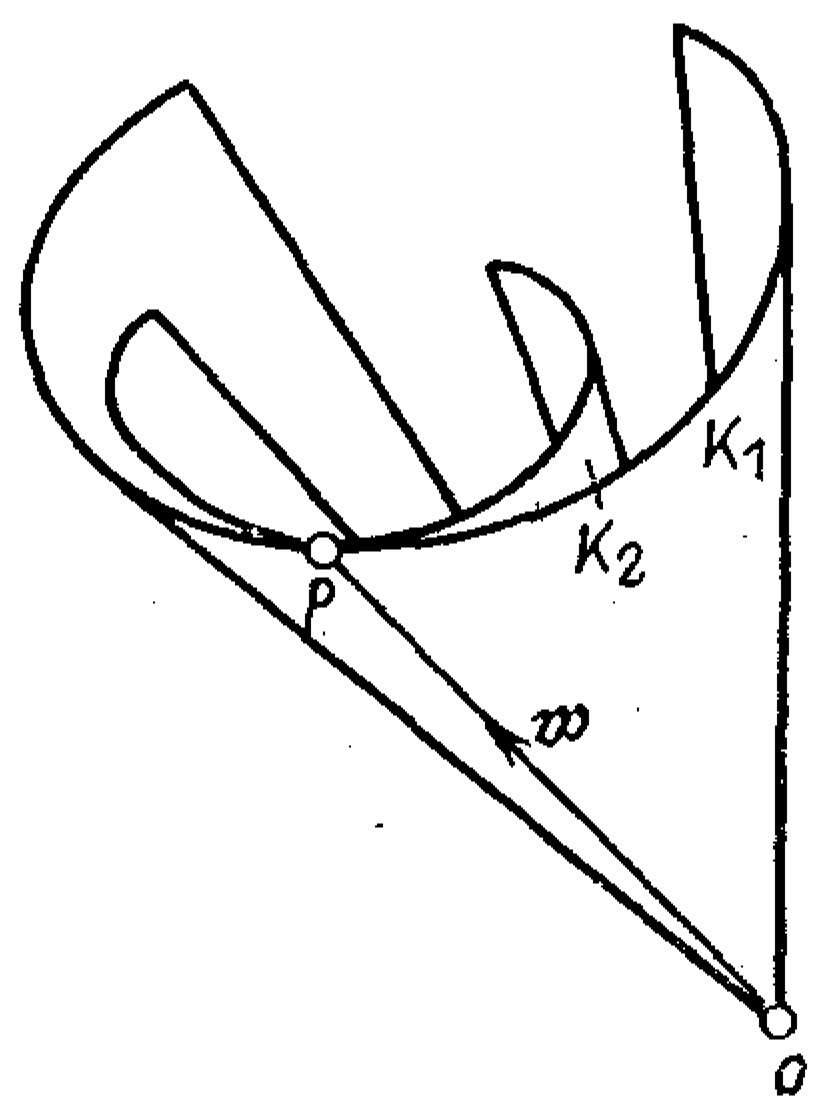
Из (43) и (46) следује

$$(48) \quad \begin{cases} w_1 = \Psi' \sin\theta \sin\Phi + \theta' \cos\Phi \\ w_2 = \Psi' \sin\theta \cos\Phi - \theta' \sin\Phi \\ w_3 = \Psi' \cos\theta + \Phi' \end{cases}$$

а из (44) и (47)

$$(49) \quad \begin{cases} \omega_1 = \theta' \cos\Psi + \Phi' \sin\theta \sin\Psi \\ \omega_2 = \theta' \sin\Psi - \Phi' \sin\theta \cos\Psi \\ \omega_3 = \Psi + \Phi' \cos\theta \, . \end{cases}$$

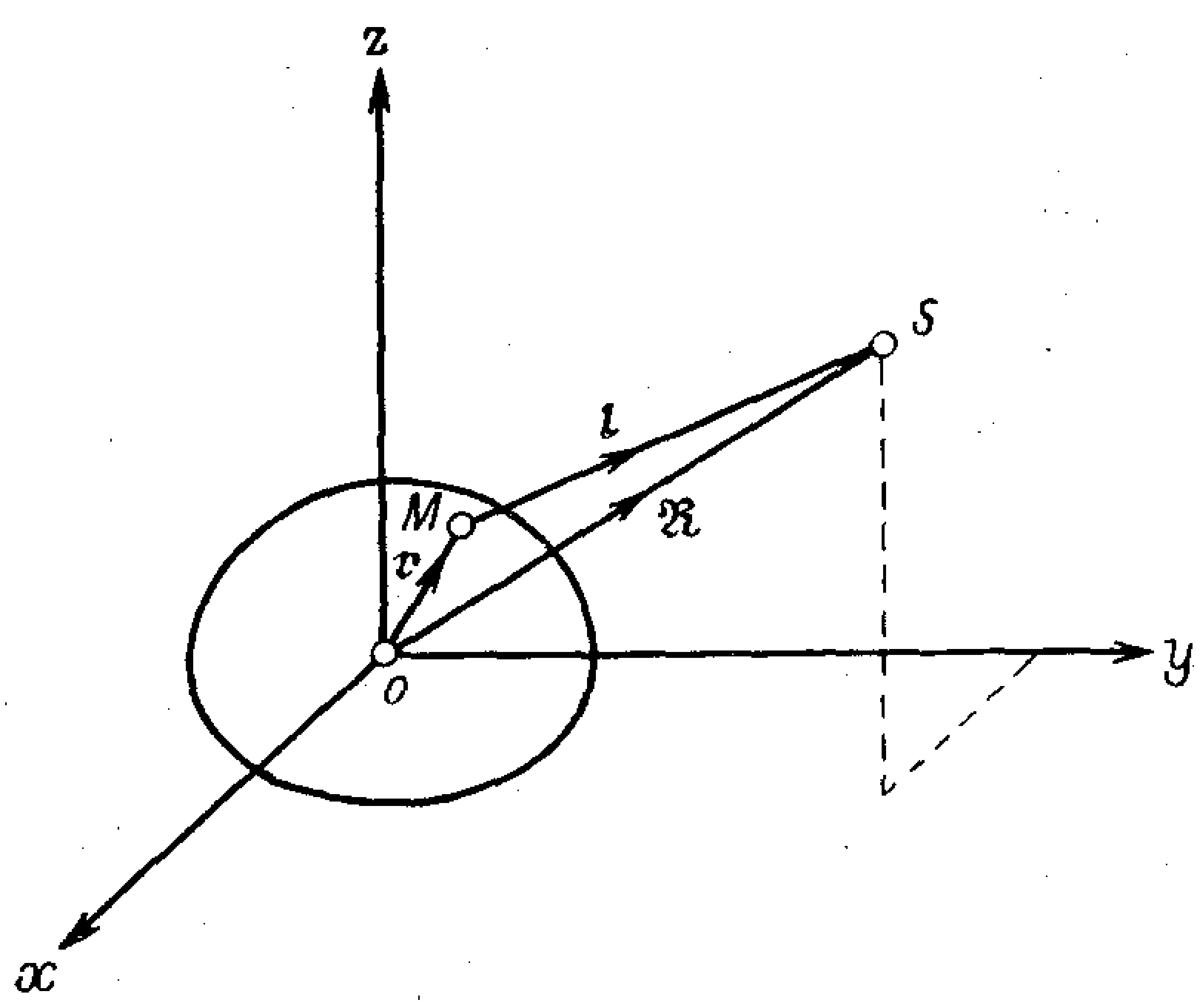
Ако су Ојлерови углови дати као функције времена t, онда нам обрасци (48) и (49) претстављају, ако у њих ставимо једну произвољно одабрану одређену вредност t, координате једне те исте тачке: крајње тачке P ротационог вектора $\mathfrak{w}$. Сматрамо ли сада t као промењиво, то нам горњи обрасци претстављају две разне криве: Обрасцима (48) претстављена је она крива коју описује, у току времена, крајња тачка P ротационог вектора $\mathfrak{w}$ у покретном, дакле са покретним телом везаном координатном систему; та се крива зове *полходија*. Обрасцима (49) претстављена је она крива коју тачка P описује у мирујућем систему, т. ј. у простору; ова крива зове се *херполходија*. Сматрамо ли $\mathfrak{w}$ за вектор положаја тачке P, то је (48) векторска једначина полходије, а (49) векторска једначина херполходије. Вектор ротације $\mathfrak{w}$ описује, према томе, у току вре-



сл. 18.

мена, у уоченом покретном телу један конус; директриса тога конуса је полходија, а врх његов тачка O. Тај се конус зове *конус полходије*. Вектор ротације $\mathfrak{w}$ описује у простору један конус којему је директриса херполходија, а врх тачка O; тај се конус зове *конус херполходије*. Конус херполходије је непокретан у простору, а конус полходије непокретан у посматраном чврстом телу, а покретан у простору. У сваком тренутку времена имају та два конуса једну заједничку изводницу, вектор $\mathfrak{w}$ тренутне ротације, т. ј. тренутну осу ротације. Око те осе обрће се, у том моменту, уочено чврсто тело, а с њим и конус полходије да би се, у идућем тренутку, наредна изводница конуса полходије поклопила са наредном изводницом конуса херполходије и преузела улогу тренутне осе ротације. Одатле следује да се оба конуса у сваком тренутку додирују дуж њихове заједничке изводнице, другим речима, да се конус полходије котрља без клизања по конусу херполходије. Зато можемо ротационо кретање уоченог чврстог тела претставити и на овај начин. По конусу K_1 херполходије (сл. 18), непокретном у простору, котрља се без клизања конус K_2 полходије, носећи са собом уочено чврсто тело.

§ 47. Функција сила атракције коначних тела. У првом одељку ове књиге претпоставили смо да се небеска тела привлаче међусобно тако као када би маса сваког од тих тела била концентрисана у његовом тежишту. Сада је потребно да спитамо оправданост те претпоставке и отступање њено



сл. 19

стварности. Уочимо, дакле, једно тело произвољних димензија; о облику и распореду масе тога тела не морамо, за сада, чинити никакву нарочиту претпоставку. Положимо у тежиште тога тела почетак O ортогоналног координатног система $x—y—z$ (сл. 19), а ориентишимо тај координатни систем тако да се његове осе поклапају са главним осама инерције уоченога тела.

Главни моменти инерције тога тела нека буду означени са A, B, C. У тачки S, довољно удаљеној од уоченога тела, нека се налази концентрисана маса M. Питајмо каквом силом привлачи, према Њутновом закону гравитације, уочено тело масу M. Означимо ли са $\mathfrak{R}$ вектор положаја тачке S према почетку O нашег координатног система, а са $\mathfrak{r}$ вектор положаја произвољне тачке M или елемента масе dm уоченога тела, то је Њутнова сила $d\mathfrak{K}$ којом елеменат масе dm привлачи масу M претстављена обрасцем:

$$d\mathfrak{K} = -f\frac{M}{l^3}\mathfrak{l}\,dm, \tag{50}$$

где f претставља гравитациону константу, $\mathfrak{l}$ вектор положаја тачке S у односу на тачку M, а l модуо тога вектора. При томе је

$$\mathfrak{l} = \mathfrak{R} - \mathfrak{r}. \tag{51}$$

Целокупна привлачна сила уоченога тела на масу M претстављена је векторским интегралом

$$\mathfrak{K} = -\int_m f\frac{M}{l^3}\mathfrak{l}\,dm \tag{52}$$

извршеним преко целокупне масе m уоченога тела.

Вектор $-f\frac{M}{l^3}\mathfrak{l}\,dm$ може, као што смо показали н. пр. у § 21, бити претстављен као градиенат скалара $f\frac{M\,dm}{l}$ па је зато

$$\mathfrak{K} = \int_m \operatorname{grad}\frac{fM dm}{l}.$$

Како је, сасвим опште, произвољан, па и безконачан, збир градиената произвољних скалара једнак градиенту збира тих скалара, то је

$$\mathfrak{K} = \operatorname{grad}\int_m \frac{fMdm}{l}$$

или, ако ставимо

$$(53)\qquad U = fm\int\frac{dm}{l}\,,$$

$$(54)\qquad \mathfrak{K} = \operatorname{grad} U\,.$$

Из (51) следује

$$\mathfrak{l}^2 = \mathfrak{R}^2 - 2(\mathfrak{R}\mathfrak{r}) + \mathfrak{r}^2\,.$$

Пошто је $\mathfrak{l}^2 = l^2$; $\mathfrak{R}^2 = R^2$; $\mathfrak{r}^2 = r^2$, где R односно r означава модуо од $\mathfrak{R}$ односно $\mathfrak{r}$, то је

$$l^2 = R^2 - 2(\mathfrak{R}\mathfrak{r}) + r^2\,.$$

Из ове скаларне једначине следује

$$(55)\qquad \frac{1}{l} = \frac{1}{R}\left\{1 - 2\frac{(\mathfrak{R}\mathfrak{r})}{R^2} + \frac{r^2}{R^2}\right\}^{-\frac{1}{2}}\,.$$

Сада чинимо претпоставку да је тачка S толико удаљена од уоченога тела да више потенције од друге разломка $\frac{r}{R}$ можемо занемарити према јединици. Развијемо ли горњи израз у ред, то добивамо, занемарујући споменуте потенције и узимајући у обзир да је због $r < R$, $(\mathfrak{R}\mathfrak{r}) \leqq Rr$, $(\mathfrak{R}\mathfrak{r}) < R^2$,

$$(56)\qquad \frac{1}{l} = \frac{1}{R}\left\{1 + \frac{(\mathfrak{R}\mathfrak{r})}{R^2} - \frac{1}{2}\frac{r^2}{R^2} + \frac{3}{8}\frac{4(\mathfrak{R}\mathfrak{r})^2}{R^4}\right\}.$$

Стављајући ово у образац (53), добивамо:

$$(57)\qquad U = \frac{fM}{R}\int_m dm + \frac{fM}{R^3}\left(\mathfrak{R}\int_{\mathfrak{m}} \mathfrak{r}\,dm\right) - \frac{fM}{2R^3}\int_{\mathfrak{m}} r^2 dm + {}$$
$$+ \frac{3}{2}\frac{fM}{R^5}\int_{\mathfrak{m}} (\mathfrak{R}\mathfrak{r})^2 dm\,.$$

Интеграл

$$\int_m dm = m$$

претставља нам целокупну масу уоченога тела. Пошто тачка O, на коју се односе вектори положаја $\mathfrak{r}$, лежи у самом тежишту уоченога тела, то је

$$\int_m \mathfrak{r}\, dm = 0.$$

Зато је

$$U = \frac{fMm}{R} - \frac{1}{2}\frac{fM}{R^3}\int_m r^2 dm + \frac{3}{2}\frac{fM}{R^5}\int_m (\mathfrak{R}\mathfrak{r})^2 dm. \tag{58}$$

Означимо са x, y, z координате тачке M, а са X, Y, Z координате тачке S, то је

$$\left\{\begin{aligned} \mathfrak{r} &= x\mathfrak{i} + y\mathfrak{j} + z\mathfrak{k} \\ \mathfrak{R} &= X\mathfrak{i} + Y\mathfrak{j} + Z\mathfrak{k}, \end{aligned}\right. \tag{59}$$

дакле

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2; \qquad R^2 = X^2 + Z^2 + Y^2$$

$$(\mathfrak{R}\mathfrak{r}) = Xx + Yy + Zz$$

$$(\mathfrak{R}\mathfrak{r})^2 = X^2x^2 + Y^2y^2 + Z^2z^2 + 2XYxy + 2YZyz + 2ZXzx.$$

Ставимо ли ове обрасце у (58), то ће из њега чланови са xy, yz, zx исчезнути, јер, пошто су координатне осе, у исти мах, главне осе инерције, то је

$$\int_m zy\, dm = \int_m yz\, dm = \int_m zx\, dm\ .$$

Зато је

$$U = f\frac{Mm}{R} - \frac{1}{2}\frac{fM}{R^5}(X^2 + Y^2 + Z^2)\int_m (x^2 + y^2 + z^2)\, dm +$$
$$+ \frac{3}{2}\frac{fM}{R^5}\left\{X^2\int_m x^2\, dm + Y^2\int_m y^2\, dm + Z^2\int_m z^2 dm\right\},$$

т. ј.

$$U=\frac{fMm}{R}+\frac{1}{2}\,\frac{fM}{R^5}\left\{X^2\int\limits_m(2x^2-y^2-z^2)\,dm+Y^2\int\limits_m(2y^2-z^2-\right.$$

$$\left.-x^2)dm+Z^2\int\limits_m(2z^2-x^2-y^2)dm\right\}.$$

Интеграли

$$(60)\qquad A=\int\limits_m(y^2+z^2)dm\ ;\qquad B=\int\limits_m(z^2+x^2)\ m\ ;$$

$$C=\int\limits_m(\lambda^2+y^2)dm$$

претстављају нам моменте инерције уоченога тела обзиром на координатне осе, т. ј. главне моменте инерције. Зато је:

$$(61)\qquad U=f\,\frac{Mm}{R}+\frac{1}{2}\,\frac{fMX^2}{R^5}\,(B+C-2A)+$$

$$+\frac{1}{2}\,\frac{fMY^2}{R^5}\,(C+A-2B)+\frac{1}{2}\,\frac{fMZ^2}{R^5}\,(A+B-2C).$$

Овај израз претставља нам, према (54), функцију сила атракције уоченог тела; његов градиенат даје нам силу $\mathfrak{K}$ којом уочено тело привлачи масу M. Кад би било

$$A=B=C,$$

т. ј. када би елипсоид инерције уоченога тела био лопта, онда би било

$$U=f\,\frac{Mm}{R}$$

дакле

$$\mathfrak{K}=\operatorname{grad} U=-f\,\frac{Mm}{R^3}\,\mathfrak{R},$$

т. ј. уочено тело привлачило би масу M тако као кад би целокупна маса m тога тела била концентрисана у његовом тежишту. Такву смо претпоставку били учинили у првом одељку ове књиге, при испитивању транслаторног кретања небеских тела. Она би била строго испуњена када би та тела била потпуне лопте, а саграђена из концентричних слојева од којих би сваки за себе био хомоген. Иако тај случај није строго остварен у природи, отступање од њега осећа се само код кретања нашег Месеца, а из тих отступања може се одредити спљоштеност наше Земље, о чему ће још бити говора.

Литература уз други одељак. (Види и ону саоштену у § 8.) *D' Alembert*, Traité de la précession des équinoxes, Paris 1749. — *Poisson*, Mémoire sur le mouvement de la Terre autour de son centre de gravité. Paris 1827, 1830. — *Darwin G. H.* Scientific Papers. Vol. 3. Cambridge 1910. — *Oppolzer*, Lehrbuch zur Bahnbestimmung der Kometen und Planeten. 2 Bde. 2 Aufl. Leipzig 1882. — *Schiaparelli*, De la rotation de la Terre sous l' influence des actions géologiques. St. Petersbourg 1889. — *Klein* und *Sommerfeld*, Ueber die Theorie des Kreisels. Leipzig 1897 - 1903. — *De Ball*, Theorie der Drehung der Erde. Wien 1908. — *Bauschinger*, Bahnbestimmung der Himmelskörper. Leipzig 1906. — *Poincaré*, Leçons sur les hypothèses cosmogoniques. Paris 1911. — *Prey*, *Mainka* und *Tams*, Einführung in die Geophysik. Berlin 1922. — *Milankovitch*, Abschnitte „Drehbewegungen der Erde" und „Säkulare Polverlagerungen" im Band I des Gutenbergschen Handbuches der Geophysik. Berlin 1933.

ГЛАВА ЈЕДАНАЕСТА

Ротација небеских тела у флуидном стању.

§ 48. Зонална ротација. Неки чланови нашег планетског система налазе се још у флуидном стању, т. ј. у течном и газовитом. И наша Земља налазила се, пре но што се покрила чврстом кором, у таквом стању. Зато је од интереса испитати, на који начин могу таква небеска тела да ротирају око једне непромењено управљене осе у простору. При томе ћемо претпоставити да се медиум из којег је такво тело саграђено покорава законима флуида који не подлежи унутрашњем трењу и вискозитету. Под том претпоставком, важи за сваки елементарни делић уоченога тела једначина хидродинамике:

$$\frac{d\mathfrak{v}}{dt} = \mathfrak{P} - \frac{1}{\varrho}\operatorname{grad} p \,. \tag{1}$$

При томе означава $\mathfrak{v}$ вектор брзине, $\mathfrak{P}$ силу која дејствује на јединицу масе, ϱ густину, p притисак, а t време.

Поред те основне једначине, важи и једначина континуитета

$$\frac{d\varrho}{dt} + \operatorname{div}(\varrho\,\mathfrak{v}) = 0 \tag{2}$$

и карактеристична једначина. Ова карактеристична једначина има за идеалне гасове овај облик:

$$pv = R_0\theta \tag{3}$$

где v означава запремину јединицу масе, R_0 гасну константу, а θ апсолутну температуру. Како је $v=\frac{1}{\varrho}$, то можемо карактеристичној једначини дати и овај облик:

$$F(p,\varrho,\theta)=0. \tag{4}$$

За нестишљиве течности важи место (2) ова једначина:

$$div\, \mathfrak{v}=0, \tag{5}$$

а место (3) ова:

$$\varrho=\frac{\varrho_0}{1+ku}\ , \tag{6}$$

где k означава коефициенат дилатације, а ϱ_0 густину при температури $u=0$.

У нашим испитивањима задовољићемо се, једноставности ради, са специјалним облицима карактеристичне једначине. За изотермичне промене гасова, т. ј. такве при константној температури $\theta=\theta_0$, добивамо, као карактеристичну једначину,

$$p=R_0\,\theta_0\,\varrho\ , \tag{7}$$

а за адиабатичне промене ову:

$$p=p_0\,\varrho^{\frac{c'}{c}} \tag{8}$$

где c односно c' означава специфичну топлоту при константној запремини, односно при константном притиску. Обе једначине (7) и (8) овога су облика:

$$\varrho=f(p) \tag{9}$$

па ћемо се у будуће служити само карактеристичном једначином таквога облика. Уведимо у наше рачуне скаларну функцију

$$V(p)=\int_{p_0}^{p}\frac{dp}{\varrho}\ , \tag{10}$$

то је

$$\operatorname{grad} V = \frac{\partial V}{\partial x}\mathfrak{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\mathfrak{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\mathfrak{k} = \frac{1}{\varrho}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\mathfrak{i} + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial p}{\partial y}\mathfrak{j} + \frac{\partial p}{\partial z}\mathfrak{k}\right) = \frac{1}{\varrho}\operatorname{grad} p .$$

Узмемо ли још у обзир да се сила $\mathfrak{P}$, као гравитациона сила, може такође претставити као градиенат једне скаларне функције сила U, то добивамо, ако ставимо

(11) $$U - V = Q$$

место (1) ову једначину:

(12) $$\frac{d\mathfrak{v}}{dt} = \operatorname{grad} Q .$$

Одаберемо ли у оси ротације, око које се, према учињеној претпоставци, уочено небеско тело обрће, једну сталну тачку O па означимо ли са $\mathfrak{r}$ вектор положаја уоченог делића у односу на тачку O, а са $\mathfrak{n}$ јединични вектор позитивне гране осе ротације, то је

(13) $$\mathfrak{v} = w\,[\mathfrak{n}\,\mathfrak{r}] .$$

Јединични вектор $\mathfrak{n}$ је, према учињеној претпоставци, сталан вектор, но скаларна вредност w угаоне брзине може за разне делове уоченога тела бити различита, дакле бити функција од $\mathfrak{r}$; од ње захтевамо само то да не зависи од времена. Зато је

(14) $$\frac{d\mathfrak{v}}{dt} = w\left[\mathfrak{n}\,\frac{d\mathfrak{r}}{dt}\right] = w\,[\mathfrak{n}\,\mathfrak{v}] = w^2\,[\mathfrak{n}\,[\mathfrak{n}\,\mathfrak{r}]] .$$

Спустимо ли из положаја M уоченог делића нормалу MS на осу ротације па означимо ли вектор $\overrightarrow{SM}$ са $\mathfrak{R}$, то је

(15) $$[\mathfrak{n}\,[\mathfrak{n}\,\mathfrak{r}]] = -\mathfrak{R}.$$

Означимо ли са R модуо вектора $\mathfrak{R}$, то ваља при одређивању градиента од R имати у виду да су, у овом случају, еквискаларне површине кружни цилиндри са осом OS, да градиенат стоји нормално на тим површинама, а да му је модуо једнак $\frac{\partial R}{\partial R}=1$. Зато је

$$\operatorname{grad} R = \frac{\mathfrak{R}}{R}\,. \tag{16}$$

Из (12), (14), (15) и (16) следује:

$$\frac{d\mathfrak{v}}{dt} = -w^2 R \operatorname{grad} R = \operatorname{grad} Q. \tag{17}$$

Помножимо ли ову једначину скаларно са једним вектором $d\mathfrak{f}$ који нека претставља једно произвољно елементарно померање, то добивамо

$$\operatorname{grad} Q\, d\mathfrak{f} = -w^2 R \operatorname{grad} R\, d\mathfrak{f}. \tag{18}$$

Како је, сасвим опште,

$$\operatorname{grad} W\, d\mathfrak{f} = dW$$

где dW означава промену скалара W која одговара померању $d\mathfrak{f}$, то је

$$dQ = -w^2 R dR\,. \tag{19}$$

У овој једначини стоји лево егзактни један диференцијал па зато мора и $w^2 RdR$ претстављати један егзактни диференцијал, т. ј, w^2 сме да буде зависно само од R, па мора да буде функција облика

$$w = F(R). \tag{20}$$

Ставимо ли, дакле,

$$\omega^2 R = \Phi'(R), \tag{21}$$

то је због (19)

$$dQ + \Phi'(R) dR = 0$$

одакле следује интеграцијом, узимајући у обзир (11),

$$U - V + \Phi(R) = \text{const.} \tag{22}$$

Нивоске површине, т. ј. површине једнаког притиска добивају се дајући величини V једну сталну вредност. Те су површине претстављене овом једначином:

$$U + \Phi(R) = C\,. \tag{23}$$

Из претходног следује да уочено флуидно небеско тело може, заиста, вршити ротационо кретање око једне стално управљене осе у простору, али тада угаона брзина w може бити само функција од R. Пошто, дакле, једној одређеној вредности од R одговара једна одређена вредност од w, то имају сви делићи који се налазе на једном те истом кружном цилиндру којега се оса поклапа са осом ротације једну те исту угаону брзину. Сваки такав цилиндар ротира, дакле, као каква чврста материјална површина, око своје осе, а сваки такав цилиндар има своју засебну угаону брзину. Спољa посматрано, ротира уочено небеско тело тако да сваки његов упоредник, пресек површине небеског тела са једним таквим цилиндром, има своју засебну угаону брзину. Таква ротација небеских тела, какву врши, као што смо већ споменули наше Сунце, зове се зонална ротација.

§ 49. Апелова теорема. При зоналној ротацији, какву смо упознали у прошлом параграфу, појављују се између појединих цилиндричних слојева, који се обрћу разном угаоном брзином, силе трења које ће бити пропорционалне градиенту тих брзина, дакле изводу $F'(R)$. Те силе ће тежити да изједначе угаоне брзине појединих слојева, али ће, пошто сваким кораком на том изненађењу те силе постају све слабије, требати, макар теоретски, бесконачно време док се дође до коначног циља. Но не само теоретски, него и стварно, протећи ће, због огромне масе небеских тела, свакако изванредно дуго време док се све ротације изједначе. Онда ће се небеско тело, иако је још остало флуидално, обртати као какво чврсто тело. Испитајмо под којим условима може наступити тај случај, претпостављајући да на уочено небеско тело не дејствује никакав спољни моменат заокретања.

Постављено питање испитао је *Апел* и, својим одговором, поставио своју теорему. Ми ћемо се овде послужити *Жардецковим* доказом те теореме.

Из једначине (12) следује:

$$\text{rot}\,\frac{d\mathfrak{v}}{dt} = \text{rot}\,\text{grad}\,Q\,, \tag{24}$$

а пошто је ротација градиента увек једнака нули, то је

$$\text{rot}\,\frac{d\mathfrak{v}}{dt} = 0. \tag{25}$$

Обрће ли се уочено тело као какво чврсто, то је према једначини (34) претходне главе

$$\mathfrak{v} = [\mathfrak{w}\mathfrak{r}]\,. \tag{26}$$

За сада не смемо још тврдити да је оријентација осе ротације стална у простору; зато вектор $\mathfrak{w}$ може бити функција времена, но у сваком тренутку један те исти за све делове уоченог тела. Под тим претпоставкама следује из (25) и (26)

$$\text{rot}\,\frac{d}{dt}[\mathfrak{w}\mathfrak{r}] = \text{rot}\left[\frac{d\mathfrak{w}}{dt}\,\mathfrak{r}\right] + \text{rot}\left[\mathfrak{w}\,\frac{d\mathfrak{r}}{dt}\right] = 0\,, \tag{27}$$

т. ј. пошто је $\frac{d\mathfrak{r}}{dt} = \mathfrak{v}$,

$$\text{rot}\left[\frac{d\mathfrak{w}}{dt}\,\mathfrak{r}\right] + \text{rot}\Big[\mathfrak{w}\,[\mathfrak{w}\mathfrak{r}]\Big] = 0\,. \tag{28}$$

Означимо са $\mathfrak{n}_1$, $\mathfrak{n}_2$, $\mathfrak{n}_3$ јединичне векторе у правцу мирујућег координатног система, са ω_1, ω_2, ω_3 координате вектора $\mathfrak{w}$, а са x, y, z координате вектора положаја $\mathfrak{r}$, то је

$$\left\{\begin{aligned} \mathfrak{w} &= \omega_1\mathfrak{n}_1 + \omega_2\mathfrak{n}_2 + \omega_3\mathfrak{n}_3 \\ \mathfrak{r} &= x\,\mathfrak{n}_1 + y\,\mathfrak{n}_2 + z\,\mathfrak{n}_3 \end{aligned}\right. \tag{29}$$

$$\left[\frac{d\mathfrak{w}}{dt}\,\mathfrak{r}\right] = \begin{vmatrix} \mathfrak{n}_1 & \mathfrak{n}_2 & \mathfrak{n}_3 \\ \frac{d\omega_1}{dt} & \frac{d\omega_2}{dt} & \frac{d\omega_3}{dt} \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

т. j.

$$\left[\frac{d\mathfrak{w}}{dt}\,\mathfrak{r}\right] = \left(\frac{d\omega_2}{dt}\,z - \frac{d\omega_3}{dt}\,y\right)\mathfrak{n}_1 + \left(\frac{d\omega_3}{dt}\,x - \frac{d\omega_1}{dt}\,z\right)\mathfrak{n}_2 + \\ + \left(\frac{d\omega_1}{dt}\,y - \frac{d\omega_2}{dt}\,x\right)\mathfrak{n}_3$$

$$\operatorname{rot}\left[\frac{d\mathfrak{w}}{dt}\,\mathfrak{r}\right] = \begin{vmatrix} \mathfrak{n}_1 & \mathfrak{n}_2 & \mathfrak{n}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \left(\frac{d\omega_2}{dt}\,z - \frac{d\omega_3}{dt}\,y\right) & \left(\frac{d\omega_3}{dt}\,x - \frac{d\omega_1}{dt}\,z\right) & \left(\frac{d\omega_1}{dt}\,y - \frac{d\omega_2}{dt}\,x\right) \end{vmatrix}.$$

При диференцијацијама, назначених у претходној детерминанти, а према напред реченом, имају се изводи $\frac{d\omega_1}{dt}$, $\frac{d\omega_2}{dt}$, $\frac{d\omega_3}{dt}$ сматрати за независне од x, y, z. Зато је

$$\operatorname{rot}\left[\frac{d\mathfrak{w}}{dt}\,\mathfrak{r}\right] = \left(\frac{d\omega_1}{dt} + \frac{d\omega_1}{dt}\right)\mathfrak{n}_1 + \left(\frac{d\omega_2}{dt} + \frac{d\omega_2}{dt}\right)\mathfrak{n}_2 + \left(\frac{d\omega_2}{dt} + \frac{d\omega_3}{dt}\right)\mathfrak{n}_3,$$

т. j.

$$\operatorname{rot}\left[\frac{d\mathfrak{w}}{dt}\,\mathfrak{r}\right] = 2\,\frac{d\mathfrak{w}}{dt}\,. \tag{30}$$

Како је, по једном општем правилу векторскога рачуна,

$$[\mathfrak{w}\,[\mathfrak{w}\,\mathfrak{r}]] = (\mathfrak{r}\mathfrak{w})\,\mathfrak{w} - w^2\mathfrak{r}\,,$$

то је

$$\operatorname{rot}[\mathfrak{w}\,[\mathfrak{w}\,\mathfrak{r}]] = \operatorname{rot}(\mathfrak{r}\,\mathfrak{w})\,\mathfrak{w} - w^2 \operatorname{rot}\mathfrak{r}\,. \tag{31}$$

Пошто је ротор вектора положаја увек једнак нули, т. j.

$$\operatorname{rot}\mathfrak{r} = 0\,. \tag{32}$$

а сем тога

$$\operatorname{rot}(\mathfrak{r}\mathfrak{w})\,\mathfrak{w} =$$

$$= \begin{vmatrix} \mathfrak{n}_1 & \mathfrak{n}_2 & \mathfrak{n}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ (x\omega_1 + y\omega_2 + z\omega_3)\omega_1 & (x\omega_1 + y\omega_2 + z\omega_3)\omega_2 & (x\omega_1 + y\omega_2 + z\omega_3)\omega_3 \end{vmatrix},$$

то добивамо, узимајући у обзир да су координате $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ независне од координата x, y, z,

$$\operatorname{rot}(\mathfrak{r}\,\mathfrak{w})\,\mathfrak{w} = 0 \tag{33}$$

т. ј.

$$\operatorname{rot}[\mathfrak{w}\,[\mathfrak{w}\,\mathfrak{r}]] = 0 \tag{34}$$

Из (28), (30) и (34) следује

$$\frac{d\mathfrak{w}}{dt} = 0 \tag{35}$$

што значи да вектор $\mathfrak{w}$ мора бити независан од времена.

У нашем случају, где се уочено тело креће као чврсто, важе Ојлерове једначине (42), § 44, у које ваља, због учињене претпоставке, ставити $M_1 = M_2 = M_3 = 0$. На тај начин добивамо

$$\left\{ \begin{aligned} & A\frac{dw_1}{dt} + (C - B)\,w_2\,w_3 = 0 \\ & B\frac{dw_2}{dt} + (A - C)\,w_3\,w_1 = 0 \\ & C\frac{dw_3}{dt} + (B - A)\,w_1\,w_2 = 0\,. \end{aligned} \right. \tag{36}$$

Овде нам $w_1\,w_2\,w_3$ претстављају координате вектора $\mathfrak{w}$ у покретном координатном систему којега се осе поклапају са главним осама инерције уоченога тела. И ако је вектор $\mathfrak{w}$ независан од времена, не морају његове координате w_1, w_2, w_3 у покретном координатном систему бити константне него само његов модуо w. Он је дат овом једначином:

(37) $$w_1^2+w_2^2+w_3^2=w^2 \, .$$

Помножимо једначине (36) редом са w_1, w_2, w_3, па образујмо њихов збир, то добивамо:

$$Aw_1\frac{dw_1}{dt}+Bw_2\frac{dw_2}{dt}+Cw_3\frac{dw_3}{dt}=0 \, ,$$

т. ј. после извршене интеграције,

(38) $$Aw_1^2+Bw_2^2+Cw_3^2=\text{const} \, .$$

Вектор $\mathfrak{G}$ импулса је, у нашем случају, због отсуства спољњег момента, константан, а према (41), § 44, претстављен овим обрасцем:

$$\mathfrak{G}_0=Aw_1\mathfrak{i}+Bw_2\mathfrak{j}+Cw_3\mathfrak{k} \, .$$

Означимо ли његов модуо са G_0, то добивамо квадрирањем предње једначине:

(39) $$A^2w_1^2+B^2w_2^2+C^2w_3^2=G_0^2 \, .$$

Једначине (37), (38) и (39) чине један систем од три једначине помоћу којих једначина можемо величине w_1, w_2, w_3 изразити осталим величинама које се појављују у тима једначинама и које су све саме константе. Зато морају и w_1, w_2, w_3 бити константне величине. Зато је

(40) $$\frac{dw_1}{dt}=\frac{dw_2}{dt}=\frac{dw_3}{dt} \, .$$

Због тога добивамо место (36)

(41) $$\left\{\begin{aligned}(C-B)w_2w_3&=0\\(A-C)w_3w_1&=0\\(B-A)w_1w_2&=0\end{aligned}\right.$$

Ове три једначине могу, ако су моменти инерције A, B, C различити један од другог, бити задовољене само онда ако су две од величина w_1, w_2, w_3, у исти мах, једнаке нули, т. ј. ако се вектор ротације $\mathfrak{w}$ поклапа са једном од трију главних оса инерције. Сем тога могу предње једначине и на тај начин бити задовољене да су две од величина A, B, C међусобно једнаке, н. пр. $A = B$, а да је компонента вектора $\mathfrak{w}$ нормална на раван тих двеју главних оса инерције, дакле у одабраном примеру компонента w_3, једнака нули. У таквом случају дегенерише елипсоид инерције на ротациони елипсоид те вектор ротације $\mathfrak{w}$ пада у раван екватора тог ротационог елипсоида па се поклапа опет са једном од главних оса инерције. Ако су једначине (41) задовољене тим да је $A = B = C$, онда елипсоид инерције постаје лопта па се оса ротације, какогод она била оријентисана, може сматрати за главну осу инерције. Из свега тога следује Апелова теорема: Ротација флуидног тела може имати само онда карактер ротације чврстог ако она следује око једне од главних оса инерције.

§ 50. Услови равнотеже. Обрће ли се уочено небеско тело као чврста целина око једне стално управљене осе константном угловном брзином

$$w = n, \tag{42}$$

онда можемо, као што је то већ учињено у § 21, покретни координатни систем, везан са телом тако да се његова оса z подудара са осом ротације, сматрати за непомичан али узети да на сваки делић тела дејствује, сем гравитационе силе $\mathfrak{P}$, центрифугална сила $\mathfrak{F}$ и Кориолисова сила $\mathfrak{C}$. Центрифугална сила дејствује у правцу вектора $\mathfrak{R}$ дефинисаног у § 49 те је, израчуната на јединицу масе, претстављена, према (4), § 21, а употребом горњих ознака, овим обрасцем:

$$\mathfrak{F} = n^2 \mathfrak{R}\,. \tag{43}$$

Истим начином као и у § 21, можемо ту силу претставити као градиенат скалара овим обрасцем:

$$\mathfrak{F} = \mathrm{grad}\,\frac{1}{2}\,n^2 R^2. \tag{44}$$

Кориолисова сила на јединицу масе претстављена је обрасцем

$$\mathfrak{C} = 2[\mathfrak{v}\mathfrak{w}]. \tag{45}$$

Место једначине (1) добивамо сада ову:

$$\frac{d\mathfrak{v}}{dt} = \mathfrak{P} + \mathfrak{F} + \mathfrak{C} - \frac{1}{\varrho}\,\mathrm{grad}\;p\,. \tag{46}$$

Питајмо сада за услове равнотеже, т. ј. за оне под којима ће се сви делићи уоченога тела налазити у равнотежи према покретном координатном систему. Тада мора брзина $\mathfrak{v}$ произвољног делића у односу на тај систем бити једнака нули па зато добивамо из (45) и (46) ову једначину:

$$\mathfrak{P} + \mathfrak{F} = \frac{1}{\varrho}\,\mathrm{grad}\,p\;. \tag{47}$$

Како је, према оном што је речено у § 48,

$$\mathfrak{P} = \mathrm{grad}\;U, \tag{48}$$

то следује из (47), (48) и (44)

$$\mathrm{grad}\;U + \mathrm{grad}\,\frac{1}{2}\,n^2 R^2 = \frac{1}{\varrho}\;\mathrm{grad}\;p$$

$$\mathrm{grad}\;p = \varrho\;\mathrm{grad}\;(U + \frac{1}{2} n^2 R^2).$$

Ставимо ли, дакле,

$$W = U + \frac{1}{2} n^2 R^2, \tag{49}$$

то добивамо

$$\mathrm{grad}\,p = \varrho\;\mathrm{grad}\;W. \tag{50}$$

Помножимо ли ову једначину скаларно са $d\mathfrak{l}$, то добивамо, истим начином као што смо извели (19) из (18),

$$dp = \varrho\, dW. \tag{51}$$

При померању дуж једне еквискаларне површине скалара W, т. ј. дуж површине на којој је функција W гравитационих и центрифугалних сила константна, мора бити $dW = 0$, т. ј. због (51) такође $dp = 0$. Зато су еквипотенцијалне површине, у исти мах, и површине истога притиска. Због тога је

$$(52) \qquad p = f(W)$$

$$\frac{dp}{dW} = f'(W),$$

т. ј. због (51)

$$(53) \qquad \varrho = f'(W).$$

Ова једначина казује да се, у случају равнотеже, површине исте густине поклапају са еквипотенцијалним површинама.

Из општег облика (4) карактеристичне једначине, т. ј. из

$$F(p, \varrho, \theta) = 0,$$

следује да је, у случају равнотеже, на еквипотенцијалној површини, пошто је на њој p и ϱ константно, и температура θ једна те иста, т. ј. те су површине, у исти мах, и изотермичне површине.

§ 51. Клероова теорема. Из претпоставке да је наша Земља заузела онај облик који одговара услову равнотеже флуидног небеског тела, извео је Клеро своју теорему о спљоштености наше Земље, са којом ћемо се сада упознати. Из предњих услова равнотеже следује да Земљина површина мора бити једна еквипотенцијална површина, претстављена једначином:

$$(54) \qquad W = W_0.$$

При томе је, према (49),

$$(55) \qquad W = U + \frac{1}{2} n^2 R^2.$$

Функција сила U атракције небеског тела на масу M, изведена у § 47, претстављена је обрасцем (61) тог параграфа.

За нашу Земљу важи, у великој мери, једнакост

$$(56) \qquad A = B.$$

Ставимо ли ово у споменути образац (61) па заменимо ли у њему масу M са јединицом масе, т. ј. ставимо ли $M=1$, а означимо ли сада масу Земље са M, т. ј. заменимо ли у оном обрасцу m са M, а радиусвектор R са радиусвектором Земљине површине r, то добивамо

$$(57) \qquad U=f\frac{M}{r}+\frac{1}{2}f\frac{X^2+Y^2-2Z^2}{r^5}(C-A).$$

Овај образац претставља нам функцију сила привлачне снаге Земљине на јединицу масе која се налази на месту X, Y, Z Земљине површине, при чему нам M претставља целокупну масу Земље.

Уведимо геоцентричне поларне координате, т. ј. споменути радиусвектор r, геоцентричну латитуду φ и географску дужину ψ, онда је

$$(58) \qquad X=r\cos\varphi\cos\psi\,; \qquad Y=r\cos\varphi\sin\psi\,;$$
$$Z=r\sin\varphi\,.$$

За отстојање од осе ротације у каквом значењу се оно, под ознаком R, појавило у обрасцу (55), ваља, при употреби нових означења, ставити

$$(59) \qquad R=r\cos\varphi\,.$$

Сада добива образац (55) овај облик:

$$(60) \qquad W=f\frac{M}{r}+\frac{f}{2r^3}(C-A)(1-3\sin^2\varphi)+\frac{n^2r^2}{2}\cos^2\varphi\,.$$

Извод овог израза по r даје убрзање теже у тачки r, φ, ψ, а како је то убрзање сматрано за позитивно када је наперено према доле, т. ј. у правцу $-r$, то је

$$(61) \qquad g=-\frac{\partial W}{\partial r}$$

т. ј.

$$(62) \qquad g = \frac{fM}{r^2}\left[1 + \frac{3}{2}\,\frac{C-A}{r^2M}\,(1-3\sin^2\varphi) - \frac{n^2r^3}{fm}\cos^2\varphi\right].$$

Тражимо ли убрзање теже на Земљиној површини, то можемо у претходној загради, пошто су њен други и трећи члан малени према јединици, r заменити са радиусом a Земљиног екватора. На тај начин добивамо

$$(63) \qquad g = \frac{fM}{r^2}\left[1 + \frac{3}{2}\,\frac{C-A}{a^2M}\,(1-3\sin^2\varphi) - \frac{n^2a^3}{fM}\cos^2\varphi\right].$$

Исто упрошћење можемо извршити и у обрасцу (60) ако онде ставимо $W = W_0$. Ако из, на тај начин добивене, једначине израчунамо r, добивамо:

$$(64) \qquad r = \frac{fM}{W_0}\left[1 + \frac{C-A}{2a^2M}(1-3\sin^2\varphi) + \frac{n^2a^3}{2fM}\cos^2\varphi\right].$$

Елиминишемо ли, помоћу (64), r из (63), добивамо:

$$(65) \qquad g = \frac{W_0^2}{fM}\left[1 + \frac{3}{2}\,\frac{C-A}{a^2M}(1-3\sin^2\varphi) - \frac{n^2a^3}{fM}\cos^2\varphi\right]\cdot$$
$$\cdot\left[1 + \frac{C-A}{2a^2M}(1-3\sin^2\varphi) + \frac{n^2a^3}{2fM}\cos^2\varphi\right]^{-2}.$$

Развијемо ли последњу заграду у ред и занемаримо ли више потенције њених споредних чланова, то добивамо:

$$(66) \qquad g = \frac{W_0^2}{fM}\left[1 + \frac{C-A}{2a^2M} - \frac{2n^2a^3}{fM}\right]\left[1 + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{2n^2a^3}{fM} - \frac{3}{2}\,\frac{C-A}{a^2M}\right)\sin^2\varphi\right].$$

Означимо са g_a убрзање теже на екватору, а са g_p њено убрзање на половима, то добивамо, стављајући у (66) $\varphi = 0$, а затим $\varphi = \frac{\pi}{2}$,

$$(67) \qquad g_a = \frac{W_0^2}{fM}\left(1 + \frac{C-A}{2a^2M} - \frac{2n^2a^3}{fM}\right)$$

$$g_p = (1 + \beta)\, g_a \tag{68}$$

при чему смо ставили

$$\beta = \frac{2n^2a^3}{fM} - \frac{3}{2}\,\frac{C-A}{a^2M} \;. \tag{69}$$

Зато је

$$\beta = \frac{g_p - g_a}{g_a} \;, \tag{70}$$

т. ј.

$$g = g_a + (g_p - g_a)\sin^2\varphi \;. \tag{71}$$

Једначину (64) можемо довести на овај облик:

$$r = \frac{fM}{W_0}\left[1 + \frac{C-A}{2a^2M} + \frac{n^2a^3}{2fM}\right]\left[1 - \left(\frac{n^2a^3}{2fM} + \frac{3}{2}\,\frac{C-A}{a^2M}\right)\sin^2\varphi\right]. \tag{72}$$

За $\varphi = 0$ постаје $r = a$, а за $\frac{\pi}{2}$ постаје $r = c$ ако са c означимо поларну полуосу меридијанског пресека Земље. Зато је

$$a = \frac{fM}{W_0}\left[1 + \frac{C-A}{2aM} + \frac{n^2a^3}{2fM}\right] \tag{73}$$

$$c = a\left[1 - \left(\frac{n^2a^3}{2fM} + \frac{3}{2}\,\frac{C-A}{a^2M}\right)\right]. \tag{74}$$

Ставимо ли

$$\frac{n^2a^3}{2fM} + \frac{3}{2}\,\frac{C-A}{a^2M} = \nu, \tag{75}$$

то следује из (74)

$$\nu = \frac{a-c}{a}, \tag{76}$$

а из (72), (73) и (74)

$$r = a\,(1 - \nu \sin^2 \varphi). \tag{77}$$

Ово је једначина меридијанског пресека Земљиног која, при малом ν, претставља елипсу. Величина ν, претстављена обрасцем (76), зове се *Земљина сплоштеност.*

Из једначина (69) и (75) следује

$$\nu + \beta = \frac{5}{2}\,\frac{n^2 a^3}{fM}, \tag{78}$$

т. ј. узевши у обзир (70),

$$\nu = \frac{5}{2}\,\frac{n^2 a^3}{fM} - \frac{g_p - g_a}{g_a}. \tag{79}$$

Ова једначина *изражава Клероову* теорему. Помоћу ње можемо, мерењем убрзања теже на екватору и на половима, одредити спљоштеност ν Земље. Помоћу таквих мерења и предњег обрасца добило се

$$\nu = \frac{1}{298}. \tag{80}$$

Спљоштеност Земље *може се одредити и* директним премеравањима *Земљине* лопте, а као што смо споменули у § 47, и из неједнакости Месечевог кретања. Нумеричке вредности за спљоштеност Земље добивене на та два начина слажу се врло добро са горе саопштеном вредности, што доказује да је Земља заузела, заиста, онај облик који *одговара хидростатској* равнотежи.

ГЛАВА ДВАНАЕСТА

Прецесија Земљине осе.

§ 52. **Историјски податци.** *Клаудиус Птолемајос* саопштава у свом Зборнику „да је *Хипархос*, упоређујући тачно посматрана помрачења Месеца својега доба са онима која је, давно пре њега, посматрао *Тимохарис*, увидео да је звезда Спика удаљена у његово доба од јесење равнодневнице, противно реду знакова зодиака, за 6^0, у доба Тимохариса била удаљена за скоро 8^0". Слична померања нашао је Хипархос и код других звезда посматраних од Тимохариса и *Аристила*. При томе се показало да се тим померањима није променило отстојање звезда од еклиптике, т.ј. њихова небеска латитуда. Из свега тога закључио је Хипархос, са извесном резервом, „да се равнодневнице сваке године померају за $^1/_{100}{}^0$ у ретроградном смислу." Овим саопштењем Птолемаја утврђен је, и ако се списи Хипархови који се баве тим питањем нису сачували, велики астрономски проналазак Хипархов о којем смо већ говорили у првој глави ове књиге. Да ли су већ халдејски или други који стари посматрачи неба приметили то померање равнодневница, није се могло докучити поред свих истраживања по том питању.

Птолемајос је овој појави, која је касније названа *прецесијом равнодневница* посветио скоро целу седму књигу свог Зборника, у којој саопштава и своја властита посматрања која су га, упоређена са онима што су их извршили Тимохарис, Аристил и Хипархос, осведочила, ван сваке сумње, да се сфера звезда некретница, поред своје дневне ротације око небеских полова, обрће, у реду знакова зодиака, око осе која пролази кроз полове еклиптике, услед чега се равнодневнице померају у противном смислу, преваљујући за сто година један степен или 36″ у години. Овај број нашао је, као што смо видели, већ Хипархос па је због тога Птолемајос неоправдано осумњичен од *Деламбра* и *Танерија* да свој каталог звезда није добио астрономским посматрањем, него једноставном екстраполацијом Хипарховог каталога.

Ушавши у Птолемајов Зборник, где је опширно, јасно и научно обрађена, постала је прецесија равнодневница саставним делом старе астрономије и предметом даљег испитивања и посматрања. *Албатегниус* је, упоређујући позиције звезда, које је око године 879 сам одредио, са онима како су саопштене у Птолемајовом каталогу, израчунао да се равнодневнице померају за 55″ у години. *Насир Един* је око 1260 године нашао за то померање нумеричку вредност од 51″, чиме се веома приближио стварној вредности тог померања од 50″, 25.

Александријска школа приписивала је, као што смо саопштили, прецесију равнодневница померању сфере звезда некретница. Када је *Коперник* изградио свој хелиоцентрични систем, са мирујућом сфером звезда некретница, растумачио је, сасвим правилно, прецесију као последицу промена оријентације Земљине осе, али је то секуларно померање комбиновао, без икакве потребе, са годишњим заокретањем Земљине осе.

Њутн је, својим законом гравитације, нашао прави узрок прецесије и растумачио њен механизам па је та појава постала један од многих речитих аргумената за исправност његове науке. Испитујући, у другом одељку треће књиге својих Принципија, неједнакости Месечевог кретања, нашао је Њутн да присуство Сунца, које при кретању Месеца око Земље игра улогу небеског тела које изазива поремећај, има за последицу ретроградно кретање чворова Месечеве путање. Дошавши до овог сазнања, могао је Њутн, у четвртом одељку треће књиге, да покаже да спљоштеност наше Земље, због које се њена екваторијална испупченост може сматрати као скуп сателита, мора изазвати појаву сличну пређашњој. Сада нам улогу чворова путања споменутих сателита играју пресеци небеског екватора са еклиптиком, т. ј. равнодневнице; оне ће се, дакле, обрнуто стварном дневном кретању Земље, померати дуж еклиптике, као што то захтева појава прецесије. На тај скуп замишљених сателита дејствују два небеска тела која изазивају поремећај, Сунце и Месец, па се њихова дејства сабиру, но како се пресек њихових путања, као што смо видели, помера ретроградно, вршећи за 19 година потпуно једно обилажење, то ће из тога следовати периодични поремећај оријентације Земљине осе исте периоде. Иако је све ово следовало из Њутнових Принципија, тек је 1748 успео *Бредли* да опажањем докаже тај периодични поремећај Земљине осе. Та појава, о којој ћемо говорити у идућој глави, добила је назив *астрономске нутације* Земљине осе; њену је теорију изградио *Даламбер*.

§ 53. Моменат заокретања спољних сила на Земљу. При испитивању механизма прецесије потребно је, као што смо видели, узети у обзир спљоштеност Земље, јер само у том случају изазива сила којом Сунце или Месец привлачи Земљу један спрег или моменат заокретања обзиром на тежиште Земље. Уочимо, за сада, само једно од тих двају небеских тела, замишљајући његову масу M концентрисану у тачки S (сл. 19). Показали смо у § 47 да тело коначних димензија претстављено том истом сликом, дакле у нашем случају Земља, привлачи масу M силом $\mathfrak{K}$ која пролази кроз тачку S, а која је градиенат функције сила U, претстављене обрасцем (61) споменутог параграфа. Зато је

$$\mathfrak{K} = \operatorname{grad} U \tag{1}$$

$$U = f\frac{Mm}{R} + \frac{1}{2}\frac{fMX^2}{R^5}(B+C-2A) + \frac{1}{2}\frac{fMY^2}{R^5}(C+A-2B) + \frac{1}{2}\frac{fMZ^2}{R^5}(A+B-2C) \tag{2}$$

где m означава масу Земље, а A, B, C њене главне моменте инерције.

Маса M привлачиће, према Њутновом принципу акције и реакције, Земљу силом $-\mathfrak{K}$, а права у којој та сила дејствује пролазиће, по истом принципу, кроз тачку S. Моменат заокретања ове силе обзиром на тежиште Земље, које се има замислити у тачки O (сл. 19), претстављен је, пошто је вектор положаја нападне тачке S био означен са $\mathfrak{R}$, овим изразом:

$$\mathfrak{M} = -[\mathfrak{R}\,\mathfrak{K}], \tag{3}$$

т. ј.

$$\mathfrak{M} = -[\mathfrak{R} \operatorname{grad} U]. \tag{4}$$

Ако ставимо

$$\left\{\begin{aligned} U_0 &= f\frac{Mm}{R} \\ U_1 &= \frac{1}{2}\frac{fM}{R^5} \\ U_2 &= (B+C-2A)X^2+(C+A-2B)Y^2+(A+B-2C)Z^2, \end{aligned}\right. \tag{5}$$

онда је

$$U = U_0 + U_1 U_2,$$

а према правилима векторске диференцијације,

$$\operatorname{grad} U = \operatorname{grad} U_0 + U_2 \operatorname{grad} U_1 + U_1 \operatorname{grad} U_2.$$

Зато је

$$\mathfrak{M} = -[\mathfrak{R} \operatorname{grad} U_0] - U_2 [\mathfrak{R} \operatorname{grad} U_1] - U_1 [\mathfrak{R} \operatorname{grad} U_2].$$

Како је

$$\operatorname{grad} U_0 = -f\frac{Mm}{R^3}\mathfrak{R}; \quad \operatorname{grad} U_1 = -\frac{5}{2}\frac{fM}{R^7}\mathfrak{R},$$

то је, због тога што је $[\mathfrak{R}\mathfrak{R}]=0$,

$$[\mathfrak{R} \operatorname{grad} U_0] = 0; \qquad [\mathfrak{R} \operatorname{grad} U_1] = 0.$$

Зато је

$$\mathfrak{M} = -U_1 [\mathfrak{R} \operatorname{grad} U_2]. \tag{6}$$

Парцијални изводи фунције U_2 по X, Y, Z, т. ј.

$$\frac{\partial U_2}{\partial X} = 2(B+C-2A)X; \quad \frac{\partial U_2}{\partial Y} = 2(C+A-2B)Y;$$

$$\frac{\partial U_2}{\partial Z}=2(A+B-2C)Z$$

претстављају координате вектора grad U_2 док су координате вектора $\mathfrak{R}$ претстављене са X, Y, Z. Зато је, према аналитичком обрасцу за векториелни производ,

$$\mathfrak{M}=-\frac{fM}{R^5}\begin{vmatrix} \mathfrak{i} & \mathfrak{j} & \mathfrak{k} \\ X & Y & Z \\ (B+C-2A)X & (C+A-2B)Y & (A+B-2C)Z \end{vmatrix}\,.$$

Координате M_1, M_2, M_3 вектора $\mathfrak{M}$ претстављене су, према горњем обрасцу, овим изразима:

$$(7)\qquad \begin{cases} M_1=3\,\dfrac{fM}{R^5}(C-B)YZ \\[2ex] M_2=3\,\dfrac{fM}{R^5}(A-C)ZX \\[2ex] M_3=3\,\dfrac{fM}{R^5}(B-A)XY. \end{cases}$$

За Земљу је, као што смо већ рекли,

$$(8)\qquad B=A$$

па је зато

$$(9)\qquad \begin{cases} M_1=3\,\dfrac{fM}{R^5}\,(C-A)YZ \\[2ex] M_2=-3\,\dfrac{fM}{R^5}\,(C-A)ZX \\[2ex] M_3=0\,. \end{cases}$$

Ставимо ли у ове једначине масу и координате Сунца односно Месеца, то добивамо моменат заокретања тих небеских тела на Земљу.

§ 54. Једначине кретања. Перманентни и периодични чланови поремећаја. Означимо са M масу Сунца, са

R његово отстојање од Земље, а са X, Y, Z његове координате обзиром на координатни систем положен у главне осе инерције Земљиног тела, означимо, даље, са m_1 масу Месеца, са r његово отстојање од Земље, а са x, y, z његове координате обзиром на споменути координатни систем, онда су компоненте момента заокретања тих двају небеских тела на Земљу претстављене, према (9), овим обрасцима:

$$
(10) \quad \begin{cases} M_1 = 3\,\dfrac{fM}{R^5}\,(C-A)\,YZ + 3\,\dfrac{fm_1}{r^5}\,(C-A)yz \\[2ex] M_2 = -3\,\dfrac{fM}{R^5}\,(C-A)\,ZX - 3\,\dfrac{fm_1}{r^5}\,(C-A)zx \\[2ex] M_3 = 0. \end{cases}
$$

Испитивајући пресецију Земљине осе, чинимо претпоставку да је наша Земља чврсто тело. Зато важе за њено ротационо кретање Ојлерове једначине (42), § 44, у које ваља, због (8), ставити $A=B$. Зато те једначине добивају овај облик:

$$
(11) \quad \begin{cases} A\,\dfrac{dw_1}{dt} + (C-A)w_2 w_3 = M_1 \\[2ex] A\,\dfrac{dw_2}{dt} - (C-A)w_3 w_1 = M_2 \\[2ex] C\,\dfrac{dw_3}{dt} = 0. \end{cases}
$$

Из једначина (10) и (11) следује:

$$
(12) \quad \begin{cases} A\,\dfrac{dw_1}{dt} + (C-A)\,w_2 w_3 = 3\,\dfrac{fM}{R^5}\,(C-A)YZ + \\[1ex] \qquad\qquad + 3\,\dfrac{fm_1}{r^5}\,(C-A)yz \\[2ex] A\,\dfrac{dw_2}{dt} - (C-A)w_3 w_1 = -3\,\dfrac{fM}{R^5}\,(C-A)ZX - \\[1ex] \qquad\qquad - 3\,\dfrac{fm_1}{r^5}\,(C-A)\,zx \\[2ex] \dfrac{dw_3}{dt} = 0. \end{cases}
$$

Ово су једначине ротационог кретања Земље под утицајем привлачне снаге Сунца и Месеца. Из последње од тих једначина следује:

$$w_3 = n \tag{13}$$

где n означава једну константну. Ова једначина казује да се угловна брзина властите ротације Земљине око њене поларне главне осе инерције не мења под утицајем привлачних снага Сунца и Месеца. Из последње од једначина (49), § 46 следује:

$$\Psi' \cos\theta + \Phi' = n. \tag{14}$$

Употребом споменутих једначина (49) можемо и величине w_1 и w_2 изразити помоћу Ојлерових углова θ, Ψ, Φ, а како се и компоненте M_1, M_2, M_3 могу изразити помоћу тих углова, то се долази до диференцијалних једначина које нам, интегрисане, дају углове θ, Ψ, Φ као функције времена, т. ј. решење постављеног проблема. При томе ваља имати ово у виду. У координатама X, Y, Z и x, y, z испољавају се све особине кретања Земље око Сунца и кретања Месеца око Земље са свим њиховим поремећајима и неједнакостима. Испитивање утицаја свих тих неједнакости на ротационо кретање Земљино огроман је посао. Тако је, на пример, *Ополцер* при својим испитивањима узео у обзир 202 такве неједнакости. Већина од њих су, међутим, и за астрономске потребе споредније значаја, зато ћемо се овде ограничити само на најглавније од њих. Улога тих чланова који изазивају поремећаје кретања Земљине осе испољиће се најјасније ако испитамо временске промене момента заокретања $\mathfrak{M}$ небеског тела које изазива поремећај. При томе ћемо, за сада, узети само Сунце у обзир, јер временске промене његовог момента заокретања и њихов утицај на ротационо кретање Земље показују и све особине утицаја Месечевог на то кретање.

Ротација Земље не мења, пошто је Земља ротационо тело, моменат заокретања $\mathfrak{M}$. Зато ћемо се, при испитивању тога момента $\mathfrak{M}$, послужити екваторијалним координатним системом, везаним са небеском сфером. Оса x тог координатног система нека буде наперена према пролетњој тачки, а оса z према северном полу небеске сфере. Нека нам $\mathfrak{R}$ претставља вектор положаја Сунчевог; он затвара са осом x угао $(x, \mathfrak{R})$ који нам, у исти мах, претставља Сунчеву лонгитуду λ. Са осом z затвара вектор $\mathfrak{R}$ угао $(z, \mathfrak{R})$ који нам претставља поларно отстојање, а његов комплеменат деклинацију δ Сунца. Зато је $(z, \mathfrak{R}) = 90^\circ - \delta$. Угао $(y, \mathfrak{R})$, што га вектор $\mathfrak{R}$ затвара са осом y, дат је општом једначином

$$\cos^2(x, \mathfrak{R}) + \cos^2(y, \mathfrak{R}) + \cos^2(z, \mathfrak{R}) = 1 .$$

Зато је

$$\cos(x, \mathfrak{R}) = \cos\lambda ; \qquad \cos(z, \mathfrak{R}) = \sin\delta$$
$$\cos^2(y, \mathfrak{R}) = \sin^2\lambda - \sin^2\delta .$$

Између деклинације δ и лонгитуде λ Сунца и нагиба еклиптике ε постоји основна једначина Сферне Астрономије

$$\sin\delta = \sin\varepsilon \sin\lambda .$$

Зато је

$$\cos(y, \mathfrak{R}) = \cos\varepsilon \sin\lambda ,$$

Координате X, Y, Z Сунца претстављене су, дакле, овим обрасцима

$$(15) \quad \begin{cases} X = R\cos(x, \mathfrak{R}) = R\cos\lambda \\ Y = R\cos(y, \mathfrak{R}) = R\cos\varepsilon \sin\lambda \\ Z = R\cos(z, \mathfrak{R}) = R\sin\varepsilon \sin\lambda . \end{cases}$$

Из (9) и (15) следује:

$$(16) \quad \begin{cases} M_1 = 3\,\dfrac{fM}{R^3}\,(C-A)\sin\varepsilon\cos\varepsilon\sin^2\lambda \\[2ex] M_2 = -\,3\,\dfrac{fM}{R^3}\,(C-A)\sin\varepsilon\sin\lambda\cos\lambda \\[2ex] M_3 = 0 . \end{cases}$$

Да испитамо временске промене ових компонената момента $\mathfrak{M}$, а нарочито њихов годишњи ток, потребно је да радиусвектор

R Сунца изразимо помоћу лонгитуде λ. Ако се ставимо на хелиоцентрично становиште, то добивамо помоћу једначина (65) и (70), главе друге,

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{a(1-e^2)}\left[1+e\cos(\lambda_h-\Pi)\right]$$

где a претставља велику полуосу, e ексцентрицитет Земљине путање, λ_h хелиоцентричну лонгитуду Земље, а Π хелиоцентричну лонгитуду перихела, ово обоје мерено од пролетње тачке. Између хелиоцентричне лонгитуде Земље λ_h и геоцентричне лонгитуде Сунца λ постоји, као што је лако увидети, једначина

$$\lambda=180^0-\lambda_h$$

па зато добивамо

$$\frac{1}{R^3}=\frac{1}{a^3(1-e^2)^3}\left[1-e\cos(\Pi+\lambda)\right]^3.$$

Овај израз може се, пошто је e веома мало, развити у ред и при томе потенције косинуса изразити помоћу косинус многоструког аргумента. На тај начин добивамо, место предњег, образац овог облика:

$$\frac{1}{R^3}=\frac{1}{a^3}\left[1+\frac{9}{2}e^2-3e\cos(\Pi+\lambda)+\frac{3}{2}e^2\cos(2\Pi+2\lambda)+\cdots\right].$$

У овом реду су, као што смо видели у првом одељку ове књиге, величине e и Π секуларно променљиве, али тако слабо да их, за сада, можемо сматрати за константне. Лонгитуда λ нарасте у години дана за 2π па ће због тога тригонометријски чланови горњег реда имати периоде од годину дана, од пола године, од трећине године и т. д. Видећемо да је утицај периодичних чланова на ротационо кретање Земље у толико мањи у колико је мања њихова периода, а како су и коефициент тих чланова малени, а рапидно опадају, то су ти чланови према онима о којима ћемо још говорити толико малени да се могу занемарити. Због тога можемо ставити

$$R=a. \tag{17}$$

На тај начин добивамо место (16) ове једначине

$$(18)\quad \begin{cases} M_1 = \dfrac{3}{2}\dfrac{fM}{a^3}(C-A)\sin\varepsilon\cos\varepsilon - \\ \qquad\qquad - \dfrac{3}{2}\dfrac{fM}{a^3}(C-A)\sin\varepsilon\cos\varepsilon\cos 2\lambda \\ M_2 = -\dfrac{3}{2}\dfrac{fM}{a^3}(C-A)\sin\varepsilon\sin 2\lambda \\ M_3 = 0. \end{cases}$$

Означимо ли са $\mathfrak{i}, \mathfrak{j}, \mathfrak{k}$ јединичне векторе у правцу оса x, y, z нашег координатног система па ставимо ли, због једноставнијег писања,

$$(19)\qquad \frac{3}{2}\frac{fM}{a^3}(C-A)\sin\varepsilon = c,$$

то је

$$\mathfrak{M} = M_1\,\mathfrak{i} + M_2\,\mathfrak{j}$$

$$\mathfrak{M} = (c\cos\varepsilon)\,\mathfrak{i} - (c\cos\varepsilon\cos 2\lambda)\,\mathfrak{i} - (c\sin 2\lambda)\,\mathfrak{j}\,.$$

Вектор $\mathfrak{M}$ може се претставити као збир двају вектора $\mathfrak{M}_s$ и $\mathfrak{M}_p$

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_s + \mathfrak{M}_p$$

стављајући

$$(21)\quad \begin{cases} \mathfrak{M}_s = M_s\,\mathfrak{i} \\ M_s = \dfrac{3}{2}\dfrac{fM}{a^3}(C-A)\sin\varepsilon\cos\varepsilon \end{cases}$$

$$(22)\quad \begin{cases} \mathfrak{M}_p = -M_1'\,\mathfrak{i} - M_2'\,\mathfrak{j} \\ M_1' = \dfrac{3}{2}\dfrac{fM}{a^3}(C-A)\sin\varepsilon\cos\varepsilon\cos 2\lambda \\ M_2' = \dfrac{3}{2}\dfrac{fM}{a^3}(C-A)\sin\varepsilon\sin 2\lambda. \end{cases}$$

Вектор $\mathfrak{M}_s$, наперен према пролетњој тачки, сталне је величине, т. ј. независан је од годишњег привидног кретања Сунца. Он лежи непокретно у нашем координатном систему, зато ћемо га назвати *перманентним* делом момента заокретања $\mathfrak{M}$.

Вектор $\mathfrak{M}_p$ је, напротив, променљив. Надовежемо ли га на почетак нашег координатног система, онда су координате његове крајње тачке L претстављене овим обрасцима:

$$x = -c \cos \varepsilon \cos 2\lambda; \qquad y = -c \sin 2\lambda .$$

Елиминишимо ли из ових двеју једначина λ, то добивамо

$$\frac{x^2}{(c \cos \varepsilon)^2} + \frac{y^2}{c^2} = 1$$

као једначину путање тачке L. Та је путања елипса, дакле затворена једна линија, па је зато вектор $\mathfrak{M}_p$ периодично променљив; њега ћемо назвати главним *периодичним* делом момента заокретања $\mathfrak{M}$.

Према претпоставци израженој једначином (17), лонгитуда λ Сунца расте пропорционално времену t. Бројимо ли време од пролаза Сунца кроз пролетњу тачку, дакле кроз осу x, то је

$$(23) \qquad \left\{ \begin{aligned} & \lambda = \frac{2\pi}{T} t \\ & M_1' = c \cos \varepsilon \cos \frac{4\pi}{T} t \\ & M_2' = c \sin \frac{4\pi}{T} t . \end{aligned} \right.$$

где T означава годину.

Компоненте M_1' и M_2' вектора $\mathfrak{M}_p$ подлеже, дакле, хармоничним осцилацијама од полугодишње периоде.

Да смо при одређивању лонгитуде λ као функције времена t узели у обзир ексцентрицитет Земљине путање, то би се, као што је показано на примеру од $\frac{1}{R}$, појавили још и даљи периодични чланови који су, из наведених већ разлога, споредног значаја. Због тога ћемо, за сада, узети у обзир само оба главна дела $\mathfrak{M}_s$ и $\mathfrak{M}_p$ момента заокретања, јер су они, поред своје величине, у исти мах, типични преставници обе категорије чланова поремећаја па њихове особине испољавају карактер и свих осталих чланова поремећаја.

§ 55. Дејство појединих делова момента заокретања. Ако, за сада, не узмемо у обзир споре и мале осцилације равни Земљине лутање, о којима ће још бити говора, онда можемо ту раван сматрати за непомичну и одабрати њу, дакле раван еклиптике, за раван $X—Y$ мирујућег координатног система. Нека нам, дакле, (сл. 17) тачка O претставља тежиште Земље, а раван $X—Y$ мирујућег координатног система раван еклиптике. Оса X нека буде, из разлога који ћемо одмах упознати, наперена према јесењој тачки одређене једне епохе. Координатни систем везан са Земљом нека буде означен за $x—y—z$; његова оса z нека се поклапа са поларном главном осом инерције Земљиног тела, а оса x нека пада у пресек Земљинога екватора са равни гриничког меридијана. Раван $x—y$ покретног координатног система нека, у тренутку t, сече раван $X—Y$ мирујућег координатног система дуж праве $O\Omega$; ова права стоји нормално на равни ZOz, коју смо раван одабрали за раван слике. Права OR те равни стоји нормално на правој $O\Omega$. Тачка Ω претставља нам узлазни чвор небеског екватора у односу на еклиптику, а силазни чвор еклиптике у односу на небески екватор. Зато нам Ω претставља јесењу тачку која одговара тренутку t. Означимо са $\mathfrak{c}_0$ јединични вектор правца $O\Omega$, а са $\mathfrak{h}_0$ јединични вектор правца OR, то постоји између тих вектора и вектора $\mathfrak{i}$ и $\mathfrak{j}$, употребљених при образовању једначина (21) и (22), ова веза:

$$\mathfrak{i}=-\mathfrak{c}_0 \qquad \mathfrak{j}=-\mathfrak{h}_0. \tag{24}$$

Зато је

$$\mathfrak{M}_s=-M_s\,\mathfrak{c}_0 \tag{25}$$

$$\mathfrak{M}_p=M_1'\mathfrak{c}_0+M_2'\mathfrak{h}_0. \tag{26}$$

Углови $XO\Omega$, ΩOx, ZOz претстављају нам Ојлерове углове Ψ, Φ, θ који одређују положај покретног координатног система према мирујућем. Угао θ претставља нам, као што је лако увидети, и нагиб еклиптике ε у тренутку t па је

$$\theta = \varepsilon. \tag{27}$$

Угао Φ мери лук небеског екватора који лежи између јесење тачке и гриничког меридијана, он допуњује, дакле, звездано време, мерено угловном мером, до 180^{0}.

Испитивајући прецесионо кретање Земљине осе, претпоставићемо да се та оса подудара са главном осом инерције Земљинога тела; о незнатном отступању тих двеју оса биће говора у засебној глави ове књиге. Како дакле, према учињеној претпоставци, вектор ротације $\mathfrak{w}$ пада у осу z нашег покретног ко ординатног система, то је, према (43) и (41), главе десете,

$$\begin{aligned} \mathfrak{w} &= w_3\,\mathfrak{k} \\ w_1 &= w_2 = 0 \\ G_1 &= G_2 = 0 \\ \mathfrak{G} &= C\,w_3\mathfrak{k} \end{aligned} \tag{28}$$

т. ј. због (13)

$$\mathfrak{G} = n\,C\,\mathfrak{k}. \tag{29}$$

Вектор $\mathfrak{G}$ лежи, дакле, непомично у оси z покретног координатног система и има скаларну величину

$$G = nC.$$

Положимо ту величину дуж осе z, т. ј. учинимо $\overline{OT} = G$ па питајмо како се мења вектор $\mathfrak{G}$ у мирујућем координатном систему. Нека нам $d\Phi$, $d\theta$, $d\Psi$ претстављају промене Ојлеровских углова које одговарају временском интервалу dt. Пошто $\mathfrak{G}$ лежи стално у оси z, то промена угла Φ не утиче на положај вектора $\mathfrak{G}$ у мирујућем координатном систему. Увећа ли се угао θ за $d\theta$, то ће се тачка T померити у равни ZOz, нормално на OT, дакле у правцу противном јединичном вектору $\mathfrak{h}_0$, за дуж $\overline{OT}d\theta$. Одатле следује промена вектора $\mathfrak{G}$ једнака $-G\mathfrak{h}_0 d\theta$. Увећа ли су угао Ψ за $d\Psi$, то ће се, услед тога, раван ZOz обрнути око своје осе Z за тај прираштај угла, а тачка T се померити за $G\sin\theta\, d\Psi$, нормално на ту раван, у правцу јединичног вектора $\mathfrak{c}_0$. Одатле следује промена вектора $\mathfrak{G}$ једнака $G \sin\theta\, \mathfrak{c}_0\, d\Psi$. Целокупна промена вектора $\mathfrak{G}$ претстављена је, дакле, обрасцем

$$d\mathfrak{G} = -G\mathfrak{h}_0 d\theta + G\sin\theta\,.\,\mathfrak{c}_0\, d\Psi$$

па је зато

$$(30)\qquad \frac{d\mathfrak{G}}{dt} = -nC\frac{d\theta}{dt}\mathfrak{h}_0 + nC\sin\theta\frac{d\Psi}{dt}\mathfrak{c}_0.$$

По теореми импулса, мора ова промена бити једнака моменту заокретања

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_s + \mathfrak{M}_p$$

спољних сила. Зато је, имајући у виду (25) и (26),

$$-nC\frac{d\theta}{dt}\mathfrak{h}_0 + nC\sin\theta\frac{d\Psi}{dt}\mathfrak{c}_0 = -M_s\,\mathfrak{c}_0 + M_1'\mathfrak{c}_0 + M_2'\mathfrak{h}_0\,.$$

Скаларном мултипликацијом са $\mathfrak{c}_0$ односно са $\mathfrak{h}_0$, распада се ова векторска једначина у ове две скаларне:

$$(31)\qquad nC\sin\theta\frac{d\Psi}{dt} = -M_s + M_1'$$

$$(32)\qquad nC\frac{d\theta}{dt} = -M_2'\,.$$

Видећемо да су промене од θ толико малене да се у члану $\sin\theta$ не испољавају скоро никако, па због тога можемо промене изазване, према (31), компонентама M_s и M_1' на углу Ψ израчунати сваку за себе. На тај начин добивамо да перманентни део $\mathfrak{M}_s$ момента заокретања $\mathfrak{M}$ изазива промену

$$33)\qquad n\,C\sin\theta\frac{d\Psi}{dt} = -M_s\,,$$

а периодични део $\mathfrak{M}_p$ ове промене:

$$(34)\qquad \begin{cases} nC\sin\theta\dfrac{d\Psi}{dt} = M_1' \\[2ex] nC\dfrac{d\theta}{dt} = -M_2'\,. \end{cases}$$

Из (33), (21) и (27) следује

$$\frac{d\Psi}{dt} = -\frac{3}{2}\frac{fM}{a^3}\frac{1}{n}\frac{C-A}{C}\cos\theta. \tag{35}$$

Ова једначина казује да перманентни део момента $\mathfrak{M}$ изазива негативну униформну промену угла Ψ, т. ј. његово смањивање, дакле ретроградно кретање линије чворова $O\,\Omega$. То кретање не мења угао θ, због чега је, ако узимамо у обзир само перманентни део момента $\mathfrak{M}$,

$$\theta' = 0.$$

Вектор ротације $\mathfrak{w}$ претстављен је, дакле, у овом случају, а према општем обрасцу (45), § 46, овим изразом:

$$\mathfrak{w} = \Psi'\mathfrak{n}_3 + \Phi'\mathfrak{k}\,. \tag{36}$$

Из слике (17) следује:

$$\Psi'\mathfrak{n}_3 = (\Psi'\cos\theta)\,\mathfrak{k} + (\Psi'\sin\theta)\,\mathfrak{h}_0\,.$$

Зато је

$$\mathfrak{w} = (\Phi' + \Psi'\cos\theta)\mathfrak{k} + (\Psi'\sin\theta)\,\mathfrak{h}_0\,,$$

т. ј. због (14).

$$\mathfrak{w} = n\mathfrak{k} + (\Psi'\sin\theta)\mathfrak{h}_0\,.$$

Како је

$$(\Psi'\sin\theta)\mathfrak{h}_0 = (\Psi'\sin\theta\cos\Phi)\,\mathfrak{i} + (\Psi'\sin\theta\sin\Phi)\,\mathfrak{j},$$

то добивамо

$$\mathfrak{w} = (\Psi'\sin\theta\sin\Phi)\,\mathfrak{i} + (\Psi'\sin\theta\cos\Phi)\,\mathfrak{j} + n\mathfrak{k}\,, \tag{37}$$

дакле због (31) и (41), главе десете и због (8), ове главе,

$$\left\{\begin{aligned} G_1 &= A\sin\theta\sin\Phi\,.\,\Psi' \\ G_2 &= A\sin\theta\cos\Phi\,.\,\Psi' \\ G_3 &= nC\,. \end{aligned}\right. \tag{38}$$

Вектор импулса $\mathfrak{G}$ није дакле обрасцем (29) претстављен сасвим тачно, јер он има једну, додуше веома малу, компоненту

$$(39) \qquad G_a = \sqrt{G_1^2 + G_2^2} = A \sin\theta \,.\, \Psi'$$

која пада у раван $x—y$ па се због тога тај вектор не поклапа тачно са осом z, него затвара са овом један мали угао φ за који важи једначина

$$(40) \qquad \operatorname{tang}\varphi = \frac{G_a}{G_3} = \frac{1}{n}\frac{A}{C}\sin\theta \,.\, \Psi'.$$

Видећемо из касније саопштених нумеричких података да су и та компонента и тај угао толико малени да не утичу скоро никако на резултат рачуна претстављен обрасцем (35). Зато нема потребе додавати том резултату те поремећаје другог реда.

Обрасцу (35) можемо дати и други, згоднији, облик. Означимо ли са T време обилажења Земље око Сунца, то је према (59) и (61), главе друге,

$$(41) \qquad \frac{fM}{a^3} = \frac{4\pi^2}{T^2}\frac{M}{M+m}$$

$$(42) \qquad \frac{2\pi}{T} = \nu,$$

где ν означава средње кретање Земље око Сунца. Зато је

$$(43) \qquad \frac{fM}{a^3} = \frac{M}{M+m}\nu^2.$$

На тај начин добивамо, место (35), овај образац:

$$(44) \qquad \frac{d\Psi}{dt} = -\frac{3}{2}\frac{M}{M+m}\cdot\frac{\nu^2}{n}\cdot\frac{C-A}{C}\cos\theta.$$

Образац

$$(45) \qquad p_T = -\frac{d\Psi}{dt}T = 3\pi\frac{M}{M+m}\cdot\frac{\nu}{n}\cdot\frac{C-A}{C}\cos\theta$$

претстављa нам апсолутно узети годишњи износ соларне прецесије, т. ј. померања пролетње тачке изазваног Сунцем за време једне године.

Да би смо нашли дејство периодичног дела $\mathfrak{M}_p$ момента привлачне силе Сунца, треба у (34) ставити обрасце (23). Узимајући при томе у обзир (19), (27), (42) и (43), добивамо:

$$(46)\qquad \frac{d\Psi}{dt}=\frac{3}{2}\cdot\frac{M}{M+m}\cdot\frac{\nu^2}{n}\cdot\frac{C-A}{C}\cos\theta\cos 2\nu t$$

$$(47)\qquad \frac{d\theta}{dt}=-\frac{3}{2}\cdot\frac{M}{M+m}\cdot\frac{\nu^2}{n}\cdot\frac{C-A}{C}\sin\theta\sin 2\nu t\,.$$

Интеграцијом ових диференцијалних једначина, при чему, као што је већ речено, ваља, у десним странама њиховим, θ сматрати за константно, добива се, ако се t броји од оног тренутка у којем је $\Psi=0$, а у којем θ достизава своју максималну вредност,

$$(48)\qquad \Psi=\frac{3}{4}\cdot\frac{M}{M+m}\cdot\frac{\nu}{n}\cdot\frac{C-A}{C}\cos\theta\cdot\sin 2\nu t$$

$$(49)\qquad \theta=\frac{3}{4}\cdot\frac{M}{M+m}\cdot\frac{\nu}{n}\cdot\frac{C-A}{C}\cos\theta\cos 2\nu t$$

т. ј. због (45) и (42)

$$(50)\qquad \Psi=\frac{1}{4\pi}p_T\sin\frac{4\pi}{T}t$$

$$(51)\qquad \theta=\frac{1}{4\pi}p_T\operatorname{tang}\theta\cos\frac{4\pi}{T}t\,.$$

§ 56. Пресеција равнодневница. Из резултата претходног параграфа следује да перманентни део момента привлачне силе Сунца изазива ретроградно кретање чворова небеског екватора и еклиптике, дуж саме еклиптике. Ово померање, израчунато на јединицу времена, претстављено је, према (44) и (27), обрасцем:

$$(52)\qquad \frac{d\Psi}{dt}=-\frac{3}{2}\cdot\frac{M}{M+m}\cdot\frac{\nu^2}{n}\cdot\frac{C-A}{C}\cos\varepsilon.$$

Привлачно дејство Месеца изазива слично, но због близине Месеца, још јаче померање. Образац за то померање добићемо ако у претходној једначини заменимо масу M Сунца масом m_1 Месеца, средње кретање ν Сунца средњим кретањем ν_1 Месеца, а нагиб еклиптике ε нагибом ε_2 Месечеве путање према равни небеског екватора. При томе ваља ово узети у обзир. Раван Месечеве путање затвара са равни еклиптике угао $\varepsilon_1 = 5°9'$ који се неосетно мења тако да га можемо сматрати константним, али се, о чему ћемо касније опширније говорити, раван Месечеве путање, због поремећаја изазваним Сунцем, обрће одржавајући тај свој нагиб према еклиптици, тако да се чворови Месечеве путање ретроградно померају дуж еклиптике. Због свега овога осцилује нагиб равни Месечеве путање према равни небеског екватора између граница $(\varepsilon - \varepsilon_1)$ и $(\varepsilon + \varepsilon_1)$. При израчунавању померања изазваног перманентним делом момента $\mathfrak{M}$ ваља у у (52) за ε ставити средњу вредност од ε_2 т. ј. ону која лежи у средини између $(\varepsilon - \varepsilon_1)$ и $(\varepsilon + \varepsilon_1)$, а то је ε. Узимајући све ово у обзир, претстављено је стационарно дејство привлачне силе Месеца овим обрасцем:

$$(53) \qquad \frac{d\Psi}{dt} = -\frac{3}{2} \cdot \frac{m_1}{m_1 + m} \cdot \frac{\nu_1^2}{n} \cdot \frac{C-A}{C} \cos \varepsilon.$$

При томе је, према (42),

$$(54) \qquad \nu = \frac{2\pi}{T}; \qquad \nu_1 = \frac{2\pi}{T_1}$$

где T претставља сидерично време обилажења Земље око Сунца, а T_1 сидерично време обилажења Месеца око Земље.

Целокупно перманентно дејство Сунца и Месеца при померању равнодневница, дакле лунисоларна прецесија, у ужем смислу речи, претстављена је обрасцем:

$$(55) \qquad \frac{d\Psi}{dt} = -\frac{6\pi^2}{n} \cdot \frac{C-A}{C} \left[\frac{1}{T^2} + \frac{m_1}{m + m_1} \cdot \frac{1}{T_1^2} \right] \cos \varepsilon.$$

При томе смо масу m Земље занемарили, као веома малену, према маси M Сунца.

Интервал за време којега нарасте Ојлеров угао Φ за 2π зове се *звездани дан.* Означимо његову дужину са τ, то је

$$\Phi' = \frac{d\Phi}{dt} = \frac{2\pi}{\tau} \,. \tag{56}$$

Пошто је, као што ћемо одмах видети, $\Psi' \cos\theta$ занемариво према Φ', то можемо ставити:

$$n = \frac{2\pi}{\tau} \,. \tag{57}$$

Зато добивамо за апсолутни годишњи износ лунисоларне прецесије овај образац:

$$p_T = -\frac{d\Psi}{dt} T = 3\pi\tau \frac{C-A}{C} \left[\frac{1}{T} + \frac{m_1}{m+m_1} \cdot \frac{T}{T_1^2}\right] \cos\varepsilon. \tag{58}$$

Нумеричка вредност овог израза зависи од слабо променљиве величине ε; ако ставимо за њу њену садању средњу вредност $\varepsilon = 23^0\ 27'$ и узмемо још у обзир да је

$$T = 366{,}25\,\tau; \quad T_1 = 27{,}397\,\tau; \quad m_1 = 0{,}0123\,m; \quad \frac{C-A}{C} = 0{,}003261\,,$$

то добивамо

$$p_T = 50''36$$

као годишњи износ лунисоларне прецесије. У њену учествује Сунце са 15″88, а Месец са 34″48.

Предње израчунавање ваља попунити овим примедбама. Нумеричка вредност величине p_T одређује се, у ствари, директним астрономским опажањем, а из ње се изводи нумеричка вредност разломка $\frac{C-A}{C}$, а не обратно, што, у осталом, не мења исправност предњега рачуна. Тачно одређена нумеричка вредност лунисоларне прецесије износи, за епоху 1850,0, 50″3684.

Услед напред израчунатог померања еквинокцијалних тачака, извршила би свака од њих за време од

$$\frac{360 \times 60 \times 60}{50{,}36} = 25735 \text{ година,}$$

дакле за време интервала од округло 26000 година, потпуно једно обилажење дуж еклиптике. Тај се интервал назива и Платонском годином. Услед тога померања еквинокцијалних тачака, описују оба небеска пола, на небеској сфери, кругове око полова еклиптике са привидним радиусом једнаким нагибу еклиптике. Те кружне путање полова претстављају пресеке конуса херполходије проучаваног кретања Земље са небеском сфером.

Питајмо још какав ће облик имати конус полходије проучаваног кретања, т. ј. онај конус који описује оса ротације у самом Земљином телу. Једначина полходије претстављена је обрасцем (37) при чему $\mathfrak{w}$ означава вектор положаја а $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ јединичне векторе координатног система везаног са Земљом. Из (37) следује да је полходија једна кружна линија која се, у отстојању n од центра Земље, обавила нормално око главне, поларне, осе инерције Земљине, а која има радиус R дат овом једначином:

$$R^2 = (\Psi' \sin\theta \sin\Phi)^2 + (\Psi' \sin\theta \cos\Phi)^2$$

из које следује:

$$R = -\Psi' \sin\theta.$$

Угао отвора конуса полходије, т. ј. угао што га изводнице затварају са осом конуса, претстављен је обрасцем

$$\alpha = -\frac{\Psi'}{n} \sin\theta \tag{59}$$

у којем смо, пошто је тај угао врло мали, његов тангенс заменили луком.

Користећи се обрасцима (27), (55), (57) и (58), добивамо

$$\alpha = \frac{1}{2\pi} \frac{\tau}{T} p_T \sin\varepsilon, \tag{60}$$

а помоћу саопштених нумеричких вредности за T, ε, p_T

$$\alpha = 0''0087\,.$$

Овај угао заиста је веома мален, а исто тако и угао φ претстављен обрасцем (40). Између та два угла постоји, због (59) ова једначина:

$$\varphi = \frac{A}{C}\,\alpha\,.$$

Користећи се саопштеним податком о нумеричкој вредности разломка $\frac{C-A}{C}$, добивамо $\varphi = 0''008676$, а мерећи овај угао лучном мером, т. ј. делећи предњи број са 206265, добивамо, према (40),

$$\frac{G_a}{G} = 0{,}000\,000\,042,$$

дакле сразмеру занемареног дела вектора $\mathfrak{G}$ према оном делу који смо узели у обзир. Тај је број, заиста, веома мален, чиме је доказана оправданост учињених претпоставки.

Из саопштеног следује да ротационо кретање Земље под утицајем перманентног дела момента заокретања изазваног дејством Сунца и Месеца можемо геометријски претставити на овај начин. У широком конусу херполходије којега оса стоји управно на равни Земљине путање, а којега изводнице затварају угао од $23^0\ 30'$ са том осом, котрља се, без клизања, веома шиљасти конус полходије, са углом осе и изводнице од само $0''0087$, вршећи за време једног звезданог дана потпуно једно обртање; за време од 26000 година оцкотрља тај конус у ретроградном смислу спољашњи конус херполходије.

У претходним испитивањима нисмо узели у обзир померања равни Земљине путање. Та раван није, као што смо видели у првом одељку ове књиге, инвариабилна, а то исто важи и за раван Месечеве путање, него се обе те равни, услед међусобног поремећаја чланова нашег планетског система, колебају у простору. Тим поремећајима не мења се раван Земљиног и небеског екватора, него се еквинокцијална линија помера у равни небеског екватора. То померање следује у позитивном смислу увећавајући Ојлеров угао Ψ за $0''1231$ годишње, т. ј.

оно се дешава у противном смислу лунисоларне прецесије. Одузимајући овај број од броја 50″3684 који одговара лунисоларној прецесији, добивамо за целокупно померање равнодневница износ од 50″2453 који се зове *генералном прецесијом.* Услед колебања равни еклиптике, мења се и угао θ, т. ј. нагиб еклиптике, па се та промена, за разлику од периодичних промена угла θ о којима ћемо још говорити, зове *секуларном променом нагиба еклиптике.*

§ 57. Периодични чланови прецесије. Моменти заокретања Земље привлачним дејством Сунца и Месеца имају, као што смо видели, поред својих перманентних делова и своје периодичне делове. Ако, за сада, не узмемо у обзир поремећаје равни путање Месеца, о којима ћемо говорити у идућој глави, онда су најважнији од тих периодичних чланова они који имају периоду од пола године односно пола месеца. Дејство тих периодичних чланова на ротацију Земље претставили смо аналитички у § 55 па нам остаје само да израчунавамо нумеричке вредности тих периодичних поремећаја Земљине осе.

Годишњи износ прецесије изазване привлачним дејством Сунца има нумеричку вредност од 15″88. Стављајући ту вредност за p_T у обрасце (50) и (51), а за ε вредност од $23^0 27'$ добивамо:

$$(61) \qquad \begin{cases} \Psi = 1''26 \sin \dfrac{4\pi}{T}\, t \\[2ex] \theta = 0''55 \cos \dfrac{4\pi}{T}\, t\,. \end{cases}$$

Годишњи износ прецесије изазване привлачним дејством Месеца има нумеричку вредност од 34″18. Сидеричном обилажењу T_1 Месеца око Земље одговара износ прецесије од 2″58. Стављајући ту вредност за p_T у обрасце (50) и (51), добивамо као дејство Месеца

$$(62) \qquad \begin{cases} \Psi = 0''205 \sin \dfrac{4\pi}{T_1}\, t \\[2ex] \theta = 0''089 \cos \dfrac{4\pi}{T_1}\, t\,. \end{cases}$$

Овим периодичним променама оријентације Земљине осе мењају се лонгитуде звезда подједнако, али у правцу противном оном у којима их мења лунисоларна процесија. У астрономској пракси узимају се, међутим, и стационарна и периодична померања равнодневница као позитивна кад следују у ретроградном смислу па, у том случају, ваља у горње обрасце ставити десно знак минус. Тачније израчунавање периодичних чланова, но што је овде било извршено, показало би да би добивене коефициенте

$$1''26 \; ; 0''55 \; ; 0''205 \; ; 0''089$$

ваљало заменити са

$$1''269 \; ; 0''551 \; ; 0''204 \; ; 0''089.$$

Периодичне промене оријентације Земљине осе додају се обично, као нутациони чланови, главним члановима астрономске нутације о којој ћемо говорити у идућој глави.

Пролетња равнодневница у којој се, у датом моменту, небески екватор и еклиптика стварно пресецају зове се *правом пролетњом равнодневницом* одговарајућег тренутка, а она тачка небеске сфере у којој се секу екватор и еклиптика када се нутациони чланови не узму у обзир, него само лунисоларна прецесија, у ужем смислу речи, зову се *средњом еквинокцијалном тачком*. У истом смислу говори се о *правом* и *средњем нагибу еклиптике*.

ГЛАВА ТРИНАЕСТА

Астрономска нутација Земљине осе.

§ 58. Поремећаји равни Месечеве путање. Раван Месечеве путање не подудара се са равни Земљине путање, а одавде следују поремећаји кретања Месеца који се испољавају и у ротационом кретању Земље, због чега их морамо испитати и узети у обзир.

У § 14 решили смо проблем сателита у његовом најједноставнијем облику. Уз претпоставку да су привлачне силе којима дејствује Сунце на планету и њен сателит међусобно паралелне, могли смо проблем сателита свести на проблем двају тела. Сада треба узети у обзир и поремећај тога кретања.

Од многобројних поремећаја којима подлежи кретање Месеца долазе, при испитивању ротационог кретања Земљиног, као најважнији, поремећаји равни Месечеве путање у првом реду у обзир. Да то испитивање не бисмо сувише компликовали, нећемо узети у обзир ексцентрицитет Месечеве путање, него ћемо претпоставити да је она круг. Под том претпоставком, изводе и Земље и Месец око њиховог заједничког тежишта O кружна кретања. Означимо ли са a_1 средње отстојање Месеца од Земље, са m масу Земље, а са m_1 масу Месеца, то су радиуси r и r_1 тих кружних путања Земље односно Месеца претстављени обрасцима:

$$(1) \qquad r=\frac{m_1}{m+m_1}\,a_1; \qquad r_1=\frac{m}{m+m_1}\,a_1.$$

Сада можемо систем Земља-Месец сматрати за један засебни материјални систем који не мења свој облик, а на који дејствује, као спољна сила, привлачна снага Сунца. Тај непромењиви материјални систем обрће се, око осе која пролази кроз тежиште O, а стоји усправно на равни Месечеве путање константном угаоном брзином која је једнака средњем кретању ν_1 Месеца око Земље. Исто тако као што је, под утицајем привлачног дејства Сунчевог, ориентација Земљине осе подлежала стационарним и периодичним променама, мораће и оса ротације уоченог материјалног система Земља-Месец мењати стационарно своју ориентацију у простору. Ми можемо теорију таквих промена, изведену у прошлој глави за случај прецесије Земљине осе, применити и на случај Земља-Месец, ако учинимо једно упрошћење, потребно да постигнемо потпуну аналогију између оба та случаја. Ротација Земље око њене осе не мења, као што смо видели, моменат заокретања $\mathfrak{M}$ спољних сила, а ротација система Земља-Месец око њене напред дефинисане осе, мења тај моменат и то, као што је лако увидети, периодички са периодом T_1, једнаком сидеричном обилажењу Месеца око Земље. Тај моменат подлежи дакле, двема главним периодичним променама, једна од њих има за периоду време обилажења система Земља-Месец око Сунца, дакле сидеричну годину T, а друга има за периоду време обилажења Месеца око Земље, дакле сидерични месец T_1.

Периодичне промене ове друге, краће, периоде нису од значаја за питање којим се бавимо, а ваља их елиминисати због потребне аналогије. То ћемо учинити на овај начин. За време T_1 обиђу и Земља и Месец своје кружне путање. Средњу вредност момента $\mathfrak{M}$ која одговара том временском интервалу добићемо, очито, на тај начин, ако замислимо масу m Земље равномерно распоређену по њеној путањи, а масу m_1 Месеца распоређену по Месечевој путањи па ако затим израчунамо моменат којим Сунце заокреће систем тих двају материјалних прстенова. Овакав метод елиминисања периодичних промена употребио је *Гаус* у својој класичној теорији секуларних поремећаја планетских кретања, доказавши да су те секуларне промене идентичне онима које добивамо ако масу сваке планете распоредимо дуж њене путање тако да је густина тог распореда инверзно пропорционална брзини планете на уоченом делу путање па ако затим израчунамо атракционе силе којима се ти материјални прстени међусобно привлаче.

Извршивши споменути распоред маса у систему Земља—Месец, добивамо да ће моменат инерције тога материјалног система обзиром на његову осу ротације, т. ј. његов моменат инерције C, бити претстављен обрасцем:

$$C = mr^2 + m_1 r_1^2.$$

Ту исту вредност има и поларни моменат инерције J_0, т. ј. моменат инерције обзиром на тежиште O уоченог система. Зато је

$$J_0 = C .$$

Како је, према општем обрасцу за моменте инерције,

$$A + B + C = 2 J_0$$

а како је, из разлога симетрије,

$$A = B ,$$

то добивамо

$$2A = C$$

дакле

$$\frac{C - A}{C} = \frac{1}{2} . \tag{2}$$

Сада имамо пред собом исти случај који смо имали при проучавању промена оријентације Земљине осе под утицајем привлачног дејства Сунца, ваља само у обрасцима, добивеним том приликом, извршити ове супституције. Место осе Z употребљеног координатног система, која се пре подударала са осом ротације Земље, ваља увести осу која стоји усправно на равни Месечеве путање око Земље. Почетак тог координатног система можемо, пошто смо већ израчунали моменте инерције система, из тежишта O померити у центар Земље, осу X ваља при том наперити према узлазном чвору еклиптике у односу на Месечеву путању, т. ј. према силазном чвору Месечеве путање. Лонгитуду

Сунца λ ваља заменити лонгитудом Сунца λ_1, мереном од споменутог чвора, нагиб еклиптике $\varepsilon=\theta$ ваља заменити нагибом ε_1 Месечеве путање према еклиптици. Угаону брзину n Земље ваља заменити угаоном брзином система Земља-Месец, т. ј. средњим кретањем Месеца ν_1 по његовој путањи, масу m Земље треба заменити масом система Земља-Месец, т. ј. збиром $(m+m_1)$ маса Земље и Месеца, а разломак $\frac{C-A}{C}$ његовом нумеричком вредности датом обрасцем (2). На тај начин добивамо, место (44), претходне главе,

$$\frac{d\Psi_1}{dt}=-\frac{3}{2}\frac{M}{M+m+m_1}\cdot\frac{\nu^2}{\nu_1}\cdot\frac{1}{2}\cos\varepsilon_1\,. \tag{3}$$

Збир $(m+m_1)$ маса Земље и Месеца можемо занемарити према маси M Сунца па зато добивамо, имајући у виду обрасце (54) претходне главе,

$$\frac{d\Psi_1}{dt}=-\frac{3\pi}{2}\cdot\frac{T_1}{T^2}\cos\varepsilon_1\,. \tag{4}$$

Овај нам образац претставља померање чворова Месечеве путање; оно је ретроградно. Апсолутни годишњи износ овог померања претстављен је са

$$p_T=\frac{3\pi}{2}\cdot\frac{T_1}{T}\cos\varepsilon_1 \tag{5}$$

или, ако га меримо степенима, са

$$p_T=270^0\,\frac{T_1}{T}\cos\varepsilon_1\,. \tag{6}$$

Са $\varepsilon_1=5^0 8' 43''$; $T_1=27{,}322$ дана; $T=365,25$ дана добивамо за p_T нумеричку вредност од 20^0. Потпуно једно обилажење чворова Месечеве путање око еклиптике захтевало би, дакле, округло 18 година. У ствари траје то сидерично обилажење чворова Месечеве путање нешто дуже и то 6793,42 дана т. ј. 18,6 година. Разлика између извршеног рачуна и стварности потиче отуда што померање Ψ_1', претстављено обрасцем (4), није довољно малено према средњем кретању ν_1 да би могло бити занемарено. Због тога се образац (11) претходне главе не може истом тачности заменити обрасцем (57).

Поред овог стационарног померања чворова, подлеже ротациони елементи, и то Ојлерови углови Ψ и θ, променама које добивамо ако у обрасцима (50) и (51) претходне главе, проведемо назначене супституције. Користећи се обрасцем (6) и саопштеном нумеричком вредности за ε_1, добивамо:

$$\Psi = 1^{0}36' \sin\frac{4\pi}{T}t \tag{7}$$

$$\theta = 8'39''\cos\frac{4\pi}{T}t. \tag{8}$$

Образац (8) казује да нагиб ε_1 равни Месечеве путање према равни Земљине путање осцилује око своје средње вредности $5^{0}\,8'\,43''$ амплитудом од $8'\,39''$. Тачније израчунавање предњих коефицијената $1^{0}\,36'$ и $8'\,39''$ показало би да би их ваљало заменити са $1^{0}\,38'$ и $8'\,48''$.

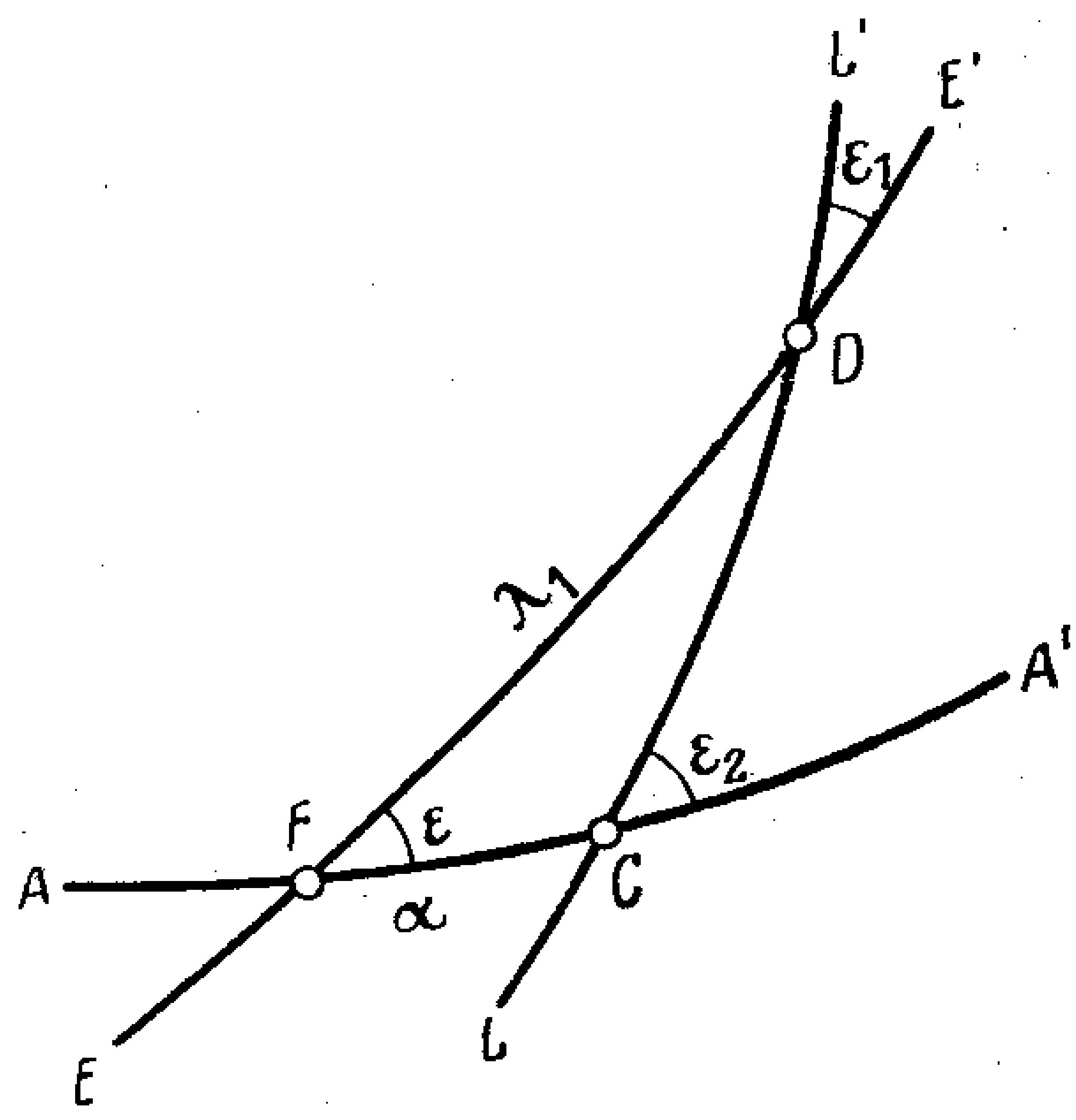
§ 59. Астрономска нутација Земљине осе. Ретроградно кретање чворова Месечеве путање изазива периодична померања Земљине осе која су, као што смо већ саопштили, пронађена од Бредлија, добила назив нутације. Тај назив примењен је касније и на периодичне чланове прецесије о којима смо већ говорили, а и на слободно померање Земљине осе о којем ћемо још говорити па је, за разлику од осталих, Бредлијева нутација названа астрономском нутацијом.

Да би смо извели обрасце за астрономску нутацију, нека нам (сл. 20) AA' претставља небески екватор, EE' еклиптику, LL' пресек небеске сфере са равни Месечеве путање, F пролетњу тачку, D узлазни чвор Месечеве путање у односу на еклиптику, а C узлазни чвор Месечеве путање у односу на небески екватор. Зато нам угао $DFC=\varepsilon$ претставља нагиб еклиптике, угао $L'DE'=\varepsilon_1$ нагиб Месечеве путање према еклиптици, а угао $DCA'=\varepsilon_2$ нагиб Месечеве путање према екватору. Лук $FD=\lambda$, претставља нам лонгитуду чвора D, а лук $FC=\alpha$ ректасцензију чвора C.

Видели смо да је перманентни део момента заокретања Земље изазваног привлачним дејством Сунца био наперен према пролетњој тачки па ће зато перманентни део $\mathfrak{M}_s$ момента заокретања $\mathfrak{M}$ привлачног дејства Месечевог на Земљу бити наперен према чвору C, и имати, према (21), § 54, скаларни износ

$$M_s = \frac{3}{2}\frac{fm_1}{a_1^3}(C-A)\sin\varepsilon_2\cos\varepsilon_2 \tag{9}$$

где m_1 означава масу Месеца, а a_1 његово средње отстојање од Земље.



сл. 20

Раставимо ли овај моменат у две компоненте од којих једна, M_s', пада у еквинокцијалну линију, а друга, M_s'', стоји нормално на њој, то су те компоненте претстављане обрасцима

$$M_s' = M_s\cos\alpha \qquad M_s'' = M_s\sin\alpha$$

т. ј.

$$M_s' = \frac{3}{2}\frac{fm_1}{a_1^3}(C-A)\sin\varepsilon_2\cos\varepsilon_2\cos\alpha \tag{10}$$

$$M_s'' = \frac{3}{2}\frac{fm_1}{a_1^3}(C-A)\sin\varepsilon_2\cos\varepsilon_2\sin\alpha\,. \tag{11}$$

Из сферног троугла *FCD* следују ови обрасци:

$$\cos\varepsilon_2 = \cos\varepsilon\cos\varepsilon_1 - \sin\varepsilon\sin\varepsilon_1\cos\lambda_1$$

$$\sin\varepsilon_2\sin\alpha = \sin\varepsilon_1\sin\lambda$$

$$\sin\varepsilon_2\cos\alpha = \sin\varepsilon\cos\varepsilon_1 + \cos\varepsilon\sin\varepsilon_1\cos\lambda_1 .$$

Ставимо ли ове изразе у (10) и (11) и узмемо ли у обзир да је

$$\cos^2\lambda_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\lambda_1 ; \quad \sin\lambda_1\cos\lambda_1 = \frac{1}{2}\sin 2\lambda_1 ,$$

то добивамо

$$(12) \quad M_s' = \frac{3}{2}\frac{fm_1}{a_1^3}(C-A)\,[\sin\varepsilon\cos\varepsilon - \frac{3}{2}\sin\varepsilon\cos\varepsilon\sin^2\varepsilon_1 + $$
$$+ \frac{1}{2}\cos 2\varepsilon\sin 2\varepsilon_1\cos\lambda_1 - \frac{1}{2}\sin\varepsilon\cos\varepsilon\sin^2\varepsilon_1\cos 2\lambda_1]$$

$$(13) \quad M_s' = \frac{3}{4}\frac{fm_1}{a_1^3}(C-A)\,[\cos\varepsilon\sin 2\varepsilon_1\sin\lambda_1 -$$
$$- \sin\varepsilon\sin^2\varepsilon_1\sin 2\lambda_1].$$

У обрасцу (12) претставља нам

$$\frac{3}{2}\frac{fm_1}{a_1^3}(C-A)\,[\sin\varepsilon\cos\varepsilon - \frac{3}{2}\sin\varepsilon\cos\varepsilon\sin^2\varepsilon_1]$$

сну компоненту момента $\mathfrak{M}_s$ која је наперена према пролетњој тачки. Та је компонента већ била узета у обзир при израчунавању лунисоларне пресеције Земљине осе. Остатак, зависан од положаја чворова Месечеве путање, претставља онај променљиви, периодични део $\mathfrak{M}_p$ момента $\mathfrak{M}_s$ који изазива астрономску нутацију Земљине осе. Његове компоненте M_1', M_2' које, због прве од једначина (22) претходне главе, морамо узети у рачун са противним знаком, претстављене су обрасцима:

$$(14)\quad M_1' = -\frac{3}{4}\frac{fm_1}{a_1^3}(C-A)\,[\cos 2\varepsilon \sin 2\varepsilon_1 \cos\lambda_1 - \\ - \sin\varepsilon\cos\varepsilon\sin^2\varepsilon_1\cos 2\lambda_1]$$

$$(15)\quad M_2'' = -\frac{3}{4}\frac{fm_1}{a_1^3}(C-A)\,[\cos\varepsilon\sin 2\varepsilon_1\sin\lambda_1 - \\ - \sin\varepsilon\sin^2\varepsilon_1\sin 2\lambda_1].$$

Узмемо ли у обзир једначине (34) и (27) претходне главе, то добивамо

$$(16)\quad \frac{d\Psi}{dt} = -\frac{3}{4}\frac{fm_1}{a_1^3}\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{C-A}{C}\left[\frac{\cos 2\varepsilon}{\sin\varepsilon}\sin 2\varepsilon_1\cos\lambda_1 - \right. \\ \left. - \cos\varepsilon\sin^2\varepsilon_1\cos 2\lambda_1\right].$$

$$(17)\quad \frac{d\theta}{dt} = \frac{3}{4}\frac{fm_1}{a_1^3}\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{C-A}{C}\left[\cos\varepsilon\sin 2\varepsilon_1\sin\lambda_1 - \right. \\ \left. -\sin\varepsilon\sin^2\varepsilon_1\sin 2\lambda_1\right].$$

Користећи се једначинама (41) и (54) претходне главе, добивамо

$$\frac{fm_1}{a_1^3} = \frac{m_1}{m+m_1}\nu_1^2.$$

Апсолутни годишњи износ прецесије изазване Месецом претстављен је, због (53) претходне главе, обрасцем

$$p_T = \frac{3}{2}\cdot\frac{m_1}{m+m_1}\cdot\frac{\nu_1^2}{n}\,T\,\frac{C-A}{C}\cos\varepsilon.$$

Како је, због ретроградног кретања чворова Месечеве путање,

$$(18)\qquad \lambda_1 = -\frac{2\pi}{T_2}t$$

где T_2 означава време обилажења тих чворова око еклиптике, то је

$$(19)\quad \frac{d\Psi}{dt} = -\frac{1}{2} p_\Gamma \frac{1}{T}\left[2\,\mathrm{cotg}\,2\varepsilon \sin 2\varepsilon_1 \cos\frac{2\pi}{T_2}t - \right.$$
$$\left. - \sin^2\varepsilon_1 \cos\frac{4\pi}{T_2}t\right]$$

$$(20)\quad \frac{d\theta}{dt} = -\frac{1}{2} p_T \frac{1}{T}\left[\sin 2\varepsilon_1 \sin\frac{2\pi}{T_2}t - \right.$$
$$\left. - \mathrm{tang}\,\varepsilon \sin^2\varepsilon_1 \sin\frac{4\pi}{T_2}t\right].$$

Интеграција ових диференцијалних једначина даје, при истим иницијалним условима које смо поставили при интеграцијиједничина (46 и (47) претходне главе,

$$(21)\quad \Psi = -\frac{1}{4\pi} p_T \frac{T_2}{T}\left[2\,\mathrm{cotg}\,2\varepsilon \sin 2\varepsilon_1 \sin\frac{2\pi}{T_2}t - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{2}\sin^2\varepsilon_1 \sin\frac{4\pi}{T_2}t\right]$$

$$(22)\quad \theta = \frac{1}{4\pi} p_T \frac{T_2}{T}\left[\sin 2\varepsilon_1 \cos\frac{2\pi}{T_2}t - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{2}\mathrm{tang}\,\varepsilon \sin^2\varepsilon_1 \cos\frac{4\pi}{T_2}t\right].$$

Са

$$p_T = 34''48\,;\quad T_2 = 18{,}6\,T;\quad \varepsilon = 23^0 27'\,;\quad \varepsilon_1 = 5^0 8' 43''$$

добивамо

$$(23)\quad \begin{cases} \Psi = -17''06 \sin\dfrac{2\pi}{T_2}t + 0''205 \sin\dfrac{4\pi}{T_2}t \\[2ex] \theta = 9''117 \cos\dfrac{2\pi}{T_2}t - 0''089 \cos\dfrac{4\pi}{T_2}t\,. \end{cases}$$

У Астрономији је уобичајена пракса да се угао Ψ мери ретроградно, због чега ваља прве обрасце једначина (61) и (62) претходне главе и горњих једначина (23) употребити са противним знаком. У астрономској пракси употребљава се, у обрасцима за нутационе чланове, место независне вариабилне t, лонгитуда Сунца $\odot$, лонгитуда Месеца ☾ и лонгитуда ☊ узлазног чвора Месечеве путање. Пошто ☊ расте ретроградно, то треба у члановима са $\sin \Omega$ извршити још једну промену знака. На тај начин добивају се за целокупну нутацију ови на две децимале тачно израчунати обрасци:

$$\Psi = -1''27 \sin 2\odot - 0''20 \sin 2☾ - 17''26 \sin \Omega + 0''21 \sin 2\Omega$$

$$\theta = +0''55 \cos 2\odot + 0''09 \cos 2☾ + 9''22 \cos \Omega - 0''09 \cos 2\Omega \,.$$

Сваки пар оних чланова који имају исту периоду проузрокује померање Земљине осе ротације и то такво да продорна тачка те осе са небеском сфером описује, за време одговарајуће периоде, на небеском своду, једну малу, нутациону, елипсу. Јер померили се та оса за углове θ и Ψ, то се њена продорна тачка помера на небеској сфери за привидне дужи

$$x = \theta \;; \quad y = \Psi \sin \varepsilon$$

па зато добивамо, на пример, из оба главна члана горњих образаца ова померања,

$$x = 9''22 \cos \Omega \;; \quad y = -17''26 \sin \varepsilon \sin \Omega \,.$$

Елиминишемо ли из ових двеју једначина Ω, то добивамо

$$\frac{x^2}{(9''22)^2} + \frac{y^2}{(17''26 \sin \varepsilon)^2} = 1 \,.$$

Ово је једначина Бредлијеве нутационе елипсе. Њене полуосе су, пошто је $\varepsilon = 23^0 27'$, једнаке $a = 9''22$; $b = 6''87$; велика оса те елипсе наперена је према полу еклиптике.

ГЛАВА ЧЕТРНАЕСТА

Слободна нутација Земље.

§ 60. Историјски податци. До скоро пред крај прошлога века мислило се да Земљина оса ротације не мења свој положај у Земљином телу јер су тако говорили резултати астрономских посматрања. Заиста, када би се оса ротације померала у Земљином телу, морале би се мењати и географске ширине појединих места на Земљи, а такве промене нису биле опажене на астрономским опсерваторијама, распореданим по целој Земљиној површини. Сматрало се, дакле, да је Земља, о чему је сведочила и Клероова теорема, подесила свој облик према својој ротацији тако да се њена геометријска оса, т. ј. њена поларна главна оса инерције, поклапа са њеном осом ротације. Ако је то, заиста, случај, онда нема, као што ћемо одмах видети, разлога да Земљина оса ротације мења свој положај у Земљином телу ако на њу не дејствује моменат спољних сила. Истина, теорија прецесије показала је, као што смо видели, да Земљина оса ротације не може бити потпуно непокретна у Земљином телу, јер ако та оса мења свој положај у простору, онда га мора мењати и у Земљином телу; чим постоји херполходија као коначна крива, мора постојати и коначна полходија. Али се показало да је полходија прецесионог кретања Земљиног толико уска да није могла бити констатована астрономским посматрањима, да се, дакле, може сматрати за тачку. Из те претпоставке, накнадно оправдане, извели смо главне обрасце за прецесију и астрономску нутацију Земљине осе. Но Ојлерове једначине не искључују, као што ћемо видети, ни у случају када на Земљу не дејствује никакав спољни моменат заокретања, могућност померања Земљине осе, али је такво померање сматрано само као неостварена могућност. Но већ 1814 године изразио је, на темељу својих посматрања, велики немачки астроном *Бесел* своју сумњу у непокретност Земљине осе ротације у Земљином телу; и резултати посматрања руског астронома *Петерса*, извршених 1842 године, говорили су у истом смислу. Али су промене географских ширина примећене од ових двају астронома, а и других који су се бавили истим питањем, биле толико незнатне да су се могле растумачити и другим разлозима, на пример, поремећајима опажања изазваним оптичком рефракцијом. Када су, на послетку, 1888 године, посматрања берлинског астронома *Кистнера* несумњиво доказала реалност промена географских ширина, одлучено је да се те промене систематичније испитају. Ако се Земљина оса помера, заиста, у Земљином телу, онда се то померање мора испољитм у противном смислу на географским ширинама двају места, рецимо северне хемисфере, којих се географске дужине разликују за 180°, јер у колико се Земљин пол ротације приближава једном од тих двају места, у толико се он од другог мора удаљавати. Да би се дефинитивно утврдило да ли је то тако, упућена је једна немачка и једна американска експедиција у Хонолулу, на Хавајским Острвима, да врше онде посматрања варијације географске ширине у исто време са вршењем таквих посматрања у Берлину, Прагу и Штрасбургу. Та су посматрања, вршена од маја 1891 до јуна 1892, доказала да се Земљина оса, иако незнатно, заиста, помера у Земљином телу. Крајем прошлога века организована је интернационална астрономска служба која врши, на шест станица, распоређаних дуж упоредника од 39°8′ северне хемисфере, посматрања промена географске ширине и прати тиме, корак у корак, померање Земљиних полова. О резултатима тих посматрања говорићемо пошто испитамо механизам посматране појаве.

§ 61. Механизам појаве. *Претпоставимо, пошто смо ефекте момента спољних сила већ испитали, да на Земљу не утиче никакав такав спољни моменат, т. ј. да је, према употребљеним ознакама,*

$$\mathfrak{M} = 0 \qquad (1)$$

(2) $$M_1 = M_2 = M_3 = 0\,.$$

Претпоставимо, за сада, да је Земља чврсто непромењиво тело тако да за њу важе Ојлерове једначине, изведене у § 44, које због предњих претпоставка добивају овај облик:

(3) $$\left\{\begin{aligned} &A\frac{dw_1}{dt}+(C-B)w_2w_3=0\\ &B\frac{dw_2}{dt}+(A-C)w_3w_1=0\\ &C\frac{dw_3}{dt}+(B-A)w_1w_2=0\,.\end{aligned}\right.$$

Из једначине (26), § 43, и предње једначине (1) следује

(4) $$\frac{d\mathfrak{G}}{dt}=0\,.$$

Интеграција ове једначине даје

(5) $$\mathfrak{G}=\mathfrak{G}_0$$

где $\mathfrak{G}_0$ претставља један константни вектор. Импулс обртања је, дакле, један у простору инвариабилан вектор.

При извођењу Ојлерових једначина претпостављено је да је почетак O координатног система $x-y-z$, везаног са посматраним телом, положен у тежиште тога тела, а да се његове координатне осе подударају са главним, дакле са централним, осама инерције тога тела. Зато је према једначинама (41), § 44,

(6) $$Aw_1\mathfrak{i}+Bw_2\mathfrak{j}+Cw_3\mathfrak{k}=\mathfrak{G}_0$$

где A, B, C претстављају централне главне моменте инерције посматранога тела. Сразмера тих момената инерције одређује карактер ротационог кретања уоченога тела.

Ако је

$$A=B=C,$$

онда је због (6)

$$A\mathfrak{w}=\mathfrak{G}_0$$

т. ј. вектор ротације $\mathfrak{w}$ има исти правац као и вектор $\mathfrak{G}_0$ па и он има инвариабилну ориентацију у простору; он не мења свој положај ни у самом уоченом покретном телу, јер је онда због (3)

$$\frac{dw_1}{dt} = \frac{dw_2}{dt} = \frac{dw_3}{dt} = 0 .$$

Уочено тело обрће се, дакле, око осе, непроменљиве у њему и у простору, константном угаоном брзином w.

Ако су моменти инерције A, B, C неједнаки, онда, у таквом случају, води испитивање кретања уоченога тела на елиптичне функције. Ми ћемо се, пошто имамо да испитамо кретање наше Земље, задовољити специјалним случајем

$$A = B \tag{7}$$

оствареним у примеру наше Земље. Ту је, пошто осу z нашег координатног система полажемо у осу Земљинога тела,

$$C > A . \tag{8}$$

Оса z зове се у овом случају и геометријском осом Земље. Ојлерове једначине (3) добивају, због (7), сада овај облик

$$A \frac{dw_1}{dt} + (C - A) w_2 w_3 = 0 \tag{9}$$

$$A \frac{dw_2}{dt} + (A - C) w_3 w_1 = 0 \tag{10}$$

$$\frac{dw_3}{dt} = 0 . \tag{11}$$

Из (11) следује интеграцијом

$$w_3 = n \tag{12}$$

где n означава једну константу. Земља се обрће, дакле, око своје геометријске осе константном угаоном брзином n. Означимо ли периоду тога обртања са τ, то је

$$w_3 = n = \frac{2\pi}{\tau} \quad . \tag{13}$$

Ставимо ли, краткоће ради,

$$\frac{2\pi}{\tau}\frac{C-A}{A} = k\,, \tag{14}$$

где је, због (8), k један позитиван, константан број, то добивамо место (9) и (10) ове две једначине:

$$\frac{dw_1}{dt} + kw_2 = 0 \tag{15}$$

$$\frac{dw_2}{dt} - kw_1 = 0. \tag{16}$$

Помножимо ли прву од ових двеју једначина са w_1, а другу са w_2, па саберемо ли их, то добивамо

$$w_1 dw_1 + w_2 dw_2 = 0\ .$$

Интеграција ове диференцијалне једначине даје

$$w_1^2 + w_2^2 = c^2 \tag{17}$$

где c означава једну константу. Из (15), (16) и (17) следује

$$\frac{dw_1}{\sqrt{c^2 - w_1^2}} = -\,kdt\ ; \qquad \frac{dw_2}{\sqrt{c^2 - w_2^2}} = kdt\,.$$

Интеграција ових двеју диференцијалних једначина даје, ако за иницијални моменат $t = 0$ одаберемо један од оних тренутака у којем је $w_1 = c$; $w_2 = 0$, т. ј. у којем вектор ротације $\mathfrak{w}$ пада баш у раван $x - z$,

$$\text{arc}\cos\frac{w_1}{c} = kt\ ; \qquad \text{arc}\sin\frac{w_2}{c} = kt$$

т. ј.

$$w_1 = c\cos kt \tag{18}$$

(19) $$w_2 = c \sin kt\,.$$

Да са покретног координатног система $x—y—z$ пређемо на непокретни $X—Y—Z$, одаберимо правац инвариабилног вектора $\mathfrak{G}_0$ за правац осе Z непокретног координатног система, онда се раван $X—Y$ тог координатног система, у којој можемо осу X произвољно оријентисати, зове инвариабилном равни. Из слике 17 (страна 216) следује, пошто се оса Z подудара са правцем вектора $\mathfrak{G}_0$,

$$\mathfrak{G}_0 = G_0\,\mathfrak{n}_3 = (G_0 \sin\theta)\,\mathfrak{h}_0 + (G_0 \cos\theta)\,\mathfrak{k}.$$

Како је

$$(G_0 \sin\theta)\,\mathfrak{h}_0 = (G_0 \sin\theta \sin\Phi)\,\mathfrak{i} + (G_0 \sin\theta \cos\Phi)\,\mathfrak{j},$$

то добивамо

(20) $$\mathfrak{G}_0 = (G_0 \sin\theta \sin\Phi)\mathfrak{i} + (G_0 \sin\theta \cos\Phi)\,\mathfrak{j} + (G_0 \cos\theta)\,\mathfrak{k}.$$

Из једначина (6) и (7) следује

(21) $$\mathfrak{G}_0 = Aw_1\mathfrak{i} + Aw_2\mathfrak{j} + Cw_3\mathfrak{k}\,,$$

а из (20) и (21)

(22) $$w_1 = \frac{G_0}{A} \sin\theta \sin\Phi$$

(23) $$w_2 = \frac{G_0}{A} \sin\theta \cos\Phi$$

(24) $$w_3 = \frac{G_0}{A} \cos\theta\,.$$

Из (21) следује квадрирањем

(25) $$G_0{}^2 = A^2 w_1{}^2 + A^2 w_2{}^2 + C^2 w_3{}^2$$

т. ј. због (17) и (13)

(26) $$G_0{}^2 = c^2 A^2 + n^2 C^2.$$

Једначине (24) и (13) дају

$$G_0 \cos\theta = nC \tag{27}$$

$$\cos^2\theta = \frac{n^2C^2}{c^2A^2+n^2C^2}; \qquad \sin^2\theta = \frac{c^2A^2}{c^2A^2+n^2C^2} = \frac{c^2A^2}{G_0^{\,2}}$$

$$\sin\theta = \frac{cA}{G_0}\,. \tag{28}$$

Стављајући (28) у (22) и (23), добивамо

$$w_1 = c\sin\Phi \tag{29}$$

$$w_2 = c\cos\Phi\,. \tag{30}$$

Из (29), (30), (18) и (19) следује

$$\Phi = \frac{\pi}{2} - kt. \tag{31}$$

Једначина (28), у којој на десној страни стоје саме константе, казује да је Ојлеров угао θ непроменљив, т. ј. да је

$$\theta' = 0. \tag{32}$$

Једначине које дају компоненте вектора ротације у покретном односно мирујућем координатном систему као функције Ојлерових углова биле су, као што смо видели у § 46, ове:

$$\left\{\begin{aligned} w_1 &= \Psi'\sin\theta\sin\Phi + \theta'\cos\Phi \\ w_2 &= \Psi'\sin\theta\cos\Phi - \theta'\sin\Phi \\ w_3 &= \Psi'\cos\theta + \Phi' \end{aligned}\right. \tag{33}$$

$$\left\{\begin{aligned} \omega_1 &= \theta'\cos\Psi + \Phi'\sin\theta\sin\Psi \\ \omega_2 &= \theta'\sin\Psi - \Phi'\sin\theta\cos\Psi \\ \omega_3 &= \Psi' + \Phi'\cos\theta\,. \end{aligned}\right. \tag{34}$$

Из предњих једначина и образаца (22), (23), (24) следује:

$$\Psi' = \frac{G_0}{A}\,. \tag{35}$$

Извршимо слободни избор ориентације осе X у инвариабилној равни тако да је у иницијалном моменту $t=0$; $\Psi=0$, онда добивамо, интеграцијом предње једначине,

$$\Psi=\frac{G_0}{A}\,t\,. \tag{36}$$

Из једначина (34) и горњих једначина следује

$$\omega_1=-\frac{kcA}{G_0}\sin\frac{G_0}{A}\,t \tag{37}$$

$$\omega_2=\frac{kcA}{G_0}\cos\frac{G_0}{A}\,t \tag{38}$$

$$\omega_3=\frac{G_0}{A}+\frac{knC}{G_0}\,. \tag{39}$$

Добивеним једначинама описана је слободна нутација Земље. Обрасци (12), (18) и (19) претстављају нам координате вектора ротације $\mathfrak{w}$ у покретном координатном систему, дакле једначину полходије у параметарском облику. Та је крива круг са центром у геометријској оси Земље удаљеним за $w_3=n$ од почетка координатног система. Раван тога круга стоји нормално на геометријској оси Земље, а његов радиус је једнак

$$r=\sqrt{w_1^2+w_2^2}=c\,. \tag{40}$$

Онај радиус тога круга који спаја његов центар са тачком полходије која одговара тренутку t затвара са равни $x-z$ угао φ дат једначином

$$\operatorname{tang}\varphi=\frac{w_2}{w_1}=\operatorname{tang}kt$$

из које следује због (14)

$$\varphi=kt=\frac{2\pi}{\tau}\,\frac{C-A}{A}\,t\,.$$

Овај угао расте пропорционално времену па зато оса ротације Земље обиђе целу полходију за време периоде

(41) $$T = \frac{A}{C-A}\tau$$

и то у позитивном смислу.

Обрасци (37), (38) и (39) претстављају нам координате вектора ротације $\mathfrak{w}$ у мирујућем координатном систему, дакле једначину херполходије у параметарском облику. И та је крива круг који се нормално обавио око осе Z. Радиус тога круга једнак је

(42) $$R = \frac{kcA}{G_0}$$

а онај његов радиус који спаја његов центар, који лежи у оси Z, са тачком херполходије која одговара тренутку t затвара са равни $X-Z$ угао ψ дат овом једначином

$$\operatorname{tang}\psi = \frac{\omega_2}{\omega_1} = -\operatorname{cotg}\frac{G_0}{A}t$$

из које следује

$$\psi = \frac{\pi}{2} + \frac{G_0}{A}t.$$

И овај угао расте пропорционално времену па зато оса ротације Земље обиђе целу херполходију за време периоде

(43) $$T_1 = 2\pi\frac{A}{G_0}$$

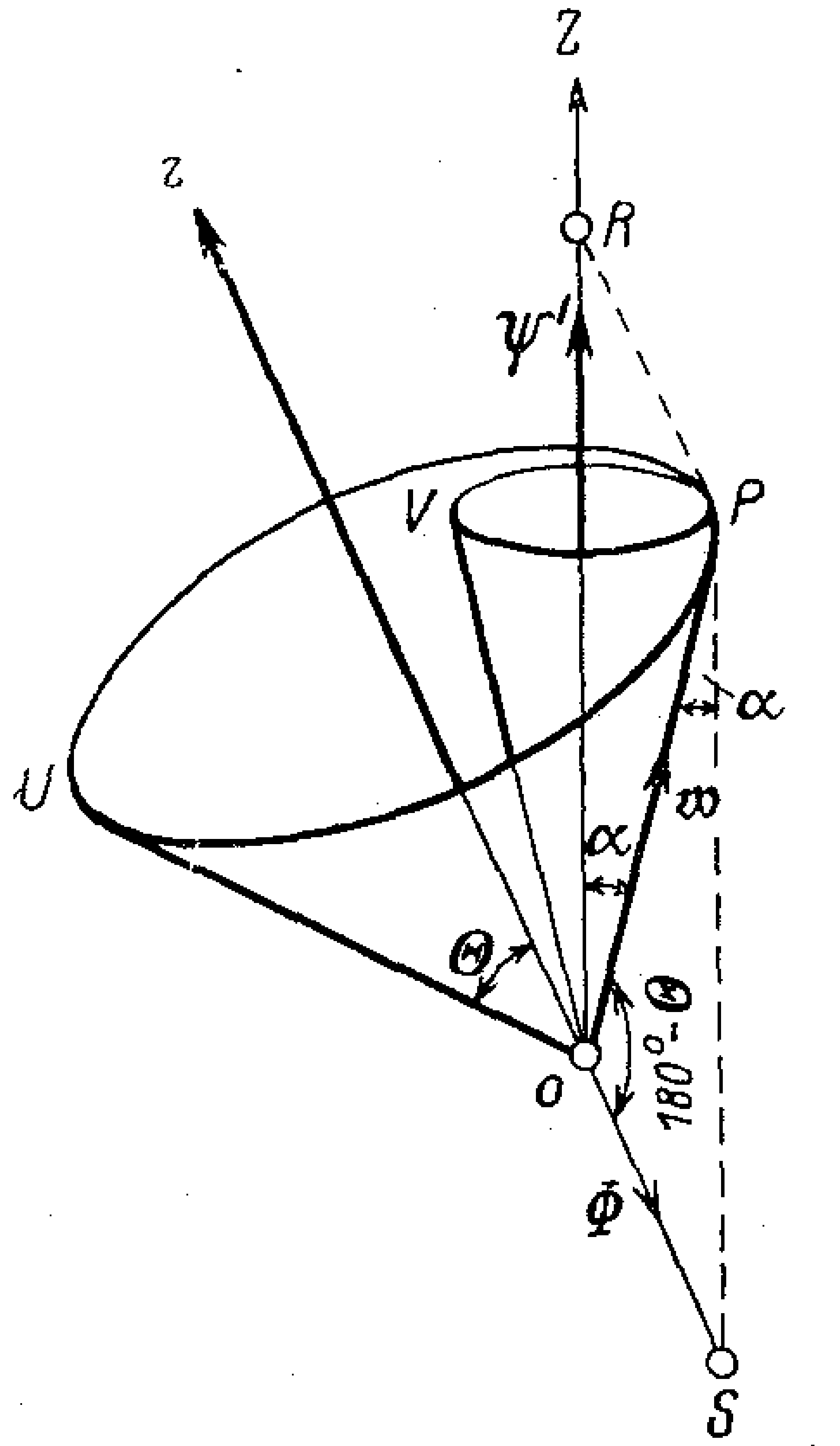
и то у позитивном смислу.

Нашавши полходију и херполходију и начин кретања крајње тачке ротационог вектора $\mathfrak{w}$ по тим двема кривама, решен је постављени проблем. Пре но што добивено решење применимо на нашу Земљу, даћемо му још једну геометријску интерпретацију.

Из (45), § 46, следује, узимајући у обзир (32),

(44) $$\mathfrak{w} = \Psi'\mathfrak{n}_3 + \Phi'\mathfrak{k}.$$

Ова једначина казује да ротацију $\mathfrak{w}$ можемо сматрати за резултанту двеју компоненталних ротација од којих прва следује око осе Z угаоном брзином Ψ', а друга око осе z угаоном брзином Φ'. Нека нам дакле, OZ (сл. 21) претставља осу Z мирујућег координатног система, а Oz осу z покретног, т. ј. геометријску осу Земљину. Одмеримо на позитивној грани осе Z, дуж $\overline{OR} = \Psi' = \frac{G_0}{A}$, а на негативној грани осе z дуж $\overline{OS} = -\Phi' = k$, то нам дијагонала OP паралелограма $OSPR$ претставља, по величини и назначеном смеру, угаону брзину $\mathfrak{w}$; она лежи, пошто је Φ' негативно, изван оштрог угла ZOz. Пошто су $\overline{OR}$, $\overline{OS}$ и θ константне величине, то се међусобни положај обеју оса Z и z и вектора ротације $\mathfrak{w}$ не мења за време кретања. Крајња тачка P вектора ротације $\mathfrak{w}$ описује око осе Z кружну херполходију PV, а око осе z кружну полходију PU. Круг полходије обавио се, због тога што је $C > A$, око круга херполходије па се котрља по њему, повлачећи са собом Земљино тело. То кретање можемо, према оном што смо малочас изложили, и тако интерпретирати да се геометријска оса z Земље обрће око осе Z константном угаоном брзином Ψ', а Земља се при томе обрће око те своје геометријске осе угаоном брзином $-\Phi'$. Из троугла OPS следује следећа релација између углова отвора θ односно α полходије



Сл. 21.

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\theta} = \frac{-\Phi'}{\Psi'} = \frac{T_1}{T}. \tag{45}$$

Та релација следује, у осталом, и из чињенице да се круг полходије, котрљајући се по кругу херполходије, обрне једанпут за време T, а да му је потребно време T_1, да обиђе целу херполходију.

§ 62 Ојлерова периода и Чендлерова периода.

Применимо добивене резултате на случај наше Земље. Из њих следује да, претпостављајући Земљу као апсолутно чврсту, њена оса ротације оцрта у Земљином телу конус полходије за време T дато обрасцем (41). Продорне тачке те осе са Земљином површином претстављају нам тренутне полове ротације Земљине, а продорне тачке геометријске осе Земљине са том површином претстављају нам геометријске полове Земље. За време T опише, дакле, пол ротације око геометријског пола, као центра, круг којега је радиус претстављен обрасцем (40). У обрасцу (41) можемо периоду τ, за време које се Земља обрне око своје геометријске осе, као што ћемо видети, инден-тификовати са звезданим даном; из нумеричке вредности разломка $\frac{A}{C-A}$ добива се онда за T интервал од 305 звезданих или 304 средњих Сунчевих дана. Та се периода зове *Ојлеровом периодом*. Радиус c круга полходије зависи од иницијалних услова. Када би ти услови били такви да у иницијалном моменту вектор ротације $\mathfrak{w}$ пада у геометријску осу Земље, дакле у осу z нашег покретног координатног система, онда би ти услови били изражени са

$$t=0; \quad w_1=w_2=0$$

па би из једначина (9) и (10) следовало

$$\frac{dw_1}{dt}=\frac{dw_2}{dt}=0$$

т. ј. компоненте w_1 и w_2 ротационог вектора биле би стално једнаке нули, а то значи да би се Земља стално обртала око своје геометријске осе. У том случају би због (22) и импулс обртања $\mathfrak{G}_0$, којега смо правац одабрали за осу Z мирујућег координатног система, пао у геометријску осу Земљину па би било $\theta=0$; полходија и херполходија би дегенерисале на једну заједничку тачку, а конус полходије и конус херполхолдије на једну у простору и у Земљином телу инваријабилну праву; Земља би се обртала константном угаоном брзином око своје у простору непокретне геометријске осе. Да је Земљина слободна ротација такве природе мислило се, као што смо казали догод нису систематска посматрања и проучавања варијације географских ширина показала да то није тако. Из тих посматрања следује да Земљин тренутни пол ротације отступа од геометријског пола и обилази у предвиђеном смислу око њега. Та обилажења, која нису међусобно сасвим једнака, не разликују се осетно од кружних путања, а при томе се пол ротације не удаљује од геометријског пола даље од 10 метара или, ако то отстојање меримо угаоном мером, не даље од 0″3. Тај угао претставља нам угао отвора θ полходије, т. ј. угао што га вектор ротације $\mathfrak{w}$ затвара се осом z координатног система везаног са Земљом. Модуо w вектора $\mathfrak{w}$ дат је једначином

$$w^2 = w_1{}^2 + w_2{}^2 + w_3{}^2$$

т. ј. због (12) и (17) једначином

$$w^2 = c^2 + n^2. \tag{46}$$

Како је

$$\frac{c}{n} = \operatorname{tang} \theta$$

то добивамо, ако у ову једначину уврстимо тангенс угла од 0″3, који можемо, пошто је тај угао врло мали, заменити са самим тим углом,

$$c = 0{,}000\,0001\, n\,.$$

Стављајући ово у једначину (46), добили бисмо релацију између угаоне брзине w око тренутне осе ротације и угаоне брзине n ротације око геометријске осе Земљине; разлика између тих угаоних брзина толико је незнатна да смо у (41) за τ могли са правом да ставимо трајање звезданог дана. Саопштени нумерички податци показују да је конус полходије веома шиљаст. Како у једначини (26) можемо, пошто се моменти инерције A и C не разликују осетно један од другог, а c је, као што смо видели, веома малено према n, занемарити први члан десне стране па добивамо

$$G_0 = nC$$

т. ј. због (12), (13) и (43)

$$T_1 = \frac{A}{C}\tau . \tag{47}$$

Периода T_1 не разликује се, дакле, осетно од дужине једног звезданог дана.

Из релације (45), у којој можемо, пошто су углови α и θ веома малени, њихове синусе заменити са самим тим угловима мереним у лучној мери, следује

$$\frac{\alpha}{\theta} = \frac{T_1}{T}$$

т. ј. због (47) и (41)

$$\alpha = \frac{C-A}{C}\theta . \tag{48}$$

Из саопштених нумеричких вредности за θ и $\frac{C-A}{C}$ следује $\alpha = 0''00098$; угао α не прекорачава, дакле, вредност од $0''001$. Померање Земљине осе ротације у простору не достиже ни 300-ти део померања те осе у Земљином телу. То померање осе у простору толико је незнатно да не достиже границе најоштријег астрономског опажања; зато можемо оријентацију Земљине осе при њеном слободном кретању, искључујући утицај прецесије и астрономске нутације, сматрати као инвариабилну. Око те осе климата Земља тако да, релативно према Земљиној површини, пол ротације описује своју уску кружну путању око геометријског пола Земље. То кретање Земље зове се њена *слободна нутација*.

Резултати интернационалне службе посматрања варијације географских ширина показали су да пол ротације треба за један потпуни обилазак око геометријског пола, место нађене Ојлерове периоде, интервал времена од 437 дана, дакле округло 14 месеци. Та се периода зове, по њеном проналазачу, *Чендлерова периода*. Размимоилажење између теорије и опажања, које се испољило у тим двема периодама, нашло је убрзо своје тумачење од *Њукема*. Наша теоријска испитивања извршена су под претпоставком да је наша Земља апсолутно чврста, што није случај. Узме ли се у обзир еластичност Земљина, онда наступа подударност између теорије и опажања.

ГЛАВА ПЕТНАЕСТА

Секуларно померање Земљиних полова.

§ 63. Историјски податци. Класична теорија ротационог кретања Земље почива на претпоставци да је наша Земља апсолутно чврста. Иако је ова претпоставка у природи само непотпуно остварена, успела је класична теорија да главне појаве ротационог кретања Земљиног, прецесију и астрономску нутацију Земљине осе, потпуно растумачи и математски савршено опише. Зато није чудо да је био прошао век и по од када су положени били темељи те теорије, а да се није ни помишљало ставити у питање њене, тако добро опробане, претпоставке. Тек половином прошлога века, када је питање о унутрашњости Земље постало актуелно, постављено је и питање како би се одигравала прецесија и нутација Земљине осе када би Земља имала течну унутрашњост, затворену у чврстој љусци. Седам деценија бавили су се научници тим питањем да радовима *Поенкареа* и *Опенхајма* дођу до резултата да би и течна Земља имала исту прецесију као и потпуно чврста, што је *Швајдар* доказао и за еластичну. Није, дакле, било разлога класичну теорију прецесије и нутације замењивати новом. Истина да је проналазак Чендлерове периоде слободне нутације Земљине показао да се, у овом случају, не може изаћи на крај са претпоставком апсолутно чврсте Земље, али је овде било довољно претпоставити Земљу као еластичну па да се постигне сагласност између теорије и стварности. Али је, свим тим значајним резултатима егзактне науке, остало једно, и то можда најважније, питање нерешено. Геолошка испитивања су показала да положаји полова Земљине ротације нису непроменљиви на њеној површини него да су се они, у току геолошке прошлости, неочекивано далеко померали по лицу Земљином. Од многобројних докумената геологије који то сведоче да наведемо само један. Богате наслаге каменог угља које су пронађене на Шпицбершким Острвима и које се данас у великој мери експлоатишу, нису се могле образовати на садашњој географској ширини тих острва, јер то не би дозволиле њихове климатске прилике. У доба карбона био је, то сведоче и остали документи геологије, положај Земљиних полова сасвим други но што је сада, а то важи и за остала геолошка доба. Тако су геологија и остале дескриптивне природне науке поставиле егзактној науци питање: да ли постоје механички разлози за померање полова на Земљиној површини и да ли је могуће то померање испитати и описати оруђем математике.

Покушаји који су, у другој половини прошлога века, чињени од *Томзона*, *Дарвина* и *Скиапарелија* да на постављено питање одговоре, остали су безуспешни, јер су ти научници тражили узрок оној појави у промени распореда маса на Земљи. За време Земљине прошлости дешавали су се, у истину, велики претовари маса на Земљиној површини, аквартерно ледено доба, када су велики делови северних крајева Европе и Америке били покривени слојем снега и леда, дебелим хиљада метара, предочава нам један такав случај. Али су те промене у распореду маса Земљиних које нам, на први поглед, изгледају огромне, биле сасвим недовољне да изазову већа померања полова Земљиних. На постављено питање могло се само одговорити напуштајући класичну претпоставку о природи Земљинога тела и замењујући је новом која одговара боље стварности, т. ј. узимајући у обзир новија испитивања геофизике о природи Земљиног тела. Та су испитивања доказала ово. Спољни слој чврсте Земљине коре, у који улазе, у првом реду, Земљини континенти, саграђен је од лакшег материјала који се зове, спајајући прве слогове његових главних саставних елемената, силиција и алуминија, укратко „сиал". Под тим горњим слојем лежи други, од тежег материјала, који се зове „сима" (од силиција и магнезиума). Испитивања теже показала су да сиални покривач Земљин почива на својој симатичној подлози »изостатски« , т. ј. тако како то захтева Архимедов принцип пливања. Сиални покривач Земљин, који се најочигледније испољио у континенталним сантама, утонуо је, сваким својим делом, толико у своју симатичну подлогу како то захтева споменути хидростатски принцип. Како је и та подлога чврста, у обичном смислу те речи, то би се могло, на први мах, мислити да садашње стање није друго до остатак из давних времена када су чврсте сиалне санте пливале на још житкој сими која се постепено стврднула, остављајући у садашњем стању Земљине љуске сведочанство свог некадашњег агрегатног стања. Но то није случај. Она времена, када је та подлога била стварно житка, леже далеко, у првим епохама Земљине прошлости. Од тога доба прохујала је скоро цела геолошка историја Земље, а за њено време дешавале су се још велике промене лица Земљиног које су га из основа измениле. Данашње стање ствари може се растумачити само овако. Подлога сиалног покривача Земљиног показује, поред све своје чврстоће, и дан данас извесне особине течних тела; она је чврста али флуидална, т. ј. она се понаша преме краткотрајним силама као чврсто тело, а према дуготрајним као течно, исто тако као што то чине неке чврсте материје, чврста смола, печатни восак и др. Да наша Земља има такве особине, сведочи, измед осталог, једна добро испитана геофизична појава. За време квартерног леденог доба, када су, као што смо чули, северни делови европског и америчког континента лежали под теретом дебелог леденог слоја, ти су делови континенталних санта утонули у своју подлогу, а када се ледени слој, који их је покривао, отопио, они су се почели опет уздизати у вис, и то њихово уздизање траје и дан данашњи. На тај начин добивамо ову слику о стварној природи Земљинога тела. Земља сматрана као целина, флуидално је тело, т. ј. такво које се према краткотрајним силама понаша као чврсто, али утицају дуготрајних сила постепено попушта и тежи оном стању равнотеже које би одговарало течном агрегатном стању. То је посведочила и Клероова теорема. На том флуидалном телу Земљином почива изостатски њен сиални покривач који не чини једне хомогену љуску него је неједнаке дебљине, распуцан, а можда и распачан на одвојене делове. Он се само у својим појединим деловима показује као чврсто тело, а као целина не; зато га можемо сматрати за скуп чврстих санта које су утонуле у своју флуидалну подлогу како то захтева хидростатски принцип пливања.

Усвајајући ову шему о природи Земљиног тела, израдио је *Миланковић* своју теорију померања Земљиних полова коју ћемо упознати, у њеним главним цртама, у наредних шест параграфа ове књиге. Са своје стране, створио је *Билимовић* своју шему коју ћемо упознати у последњем параграфу, а у којој је схватио Земљу која се обрће око свога тежишта као материјални систем са шест степена слободе и при томе је дошао до исте основне једначине кретања полова као и његов претходник. *Жардецки* је пак испитао утицај зоналне ротације о којој смо већ говорили и показао да хипотеза о таквој ротацији не стоји у противречју са постављеном теоријом померања Земљиних полова.

§ 64. Математска шема изостазије и флуидалности Земљине. Особине Земљиног тела, саопштене у претходном параграфу, ваља, пре но што приступимо постављеном проблему, описати језиком математике па тим створити јасну математску шему о природи Земљиног тела, приступачну егзактном испитивању. Уочимо, у то име, на произвољном месту Земљине површине, једну елементарну вертикалну призму сиалног покривача Земљиног са базом df ограниченом меридијанима ψ и $(\psi + d\psi)$, а упоредницима којима одговарају геоцентричне ширине φ и $(\varphi + d\varphi)$. Означавајући са r радиусвектор уоченог дела Земљине површине, биће база те елементарне призме претстављена овим обрасцем:

$$(1) \qquad df = r^2 \cos\varphi \, d\varphi \, d\psi.$$

Означимо са D дебљину сиалног покривача на уоченом месту Земљине површине, то нам та дужина претставља, у исти мах, висину уочене елементарне призме. Та призма утонула је у своју флуидалну подлогу како то захтева принцип изостазије. Означимо са H дубину до које је она утонула, са ϱ_0 густину симе, а са ϱ густину сиала, то је принцип изостазије изражен једначином

$$(2) \qquad \varrho_0 H = \varrho D ,$$

јер маса $\varrho_0 H df$ истиснутог дела симе мора бити једнака целокупној маси $\varrho D df$ уочене елементарне призме. Замислимо сада да смо неправилни сиални покривач Земљин, заједно са океанима који га покривају, на сваком месту Земљине површине, кондензовали на густину ϱ_0 симе, онда ће он изгледати потиснут тачно до нивоске површине симе која, због флуидалности Земљиног тела, мора претстављати једну еквипотенцијалну површину гравитационих и центрифугалних сила како смо је нашли при извођењу Клероове теореме. Зато ће Земља, место својом стварном неравном површином, бити ограничена једном таквом еквипотенцијалном површином, дакле једним глатким ротационим елипсоидом. Позивајући се на сличан поступак који се употребљава у геодезији, полажући површину елипсоида упоређивања у ниво мора, а кондензујући масе које се изнад њега налазе, назваћемо овај наш елипсоид, за разлику од геодетског *унутрашњим елипсоидом референције*. Једначина његовог меридијанског пресека биће, према обрасцу (77), § 51 , ова

(3) $$r = a(1 - \nu \sin^2\varphi)$$

где a означава радиус екватора тог елипсоида, а ν његову спљоштеност. За ову можемо, пошто је сиални покривач веома танак, дакле извршена кондензација маса незнатна, ставити, довољном тачности, ову нумеричку вредност

(4) $$\nu = \frac{1}{300}\,.$$

Нека нам A, B, C претстављају главне моменте инерције тога, на својој површини кондензованог Земљиног тела који ће се, због тога што је згуснути део његов врло мален према целокупној Земљи, веома мало разликовати од стварних момената инерције наше Земље. Због ротационог облика елипсоида референције можемо, као увек до сада, ставити

(5) $$B = A\,.$$

Положимо у центар Земље почетак O ортогоналног координатног система $X—Y—Z$ па управимо његове осе тако да се оне поклапају са главним моментима инерције кондензованог

Земљиног тела; при томе нека оса Z падне у осу елипсоида референције и буде наперена према северу. Моменат инерције T тако формираног Земљиног тела обзиром на једну произвољну осу ζ која пролази кроз центар Земље, а затвара са осама употребљеног координатног система углове α, β, γ, претстављен је, према познатој теореми Рационалне Механике, обрасцем

$$T = A\cos^2\alpha + B\cos^2\beta + C\cos^2\gamma. \tag{6}$$

Како је за сваку праву која затвара са координатним осама углове α, β, γ,

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1, \tag{7}$$

то добивамо, имајући у виду (5)

$$T = A\,(1 - \cos^2\gamma) + C\cos^2\gamma$$

т. ј.

$$T = A + (C - A)\cos^2\gamma. \tag{8}$$

При даљим извођењима и, у опште, по цео проблем померања полова показаће се као врло корисна ова геометријска претстава о распореду момената инерције. Замислимо да смо из тачке O нашег координатног система описали лопту произвољног радиуса R, онда свакој тачки површине те лопте одговара једна одређена оса ζ која пролази кроз ту тачку и центар Земље, а опет овој оси један одређени моменат инерције T. Зато одговара свакој тачки површине те лопте једна одређена вредност скалара T па зато можемо површину те лопте сматрати за једно сферно скаларно поље. То поље дефинисано је једнозначно обрасцем (8). Еквискаларне линије тога поља претстављене су обрасцем

$$A + (C - A)\cos^2\gamma = \text{const.}$$

па су оне упоредници лопте ако продорне тачке осе Z са том лоптом сматрамо за полове.

Замислимо да је кондензовани сиални покривач Земљин враћен у његово стварно стање, т. ј. да се истегао на своју праву густину, а Земља добила тиме своју стварну релиефну површину. Тим ће се моменат инерције T променити за један одређени износ Ω зависан од конфигурације сиалног покривача. Тај износ можемо, не узимајући, за сада, у обзир незнатне промене гравитационог потенцијала услед истезања сиалног покривача, израчунати на овај начин. Маса уочене елементарне сиалне призме претстављена је изразом

$$d\mu = D.\varrho\, df\,. \tag{9}$$

У кондензованом стању те призме претстављен је моменат инерције њене масе (коју можемо, пошто су њене димензије веома малене према димензијама Земље, замислити концентрисану у њеном тежишту) обзиром на осу ζ, ако са θ означимо угао што га та оса затвара са радиусвектором r тога тежишта, овим изразом

$$r^2 \sin^2\theta\, d\mu.$$

Истегнемо ли ту елементарну призму која, кондензована, има висину H на њену стварну висину D, то ће се тиме њено тежиште уздигнути у вис за дуж

$$z_0 = \frac{1}{2}\,(D - H)\,. \tag{10}$$

Ово померање може због (2) бити претстављено и овим обрасцем

$$z_0 = \frac{\varrho_0 - \varrho}{2\,\varrho_0}\,D. \tag{11}$$

Тим померањем тежишта масе $d\mu$ промениће се и њен малочас саопштени моменат инерције обзиром на осу ζ у

$$(r + z_0)^2 \sin^2\theta\, d\mu$$

или, пошто је дуж z_0 тако малена према r да њен квадрат можемо занемарити, у

$$(r^2 + 2z_0\, r) \sin^2\theta\, d\mu.$$

Истезањем елементарне призме на њену стварну висину промениће се, дакле, моменат инерције T за износ

$$(12) \qquad d\Omega = 2\, z_0 r \sin^2\theta\, d\mu\,.$$

Износ Ω за који ће се променити моменат инерције T ако узмемо у обзир целокупни покривач Земљин, а који ћемо износ назвати *допунским моментом инерције сиалног покривача* Земље обзиром на осу ζ, добићемо ако извршимо интегрисање предњег израза широм целокупне Земљине површине. Свакој оси ζ која пролази кроз центар Земље и њеној продорној тачки са споменутом лоптом радиуса R одговара једна одређена вредност скалара Ω. Зато нам површина те лопте претставља сферно поље скалара Ω. Аналитички образац за то поље добићемо на овај начин. Означимо ли са x, y, z координате тежишта кондензоване елементарне призме, то су моменти инерције односно моменти девијације њене масе обзиром на координантне осе претстављени обрасцима

$$(13) \quad \begin{cases} d\,\mathrm{I}_1' = (y^2+z^2)d\mu\,; & d\,\mathrm{I}_2' = (z^2+x^2)d\mu; \quad d\,\mathrm{I}_3' = (x^2+y^2)d\mu \\ d\Lambda_1' = yzd\mu; & d\Lambda_2' = zxd\mu; \quad d\Lambda_3' \;\; xyd\mu. \end{cases}$$

Уведемо ли, место ортогоналних координата x, y, z, поларне координате r, φ, ψ, то је

$$(14) \qquad x = r\cos\varphi\cos\psi; \quad y = r\cos\varphi\sin\psi; \quad z = r\sin\varphi,$$

$$(15) \quad \begin{cases} d\,\mathrm{I}_1' = r^2(\cos^2\varphi\sin^2\psi + \sin^2\varphi)d\mu \\ d\,\mathrm{I}_2' = r^2(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi\cos^2\psi)d\mu \\ d\,\mathrm{I}_3' = r^2\cos^2\varphi\, d\mu\,. \end{cases}$$

$$(16) \quad \begin{cases} d\Lambda_1' = r^2\sin\varphi\cos\varphi\sin\psi\, d\mu \\ d\Lambda_2' = r^2\sin\varphi\cos\varphi\cos\psi\, d\mu \\ d\Lambda_3' = r^2\cos^2\varphi\sin\psi\cos\psi\, d\mu\,. \end{cases}$$

Уздизањем масе $d\mu$ вертикално у вис, т. ј. у правцу радиусвектора r за малу дуж z_0 промениће се горње величине за

$$d\mathrm{I} = \frac{\partial d\mathrm{I}'}{\partial r} z_0 \quad ; \qquad d\Lambda = \frac{\partial d\Lambda'}{\partial r} z_0\,,$$

па нам ови изрази претстављају диференцијале допунских момената инерције односно девиације сиалног покривача Земљиног обзиром на координатне осе. Извршивши назначену парцијалну диференцијацију и стављајући, иза тога, у добивене обрасце због (1) и (9)

$$d\mu = r^2 D \varrho \cos\varphi d\varphi\, d\psi\,, \tag{17}$$

долазимо до ових образаца

$$\left\{\begin{aligned} dI_1 &= 2r^3\varrho D\,.\, z_0(\cos^2\varphi \sin^2\psi + \sin^2\varphi)\cos\varphi\, d\varphi d\psi \\ dI_2 &= 2r^3\varrho D\,.\, z_0(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi \cos^2\psi)\cos\varphi\, d\varphi d\psi \\ dI_3 &= 2r^3\varrho D\,.\, z_0\cos^3\varphi\, d\varphi d\psi. \end{aligned}\right. \tag{18}$$

$$\left\{\begin{aligned} d\Lambda_1 &= 2r^3\varrho D\,.\, z_0 \sin\varphi \cos^2\varphi \sin\psi\, d\varphi d\psi \\ d\Lambda_2 &= 2r^3\varrho D\,.\, z_0 \sin\varphi \cos^2\varphi \cos\psi\, d\varphi d\psi \\ d\Lambda_3 &= 2r^3\varrho D\,.\, z_0 \cos^3\varphi \sin\psi \cos\psi\, d\varphi d\psi\,. \end{aligned}\right. \tag{19}$$

Допунски моменти инерције I_1, I_2, I_3 односно допунски моменти девијације Λ_1, Λ_2, Λ_3 сиалног покривача Земљиног обзиром на осе координатног система $X—Y—Z$ добивају се интегрисањем предњих образаца широм целе Земљине површине, а служећи се податцима Геофизике о конфигурацији тог покривача. При том израчунавању које спада у област Геофизике и у чије се појединости овде не морамо упуштати, дозвољено је ово упрошћење.

У предње обрасце требало би за r^3, према (3), ставити

$$r^3 = a^3(1 - \nu \sin^2\varphi)^3.$$

Овај образац можемо, пошто је ν веома мало, заменити са

$$r^3 = a^3(1 - 3\nu \sin^2\varphi).$$

Узмемо ли у обзир да члан $-3\nu \sin^2\varphi$ достиже због (4) у максимуму само један проценат првог члана предње заграде, то га можемо сасвим занемарити па ставити $r = a$, т. ј. сматрати радиусвектор r за константу. То можемо учинити тим пре што податци Геофизике о конфигурацији сиалног покривача су још доста непоуздани. Учињену незнатну грешку коју чинимо назначеним упрошћењем можемо још више умањити ако за r уведемо средњи радиус Земљин r_0. Пошто се при израчунавању момента инерције Ω ради, у првом реду, о изостатском померању z_0, то у том рачуну не игра спљоштеност Земље важнију улогу. Из истог разлога нисмо се до сада обазирали на то да се при прелазу од кондензованог стања сиалног покривача на његово стварно стање мења и облик еквипотенцијалних површина које, у овом другом случају, нису сасвим идентичне ротационим елипсоидима. То отступање је, као што су то показала геодетска премеравања Земље, заиста, веома мало.

Када су, извршеном интеграцијом, одређене вредности величина I и Λ, онда је тим, према познатом обрасцу Рационалне Механике, одређен и допунски моменат инерције Ω обзиром на осу ζ која затвара са координатним осама углове α, β, γ. Тај је моменат претстављен обрасцем:

$$(20)\quad \Omega = I_1 \cos^2\alpha + I_2 \cos^2\beta + I_3 \cos^2\gamma - 2\Lambda_1 \cos\beta \cos\gamma - \\ - 2\Lambda_2 \cos\gamma \cos\alpha - 2\Lambda_3 \cos\alpha \cos\beta.$$

Како је

$$(21)\quad x = r\cos\alpha;\quad y = r\cos\beta,\quad z = r\cos\gamma,$$

то добивамо користећи се обрасцима (14),

$$(22)\quad \cos\alpha = \cos\varphi\cos\psi;\quad \cos\beta = \cos\varphi\sin\psi;\quad \cos\gamma = \sin\varphi\,.$$

Стављајући ово у (20), добивамо

$$(23)\quad \Omega = I_1 \cos^2\varphi\cos^2\psi + I_2 \cos^2\varphi\sin^2\psi + I_3 \sin^2\varphi - \\ - \Lambda_1 \sin 2\varphi \sin\psi - \Lambda_2 \sin 2\varphi\cos\psi - \Lambda_3 \cos^2\varphi \sin 2\psi.$$

Овај образац одређује нам једнозначно сферно поље скалара Ω, т. ј. допунског момента инерције сиалног покривача Земљиног. То поље игра, као што ћемо видети, пресудну улогу у проблему померања Земљиних полова.

Предњим расуђивањима створили смо прву и најопштију шему о природи Земљиног тела, способну за математско испитивање постављеног проблема. Да је рекапитулишемо: Земља, сматрана као целина, флуидално је тело покривено сиалним покривачем који је, распачан, распуцан или флексибилан, утонуо у своју подлогу по закону хидростатске равнотеже. Када би тај покривач био кондензован на густину подлоге, онда би Земља била ограничена глатким елипсоидом референције, претстављеним обрасцем (3), а њени главни моменти инерције били би A, B, C, при чему је $A=B$. Одабирући осе тих главних момената за осе X, Y, Z нашег координатног система, био би моменат инерције обзиром на осу ζ која затвара са координатним осама углове α, β, γ претстављен обрасцем (8). Присуство сиалног покривача мења моменат инерције T за износ Ω тако да је моменат инерције J стварног Земљиног тела обзиром на осу ζ претстављен изразом

$$J = T + \Omega \tag{24}$$

при чему смо Ω назвали допунским моментом инерције; он је дат, као функција углова α, β, γ обрасцима (20) и (7), а као функција углова φ и ψ, обрасцем (23). Ови обрасци дају нам математску шему природе Земљиног тела, водећи рачуна о његовој флуидалности и изостазији.

§ 65. Положаји главних оса инерције. Услед изостазије сиалног покривача Земљиног, променио се моменат инерције T за износ Ω. Том променом момента инерције измениће се и положај главних оса инерције Земљинога тела Док је пре оса Z координатног система била, у исти мах, једна од главних оса инерције и док је продорна тачка F њене позитивне гране са елипсоидом референције, претстављала, у исти мах, пол инерције, сада то више неће бити случај. Нови, т. ј. стварни, пол инерције Земљиног тела T неће се подударати са полом референције F, али ће се, због тога што је сиални покривач веома танак, налазити у близини пола референције, на оном месту елипсоида референције којем одговара екстремна вредност величине J. Положимо ли, дакле, кроз пол референције F тангенцијалну раван на елипсоид рефенције и положимо ли у тој равни, са својим почетком у тачки F, један ортогонални координатни систем $\xi - \eta$, то ће положај пола инерције T у тој равни бити одређен овим двема једначинама

$$(25) \qquad \frac{\partial T}{\partial \xi} + \frac{\partial \Omega}{\partial \xi} = 0; \quad \frac{\partial T}{\partial \eta} + \frac{\partial \Omega}{\partial \eta} = 0.$$

Како се пол инерције T налази у непосредној близини пола референције F, дакле у близини почетка нашег координатног система $\xi - \eta$, то су координате ξ и η пола инерције, које ћемо мерити у лучној мери, веома мале. Зато добивамо развијањем у редове и занемаривањем чланова са вишим потенцијама од ξ и η, место (25), ове две једначине

$$(26) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial T(0,0)}{\partial \xi} + \xi \dfrac{\partial^2 T(0,0)}{\partial \xi^2} + \dfrac{\partial \Omega(0,0)}{\partial \xi} + \xi \dfrac{\partial^2 \Omega(0,0)}{\partial \xi^2} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial T(0,0)}{\partial \eta} + \eta \dfrac{\partial^2 T(0,0)}{\partial \eta^2} + \dfrac{\partial \Omega(0,0)}{\partial \eta} + \eta \dfrac{\partial^2 \Omega(0,0)}{\partial \eta^2} = 0 . \end{cases}$$

Из (8) следује

$$\frac{\partial T}{\partial \gamma} = - (C-A) \sin 2\gamma ; \quad \frac{\partial^2 T}{\partial \gamma^2} = - 2(C-A) \cos 2\gamma .$$

Како, на почетку координатног система, диференцијали $\partial \xi$ и $\partial \eta$ претстављају исто што и $\partial \gamma$, а како је овде $\gamma = 0$, то добивамо

$$(27) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial T(0,0)}{\partial \xi} = \dfrac{\partial T(0,0)}{\partial \eta} = \dfrac{\partial T(0,0)}{\partial \gamma} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial^2 T(0,0)}{\partial \xi^2} = \dfrac{\partial^2 T(0,0)}{\partial \eta^2} = \dfrac{\partial^2 T(0,0)}{\partial \gamma^2} = - 2(C-A) . \end{cases}$$

Нумеричке вредности извода $\dfrac{\partial^2 \Omega}{\partial \xi^2}$ и $\dfrac{\partial^2 \Omega}{\partial \eta^2}$ су, као што то показује њихово израчунавање из података Геофизике, веома малене према $2(C-A)$ па се зато ти изводи могу у једначинама (26) занемарити. Користећи се једначинама (27), добивамо из (26)

$$(28) \qquad \xi = \frac{1}{2(C-A)} \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial \xi}\,; \qquad \eta = \frac{1}{2(C-A)} \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial \eta}.$$

Ово су координате пола инерције. Његов положај у односу на пол референције претстављен је вектором положаја

$$(29) \qquad \mathfrak{a} = \xi\,\mathfrak{i} + \eta\,\mathfrak{j}$$

где нам $\mathfrak{i}$ и $\mathfrak{j}$ означавају јединичне векторе у правцу координата ξ и η. Из (28) и (29) следује

$$(30) \qquad \mathfrak{a} = \frac{1}{2(C-A)} \left\{ \frac{\partial \Omega}{\partial \xi}\,\mathfrak{i} + \frac{\partial \Omega}{\partial \eta}\,\mathfrak{j} \right\}$$

т. ј.

$$(31) \qquad \mathfrak{a} = \frac{1}{2(C-A)} \operatorname{grad} \Omega$$

чиме је одређен положај стварног пола инерције Земљиног тела према полу референције.

При следећим испитивањима, у којима ће, као што смо већ рекли и што следује из претходне једначине, поље скалара Ω играти важну улогу, указаће се потреба да одредимо положаје полова допунског момента инерције Ω, т. ј. положаје продорних тачака главних оса тензора Ω са елипсоидом референције односно са сфером радиуса R, на коју пројектујемо поље скалара Ω. Те су тачке оне у којима скалар Ω достиже своје екстремне вредности, т. ј. у којима је

$$(32) \qquad \frac{\partial \Omega}{\partial \varphi} = 0\,; \qquad \frac{\partial \Omega}{\partial \psi} = 0\,;$$

Користећи се обрасцем (23), можемо предње једначине заменити овим двема

$$(33) \qquad \left\{ \begin{aligned} \operatorname{tang} 2\varphi &= \\ &= \frac{2\Lambda_1 \sin\psi + 2\Lambda_2 \cos\psi}{I_3 - \frac{1}{2}(I_1 + I_2) - \frac{1}{2}(I_1 - I_2)\cos 2\psi + \Lambda_3 \sin 2\psi} \\ \operatorname{tang} \varphi &= \frac{(I_1 - I_2)\sin 2\psi + 2\Lambda_3 \cos 2\psi}{2\Lambda_2 \sin\psi - 2\Lambda_1 \cos\psi}\,. \end{aligned} \right.$$

Корени ових једначина одређују нам положаје полова инерције, т. ј. главних оса инерције сиалног покривача. Те ћемо корене наћи најједноставније графичким путем, нацртавши обе криве дате предњим једначинама и одредивши координате пресека тих двеју крива. Тачност добивеног резултата можемо произвољно увећати аналитичким рачуном.

Једначине (33) дају нам за интервал $-\frac{\pi}{2} < \varphi + \frac{\pi}{2}$; $0 < \psi < 2\pi$

шест парова реалних коренова од којих два по два пара одговарају антиподним тачкама на Земљиној сфери. Стављајући те корене у образац (23), добивамо главне допунске моменте инерције Ω_1, Ω_2, Ω_3 сиалног покривача; они ће се појавити у једначини секуларне путање полова.

§ 66. **Прилагођивање Земљиног тела.** Према резултатима претходног параграфа, налази се пол инерције T целокупне Земље у отстојању α, мереном лучном мером, од пола референције F. То отстојање можемо назвати *аномалијом йола инерције.* У протходној глави смо показали да тренутни пол ротације Земљине описује око пола инерције кружну путању, обилазећи је за време једне Чендлерове периоде. При томе је, искључујући њену прецесију, оса ротације Земљине инвариабилна у простору, тако да Земљино тело стварно климата око те осе. Периодички чланови тога кретања, они који се испољавају у релативном кретању пола ротације око пола инерције, или обратно, и центрифугалне силе скопчане са тим климатањем изазивају еластичне деформације Земљиног тела које су биле узрок отступању Чендлерове периоде од Ојлерове. Наша Земља се, као што смо већ саопштили, понаша према тим краткотрајним, периодичним силама, заиста, као чврсто еластично тело. О тим њеним еластичним променама не морамо сада, кад се ради о секуларном феномену померања полова, даље водити рачуна. Но отступање пола инерције од пола рефенције изазива један секуларан члан деформације Земљиног тела, а према тим секуларним, дакле дуготрајним, силама деформације испољава Земља своју флуидалност. При испитивању дејства тих секуларних сила ваља елиминисати периодичне силе. То ћемо учинити на тај начин ако нађемо средњи положај пола ротације који одговара његовом периодичном кретању. То је кретање круг са центром у полу инерције па је зато средњи положај пола ротације центар тога круга, дакле сам пол инерције. Према оси која пролази кроз тај пол инерције нагнута је флуидална језгра Земљина, оличена у елипсоиду референције, за угао претстављен аномалијом $\mathfrak{a}$. Како су секуларне центрифугалне силе симетричне према средњој оси ротације која пролази кроз пол инерције, то ће оне тежити да деформишу Земљину језгру, т.ј. да испупче елипсоид референције тако да се његова оса поклопи са осом инерције. Те су силе, као што то показује њихово израчунавање, у које се овде не морамо упуштати, пропорционалне аномалији $\mathfrak{a}$; кад ове не би било, те би силе исчезнуле. *Дејство тих сила веома је споро а следује савлађивањем унутрашњих отпора*, зато ће брзина деформације бити пропорционална тим силама т. ј. пропорционална аномалији $\mathfrak{a}$. Деформација језгре Земљине тежи да пол референције приближи полу инерције, т. ј. средњем полу ротације, па ће брзина $\mathfrak{v}$ којом се то приближавање врши бити пропорционална аномалији $\mathfrak{a}$ дакле бити претстављена обрасцем

$$(34) \qquad \mathfrak{v} = k\mathfrak{a}$$

где k означава један скаларни коефициенат који се зове коефициентом прилагођавања. Том брзином $\mathfrak{v}$, и тим правцем, *дошао би пол референције до поклапања са полом ротације* кад би тим померањем исчезнула аномалија $\mathfrak{a}$. Но ова, иначе коначна и променљива од тачке до тачке Земљине површине, постаје једнака нули тек онда кад, према (31), градиенат поља Ω постаје једнак нули, а то је само на онима тачкама Земљине површине где је продиру главне осе тензора Ω. Догод то није случај, пол ће референције, крећући се према полу инерције, гурати тај пол испред себе у правцу аномалије $\mathfrak{a}$ која одговара месту поља Ω што га је пол референције заузео. Зато ће се пол референције и пол ротације, у међусобном малом отстојању $\mathfrak{a}$, кретати један иза другог правцем вектора $\mathfrak{a}$ и *брзином пропорционалном том вектору*, догод не дођу до свога заједничког положаја равнотеже у којем је $\mathfrak{a}=0$. Зато нам образац (34) претставља брзину којом се крећу оба та пола, један иза другог, релативно према Земљиној љусци. Због тога нам вектор $\mathfrak{v}$ претставља брзину релативног померања пола ротације према Земљиној сиалној љусци.

Користећи се обрасцем (31) и стављајући

$$\frac{k}{2(C-A)} = \varkappa\,,$$

добивамо

$$(35) \qquad \mathfrak{v} = \varkappa \operatorname{grad} \overline{\Omega}.$$

Ово је основна једначина секуларног померања полова. Ми ћемо је извести и на други начин у идућа два параграфа где ћемо детаљније испитати механизам тог померања.

§ 67. Полфугална сила сиалних санта. Када је принцип изостазије и флуидалности Земље ухватио корена у Геофизици, увидео је *Кепен* да ће, услед дивергенције еквипотенцијалних површина Земљине теже, сиалне санте подлежати дејству силе која ће тежити да их помери ка екватору. Ту је силу он назвао „Polfluchtkraft"; *ми ћемо је звати полфугалном* силом. Математски образац за ту силу добићемо, користећи се претходним резултатима, на овај начин.

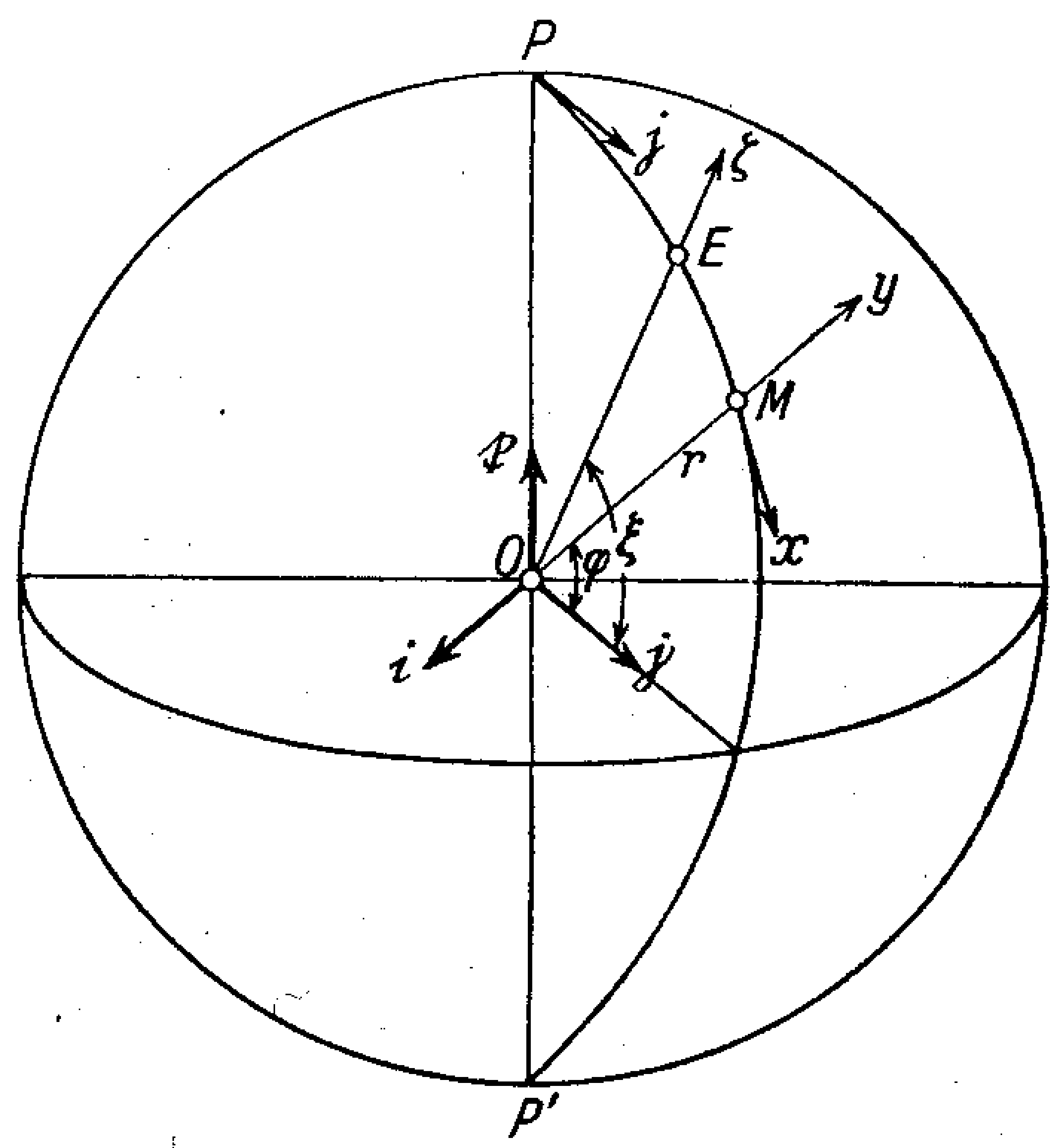
Функција сила Земљине гравитације и центрифугалне силе била је, према једначини (60), § 51, претстављена овим обрасцем:

$$(36) \qquad W = f\frac{M}{r} + \frac{f}{2r^3}(C-A)(1-3\sin^2\varphi) + \frac{n^2r^2}{2}\cos^2\varphi\,.$$

Уочимо на произвољном месту Земљине површине једну вертикалну елементарну призму сиалног покривача како је она била назначена у § 64. Она је утонула изостатски у своју подлогу до дубине H. Тежиште истиснутог дела симе претставља нам центар хидростатског потиска и налази се у половини висине утонулог дела призме; означимо га са M. Тежиште саме призме, које се налази у половини њене висине D, означимо са S. Висинска разлика z_0 тих двеју тачака претстављена је обрасцем (10). Масу $d\mu$ елементарне призме можемо замислити концентрисану у тачки S. Зато ће сила која дејствује на уочену призму бити претстављена градиентом скалара W у тачки S, *помноженим са масом* $d\mu$ *призме. Та ће сила имати* једну тангенцијалну компоненту обзиром на еквискаларну површину која пролази кроз тачку M, а та ће компонента претстављати полфугалну силу која дејствује на масу $d\mu$. Да ту силу нађемо, положимо у тачку M (сл. 22) почетак ортогоналног координатног система x—y који лежи у меридијанској равни тачке M којега је оса y наперена вертикално у вис, а оса x према екватору. У тачки M је

$$\frac{\partial W}{\partial x} = 0 \tag{37}$$

јер у тој тачки тангира оса x еквискаларну површину. Тачка S има координате $x = 0$; $y = z_0$. Зато извод функције W по x неће



Сл. 22

у тој тачки бити једнак нули, него ће бити претстављен обрасцем

$$\frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right) z_0$$

у којем се изводи односе на тачку M. Зато је, имајући у виду (37), скаларна вредност полфугалне силе масе $d\mu$ претстављена обрасцем

$$dH = z_0 \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right) d\mu. \tag{38}$$

Мењајући, што је дозвољено, ред извода, добивамо

$$dH = z_0 \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial W}{\partial y}\right) d\mu. \tag{39}$$

Извод

$$\frac{\partial W}{\partial y} = -g \tag{40}$$

претставља нам акцелерацију Земљине теже у тачки M; та је акцелерација наперена према доле, због чега се у предњој једначини појавио знак минус. Стављајући (40) у (39), добивамо

$$dH = -z_0 \frac{\partial g}{\partial x} d\mu. \tag{41}$$

Ова једначина важи за сваку тачку Земљине површине ако за g ставимо акцелерацију теже у тој тачки, а за ∂x елеменат тангенте на меридијански пресек еквипотенцијалне површине. За тај елеменат можемо, прелазећи на поларне координате, а водећи рачуна да је оса x била наперена према екватору, ставити

$$\partial x = -r \partial \varphi . \tag{42}$$

Зато је

$$dH = \frac{z_0}{r} \frac{\partial g}{\partial \varphi} d\mu. \tag{43}$$

Зависност акцелерације g од геоцентричне ширине φ била је претстављена обрасцем (71), 51, т. ј. овим

$$g = g_0 + (g_p - g_a) \sin 2\varphi \, d\mu. \tag{44}$$

Стављајући ово у (43) добивамо

$$dH = \frac{z_0}{r} (g_p - g_a) \sin 2\varphi \, d\mu. \tag{45}$$

Ово је аналитички израз полфугалне силе која дејствује на масу $d\mu$; она је, пошто је оса x била наперена према кватору и пошто је $g_p > g_a$, наперена од пола, због чега је добила своје име.

Наша садашња знања о конфигурацији, а нарочито о дебљини D сиалног покривача Земљиног па, слетствено, о величини z_0 далеко су од тога да бисмо били у стању тачно израчунати нумеричку вредност полфугалних сила које дејствују на поједине делове сиалне љуске. Срећом, та околност не игра важну улогу у питањима којима ћемо се овде бавити, јер код ових долази у првом реду у обзир фактор $\sin 2\varphi$. Према њему, зависи, при истом z_0, полфугална сила само од географске ширине па достиже свој максимум за $\varphi=45^0$; на половима и на екватору она је једнака нули.

§ 68. Основна диференцијална једначина секуларног померања Земљиних полова. Када би сиални покривач Земљин, обухватајући целу Земљу, имао свугде исту дебљину и густину или када би он покривао само делове Земљине површине, но био симетричног облика према половима, не би полфугалне силе тежиле да изведу какво померање тог покривача по његовој подлози, јер би се оне, симетричне према половима, међусобно потирале. Узрок померања сиалне љуске по њеној подлози лежи у неправилности те љуске које су, заиста, веома велике. Од тих неправилности упада нам највише у очи велики контраст између континената и дна морског. Њихове површине леже на различитим висинама; разлика између средње висине површине континената и дна морског износи преко 4.000 метара, а висинска разлика између највише тачке континената и најдубље тачке мора скоро 20.000 метара. Та неправилност и релиефност сиалног покривача има за последицу да се полфугалне силе које дејствују на сиалну љуску међусобно не потиру, него стварају један моменат заокретања $\mathfrak{M}$ обзиром на центар Земље. При израчунавању тога момента, можемо за крак полфугалних сила свугде ставити средњи радиус Земљин r_0, већ због тога што те силе достизавају своје максималне вредности на средњим географским ширинама, баш онде где је њихов крак стварно једнак средњем радиусу Земље; сем тога нам наши, још доста непотпуни, податци о конфигурацији сиалног покривача не би ни дозволили већу тачност рачуна. Усвајајући ово упрошћење, добивамо да ће моменат полфугалне силе dH обзиром на центар Земље имати скаларну величину

$$dM = r_0 dH. \tag{46}$$

Да бисмо тај моменат претставили, као што је потребно, у векторском облику, положимо у центар Земље почетак O (сл. 22) ортогоналног координатног система $X-Y-Z$; оса Z тога система нека пада у осу ротације Земље и нека буде наперена према северу; оса Y нека лежи у равни меридијана масе $d\mu$ на коју дејствује посматрана полфугална сила dH. Означимо ли јединичне векторе у правцу оса тог координатног система са $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$, то је, пошто $\mathfrak{i}$ стоји нормално на равни меридијана масе $d\mu$ и пошто моменат заокретања означавамо позитивно кад дејствује у смислу противном кретању сказаљке на сату, моменат заокретања $d\mathfrak{M}$ полфугалне силе која дејствује на масу $d\mu$ претстављен векторски овим обрасцем:

$$d\mathfrak{M} = - r_0 dH\, \mathfrak{i}. \tag{47}$$

Користећи се обрасцем (45) и стављајући у њега $r = r_0$, добивамо

$$d\mathfrak{M} = -z_0(g_p - g_a) \sin 2\varphi\, d\mu\, \mathfrak{i}. \tag{48}$$

Моменат заокретања $\mathfrak{M}$ целокупног сиалног покривача добива се интеграцијом предњег израза преко целе Земљине површине. Ту интеграцију извршићемо на овај начин.

Допунски моменат инерције $d\Omega$ масе $d\mu$ обзиром на осу ζ која затвара са радиусвектором r масе $d\mu$ угао θ био је претстављен обрасцем (12). Ставимо ли у тај образац, према напред уговореном, $r = r_0$, то добивамо

$$d\Omega = 2 z_0 r_0 \sin^2\theta\, d\mu\,. \tag{49}$$

Лежи ли оса ζ у равни меридијана масе $d\mu$ и затвара ли та оса са равни екватора угао ξ, то је

$$d\Omega = 2\, z_0 r_0 \sin^2(\xi - \varphi) d\mu. \tag{50}$$

Ако оса ζ не лежи у меридијанској равни елемента $d\mu$, онда ваља предњи образац заменити другим, но пошто нам тај образац неће бити потребан при даљем извођењу, ми га не морамо овде написати.

Свакој оси ζ која пролази кроз центар Земље одговара једна одређена вредност скалара $d\Omega$; исто тако одговара свакој тачки лопте описане око центра Земље радиусом r_0 једна одређена вредност скалара $d\Omega$. Зато нам површина те лопте претставља сферно поље скалара $d\Omega$. Питајмо сада колики је градиенат тога поља у северном полу т. ј. у продорној тачки позитивне гране осе Z са сфером радиуса r_0. Тај градиенат мора, из разлога симетрије, пасти у раван меридијана масе $d\mu$, т. ј. он мора тангирати меридијански круг тачке M у тачки P. Јединични вектор тога правца, наперен у смислу у којем ξ расте, претстављен је, према напред уговореном, са $-\mathfrak{j}$. Зато је тражени градиенат претстављен обрасцем

$$\operatorname{grad} d\Omega = -\frac{\partial d\Omega}{\partial s}\,\mathfrak{j}$$

где ∂s означава елеменат меридијанског круга за који ваља ставити $\partial s = r_0 \partial \xi$. Зато је

$$\operatorname{grad} d\Omega = -\frac{1}{r_0}\frac{\partial d\Omega}{\partial \xi}\,\mathfrak{j}\,.$$

У ову једначину ваља десно за $d\Omega$ ставити образац (20) због чега је

$$\operatorname{grad} d\Omega = -2z_0 \frac{\partial \sin^2(\xi-\varphi)}{\partial \xi}\, d\mu\,\mathfrak{j}$$

т. ј.

$$\operatorname{grad} d\Omega = -\,2z_0 \sin 2\,(\xi-\varphi)\, d\mu\,\mathfrak{j}.$$

Пошто тражимо градиенат у самом полу, т. ј. за $\xi = 90^0$, то добивамо

$$\operatorname{grad} d\Omega = -\,2z_0 \sin 2\varphi\, d\mu\,\mathfrak{j}. \tag{51}$$

Помножимо ли ову једначину векториелно са $\mathfrak{k}$, то добивамо, пошто је $[\mathfrak{k}\,\mathfrak{j}] = -\,[\mathfrak{j}\,\mathfrak{k}] = -\,\mathfrak{i}$,

$$(52) \qquad [\mathfrak{k}\ \mathrm{grad}\ d\Omega] = 2z_0 \sin 2\varphi\ d\mu\ \mathfrak{i}.$$

Из једначина (48) и (52) следује

$$(53) \qquad d\mathfrak{M} = -\frac{1}{2}(g_p - g_a)[k\ \mathrm{grad}\ d\Omega].$$

Ово је моменат заокретања полфугалне силе масе $d\mu$ обзиром на центар Земље. Моменат заокретања $\mathfrak{M}$ полфугалних сила целокупног сиалног покривача Земљиног добивамо интеграцијом предњег израза широм целог тог покривача. Зато је, пошто су g_p, g_a, $\mathfrak{k}$ константе,

$$(54) \qquad \mathfrak{M} = -\frac{1}{2}(g_p - g_a)[\mathfrak{k} \int \mathrm{grad}\ d\Omega].$$

Како је градиенат збира скалара једнак векториелном збиру градиената тих појединих скалара, то је

$$\int \mathrm{grad}\ d\Omega = \mathrm{grad} \int d\Omega = \mathrm{grad}\ \Omega$$

где нам Ω претставља допунски моменат инерције целокупног сиалног покривача. Зато је

$$(55) \qquad \mathfrak{M} = -\frac{1}{2}(g_p - g_a)[\mathfrak{k}\ \mathrm{grad}\ \Omega].$$

Овај моменат заокретања тежи да заокрене сиалну љуску Земљину око осе која, због фактора $\mathfrak{k}$ у векторској загради, лежи у равни екватора. Померање сиалне љуске изазвано тим моментом врши се, као што ћемо видети, неописано споро, уз савлађивање отпорних сила. Због тога ће ротациона брзина $\mathfrak{w}$ тог кретања бити пропорционална горњем моменту. Зато је

$$(56) \qquad \mathfrak{w} = -\frac{m}{2}(g_p - g_a)[\mathfrak{k}\ \mathrm{grad}\ \Omega]$$

где m означава фактор споменутог пропорционалитета.

Услед овог заокретања сиалног покривача помераће се свака тачка његова брзином

$$\mathfrak{v} = [\mathfrak{w}\mathfrak{r}]$$

преко Земљине језгре при чему нам $\mathfrak{r}$ претставља вектор положаја уочене тачке сиалног покривача у односу на центар Земље. За тачку површине сиалног покривача која лежи изнад пола ротације P је

$$\mathfrak{r} = r_0 \mathfrak{k}; \qquad \mathfrak{v} = r_0 [\mathfrak{w}\mathfrak{k}].$$

Пол ротације Земљине P помераће се истом брзином но у противном правцу. Зато нам израз

$$\mathfrak{v} = - r_0[\mathfrak{w}\mathfrak{k}] = r_0[\mathfrak{k}\mathfrak{w}] \tag{57}$$

претставља вектор брзине којом се пол ротације P помера релативно према површини Земљине љуске. Из (57) и (56) следује

$$\mathfrak{v} = - \frac{m}{2} r_0 (g_p - g_a) [\mathfrak{k} [\mathfrak{k} \operatorname{grad} \Omega]]. \tag{58}$$

Употребимо ли познати образац векторског рачуна

$$[\mathfrak{a} [\mathfrak{b}\mathfrak{c}]] = \mathfrak{b}(\mathfrak{c}\mathfrak{a}) - \mathfrak{c}(\mathfrak{a}\mathfrak{b}),$$

то добивамо

$$[\mathfrak{k} [\mathfrak{k} \operatorname{grad} \Omega]] = \mathfrak{k} (\operatorname{grad} \Omega \,.\, \mathfrak{k}) - \operatorname{grad} \Omega \,(\mathfrak{k}\,\mathfrak{k}).$$

Пошто градиенат од Ω у тачки P стоји нормално на вектору $\mathfrak{k}$, то је $(\operatorname{grad} \Omega \,.\, \mathfrak{k}) = 0$, а како је, сем тога, $(\mathfrak{k}\,\mathfrak{k}) = 1$, то добивамо:

$$[\mathfrak{k} [\mathfrak{k} \operatorname{grad} \Omega]] = - \operatorname{grad} \Omega,$$

дакле због (58)

$$\mathfrak{v} = \frac{m}{2} r_0 (g_p - g_a) \operatorname{grad} \Omega \,. \tag{59}$$

Ставимо ли

$$\frac{m}{2} r_0 (g_p - g_a) = \varkappa \tag{60}$$

где $\varkappa$ означава један константан коефициенат, то добивамо

$$\mathfrak{v} = \varkappa \operatorname{grad} \Omega. \tag{61}$$

Ова векторска једначина, до које смо дошли и на други начин у § 66, претставља нам решење постављеног проблема. Она казује да се вектор брзине $\mathfrak{v}$ померања пола релативно према Земљиној површини у свакој тачки путање пола поклапа са градиентом скаларног поља Ω. То значи да је путања једног или другог пола ротације Земљине у односу на Земљину површину једна од векторских линија поља grad Ω. Која ће од тих векторских линија претстављати стварну путању пола, то је једнозначно одређено садањим положајима полова ротације на Земљиној површини. Према једној општој особини градиента, пресеца та крива под правим углом линије једнакога Ω па претставља једну ортогоналну трајекторију еквискаларних линија поља Ω.

Видећемо ускоро да се секуларним померањима полова по Земљиној површини не мења оријентација Земљине осе у простору, а то значи да се, посматрана из тога простора, Земљина љуска помера по Земљиној флуидалној језгри тако да полови ротације цртају по Земљиној површини своје секуларне путање, све дотле док Земљина љуска не дође до своје стабилне равнотеже према својој подлози, т. ј. док се пол инерције сиалног покривача не поклопи са полом инерције језгре. Онда ће Земља, иако флуидална, ротирати као какво чврсто тело око своје главне осе инерције, како то захтева Апелова теорема.

§ 69. Једначина секуларне путање пола и једначина кретања пола по тој путањи. Крива коју уочени пол ротације опише при свом релативном секуларном померању по Земљиној површини, дакле секуларна путања пола, дата је, као што смо видели, једнозначно пољем скалара Ω и садашњим положајем пола ротације у том пољу. Скалар Ω достиже, као што смо већ казали, у том сферном пољу на шест места своје екстремне вредности и то на онима тачкама где главне осе инерције Ω продиру сферу радиуса r_0. Према равнима које пролазе кроз те осе је поље Ω, као што то следује из општих теорема о моментима инерције, симетрично па је зато сфера тога поља подељена у осам, и по распореду векторских линија, симетричних октаната, осам равностраних правоуглих сферних троуглова којима су и стране и углови једнаки по 90^0. У ономе октанту сфере у којем се налази садањи положај уоченог пола ротације лежаће цела његова путања, јер све векторске линије те области поља grad Ω полазе из оног темена тог октанта у којем Ω достиже свој минимум, а свршавају се у оном темену где Ω достиже свој максимум. Почетак тих векторских линија, тачка извора векторског поља, претставља нам лабилни положај равнотеже који је пол, ако се, заиста, икада налазио у том положају, морао, при најмањем поремећају, каквих је у бурној историји Земље доста било, да остави па да, крећући се по једној од векторских линија поља grad Ω, стигне коначно, после огромно дугог путовања, у тачку понора тих линија где Ω достиже свој максимум, а која нам тачка претставља положај стабилне равнотеже. Садашњи положај пола показује нам ону од тих векторских линија дуж које се пол у прошлости померао и дуж које ће се у будућности даље кретати. Да изведемо једначину те криве и једначину кретања пола по тој криви, поступићемо овако.

Положимо у центар Земље почетак O ортогоналног координатног система $X—Y—Z$ који је везан са сиалном љуском и оријентисан тако да његова оса X продире у оној тачки површину Земље која одговара минимуму скалара Ω, оса Y у оној тачки која одговара максимум-минимуму, а оса Z у оној која одговара максимуму скалара Ω. Те осе су, дакле, главне осе допунског момента инерције Ω те је, према ономе што смо сада уговорили,

$$\Omega_1 < \Omega_2 < \Omega_3 . \tag{62}$$

Једноставности ради, а и из разлога изложених у претходном параграфу, претпостављамо да је Земљина површина сфера радиуса r_0. На тој сфери одређен је положај произвољне тачке путање пола координатама Φ и Ψ при чему нам Φ претставља онај угао што га радиусвектор уочене тачке затвара са равни $X—Y$, а Ψ угао што га пројекција радиусвектора у раван $X—Y$ затвара са координатном осом X. Сматрамо ли, дакле, продорну тачку осе Z са сфером радиуса r_0 за пол мреже меридијана и упоредника, то нам Φ претставља латитуду, а Ψ лонгитуду мреже. Положимо у уочену произвољну тачку $M(\Phi, \Psi)$ путање пола почетак равног ортогоналног координатног система $\xi - \eta$ којега раван додирује Земљину сферу, а којега је оса ξ, додирујући меридијан малочас дефинисане мреже, наперена према полу те мреже, дакле на ону страну на којој Φ расте, то је елеменат $d\xi$ померања пола у правцу ξ претстављен обрасцем

$$d\xi = r_0 \, d\Phi \tag{63}$$

док је елеменат померања пола у правцу нормалном на онај први, а у смислу растућега Ψ, претстављен обрасцем

$$d\eta = r_0 \cos\Phi \, d\Psi \, . \tag{64}$$

Компоненте вектора брзине $\mathfrak{v}$ померања пола у тим двама правцима претстављене су овим обрасцима:

$$\frac{d\xi}{dt} = r_0 \frac{d\Phi}{dt} \tag{65}$$

$$\frac{d\eta}{dt} = r_0 \cos\Phi \, \frac{d\Psi}{dt} \, . \tag{66}$$

Основна једначина померања полова била је

$$\mathfrak{v} = \varkappa \operatorname{grad} \Omega \, . \tag{67}$$

Означимо са $\mathfrak{i}$ и $\mathfrak{j}$ јединичне векторе у правцима ξ и η, то је

$$\mathfrak{v} = \frac{d\xi}{dt} \, \mathfrak{i} + \frac{d\eta}{dt} \, \mathfrak{j} \, , \tag{68}$$

т. ј. због (65) и (66)

$$\mathfrak{v} = r_0 \frac{d\Phi}{dt} \, \mathfrak{i} + r_0 \cos\Phi \, \frac{d\Psi}{dt} \, \mathfrak{j} \, . \tag{69}$$

Како је

$$\operatorname{grad} \Omega = \frac{\partial \Omega}{\partial \xi} \, \mathfrak{i} + \frac{\partial \Omega}{\partial \eta} \, \mathfrak{j} \, , \tag{70}$$

то добивамо, стављајући (69) и (70) у (67) и множећи добивену векторску једначину скаларно са $\mathfrak{i}$ односно са $\mathfrak{j}$, ове две скаларне једначине

$$r_0 \frac{d\Phi}{dt} = \varkappa \frac{\partial \Omega}{\partial \xi}$$

$$r_0 \cos \Phi \frac{d\Psi}{dt} = \varkappa \frac{\partial \Omega}{\partial \eta} ,$$

т. ј. због (63) и (64)

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\varkappa}{r_0^2} \frac{\partial \Omega}{\partial \Phi} \tag{71}$$

$$\frac{d\Psi}{dt} = \frac{\varkappa}{r_0^2} \cdot \frac{1}{\cos^2 \Phi} \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial \Psi} . \tag{72}$$

Елиминишемо ли из ових двеју једначина време t, то добивамо

$$\frac{d\Psi}{d\Phi} = \frac{1}{\cos^2 \Phi} \cdot \frac{\frac{\partial \Omega}{\partial \Psi}}{\frac{\partial \Omega}{\partial \Phi}} \tag{73}$$

као диференцијалну једначину секуларне путање пола.

Допунски моменат инерције Ω сиалног покривача обзиром на осу ζ која, пролазећи кроз центар Земље, продире Земљину површину у тачки $M(\Phi, \Psi)$, добивамо ако у обрасцу (23) заменимо I_1, I_2, I_3 са Ω_1, Ω_2, Ω_3, а φ, ψ са Φ, Ψ и при томе ставимо, пошто су осе употребљеног координатног система, у исти мах, главне осе инерције, $\Lambda_1 = \Lambda_2 = \Lambda_3 = 0$. Зато је

$$\Omega = \Omega_1 \cos^2 \Phi \cos^2 \Psi + \Omega_2 \cos^2 \Phi \sin^2 \Psi + \Omega_3 \sin^2 \Phi , \tag{74}$$

т. ј.

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \Psi} = -\Omega_1 \cos^2 \Phi \sin 2\Psi + \Omega_2 \cos^2 \Phi \sin 2\Psi \tag{75}$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \Phi} = -\Omega_1 \sin 2\Phi \cos^2 \Psi - \Omega_2 \sin 2\Phi \sin^2 \Psi + \Omega_3 \sin 2\Phi . \tag{76}$$

Стављајући ово у (73), добивамо

$$(77)\quad \frac{d\Psi}{d\Phi}=\frac{(\Omega_2-\Omega_1)\sin 2\Psi}{(\Omega_3-\Omega_2\sin^2\Psi-\Omega_1\cos^2\Psi)\sin 2\Phi}\,.$$

Како је

$$\Omega_1\cos^2\Psi=\Omega_1-\Omega_1\sin^2\Psi\,,$$

то је

$$(78)\quad \frac{d\Psi}{d\Phi}=\frac{(\Omega_2-\Omega_1)\sin 2\Psi}{[\Omega_3-\Omega_1-(\Omega_2-\Omega_1)\sin^2\Psi]\sin 2\Phi}\,.$$

Стављајући

$$(79)\quad \frac{\Omega_3-\Omega_1}{\Omega_2-\Omega_1}=k\,,$$

где нам k претставља једну константу, добивамо

$$(80)\quad \frac{d\Psi}{d\Phi}=\frac{\sin 2\Psi}{(k-\sin^2\Psi)\sin 2\Phi}\,,$$

т. ј.

$$k\frac{d\Psi}{\sin 2\Psi}-\frac{\sin^2\Psi d\Psi}{\sin 2\Psi}=\frac{d\Phi}{\sin 2\Phi}\,,$$

а пошто је

$$\sin 2\Psi=2\sin\Psi\cos\Psi\,,$$

$$(81)\quad k\frac{d\Psi}{\sin 2\Psi}-\frac{1}{2}\operatorname{tang}\Psi\, d\Psi=\frac{d\Phi}{\sin 2\Phi}$$

Како је

$$\int\frac{d\Psi}{\sin 2\Psi}=\frac{1}{2}\int\frac{d\Psi}{\sin\Psi\cos\Psi}=\frac{1}{2}\int\frac{\sec^2\Psi d\Psi}{\operatorname{tang}\Psi}=\frac{1}{2}\int\frac{d\operatorname{tang}\Psi}{\operatorname{tang}\Psi}=$$

$$=\frac{1}{2}\,l\operatorname{tang}\Psi+C$$

$$\int\frac{d\Phi}{\sin 2\Phi}=\frac{1}{2}\,l\operatorname{tang}\Phi+C$$

$$\int \operatorname{tang} \Psi d\Psi = \int \frac{\sin \Psi d\Psi}{\cos \Psi} = -\int \frac{d \cos \Psi}{\cos \Psi} = -l \cos \Psi + C,$$

то следује интеграцијом једначине (81)

$$k \,.\, l \operatorname{tang} \Psi + l \cos \Psi = l \operatorname{tang} \Phi + l C_1,$$

дакле

$$(82) \qquad \cos \Psi \,.\, \operatorname{tang}^k \Psi = C_1 \operatorname{tang} \Phi.$$

Ово је једначина секуларне путање пола.

Константа C_1 одређена је садањим положајем пола на Земљиној површини. Ако су Φ_0 и Ψ_0 координате тога положаја у одабраној мрежи меридијана и упоредника, онда је

$$(83) \qquad C_1 = \frac{\cos \Psi_0 \operatorname{tang}^k \Psi_0}{\operatorname{tang} \Phi_0} \,.$$

Кретање пола по његовој путањи одређено је једначинама (72) и (75). Из тих једначина следује

$$(84) \qquad \frac{d\Psi}{dt} = \frac{\varkappa}{r_0^2} (\Omega_2 - \Omega_1) \sin 2\Psi.$$

Ставимо ли

$$(85) \qquad \frac{2\varkappa}{r_0^2} (\Omega_2 - \Omega_1) = \mu \,,$$

где је μ једна константа, то добивамо

$$\frac{d\Psi}{\sin 2\Psi} = \frac{\mu}{2} dt.$$

Интеграција ове једначине даје

$$\frac{1}{2} l \operatorname{tang} \Psi = \frac{1}{2} \mu t + \frac{1}{2} l C_2 \,,$$

т. ј.

$$(86) \qquad \operatorname{tang} \Psi = C_2 e^{\mu t}.$$

Бројимо ли време t од садашњости, пошто је, према напред реченом, за t=0; $\Psi=\Psi_0$, то је

$$(87) \qquad C_2 = \operatorname{tang} \Psi_0.$$

Последње две једначине одређују нам кретање пола по његовој секуларној путањи.

Секуларна путања пола зависи, као што то показују једначине (82), (83) и (79), само од конфигурације Земљине љуске и садањег положаја пола на њој, дакле од геометрије маса Земље; она се из тих података може израчунати. У то израчунавање нећемо се овде упуштати, јер спада у област Геофизике. Кретање пола по тој путањи зависи од коефициента μ, дакле, посретством једначина (85) и (60), од коефициента m о којем немамо директног нумеричког податка. Али се из докумената Геологије који нам, између осталог, дају, са извесном сигурности, положај Земљиних полова за време карбонске периоде, а и интервал времена које је од тога доба протекло, може, макар приближно, одредити нумеричка вредност коефициента μ, а тиме и ток кретања пола по његовој секуларној путањи. Из тих података следује да је померање Земљиних полова по њеној површини текло неописано споро па су од доба карбонске периоде, која, према одређивању старости геолошких наслага помоћу радиоактивних супстанција, лежи 300 милиона година испред садашњости, Земљини полови превалили путање које су краће од 90° главних кругова Земљине сфере. И резултати интернационалне службе посматрања промена географских ширина показују да је, искључујући периодично кретање Земљиних полова о којем смо говорили у претходној глави, секуларно померање Земљиних полова веома споро па износи годишње највише 160 милиметара. Ови податци Геологије и Геофизике веома су важни, јер помоћу њих можемо испитати како се мења оријентација Земљине осе у простору услед померања полова по Земљиној површини.

Према механизму предоченом сликом 21 страна 284, опкотрља Земљина полходија Земљину херполходију за време једног звезданог дана, зато је целокупни опсег херполходије једнак дужини лука полходије који одговара једном звезданом дану. Исто је тако опсег пресека конуса херполходије са Земљином сфером једнак путањи пола по тој сфери превањеној за време једног звезданог дана. Користећи се саопштеним податком интернационалне службе о секуларном померању пола, добивамо да се пол ротације померио за време једног звезданог дана за 160 : 360 = 0, 44 милиметра. Ова неописано мала дужина претставља нам опсег пресека херполходије са Земљином сфером па сведочи да је тај конус изванредно шиљаст. Из горе наведених података Геологије следовао би још оштрији конус херполходије; он је стварно дегенерисао на праву. Како се конус херполходије, као што смо видели у претходној глави, обавио око вектора $\mathfrak{G}_0$, инвариабилног у простору, то можемо оријентацију Земљине осе у простору, искључујући њену лунисоларну прецесију и нутацију, сматрати инвариабилном.

§ 70. Земља сматрана као материјални систем са четири степена слободе. Испитивајући у више расправа проблем Земљине ротације, створио је *Билимовић* своју шему о природи Земљиног тела која, у неку руку, чини прелаз од класичне шеме ка оној којом смо се до сада послужили. По тој Билимовићевој шеми, може се наша Земља претставити материјалним системом који састоји из два главна дела. Први део је материјална чврста лопта полупречника r_0 са таквим распоредом маса да њено тежиште лежи у центру сфере, а да је њен централни елипсоид инерције спљоштен обртни елипсоид. Ту језгру обухватила је љуска унутрашњег радиуса r_0, а произвољне спољне површине и произвољног елипсоида инерције којега се главне осе не подударају са главним осама елипсоида инерције језгре. Тај материјални систем има, ако се не испитује његово транслаторно кретање, него само његова ротација око тежишта, шест степена слободе, дакле три степена више но што га је имала класична шема, идентификујући Земљу са једним чврстим телом. Испитавши, у свим његовим појединостима, кретање тога система, нашао је Билимовић, извршивши потребна упрошћења која одговарају приликама наше Земље, да се једначинама кретања полова ротације по површини језгре може дати кондензовани векторски облик наших једначина саопштених у §§ 66 и 68, а да у његовом моделу играју центрифугалне силе улогу коју су у нашим претходним расуђивањима играле полфугалне силе.

Ми ћемо овде Билимовићеву шему, примењујући је на Земљу, нешто упростити. Видели смо да је ориентација Земљине осе у простору, у колико није упливисана спољним силама, инвариабилна, а да та инвариабилност следује одатле што је секуларно померање полова по љусци које одговара интервалу једног звезданог дана веома малено. То следује и из Билимовићеве шеме. Чинећи, дакле, претпоставку да се малочас описана љуска, због сила трења које има при свом кретању по језгри да савлада, креће по тој језгри веома споро у односу на језгрино и своје дневно обртање, то из те претпоставке следује да је оса ротације целокупног система инвариабилна у простору. На тај начин долазимо до ове шеме. Чврста сферна језгра уоченог материјалног система обрће се око једне у простору инвариабилне осе угловном брзином n, носећи и повлачећи са собом своју љуску неправилног спољњег облика која се помера по језгри, уз савлађивање сила трења, споро у односу на ротацију целокупног система. Питамо како ће се померати љуска по језгри, односно како ће се померати продорна тачка осе ротације са површином љуске по тој површини. Овај материјални систем има, дакле, четири степена слободе.

О распореду маса у покретној љусци чинимо, водећи рачуна о изостазији Земљине коре, претпоставку да би та љуска кондензована свугде на исту густину ϱ_0 била ограничена глатком сфером. Претпостављамо још, једноставности ради, да је неједнакост густине ϱ љуске, због које је она добила своју релиефну површину, само функција координата Φ и Ψ дефинисаних у претходном параграфу, а да се та густина не мења дуж вертикала које продиру љуску. Означимо ли са D дебљину љуске која се, према претходном, мења од тачке до тачке површине, то је, према учињеној претпоставци,

$$\varrho D = \varrho_0 H, \tag{88}$$

где су ϱ_0 и H константе.

Када би љуска била свугде кондензована на густину ϱ_0, онда би, имајући свугде и исту дебљину, њен елипсоид инерције био сфера. Поларни моменат инерције такве љуске обзиром на центар Земље био би, као што је лако извести, претстављен обрасцем

$$(89) \qquad T_0 = \frac{4}{5}\,\pi\varrho_0\,[(r_0+H)^5 - r_0^5]\,,$$

а главни моменти инерције, једнаки међусобно, који нам због тога претстављају и моменат инерције T обзиром на произвољну осу ζ која пролази кроз центар Земље, обрасцем

$$(90) \qquad T = \frac{8}{15}\,\pi\varrho_0\,[(r_0+H)^5 - r_0^5].$$

Уочимо на произвољном месту те љуске једну вертикалну елементарну призму базе df која пролази кроз целу љуску и има, према учињеној претпоставци, на целој својој висини исту густину ϱ. Њено тежиште које је у кондензованом стању љуске лежало у половини висине H уздигнуто је сада до половине њене стварне висине D, дакле за дуж

$$(91) \qquad z_0 = \frac{1}{2}\,(D-H)\ .$$

Овај образац је индентичан са обрасцем (10), зато ће се, као што смо показали у § 64, тим уздизањем тежишта елементарне призме, њен моменат инерције dT обзиром на осу ζ променути за допунски моменат инерције $d\Omega$ претстављен обрасцем (12). Допунски моменат инерције Ω целокупне љуске добива се на исти начин као што је у § 64 показано. Зато ће стварни моменат инерције J љускин обзиром на осу ζ бити претстављен обрасцем

$$(92) \qquad J = T + \Omega$$

у којем је T константно, а Ω променљиво са положајем осе ζ.

Да бисмо испитали ротационо кретање овако створеног модела наше Земље, положимо у центар његове језгре почетак O ортогоналног координатног система $X-Y-Z$, везаног са том језгром; оса Z нека се подудара са осом ротације те језгре и нека буде наперена према северу. И љуска учествује у тој ротацији језгре, померајући се по њој веома споро. Ми можемо, као што смо учинили и у астероидном проблему, координатни систем $X—Y—Z$ сматрати за непомичан ако замислимо да на сваки елеменат масе посматраног материјалног система дејствују, сем гравитационих сила, још и одговарајућа центрифугална и Кориолисова сила. Сматрајући језгру за апсолутно чврсту, неће центрифугалне силе моћи извршити деформацију њезину, а на њу не дејствују Кориолисове силе, јер је она према координатном систему $X—Y—Z$ непокретна. Претпостављајући, једноставности ради и да бисмо јасније испољили ефекат центрифугалних сила, да је језгрин елипсоид инерције лопта, стајаће гравитационе силе које дејствују између језгре и љуске, дакле силе теже љускине, нормално на граничној површини између тих двају делова модела и на њој се поништавати; оне неће тежити да помере љуску по језгри. Те су силе, због претпоставке (88) једнаке на целој споменутој граничној површини.

Испитајмо сада распоред допунских сила на љусци. Кориолисове силе су, због претпоставке да је релативно кретање љуске по језгри веома споро, толико малене према центрифугалним силама да их не морамо узети у обзир. Остаје само да испитамо дејство центрифугалних сила.

Центрифугална сила која дејствује на елеменат масе $d\mu$ који се налази у тачки M удаљеној за вектор $\mathfrak{R}$ од осе ротације, претстављена је, према (43), § 50, обрасцем

$$(93) \qquad d\mathfrak{F}=n^2\mathfrak{R}d\mu,$$

где n означава угаону брзину координатног система дакле, у нашем случају, угаону брзину дневне ротације Земље. Означимо са $\mathfrak{f}_0$ јединични вектор правца $\mathfrak{R}$, а са r, φ, ψ поларне координате тачке M, то је према (59), § 51,

$$R=r\cos\varphi,$$

дакле

$$(94) \qquad d\mathfrak{F}=n^2r\cos\varphi\, d\mu\, \mathfrak{f}_0 .$$

Раставимо ли ту центрифугалну силу у њену вертикалну компоненту dV и њену хоризонталну компоненту dH од којих прва пада у правац ридиусвектора r, а друга стоји нормално на том правцу, а која је, тангирајући меридијан тачке M, наперена према екватору. Како радиусвектор r тачке M затвара са вектором $\mathfrak{R}$ угао φ, то је

$$dV = n^2 r \cos^2\varphi d\mu \tag{95}$$

$$dH = n^2 r \cos\varphi \sin\varphi \, d\mu = \frac{n^2 r}{2} \sin 2\varphi \, d\mu. \tag{96}$$

Вертикална компонента dV стоји нормално на граничној површини између језгре и љуске па није у стању да изведе померање љуске по језгри, зато о њој не морамо више водити рачуна. Хоризонтална компонента dH управљена је тангенцијално према тој граничној површини па тежи да елеменат масе $d\mu$ помери по језгри. Скаларна величина момента заокретања $d\mathfrak{M}$ те силе обзиром на центар Земље претстављена је изразом

$$dM = r dH = \frac{n^2 r^2}{2} \sin 2\varphi \, d\mu. \tag{97}$$

Кад би љуска била кондензована свугде на густину ϱ_0, онда би, замишљајући масу $d\mu$ елементарне призме концентрисану у њеном тежишту које се налази удаљено за $\frac{1}{2} H$ од граничне сферне површине радиуса r_0, моменат dM био претстављен обрасцем

$$dM_1 = \frac{1}{2} n^2 \left(r_0 + \frac{1}{2} H\right)^2 \sin 2\varphi \, d\mu.$$

Моменат заокретања $\mathfrak{M}_1$ целокупне кондензоване љуске добили бисмо интеграцијом предњег израза широм целе граничне површине између језгре и љуске, претставивши га пре тога у векторском облику. Како су центрифугалне силе, а и њихове хоризонталне компоненте, симетричне према оси ротације, оне се међусобно потиру па је зато

$$\mathfrak{M}_1 = 0; \qquad M_1 = 0.$$

Узмимо сада у обзир стварно стање љуске. Услед њега је тежиште масе $d\mu$ уздигнуто за z_0 изнад тежишта њеног у кондензованом стању па се услед тога, пошто је z_0 према r_0 веома мало, моменат dM_1 променуо за

$$dM = \frac{\partial M_1}{\partial r_0} z_0,$$

дакле за

$$dM = n^2 (r_0 + \frac{1}{2} H)\, z_0 \sin 2\varphi\, d\mu.$$

У овом изразу можемо, претпостављајући да је љуска танка, т, ј. H веома малено према r_0, занемарити $\frac{1}{2} H$. То можемо учинити и због тога што је, као што смо видели, H константно на целој љусци тако да бисмо у горњем обрасцу могли ставити

$$r_0 + \frac{1}{2} H = r_0 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{H}{r_0}\right) = k r_0,$$

где је k један константан број; он би коначно ушао у коефициенат $\varkappa$ па изчезао из рачуна. Због свега тога можемо ставити

$$dM = n^2 r_0 z_0 \sin 2\varphi\ d\mu. \tag{98}$$

Претставимо ли сада овај моменат векториелно, употребом истих оних јединичних вектора којима смо се послужили при образовању једначине (47), то добивамо

$$d\mathfrak{M} = -n^2 r_0 z_0 \sin 2\varphi\ d\mu\ \mathfrak{i}\ . \tag{99}$$

Питајмо сада за распоред акцелерације g теже у проучаваном моделу Земљином. Да на то питање одговоримо, треба да, према напред уговореном, ставимо у образац (60), § 51, $A = C$ па добивамо да је функција сила W претстављена, у нашем случају, обрасцем

$$(100) \qquad W = f\frac{M}{r} + \frac{n^2r^2}{2}\cos^2\varphi\,,$$

а аклерација g теже, према (40), обрасцем

$$(101) \qquad g = -\frac{\partial W}{\partial r} = \frac{fM}{r^2} - n^2 r\cos^2\varphi\,.$$

Она је на полу, т. ј. за $\varphi = 90^0$; $r = r_0$, једнака

$$(102) \qquad g_p = \frac{fM}{r_0^2}\,,$$

а на екватору, где је $\varphi = 0$; $r = r_0$,

$$(103) \qquad g_a = \frac{fM}{r_0^2} - n^2 r_0\,.$$

Зато је

$$(104) \qquad g_p - g_a = n^2 r_0.$$

Стављајући ово у (99), добивамо

$$(105) \qquad d\mathfrak{M} = -z_0(g_p - g_a)\sin 2\varphi\, d\mu\, \mathfrak{i}.$$

Ова је једначина идентична са нашом једначином (48) па зато следује из ње, истим начином као што је (61) следовало из (48),

$$(106) \qquad \mathfrak{v} = \varkappa \operatorname{grad} \Omega.$$

Овој једначини можемо, као што је то учинио Билимовић, дати и други облик, замењујући допунски моменат инерције Ω са стварним моментом инерције J љуске. Заиста, из једначине (92), у којој је T константно, следује

$$\operatorname{grad} J = \operatorname{grad} \Omega \tag{107}$$

па зато можемо, место (106), писати и овај образац

$$\mathfrak{v} = \varkappa \operatorname{grad} J.$$

САДРЖАЈ

ПРВИ ОДЕЉАК

Транслаторно кретање небеских тела.

ГЛАВА ПРВА

Постанак и развитак науке о кретању небеских тела.

ГЛАВА ДРУГА

Проблем двају тела.

ГЛАВА ТРЕЋА

Општи интеграли проблема n тела.

ГЛАВА ЧЕТВРТА

Проблем трију тела.

ГЛАВА ПЕТА

Астероидни проблем.

ГЛАВА ШЕСТА.

Сила поремећаја и њено поље.

ГЛАВА СЕДМА

стр.

Метод варијације констаната у једначинама кретања небеских тела.

ГЛАВА ОСМА

Рачун поремећаја небеских тела.

ГЛАВА ДЕВЕТА

Планетски систем.

ДРУГИ ОДЕЉАК

Ротационо кретање небеских тела.

ГЛАВА ДЕСЕТА

Теореме и обрасци Рационалне Механике потребни за проучавање ротационих кретања небеских тела.

ГЛАВА ЈЕДАНАЕСТА

Ротација небеских тела у флуидном стању.

ГЛАВА ДВАНАЕСТА

Прецесија Земљине осе.

ГЛАВА ТРИНАЕСТА

Астрономска нутација Земљине осе.

ГЛАВА ЧЕТРНАЕСТА

стр.

Слободна нутација Земље.

ГЛАВА ПЕТНАЕСТА

Секуларно померање Земљиних полова.