

U N I V E R Z I T E T U B E O G R A D U

TATOMIR ANĐELIĆ
RASTKO STOJANOVIĆ

RACIONALNA MEHANIKA

ZAVOD ZA IZDAVANJE UDŽBENIKA
SOCIJALISTIČKE REPUBLIKE SRBIJE
BEOGRAD

Ovaj udžbenik, kao stalan univerzitetski udžbenik, odobrila je za upotrebu Komisija za udžbenike
Univerziteta u Beogradu svojim rešenjem broj 1621/1 od 25. maja 1965. godine

P R E D G O V O R

Ovaj udžbenik je namenjen prvenstveno studentima studijske grupe za mehaniku Prirodno-matematičkog fakulteta u Beogradu. Sadrži gradivo predviđeno za ovu struku a to znači pored ranijeg standardnog gradiva, koje se javlja u sličnim udžbenicima, i čitav niz dopuna koje savremena nastava ovog predmeta zahteva. To su na prvom mestu elementi dinamike objekta promenljive mase, opširnije proučavanje Njutnove sile gravitacije i najzad uvod u specijalnu teoriju relativnosti.

I sa metodskog stanovišta udžbenik se razlikuje od drugih udžbenika ove vrste. Primena vektorskih metoda je već stekla pravo građanstva u ovakvim udžbenicima i kod nas odavno uvedena konsekvantno u udžbenicima prof. Bilimovića u mehaniku i prof. Milankovića u nebesku mehaniku. U odnosu na inače uobičajeni način izlaganja ovog gradiva ovde je sasvim rano i u mnogo širem obimu nego obično uvedena i tenzorska metoda. Jer, po našem mišljenju samo modernim sredstvima tenzorske algebre i analize mogu se jednačine kretanja pisati u jedinstvenom opštem obliku iz koga se onda lako mogu dobiti posebni oblici važni za rešavanje konkretnih problema. Osim, toga, bez obzira na činjenicu što se u ovakvom udžbeniku matematičke metode uglavnom koriste i njihovo poznavanje pretpostavlja, imali smo pred očima prethodnu spremu studenata i stoga mestimično u samom tekstu davali neophodne matematičke dopune. Uopšte, želja nam je bila da se na što je moguće nenametljiviji i neosetniji način istakne uloga i važnost korišćenja u pojedinim problemima upravo onih sredstava (skalara, vektora ili tenzora) koja najneposrednije i najbolje odgovaraju samom datom problemu. Stoga i nismo težili nekom apsolutno jednoobraznom po svaku cenu isključivo tenzorskom izlaganju gradiva. Iz istih razloga se paralelno koriste uobičajene simboličke vektorske oznake i tenzorska indeksna notacija.

Smatrali smo dalje da pisanjem racionalne mehanike nije dovoljno samo sadržajem i rasporedom gradiva pružiti udžbenik za određenu studijsku grupu već da treba učiniti da on po svom karakteru bude što bliži potrebama i zahtevima savremene nastave teorijske fizike i onim višim zahtevima u nastavi mehanike na tehničkim fakultetima u pogledu tzv. analitičke dinamike. Iz tih razloga je npr. unet uvod u specijalnu teoriju relativnosti. Isto tako mi smo polazeći sa čisto teorijskog stanovišta smatrali statiku samo kao poseban slučaj dinamike pa nismo posvetili neku pažnju posebnim za statiku naročito važnim metodama.

Posebnih osvrta na istorijski razvoj nema, jer bi se time knjiga znatno povećala, mada smatramo da su takve istorijske primedbe od značaja.

Posle svakog većeg odeljka dat je niz potpuno, ali kratko, rešenih primera a zatim su navedeni zadaci snabdeveni rezultatima. Među ovim zadacima većinu čine zadaci pozajmljeni iz poznatih zbiraka zadataka i udžbenika mehanike, veliki broj zadataka smo sastavili mi sami i naši saradnici. Ipak, poreklo pojedinih zadataka nismo navodili, jer je izvanredno teško tačno utvrditi, gde su se pojedini danas već standardni zadaci prvi put pojavili. Uz mnoge zadatke dati su i crteži koji su istina tehnički otežali trud oko sastavljanja ovog udžbenika, ali koji će svakako doprineti da se sami zadaci lakše shvate i reše.

Naše nastavno iskustvo došlo je do izražaja ne samo u pogledu izbora i rasporeda gradiva već i pri izvodenju i dokazivanju mnogih stavova, koje je izvedeno na originalan način.

Smatramo za prijatnu dužnost da se zahvalimo recenzentima dr V. Vujičiću i dr M. Leku za pomoć koju su nam ukazali da se izvesni nedostaci otklone. Takođe nam je prijatno da se zahvalimo kolegama dr S. Djuriću, dr L. Vujoševiću, D. Blagojeviću, M. Gligoriću, dr S. Komljenoviću, dr L. Rusovu i M. Plavšiću za nesebičnu pomoć pri tehničkoj pripremi rukopisa. Kolegama D. Stokiću i D. Mediću se zahvaljujemo za izradu registra. Najzad, naša zahvalnost pripada i izdavačkom preduzeću „Zavod za izdavanje udžbenika SRS“, njegovoj tehničkoj redakciji i slugačima „Prosvete“ koji su se svi zajedno trudili da ovo delo izađe što pre i u što lepšem obliku.

Beograd, 1965.

T. P. ANĐELIĆ
R. STOJANOVIĆ

S A D R Ž A J

KINEMATIKA

A. Kinematika tačke

	strana
Predgovor	
1.1. Položaj tačke. Koordinatni sistemi. Koordinatne transformacije	3
1.2. Konačne jednačine kretanja tačke. Trajektorija. Zakon puta	7
1.2.1. Dužina luka u generalisanim koordinatama	8
1.3. Vrste kretanja tačke	13
1.3.1. Jednoliko kružno kretanje. Harmonijske oscilacije	14
1.3.2. Amortizovane oscilacije	15
1.4. Brzina tačke. Hodograf brzine	17
1.4.1. Projekcije brzine na ose generalisanih koordinata	19
1.4.1.1. Krivolinijske koordinate brzine	20
1.4.2. Radijalna i transverzalna brzina tačke	21
1.5. Uopštenje pojma brzine	22
1.6. Ubrzanje. Ugaono ubrzanje	27
1.6.1. Tangentno i normalno ubrzanje	28
1.6.2. Projekcije ubrzanja na ose krivolinijskih koordinata	29
1.6.3. Krivolinijske koordinate ubrzanja	30
1.6.4. Radijalno i transverzalno ubrzanje tačke	34
1.7. Kinematički dijagrami	34

B. Kinematika krutog tela

1.8. Kruto telo	46
1.8.1. Položaj krutog tela	46
1.8.1.1. Ojlerovi uglovi	49
1.8.2. Određivanje položaja tačke krutog tela	51
1.9. Kretanje krutog tela. Konačne jednačine kretanja krutog tela	54
1.9.1. Translatorno kretanje (translacija)	55
1.9.2. Rotacija krutog tela oko nepokretne ose	56
1.9.2.1. Pomeranje tačke tela pri rotaciji oko nepokretne ose. Ojlerov i Rodrigov obrazac	58
1.9.3. Ravansko kretanje	60
1.9.3.1. Centar konačne rotacije	62
1.9.3.2. Primer ravanskog kretanja: Kardanovo kretanje	64
1.9.4. Kretanje krutog tela oko nepokretne tačke	65
1.9.4.1. Osa konačne rotacije	66
1.9.5. Zavojno kretanje	66
1.9.6. Opšti slučaj kretanja krutog tela	68
1.9.7. Polje elementarnog pomeranja tačaka krutog tela	71
1.10. Slaganje kretanja	75
1.11. Brzina tačke krutog tela. Trenutna ugaona brzina. Trenutna osa rotacije	80
1.11.1. Dekartove pravouglove koordinate brzine tačke. Jednačina trenutne ose rotacije	82
1.11.2. Trenutni centar rotacije. Centroide	87
1.11.3. Trenutna zavojna osa. Aksoidi	93
1.11.4. Brzine tačaka pri složenom kretanju tela	95
1.12. Ubrzanje tačke krutog tela	97
1.12.1. Trenutni centar ubrzanja kod ravanskog kretanja. Bresovi krugovi. Ojler-Savarijev obrazac	100
1.13. Apsolutno, relativno i prenosno kretanje	104

DINAMIKA

C. Dinamika materijalne tačke

	strana	
2.1.	Osnovni pojmovi i osnovni zakoni dinamike	117
2.2.	Osnovne jedinice merenja. Mehanička sličnost	119
2.3.	Diferencijalne jednačine kretanja materijalne tačke	121
2.3.1.	Kovarijantne i kontravarijantne jednačine kretanja materijalne tačke	123
2.4.	Osnovni problemi dinamike materijalne tačke	125
2.5.	Pravolinijsko kretanje materijalne tačke	128
2.5.1.	Pravolinijsko kretanje materijalne tačke pod dejstvom sile koja zavisi samo od vremena ili je konstantna	129
2.5.2.	Pravolinijsko kretanje pod dejstvom sile koja zavisi samo od rastojanja	131
2.5.2.1.	Pravolinijsko kretanje pod dejstvom sile proporcionalne rastojanju	132
2.5.3.	Pravolinijsko kretanje pod dejstvom sile koja zavisi samo od brzine	136
2.5.4.	Pravolinijsko kretanje pod dejstvom elastične i otporne sile proporcionalne brzini	138
2.5.5.	Pravolinijsko kretanje teške tačke u otpornoj sredini	141
2.5.6.	Prinudne oscilacije	144
2.5.7.	Prosta prinudna oscilacija sa elastičnom i otpornom silom	146
2.6.	Krivolinijsko kretanje materijalne tačke	150
2.6.1.	Kosi hitac u bezvazдушnom prostoru	150
2.6.2.	Kosi hitac u otpornoj sredini. Balistička linija	153
2.7.	Osnovne teoreme dinamike materijalne tačke	164
2.7.1.	Teorema količine kretanja. Integrali količine kretanja.	164
2.7.2.	Teorema kinetičkog momenta. Integrali kinetičkog momenta	166
2.7.3.	Rad sile. Potencijal. Konzervativne sile	170
2.7.3.1.	Efekt rada (snaga)	173
2.7.3.2.	Kinetička energija. Teorema kinetičke energije i integral energije	174
2.8.	Kretanje materijalne tačke promenljive mase	176
2.8.1.	Vertikalni hitac najviše tačke promenljive mase u bezvazдушnom prostoru	178
2.9.	Centralne sile. Njutnova sila gravitacije	186
2.9.1.	Određivanje kretanja u polju centralne sile. Bineov obrazac	188
2.9.1.1.	Kretanje materijalne tačke u polju Njutnove sile gravitacije. Prvi i drugi Keplerov zakon	190
2.9.1.2.	Kosmičke brzine projektila. Vreme obilaženja. Treći Keplerov zakon	193
2.10.	Veze	207
2.10.1.	Kretanje materijalne tačke po površi	209
2.10.1.1.	Diferencijalne jednačine kretanja materijalne tačke po glatkoj površi	212
2.10.2.	Integrali kinetičkog momenta i kinetičke energije za kretanje materijalne tačke po površi	218
2.10.3.	Primeri kretanja materijalne tačke sa jednom idealnom vezom	221
2.10.3.1.	Sferno klatno. Eliptične funkcije	221
2.10.3.2.	Konusno klatno	228
2.11.	Kretanje materijalne tačke po glatkoj krivoj liniji	242
2.11.1.	Diferencijalne jednačine kretanja materijalne tačke po glatkoj krivoj liniji	245
2.11.2.	Integral energije za kretanje materijalne tačke po glatkoj krivoj liniji	249
2.11.3.	Primeri kretanja materijalne tačke po glatkoj krivoj liniji.	250
2.11.3.1.	Cikloidno klatno	250
2.11.3.2.	Matematičko klatno	256
2.12.	Moguća pomeranja, virtualna pomeranja i kriterijum idealnosti veze	264
2.13.	Trenje	280
2.14.	Relativno kretanje materijalne tačke	290
2.14.1.	Relativno kretanje teške tačke prema Zemlji	292

D. Dinamika materijalnog sistema

3.1.	Geometrija masa	305
3.1.1.	Gustina	305
3.1.2.	Centar masa. Linearni moment mase	308
3.1.2.1.	Papos-Guldinove teoreme	317
3.1.3.	Momenti i proizvodi inercije. Definicije i veze	331
3.1.3.1.	Osobine momenata i proizvoda inercije	336
3.1.3.2.	Elipsoid inercije. Giracioni elipsoid. Matrica inercije	340
3.1.3.3.	Određivanje glavnih momenata i glavnih osa inercije u prostoru	346

	strana
3.2. Diferencijalne jednačine kretanja materijalnog sistema	356
3.2.1. Veze	356
3.2.2. Diferencijalne jednačine kretanja slobodnog materijalnog sistema	366
3.2.2.1. Njutnova sila kojom homogena sferna ljuska i homogena lopta privlače materijalnu tačku. Problem dva tela.	369
3.2.3. Diferencijalne jednačine kretanja sa multiplikatorima veza (Lagranževe jednačine prve vrste)	375
3.2.4. Lagranževe jednačine druge vrste	379
3.2.5. Konfiguracioni prostor sa kinematičkim linijskim elementom	382
3.2.6. Opšte teoreme o kretanju materijalnog sistema i prvi integrali diferencijalnih jednačina kretanja	386
3.2.7. Zakon količine kretanja. Integral količine kretanja	387
3.2.8. Zakon konzervacije mase (jednačina neprekidnosti)	390
3.2.9. Zakon kinetičkog momenta. Integral kinetičkog momenta	392
3.2.10. Zakon kinetičke energije. Integral energije	395
3.2.11. Ciklički integrali	401
3.2.12. Kanonske (Hamiltonove) jednačine	403
3.2.13. Rautove jednačine	406
3.3. Opšti principi mehanike	417
3.3.1. Diferencijalni principi	418
3.3.1.1. Dalamberov princip	418
3.3.1.2. Princip virtualnih pomeranja	420
3.3.1.3. Gausov princip najmanje prinude	420
3.3.2. Integralni principi	425
3.3.2.1. Hamiltonov princip	427
3.3.2.2. Mopertiji-Lagranžev princip najmanjeg dejstva	430
3.3.2.3. Hercov princip najmanje krivine	432
3.4. Male oscilacije materijalnog sistema	437
3.4.1. Stabilnost kretanja	437
3.4.2. Stabilnost ravnoteže. Ležen-Dirihleova teorema	438
3.4.3. Približne vrednosti kinetičke i potencijalne energije pri malim oscilacijama. Diferencijalne jednačine malih oscilacija	438
3.4.4. Male oscilacije sistema sa jednim stepenom slobode	441
3.5. Dinamika krutog tela	444
3.5.1. Kinetička energija, količina kretanja i kinetički moment krutog tela	445
3.5.1.1. Kinetička energija krutog tela	445
3.5.1.2. Količina kretanja krutog tela	449
3.5.1.3. Kinetički moment krutog tela	450
3.5.2. Diferencijalne jednačine kretanja krutog tela	452
3.5.2.1. Skalarnе diferencijalne jednačine kretanja slobodnog krutog tela	453
3.5.2.2. Jednačine kretanja vezanog krutog tela	457
3.5.2.3. Skalarnе diferencijalne jednačine kretanja u odnosu na pokretne ose	460
3.5.3. Ravansko kretanje krutog tela	462
3.5.4. Obrtanje krutog tela oko nepokretne ose	489
3.5.4.1. Permanentna i slobodna osa obrtanja	493
3.5.4.2. Fizičko klatno	494
3.5.5. Kretanje krutog tela oko nepokretne tačke	500
3.5.5.1. Ojlerov slučaj kretanja tela oko nepokretne tačke	502
3.5.5.2. Lagranžev slučaj kretanja tela oko nepokretne tačke	504
3.5.5.3. Kretanje krutog tela oko nepokretne tačke u slučaju S. Kovalevske	506
3.5.6. Girooskop	508
3.5.7. Ravnoteža krutih tela	519
3.5.8. Udar i sudar	523
3.5.8.1. Udarна sila. Trenutni impuls	523
3.5.8.2. Opšte teoreme dinamike primenjene na udar	524
3.5.8.3. Udar sistema o nepokretnu vezu	527
3.5.8.4. Dejstvo udarnih sila na kruto telo	534
3.5.8.5. Sudar dva tela	535

E. Uvod u specijalnu teoriju relativnosti

4.1. Prostor i vreme u klasičnoj (Njutnovoj) mehanici. Galilejeva transformacija	543
4.2. Relativističko shvatanje prostora i vremena. Pojam sinhronosti. Konstantnost brzine svetlosti	547

VIII

	strana
4.3. Lorencova transformacija	549
4.4. Kontrakcija dužine. Relativnost simultanosti i sukcesije događaja. Dilatacija vremena	555
4.5. Transformacija brzine. Relativistička adicione teorema brzine	559
4.6. Četvorodimenzioni svet. Sopstveno vreme pokretnog objekta	562
4.7. Brzina i ubrzanje u relativističkoj mehanici	566
4.8. Relativistički pojam mase i sile. Četvorovektor količine kretanja i sile. Relacija između mase i energije	570
4.9. Geodezijske linije u prostorno-vremenskom kontinuumu	577

*Mechanicam vero duplicem veteres constituerunt rationalem
quae per demonstrationes accurate procedit, et practicam.*

NEWTON

(Philosophiae naturalis principia
mathematica, praefacio ad lectorem)

KINEMATIKA

A. KINEMATIKA TAČKE

1.1. Položaj tačke. Koordinatni sistemi. Koordinatne transformacije

Položaj tačke u prostoru određuje se u odnosu na jednu unapred određenu tačku O u prostoru (*pol* ili *početak*) pomoću vektora položaja \mathbf{r} . To je vektor čiji se početak nalazi u polu, a kraj u posmatranoj tački.

U odnosu na Dekartov pravougli sistem koordinata $Oxyz$ sa početkom u polu O položaj tačke se određuje koordinatama tačke x , y i z . Ortogonalne projekcije kraja vektora položaja na ose ovog koordinatnog sistema poklapaju se sa koordinatama tačke, pa su i koordinate vektora položaja \mathbf{r} upravo x , y , i z ,

$$(1) \quad \mathbf{r} = \{x, y, z\}.$$

Ako su jedinični vektori u pravcu osa Ox , Oy i Oz obeleženi sa \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} , može se pisati

$$(2) \quad \mathbf{r} = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k},$$

pri čemu su vektori $x\mathbf{i}$, $y\mathbf{j}$, $z\mathbf{k}$ komponente vektora položaja u naznačenim pravcima.

Međutim, položaj tačke u prostoru može se odrediti i pomoću neka tri međusobno nezavisna parametra q^1 , q^2 , q^3 koje ćemo označavati sa q^i , ($i = 1, 2, 3$). Kad se parametrima q^i daju sve moguće vrednosti i kad svakoj tački u prostoru odgovara jedan i samo jedan uređeni skup od tri broja (q^1, q^2, q^3) i obrnuto, svakom skupu od tri broja (q^1, q^2, q^3) odgovara jedna i samo jedna tačka u prostoru, parametri q^i se nazivaju *opšte (generalisane) koordinate tačke*. U slučaju generalisanih koordinata vektor položaja je neka vektorska funkcija generalisanih koordinata tačke,

$$(3) \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}(q^1, q^2, q^3).$$

Ovoj vektorskoj jednačini odgovaraju tri skalarne jednačine dobivene projekcijom kraja vektora položaja na ose Dekartovog pravouglog sistema

$$(4) \quad x = x(q^1, q^2, q^3); \quad y = y(q^1, q^2, q^3); \quad z = z(q^1, q^2, q^3).$$

Iz zahteva za obostranom jednoznačnošću veze između tačaka u prostoru i koordinata q^i proističe da svakoj tački sa koordinatama x , y , z moraju odgovarati tri broja q^i ($i = 1, 2, 3$), pa pored jednačina (4) moraju važiti i jednačine

$$(5) \quad q^i = q^i(x, y, z).$$

Prema tome, jednačine (4) uvek moraju zadovoljavati poznate uslove, koji su potrebni da se one mogu rešiti na određeni način po novim promenljivim q^1 , q^2 i q^3 . Skupovi od po tri jednačine (4) i (5) predstavljaju jednačine *koordinatne transformacije*. Transformacije (4) i (5) su uzajamno *recipročne (inverzne)*.

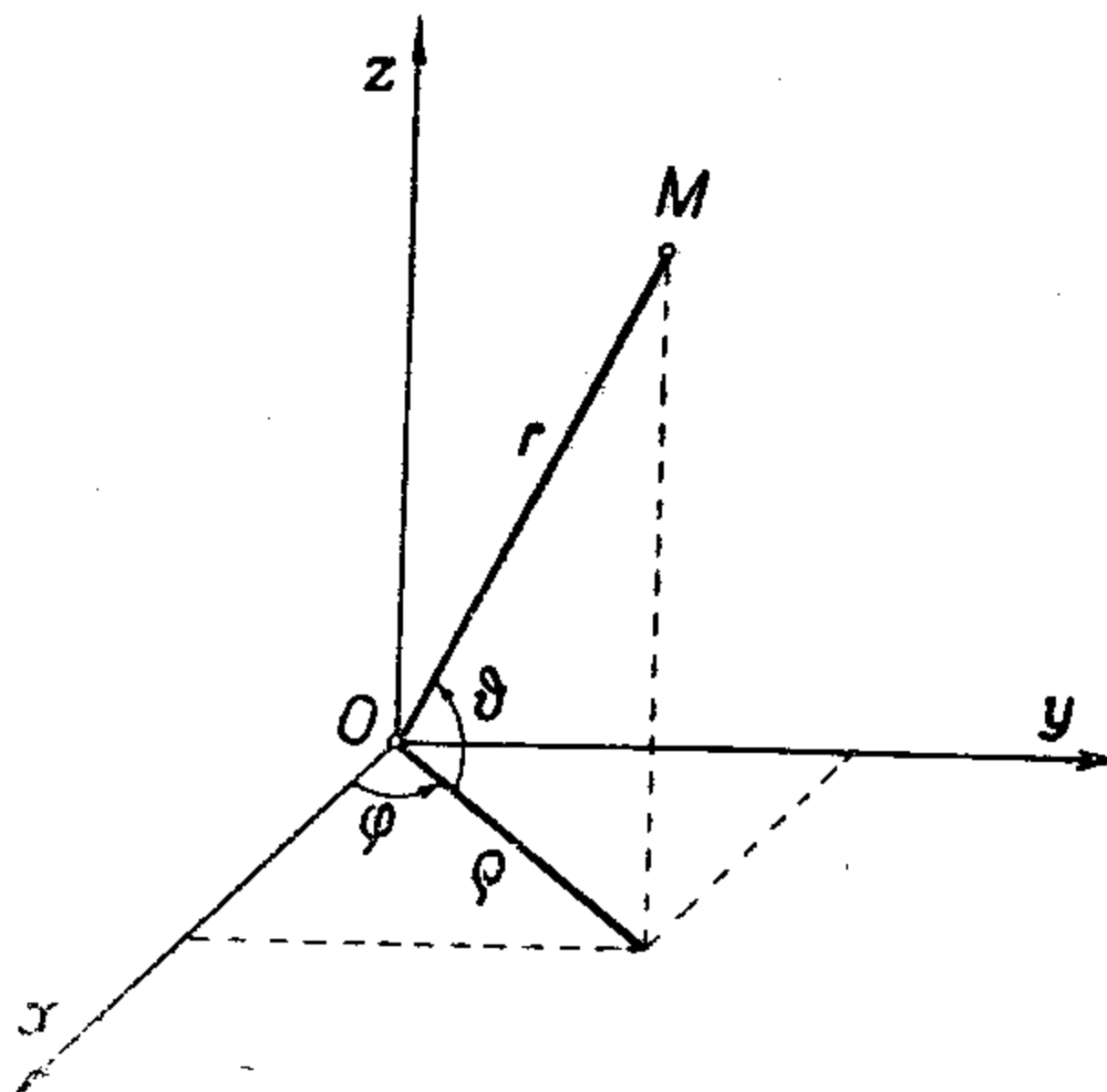
Kad u nekom sistemu koordinata q^i dve koordinate imaju stalnu vrednost, a trećoj od njih dajemo sve moguće vrednosti, geometrijsko mesto odgovarajućih tačaka u prostoru biće neka, u opštem slučaju kriva linija u prostoru, koja se naziva *koordinatna linija* i to kad se menja samo q^1 to je q^1 -koordinatna linija. Kroz svaku tačku prostora prolaze pri usvojenim uslovima tri različite koordinatne linije. Menjanjem dve od tri koordinate q^i , dok treća zadržava stalnu vrednost, dobiće se u prostoru *koordinatna površ*. Tako kad se menjaju samo koordinate q^1 i q^2 to je q^1q^2 -koordinatna površ. Svakoju tački prostora odgovaraju tri koordinatne površi. Koordinatne linije nalaze se u preseku koordinatnih površi. Kako kroz svaku tačku prolaze po tri ovakve u opštem slučaju krivolinijske koordinatne linije, one obrazuju *krivolinijski sistem koordinata*. U svakoj tački prostora se mogu na koordinatne linije u toj tački povući tangente, orijentisane prema smeru u kome rastu vrednosti q^1 , q^2 i q^3 i one obrazuju *u toj tački* trijedar generalisanih ili krivolinijskih koordinata.

Svaka jednačina među generalisanim koordinatama, npr. $\varphi(q^1, q^2, q^3) = 0$ određuje neku površ u opštem slučaju (različitu od koordinatnih površi), geometrijsko mesto onih tačaka čije koordinate zadovoljavaju tu jednačinu. Dve nezavisne jednačine određuju neku krivu liniju (različitu od koordinatnih linija u opštem slučaju), a tri nezavisne jednačine po generalisanim koordinatama određuju samo jednu ili više diskretnih tačaka prostora.

Koordinatni sistemi su geometrijski objekti prema kojima se određuju položaji tačaka u prostoru — pa se zovu i *sistemi referencije*.

Transformacija koordinata (4) odnosno (5) uglavnom određuje promene koordinata iste tačke u prostoru, posmatrane u odnosu na razne sisteme referencije.

Prema obliku koordinatnih linija i koordinatnih površi pojedini sistemi koordinata, koji se najčešće koriste, imaju posebna imena. Najjednostavniji sistemi koordinata su oni, čije su koordinatne linije prave, a površi ravne; to su *pravolinijski* ili *Dekartovi* sistemi koordinata. Ako su koordinatne površi odnosno ko-



Slika 1

ordinatne linije međusobno upravne u svim tačkama prostora, kaže se da je sistem koordinata *ortogonalan* (*pravougli*). Takav je upravo sistem Dekartovih pravougljih koordinata x, y, z .

Od raznih krivolinijskih koordinata najčešće su u upotrebi cilindarske i sferne (sl. 1). Cilindarske koordinate $\rho, \varphi, i z$ vezane su sa Dekartovim pravougljim koordinatama obrascima

$$(6) \quad x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z = z,$$

a sferne r, φ i ϑ obrascima

$$(7) \quad x = r \cos \vartheta \cos \varphi,$$

$$y = r \cos \vartheta \sin \varphi, \quad z = r \sin \vartheta.$$

Kad se posmatraju tačke koje se sve nalaze u jednoj ravni, za određivanje njihovih položaja dovoljne su dve koordinate (*ravanske koordinate*), pod uslovom da je poznata ravan u kojoj se tačke nalaze. Uvek se može u prostoru izabrati takav Dekartov sistem pravougljih koordinata da posmatrana ravan bude određena recimo jednačinom $z = 0$. Tada su koordinate tačke u ravni određene potpuno

sa x i y . Iz jednačina (5) se vidi da u tom slučaju ($z = 0$) sve tri generalisane koordinate q^i neće biti međusobno nezavisne. Eliminacijom x i y iz tih jednačina dobiva se jednačina

$$(8) \quad F(q^1, q^2, q^3) = 0,$$

koja predstavlja jednačinu ravni $z = 0$ izraženu pomoću generalisanih koordinata q^i . Zgodnim izborom generalisanih koordinata u posmatranoj ravni položaj tačke u ravni može se odrediti pomoću samo dve nezavisne ravanske koordinate.

Takav je slučaj sa *polarnim koordinatama* u ravni, koje se dobivaju i kao degenerativni slučaj cilindarskih i sfernih koordinata, kad u ovima stavimo da je $z = 0$. Iz obrazaca (6) za cilindarske koordinate neposredno (ili sa odgovarajuće slike) se dobivaju obrasci za polarne koordinate u ravni:

$$(9) \quad x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi.$$

Iz izraza (2) se vidi da se jedinični vektori u pravcu osa Dekartovog pravougllog sistema koordinata mogu izraziti kao parcijalni izvodi vektora položaja po koordinatama tačke,

$$(10) \quad \mathbf{i} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x}, \quad \mathbf{j} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y}, \quad \mathbf{k} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z}.$$

Ako se vektor položaja diferencijali po generalisanim koordinatama, izvodi će ponovo biti vektori

$$(11) \quad \mathbf{g}_i = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^i}, \quad (i=1, 2, 3).$$

Ovi se vektori nazivaju *osnovni vektori* sistema generalisanih koordinata q^i . Oni u opštem slučaju nisu jedinični. Ako koordinate osnovnih vektora izrazimo u odnosu na Dekartove pravougle koordinate, intenziteti osnovnih vektora biće određeni obrascima:

$$(12) \quad |\mathbf{g}_i| = A_i = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q^i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q^i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q^i}\right)^2}, \quad (i=1, 2, 3).$$

Ako se sa \mathbf{t}_i označe jedinični vektori u pravcima osnovnih vektora,

$$(13) \quad \mathbf{t}_i = \frac{\mathbf{g}_i}{|\mathbf{g}_i|},$$

biće s obzirom na (12)

$$(14) \quad \mathbf{g}_i = |\mathbf{g}_i| \mathbf{t}_i = A_i \mathbf{t}_i.$$

Kako su vektori \mathbf{g}_i funkcije položaja, to u opštem slučaju ti vektori u svakoj tački prostora obrazuju neki trijedr generalisanih koordinata — *vektorsku bazu* za generalisane koordinate q^i — u kome vektori niti su stalnog intenziteta niti obrazuju u svim tačkama prostora stalno iste uglove, već se i po intenzitetu i po smeru menjaju neprekidno od tačke do tačke prostora.

Vektori \mathbf{g}_i su u svakoj tački prostora tangentni na koordinatne linije u toj tački, a ose čiji se pravci i smerovi poklapaju sa pravcima i smerovima vektora \mathbf{g}_i u nekoj tački prostora nazivaju se *ose generalisanih koordinata* u posmatranoj tački.

Ako se vektor položaja posmatra kao funkcija generalisanih koordinata posredno preko Dekartovih koordinata x, y, z ,

$$(15) \quad \mathbf{r} = \{x(q^i), y(q^i), z(q^i)\} = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k},$$

za osnovne vektore se mogu pisati izrazi

$$(16) \quad \mathbf{g}_i = \frac{\partial x}{\partial q^i} \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial q^i} \mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial q^i} \mathbf{k}.$$

Obrnuto, ako Dekartove koordinate posmatramo kao funkcije generalisanih biće iz (10)

$$(17) \quad \begin{aligned} \mathbf{i} &= \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^i} \frac{\partial q^i}{\partial x} = \sum_{i=1}^3 \mathbf{g}_i \frac{\partial q^i}{\partial x}, \\ \mathbf{j} &= \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^i} \frac{\partial q^i}{\partial y} = \sum_{i=1}^3 \mathbf{g}_i \frac{\partial q^i}{\partial y}, \\ \mathbf{k} &= \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^i} \frac{\partial q^i}{\partial z} = \sum_{i=1}^3 \mathbf{g}_i \frac{\partial q^i}{\partial z}. \end{aligned}$$

Na taj način osnovni vektori za neki sistem generalisanih koordinata mogu se izraziti pomoću osnovnih vektora Dekartovog pravouglog sistema koordinata i obrnuto.

Zamenom izraza (17) u (2) vektor položaja se može napisati u obliku

$$(18) \quad \mathbf{r} = \sum_{i=1}^3 \left[x(q^1, q^2, q^3) \frac{\partial q^i}{\partial x} + y(q^1, q^2, q^3) \frac{\partial q^i}{\partial y} + z(q^1, q^2, q^3) \frac{\partial q^i}{\partial z} \right] \mathbf{g}_i.$$

Veličine

$$(19) \quad r^i = x \frac{\partial q^i}{\partial x} + y \frac{\partial q^i}{\partial y} + z \frac{\partial q^i}{\partial z}$$

predstavljaju *koordinate vektora položaja* u odnosu na sistem generalisanih koordinata q^i . Sam vektor položaja neke tačke u prostoru može se sada izraziti u obliku sličnom onome za pravougule Dekartove koordinate,

$$(20) \quad \mathbf{r} = \sum_{i=1}^3 r^i \mathbf{g}_i.$$

Ovde se mora uočiti da se u opštem slučaju generalisane koordinate tačke q^1, q^2, q^3 i ove koordinate r^i vektora položaja iste tačke ne poklapaju. Izuzetak su jedino Dekartove pravougule koordinate.

V e ž b e

1. Šta su koordinatne površi i koordinatne linije za cilindarski sistem koordinata?

O d g o v o r : $\rho = \rho_0 = \text{const.}$ je kružni cilindar poluprečnika ρ_0 čija se osa poklapa sa z -osom; $\varphi = \varphi_0 = \text{const.}$ je ravan koja prolazi kroz z -osu i obrazuje ugao φ_0 sa ravni $\varphi = 0$; $z = z_0 = \text{const.}$ je ravan upravna na z -osu, a na rastojanju z_0 od osnovne ravni upravne na z -osu koja prolazi kroz koordinatni početak.

2. Šta su koordinatne površi i koordinatne linije za sferni sistem koordinata?

3. Šta su koordinatne linije za polarni sistem koordinata u ravni?

4. Pokazati da su osnovni vektori u cilindarskom koordinatnom sistemu dati u odnosu na pravouglo Dekartove koordinate obrascima:

$$\mathbf{g}_\rho = \{\cos \varphi, \sin \varphi, 0\}; \quad \mathbf{g}_\varphi = \{-\sin \varphi, \cos \varphi, 0\}; \quad \mathbf{g}_z = \{0, 0, 1\}.$$

5. Pokazati da su osnovni vektori za sferni sistem koordinata u odnosu na pravouglo Dekartov sistem koordinata dati obrascima:

$$\mathbf{g}_r = \{\cos \vartheta \cos \varphi, \cos \vartheta \sin \varphi, \sin \vartheta\}; \quad \mathbf{g}_\vartheta = \{-r \sin \vartheta \cos \varphi, -r \sin \vartheta \sin \varphi, r \cos \vartheta\};$$

$$\mathbf{g}_\varphi = \{-r \cos \vartheta \sin \varphi, r \cos \vartheta \cos \varphi, 0\}.$$

1.2. Konačne jednačine kretanja tačke. Trajektorija. Zakon puta

Ako se tačka kreće, ona u toku vremena menja svoj položaj u odnosu na neki sistem referencije (sistem koordinata), pa je kretanje tačke određeno vektorskom jednačinom

$$(1) \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}(t),$$

gde smo sa t označili vreme, ili skalarnim jednačinama u odnosu na Dekartove pravouglo koordinate

$$(2) \quad x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t),$$

odnosno u generalisanim koordinatama

$$(3) \quad q^i = q^i(t), \quad (i = 1, 2, 3).$$

Jednačina (1) je *vektorska konačna jednačina kretanja tačke*, a (2) i (3) su *skalarne konačne jednačine kretanja tačke*.

Vektorska jednačina (1) odnosno skalarne jednačine (2) ili (3) određuju krivu liniju koja se zove *trajektorija (putanja)* tačke. Geometrijsko, pak, mesto onih tačaka u prostoru sa kojima se pokretna tačka u nekom uočenom intervalu (t_1, t_2) vremena poklapa u toku kretanja je *pređeni put* ili kratko *put* tačke. Put tačke je luk s krive linije trajektorije (izuzetno može biti i duž, kad je trajektorija prava) i kad se na uobičajeni način utvrdi tačka na trajektoriji od koje se luk računa i smer u kome se meri, tada relacija

$$(4) \quad s = s(t)$$

pruža mogućnost da se odredi položaj tačke na trajektoriji u svakom trenutku vremena i veličina puta koji je ona prešla u određenom intervalu vremena. Veza (4) se zove *zakon puta* pokretne tačke.

Kretanje tačke je potpuno određeno poznavanjem njene trajektorije i zakona puta. Iz konačnih jednačina kretanja (2) ili (3) odnosno (1), koje su u stvari para-

metarske jednačine krive linije trajektorije, može se odrediti sam zakon puta. Biće (tačka označava izvod po vremenu)

$$(5) \quad d\mathbf{r}^2 = ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) dt^2 = \\ = [f(t)]^2 dt^2.$$

Oдавде se izračunava $ds = f(t) \cdot dt$ kao elementarna dužina i onda integracijom

$$(6) \quad s = \int f(t) \cdot dt + C = s(t) + C,$$

gde je C integraciona konstanta. Ako je u nekom početnom trenutku t_0 tačka bila na rastojanju s_0 od tačke od koje merimo put, tada se iz (6) dobiva

$$(7) \quad s_0 = s(t_0) + C,$$

pa je

$$s - s_0 = s(t) - s(t_0).$$

Prema tome, neodređeni integral u (6) može se za date početne uslove t_0 i s_0 zaminiti određenim integralom,

$$(8) \quad s - s_0 = \int_{t_0}^t f(t) dt.$$

Primer

Konačne jednačine kretanja tačke u prostoru, u odnosu na Dekartove pravouglove koordinate x, y, z su

$$x = 2t, \quad y = t^2 - 1, \quad z = t^2 + 1.$$

U početnom trenutku $t_0 = 0$ tačka se nalazila u položaju $s_0 = 0$. Za nalaženje zakona puta koristi se izraz (5) prema kome je u ovom slučaju

$$d\mathbf{r}^2 = ds^2 = 4(1 + 2t^2) dt^2,$$

pa je s obzirom na (8)

$$s = 2 \int_0^t \sqrt{1 + 2t^2} dt + \frac{\sqrt{2}}{2} \left[\sqrt{2} t \sqrt{2t^2 + 1} + \ln(\sqrt{2} t + \sqrt{1 + 2t^2}) - 1 \right].$$

1.2.1. Dužina luka u generalisanim koordinatama

U izrazu (5) prethodnog odeljka vidi se da je element luka ds određen pomoću kvadrata diferencijala Dekartovih pravouglavih koordinata. Međutim, može se odrediti zakon puta i kad su konačne skalarne jednačine kretanja date u odnosu na neki sistem generalisanih koordinata.

Veličina

$$(1) \quad ds^2 = d\mathbf{r}^2 = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r}$$

predstavlja kvadrat elementa luka. Kvadrata elementa luka izražen u ma kom sistemu koordinata definiše metričku formu za taj sistem koordinata i istovremeno

određuje osnovne karakteristike tog sistema koordinata. U pravouglim Dekartovim koordinatama metrička forma je data poznatim izrazom (1, 2—5)

$$(2) \quad ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

Uzmimo da je neki sistem generalisanih koordinata dat u odnosu na Dekartove pravougule koordinate izrazima (1.1—4). Diferencijali Dekartovih pravougljih koordinata mogu se izračunati po pravilu za diferenciranje funkcija više nezavisnih promenljivih

$$(3) \quad dx = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial x}{\partial q^i} dq^i; \quad dy = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial y}{\partial q^i} dq^i; \quad dz = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial z}{\partial q^i} dq^i,$$

a kvadrati ovih diferencijala mogu se izraziti pomoću dvostrukih zbirova

$$(4) \quad \begin{aligned} dx^2 &= \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial x}{\partial q^i} \frac{\partial x}{\partial q^j} dq^i dq^j, \\ dy^2 &= \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial y}{\partial q^i} \frac{\partial y}{\partial q^j} dq^i dq^j, \\ dz^2 &= \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial z}{\partial q^i} \frac{\partial z}{\partial q^j} dq^i dq^j. \end{aligned}$$

Unošenjem ovih izraza u (2) dobiva se

$$(5) \quad ds^2 = \sum_{i,j=1}^3 \left(\frac{\partial x}{\partial q^i} \frac{\partial x}{\partial q^j} + \frac{\partial y}{\partial q^i} \frac{\partial y}{\partial q^j} + \frac{\partial z}{\partial q^i} \frac{\partial z}{\partial q^j} \right) dq^i dq^j = \sum_{i,j=1}^3 g_{ij} dq^i dq^j.$$

Veličine

$$(6) \quad g_{ij} \equiv \frac{\partial x}{\partial q^i} \frac{\partial x}{\partial q^j} + \frac{\partial y}{\partial q^i} \frac{\partial y}{\partial q^j} + \frac{\partial z}{\partial q^i} \frac{\partial z}{\partial q^j}$$

se nazivaju *koeficijenti metričke forme*. One su isključivo funkcije generalisanih koordinata q^i i u potpunosti određuju metričku formu.

Kada su konačne jednačine kretanja tačke date u obliku (1.2—3), iz (1.2—8) onda se neposredno dobiva

$$s = \int_{t_0}^t (\sum g_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j)^{1/2} dt.$$

Skup svih devet koeficijenata metričke forme predstavlja *osnovni* ili *metrički tenzor* za sistem koordinata q^i . Pojedinačni koeficijenti g_{ij} , $i, j = 1, 2, 3$, nazivaju se *koordinate metričkog tenzora*. Svih devet koordinata metričkog tenzora nisu, međutim, međusobno nezavisne. Iz izraza (6) se vidi da se promenom mesta i indeksa i i j vrednost koordinata g_{ij} neće promeniti, pa je otuda

$$g_{ij} = g_{ji}$$

za sve vrednosti indeksa i i j od 1 do 3. Zbog toga metrički tenzor ima svega šest međusobno nezavisnih koordinata, to su g_{11} , g_{22} , g_{33} i g_{23} , g_{31} i g_{12} , dok je $g_{32} = g_{23}$, $g_{13} = g_{31}$ i $g_{21} = g_{12}$.

Diferencijaljenjem vektorske jednačine $\mathbf{r} = \mathbf{r}(q^1, q^2, q^3)$ dobiva se

$$(7) \quad d\mathbf{r} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^i} dq^i.$$

Kako su

$$(8) \quad \mathbf{g}_i \equiv \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^i} = \left\{ \frac{\partial x}{\partial q^i}, \frac{\partial y}{\partial q^i}, \frac{\partial z}{\partial q^i} \right\},$$

osnovni vektori za sistem koordinata q^i , može se pomoću njih diferencijal vektora položaja izraziti u obliku

$$d\mathbf{r} = \mathbf{g}_1 dq^1 + \mathbf{g}_2 dq^2 + \mathbf{g}_3 dq^3 = \sum_{i=1}^3 \mathbf{g}_i dq^i$$

pa se za metričku formu dobiva izraz

$$(9) \quad ds^2 = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = \sum_{i,j=1}^3 \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j dq^i dq^j.$$

Upoređenjem ovog izraza sa (5) vidi se da je

$$(10) \quad g_{ij} = \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j = \mathbf{g}_j \cdot \mathbf{g}_i.$$

Ako su osnovni vektori u svim tačkama prostora uzajamno upravni, tj. ako koordinate q^i obrazuju ortogonalni sistem, biće prema (10)

$$g_{ij} = \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j = 0, \quad (i \neq j).$$

Često se koristi jedan poseban simbol, nazvan *Kronekerov* (Kronecker) *delta simbol*, sa dva indeksa (mogu se pisati oba dole, oba gore ili jedan gore a jedan dole) koji ima samo vrednosti 1 ili 0 prema tome da li oba indeksa imaju istu brojnu vrednost ili su različiti,

$$\delta_{ij} = \delta^{ij} = \delta_j^i = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

U slučaju ortogonalnog koordinatnog sistema čiji su osnovni vektori jedinični, koordinate metričkog tenzora se mogu izraziti pomoću Kronekerovog simbola

$$g_{ij} = \delta_{ij}.$$

Takav sistem koordinata je isključivo Dekartov pravougli sistem. Međutim, za jedinične vektore u pravcima osnovnih vektora i u slučaju ortogonalnih generalisanih koordinata uvek važi

$$\mathbf{t}_i \cdot \mathbf{t}_j = \delta_{ij}.$$

Metričkom tenzoru sa koordinatama g_{ij} uvek može da se pridruži recipročni tenzor, čije ćemo koordinate obeležiti g^{ij} , pod uslovom, naravno, da je determinanta g obrazovana od koordinata g_{ij} ,

$$g = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix}$$

za sve tačke prostora različite od nule što je uvek ispunjeno kad su veze između koordinata x, y, z i koordinata q^1, q^2, q^3 obostrano jednoznačne. Ako se sa G^{ij} označe kofaktori determinante g koji odgovaraju elementima g_{ij} , npr.

$$G^{11} = \begin{vmatrix} g_{22} & g_{23} \\ g_{32} & g_{33} \end{vmatrix}, \quad G^{12} = - \begin{vmatrix} g_{12} & g_{13} \\ g_{32} & g_{33} \end{vmatrix}, \quad G^{23} = - \begin{vmatrix} g_{11} & g_{13} \\ g_{21} & g_{23} \end{vmatrix}, \dots,$$

onda je po definiciji

$$(11) \quad g^{ij} = \frac{G^{ij}}{g}.$$

Koristeći pravilo za razvijanje determinante po elementima jedne vrste ili kolone, prema kome je

$$g = \sum_{i=1}^3 g_{1i} G^{i1} = \sum_{i=1}^3 g_{2i} G^{i2} = \sum_{i=1}^3 g_{3i} G^{i3} = \sum_{i=1}^3 g_{i1} G^{1i} = \sum_{i=1}^3 g_{i2} G^{2i} = \sum_{i=1}^3 g_{i3} G^{3i},$$

$$\sum_{i=1}^3 g_{1i} G^{i2} = \sum_{i=1}^3 g_{1i} G^{i3} = \dots = \sum_{i=1}^3 g_{3i} G^{i2} = \dots = 0,$$

dobivmo

$$(12) \quad \sum_{j=1}^3 g_{ij} g^{jk} = \sum_{j=1}^3 g_{ij} \frac{G^{jk}}{g} = \delta_i^k.$$

Za koeficijente g_{ij} metričke forme se kaže da predstavljaju *kovarijantni* metrički tenzor, dok koeficijenti g^{ij} predstavljaju *kontravarijantni* metrički tenzor.

Osnovni vektori \mathbf{g}_i predstavljaju *kovarijantnu vektorsku bazu* (osnovu) za generalisane koordinate q^i . Vektori definisani obrascem

$$(13) \quad \mathbf{g}^i = \sum_{j=1}^3 g^{ij} \mathbf{g}_j$$

obrazuju *kontravarijantnu bazu* za isti sistem koordinata.

Iz izraza (10), (12) i (13) neposredno proističe

$$(14) \quad \mathbf{g}^i \cdot \mathbf{g}_k = \sum_{j=1}^3 g^{ij} \mathbf{g}_j \cdot \mathbf{g}_k = \sum_{j=1}^3 g^{ij} g_{jk} = \delta_k^i,$$

pa se odmah vidi da je

$$(15) \quad \mathbf{g}^i \cdot \mathbf{g}^k = \sum_{j=1}^3 g^{ij} \mathbf{g}_j \cdot \mathbf{g}^k = g^{ik}.$$

Ovaj je izraz potpuno analogan izrazu (10) u kome je kovarijantni metrički tenzor predstavljen kao skalarni proizvod dva vektora kovarijantne osnove. Osnovni vektori \mathbf{g}_i mogu se definisati pomoću kontravarijantnog metričkog tenzora g^{ij} na sličan način kao što su obrascem (13) definisani vektori \mathbf{g}^i , tj.

$$(16) \quad \mathbf{g}_i = \sum_{j=1}^3 g_{ij} \mathbf{g}^j.$$

I zaista s obzirom na (13) biće

$$\sum_{j=1}^3 g_{ij} \mathbf{g}^j = \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 g_{ij} g^{jk} \mathbf{g}_k = \sum_{k=1}^3 \delta_i^k \mathbf{g}_k = \mathbf{g}_i.$$

Kad se operiše sa generalisanim koordinatama, kovarijantnim i kontravarijantnim vektorskim bazama i metričkim tenzorom često se koristi tzv. *Ajnštajnova konvencija za sabiranje po ponovljenom indeksu*. Naime, kad se u nekom izrazu jedan indeks pojavljuje dva puta i to jednom kao gornji i jednom kao donji, smatra se da se po tom indeksu vrši sabiranje. Kod nas ovde svi indeksi uzimaju vrednosti 1, 2, 3, pa gde se god pojavljuju isti indeksi dva puta u jednom izrazu podrazumeva se u smislu ove konvencije sabiranje iako nije napisan znak sabiranja. Na primer

$$\sum_{j=1}^3 g^{ij} \mathbf{g}_j \equiv g^{ij} \mathbf{g}_j = g^{i1} \mathbf{g}_1 + g^{i2} \mathbf{g}_2 + g^{i3} \mathbf{g}_3,$$

ili

$$\sum_{j=1}^3 g^{ij} g_{jk} \equiv g^{ij} g_{jk} = g^{i1} g_{1k} + g^{i2} g_{2k} + g^{i3} g_{3k}$$

ili

$$\sum_{j=1}^3 \delta_i^j \equiv \delta_i^i = \delta_1^1 + \delta_2^2 + \delta_3^3 = 3, \text{ itd.}$$

V e Ź b e

1. Odrediti metričku formu u cilindarskim koordinatama?

R e ŝ e n j e: Iz jednačina (1.1—6) se dobiva

$$dx = d\rho \cos \varphi - \rho \sin \varphi d\varphi, \quad dy = d\rho \sin \varphi + \rho \cos \varphi d\varphi, \quad dz = dz,$$

što posle izračunavanja kvadrata i sabiranja daje:

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2 + dz^2.$$

Koordinate metričnog tenzora su koeficijenti uz diferencijale generalisanih koordinata u metričkoj formi,

$$g_{\rho\rho} = 1, \quad g_{\varphi\varphi} = \rho^2, \quad g_{zz} = 1.$$

Kako je $g_{\rho\varphi} = g_{\varphi z} = g_{z\rho} = 0$, cilindarske koordinate su ortogonalne. Za određivanje kontravarijantnog metričkog tenzora koriste se obrasci (11). Stavljajući da je $\rho = q^1$, $\varphi = q^2$ i $z = q^3$ dobiva se:

$$g = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho^2; \quad G^{11} = \rho^2, \quad G^{22} = 1, \quad G^{33} = \rho^2; \quad G^{ij} = 0, \quad (i \neq j),$$

što na osnovu (11) daje

$$g^{\rho\rho} = 1, \quad g^{\varphi\varphi} = \frac{1}{\rho^2}, \quad g^{zz} = 1; \quad g^{ij} = 0, \quad (i \neq j).$$

2. Pokazati da je metrička forma u sfernim koordinatama

$$ds^2 = dr^2 + r^2 \cos^2 \vartheta d\varphi^2 + r^2 d\vartheta^2.$$

3. Odrediti kontravarijantne vektorske osnove za cilindarske i sferne koordinate.

Rešenje: Za cilindarske koordinate je

$$\mathbf{g}^\rho = \{\cos \varphi, \sin \varphi, 0\}; \quad \mathbf{g}^\varphi = \left\{ -\frac{1}{\rho} \sin \varphi, \frac{1}{\rho} \cos \varphi, 0 \right\}; \quad \mathbf{g}^z = \{0, 0, 1\}.$$

Za sferne koordinate je

$$\begin{aligned} \mathbf{g}^r &= \{\cos \vartheta \cos \varphi, \cos \vartheta \sin \varphi, \sin \vartheta\}, \\ \mathbf{g}^\vartheta &= \left\{ -\frac{1}{r} \sin \vartheta \cos \varphi, -\frac{1}{r} \sin \vartheta \sin \varphi, \frac{1}{r} \cos \vartheta \right\}, \\ \mathbf{g}^\varphi &= \left\{ -\frac{1}{r} \cos \vartheta \sin \varphi, \frac{1}{r} \cos \vartheta \cos \varphi, 0 \right\}. \end{aligned}$$

1.3. Vrste kretanja tačke

Kretanja tačke razlikujemo:

a) prema obliku putanje kao *pravolinijska* i *krivolinijska*; posebno *kružna*, *eliptična*, *helikoidna* (po zavojnoj liniji) itd. i

b) prema zakonu puta kao *jednolika*, kad je put

$$(1) \quad s = at + b$$

linearna funkcija vremena (a i b su konstante): *jednoliko promenljiva*, kad je put

$$(2) \quad s = at^2 + bt + c$$

kvadratna funkcija vremena (a , b i c su konstante); i najzad kao *opšte promenljiva*, kad

$$(3) \quad s = s(t)$$

nije ni linearna ni kvadratna funkcija vremena.

Kad se put ponavlja stalno posle jednakih vremenskih intervala, *perioda* T , tj. kada je zakon puta periodna funkcija vremena

$$(4) \quad s(t + T) = s(t + 2T) = \dots = s(t + nT) = s(t), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

kretanje se zove *periodno*.

Ako s raste kad i vreme t , kretanje je *direktno*, a ako s opada kad t raste kretanje je *retrogradno* (*povratno*).

Pravolinijsko kretanje tačke može se posmatrati u odnosu na samo jednu osu nekog Dekartovog sistema koordinata, koja se poklapa sa pravom po kojoj se kretanje vrši npr. osu Ox , i biće određeno zakonom puta

$$x = x(t).$$

Kretanje po nekoj putanji u ravni može se posmatrati u odnosu na neki ravanski sistem koordinata koji leži u ravni putanje, na primer sistem osa Oxy , i tada je kretanje tačke određeno potpuno dvema skalarnim jednačinama

$$x = x(t), \quad y = y(t).$$

1.3.1. Jednoliko kružno kretanje. Harmonijske oscilacije

Kao primer ravanskog kretanja uočimo jednoliko kretanje tačke po krugu prema zakonu puta

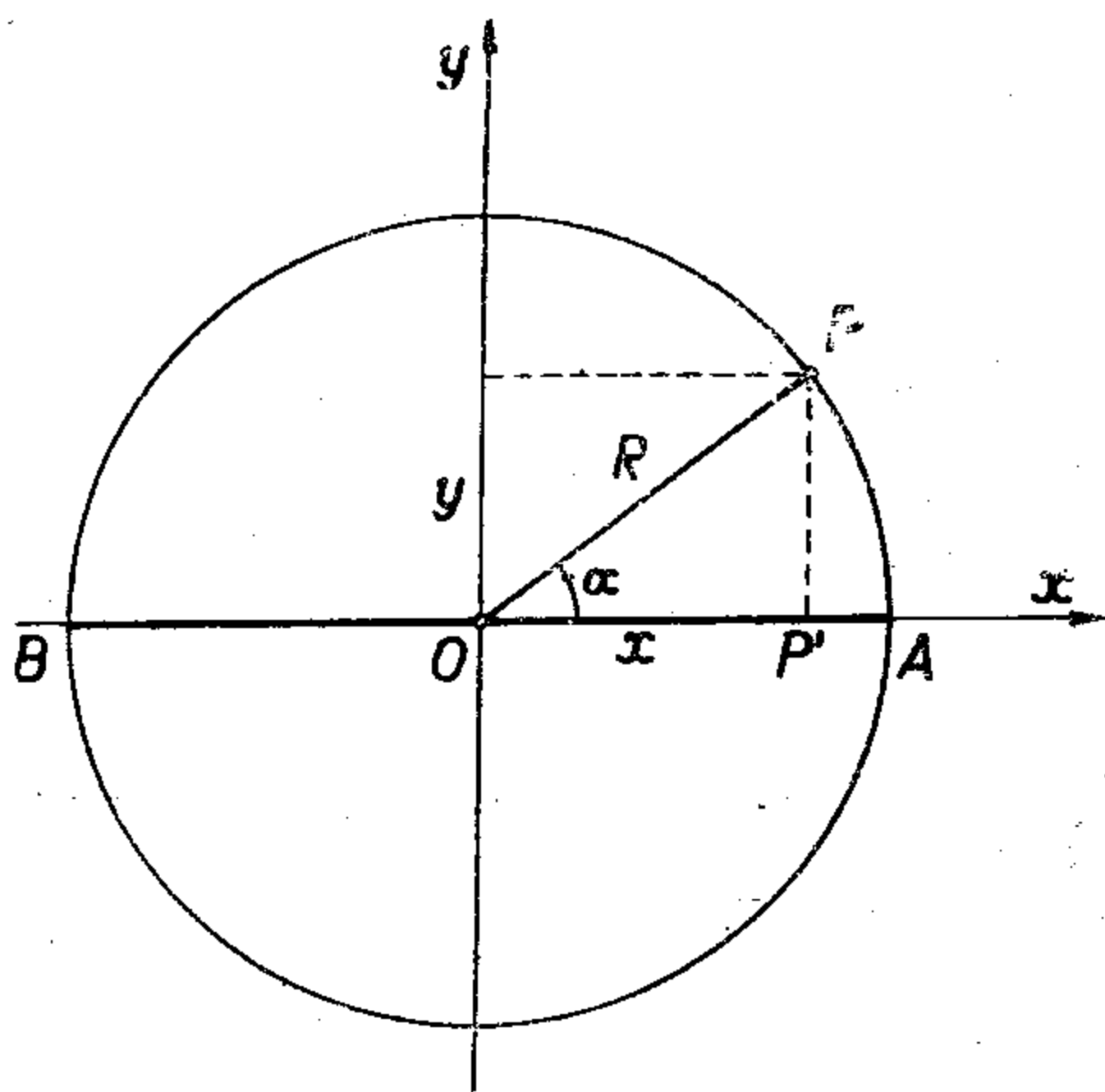
$$s = at, \quad (a = \text{const.}),$$

tzv. *jednoliko kružno kretanje tačke*. Kad se put $s = \widehat{AP}$ računa od tačke A (sl. 2) i kad α označava centralni ugao koji obrazuje poteg OP sa potegom OA , a R poluprečnik kruga, biće:

$$(1) \quad \alpha = \frac{s}{R} = \frac{a}{R} t = \omega t,$$

gde je

$$(2) \quad \frac{a}{R} = \omega = \text{const.}$$



Slika 2 -

Za ovo kretanje je jednačina (1) konačna jednačina kretanja, jer vrednost ugla α u svakom trenutku određuje položaj tačke, pod pretpostavkom da je poluprečnik poznat.

Od posebnog je interesa kretanje takvog karaktera kao što je kretanje ortogonalne projekcije P' pokretne tačke P po prečniku kru-

ga npr. BA . Udaljenje OP' tačke P' od centra kruga O naziva se *elongacija* i određeno je obrascem

$$(3) \quad x = R \cos \omega t.$$

Ovo kretanje je pravolinijsko, a ponavlja se potpuno posle perioda

$$(4) \quad T = \frac{2\pi}{\omega}$$

između tačaka $A(+R)$ i $B(-R)$. Ovakvo pravolinijsko kretanje je *harmonijska oscilacija*. T je *period oscilacije* (vreme trajanja jedne oscilacije), R je *amplituda*, a

$$(5) \quad f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

se zove *učestanost* (*frekvencija*) *oscilacije* (broj oscilacija u sekundi).

Veličina

$$(6) \quad \omega = 2\pi f$$

naziva se *kružna frekvencija* uočene oscilacije.

Period oscilacije se meri vremenom (u CGS sistemu-sekundama), amplituda dužinom (centimetrima) kao i elongacija, a frekvencija 1/sec. Jedinica za merenje frekvencije je 1 *herc* (Hertz) skraćeno 1 Hz. Frekvenciji od 1 Hz odgovara jedna oscilacija u jednoj sekundi.

U opštem slučaju harmonijske oscilacije su određene jednačinom

$$(7) \quad x = R \cos(\omega t + \alpha),$$

pri čemu je α tzv. početna faza oscilacija. Kad je početna faza $\alpha = -\frac{\pi}{2}$ biće

$$(8) \quad x = R \sin \omega t.$$

Prema tome, i tom jednačinom je određena harmonijska oscilacija kao i jednačinom (3) samo sa drugom početnom fazom. Kaže se da između harmonijskih oscilacija (3) i (8), koje su istih pravaca i jednakih amplituda i perioda, postoji fazna razlika $\frac{\pi}{2}$.

Najzad i jednačina

$$(9) \quad x = a \cos \omega t + b \sin \omega t$$

određuje harmonijsku oscilaciju

$$(10) \quad x = R \cos(\omega t + \beta),$$

gde je

$$(11) \quad R = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \operatorname{tg} \beta = -\frac{b}{a},$$

a

$$a = R \cos \beta, \quad b = -R \sin \beta.$$

Ovakva harmonijska oscilacija se može smatrati kao složena od dve harmonijske oscilacije istog pravca i jednakih perioda, ali različitih amplituda i sa faznom razlikom $\frac{\pi}{2}$.

Dve harmonijske oscilacije čiji su pravci ortogonalni, periodi jednaki, fazna razlika $\frac{\pi}{2}$ a amplitude različite, kao što su npr. harmonijske oscilacije

$$(12) \quad x = a \cos \omega t, \quad y = b \sin \omega t$$

određuju, što je lako utvrditi, kretanje tačke po elipsi

$$(13) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

koje se pretvara u kružno kretanje kad su amplitude jednake.

Slaganjem raznih harmonijskih oscilacija u istoj ravni dobivaju se poznate *Lisažuoove* (Lissajous) *figure*. U opštem slučaju te oscilacije imaju različite amplitude i frekvencije i između njih može postojati proizvoljna fazna razlika.

1.3.2. Amortizovane oscilacije

Uočimo sada kretanje tačke po logaritamskoj spirali (sl. 3)

$$(1) \quad \rho = R e^{-P\vartheta},$$

gde su ρ i ϑ polarne koordinate, a $R = \overline{OA}$ i p konstante. Neka se tačka P kreće

iz položaja A po logaritamskoj spirali tako da se njen poteg ρ obrće oko tačke O jednoliko u direktnom smeru tj. tako da bude

$$\vartheta = \omega t. \quad (\omega = \text{const.}).$$

U tom slučaju se posle unošenja ove vrednosti za ϑ u jednačinu (1) može napisati

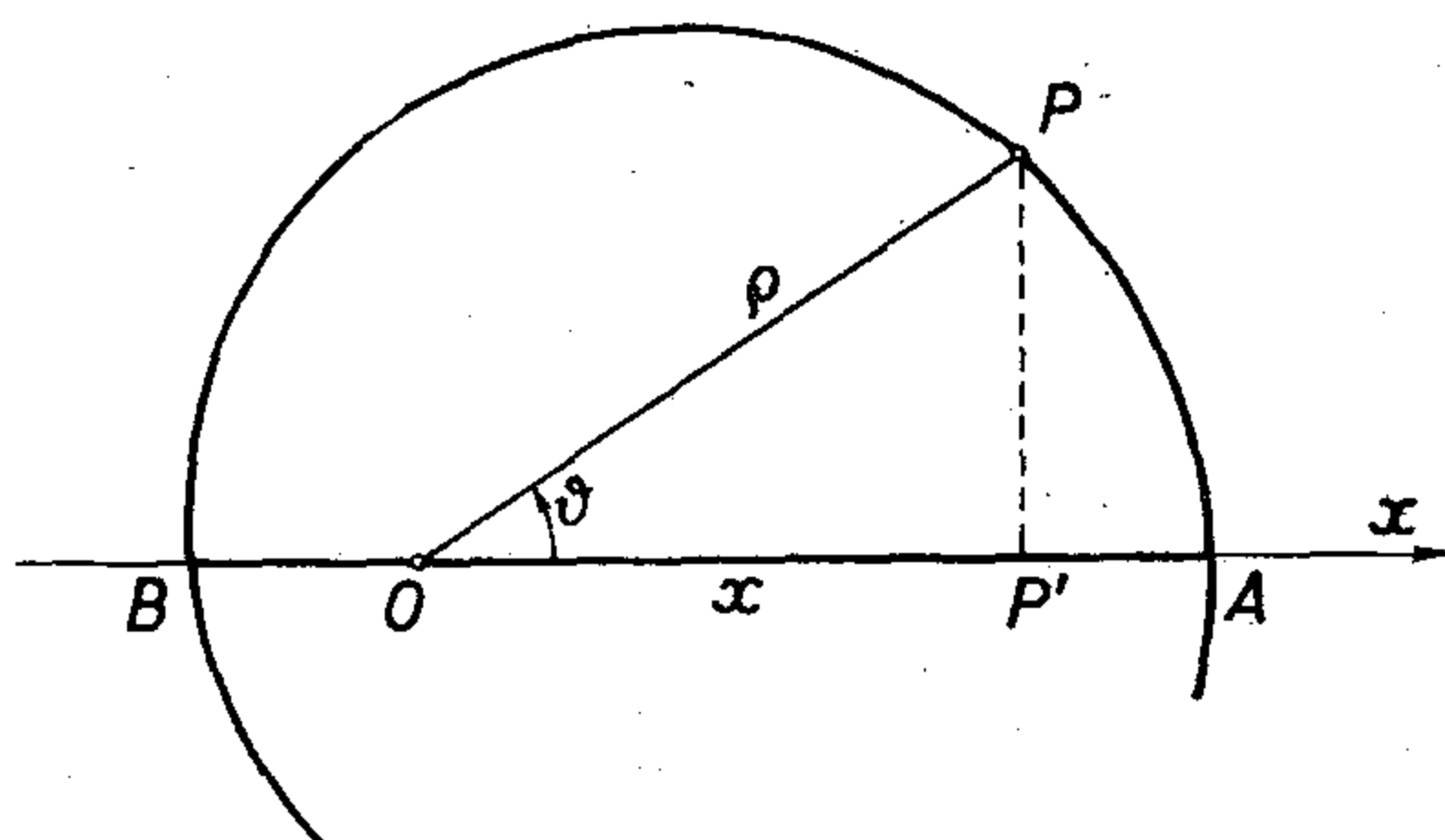
$$(2) \quad \rho = R e^{-k^2 t},$$

gde je stavljeno $k^2 = p^2 \omega$.

Kretanje projekcije P' pokretne tačke na x -osu, određeno jednačinom

$$(3) \quad x = R e^{-k^2 t} \cos \omega t$$

zove se tada *prigušena (amortizovana) harmonijska oscilacija*, jer se može smatrati kao harmonijska oscilacija čija amplituda opada po eksponencijalnom zakonu.



Slika 3

Amortizovane oscilacije nisu periodne — one su *kvaziperiodne* — jer se posle vremena $T = \frac{2\pi}{\omega}$ dobiva ista faza kretanja, ali kraća amplituda. Ako se stavi

$$(4) \quad \frac{k^2 \pi}{\omega} = \lambda,$$

tada je razmera dve uzastopne amplitude a_n i a_{n+1} u razmaku vremena $\frac{\pi}{\omega}$ određena izrazom

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = e^\lambda,$$

odakle se dobiva

$$(5) \quad \lambda = \ln a_n - \ln a_{n+1},$$

λ je *logaritamski dekrement* amortizovane oscilacije.

1.4. Brzina tačke. Hodograf brzine

Ako se u intervalu $\Delta t = t_2 - t_1$ vremena posmatra pomeranje $\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ (sl. 4) tačke iz položaja P u položaj Q , tada se

$$\frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \mathbf{v}_s$$

zove srednja brzina tačke u tom intervalu. Brzina tačke u datom trenutku vremena t je granična vrednost srednje brzine kad pri-
raštaj vremena Δt teži nuli, dakle izvod
vektora položaja po vremenu

$$(1) \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \dot{\mathbf{r}} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v},$$

gde tačka označava izvod po vremenu. Kako je $d\mathbf{r}$ vektor, a dt skalar, brzina je vektor. U skalarnom obliku, u odnosu na Dekartove pravougle koordinate, biće koordinate vektora brzine

$$(2) \quad v_x = \dot{x} = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \dot{y} = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \dot{z} = \frac{dz}{dt}.$$

S obzirom na (1) i (2) može se kvadrat intenziteta vektora brzine (kratko: kvadrat brzine) napisati

$$(3) \quad 2 \mathcal{B} = v^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} = \frac{ds^2}{dt^2},$$

odakle je

$$(4) \quad v = \frac{ds}{dt},$$

a to je *algebarska vrednost brzine*. Ona može biti pozitivna i negativna, prema tome da li luk krive linije trajektorije raste kad i vreme (*direktno* kretanje) ili opada kad vreme raste (*povratno, retrogradno* kretanje). Međutim, uvek je

$$|\mathbf{v}| = |v|.$$

Diferencijaljenjem vektora položaja po vremenu posredno preko luka trajektorije dobiće se

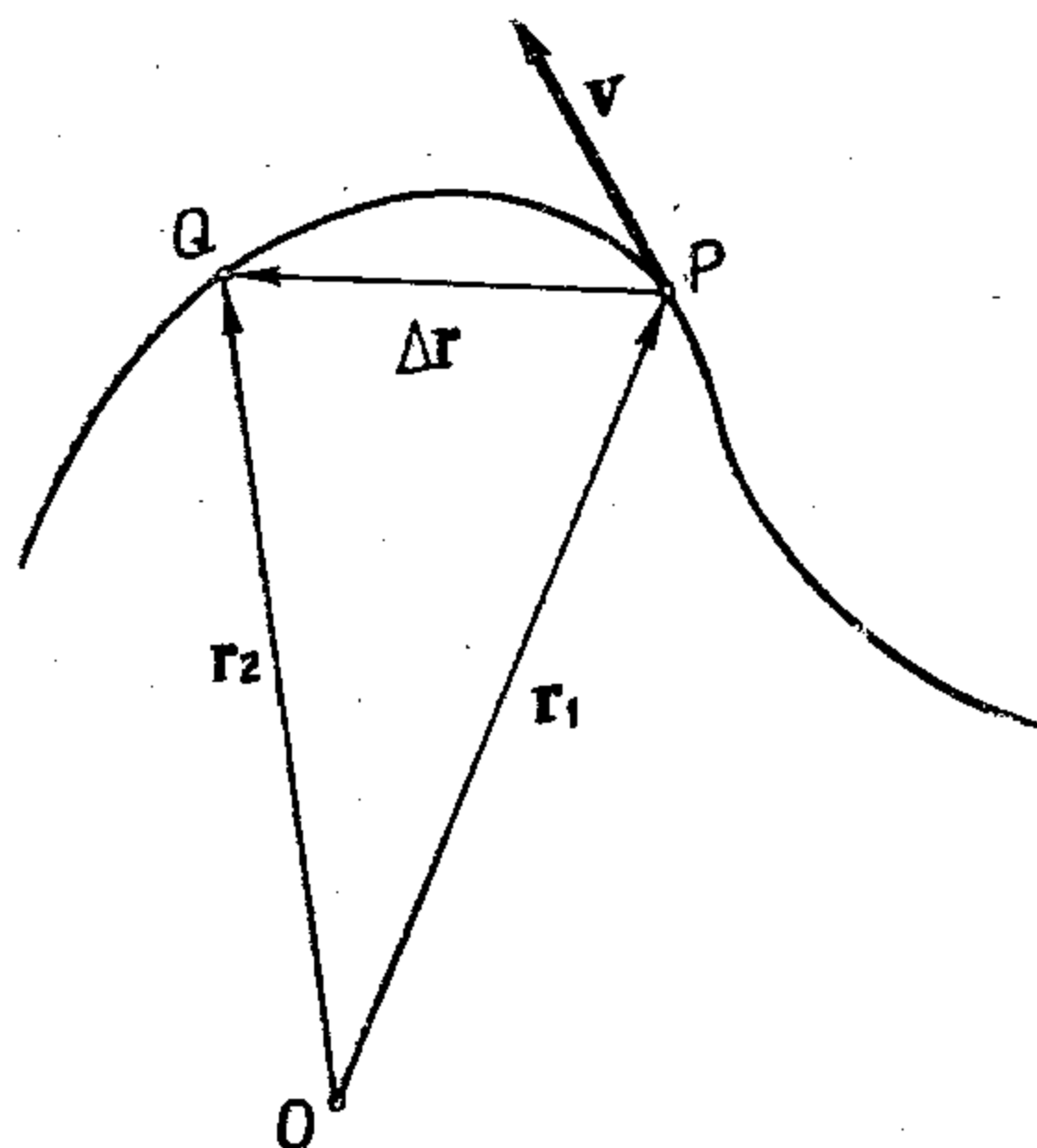
$$(5) \quad \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \frac{ds}{dt} = v \frac{d\mathbf{r}}{ds}.$$

Kako je

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \mathbf{t}$$

jedinični vektor tangente na trajektoru u datoj tački uvek orijentisan u smeru u kome luk s krive raste, a v je algebarska vrednost brzine, koja u sebi sadrži intenzitet i smer brzine, to je

$$(6) \quad \mathbf{v} = vt$$



Slika 4

1.4.1. Projekcije brzine na ose generalisanih koordinata

Kad je položaj tačke određen u odnosu na neki sistem generalisanih koordinata, za brzinu se može napisati

$$(1) \quad \mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^1} \dot{q}^1 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^2} \dot{q}^2 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^3} \dot{q}^3 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^i} \dot{q}^i.$$

Međutim, prema (1.1—11) parcijalni izvodi vektora položaja po generalisanim koordinatama određuju osnovne vektore za uočeni sistem koordinata pa je

$$(2) \quad \mathbf{v} = \mathbf{g}_i \dot{q}^i = \sum_{i=1}^3 A_i \dot{q}^i \mathbf{t}_i.$$

Skalarnim množenjem vektora brzine jediničnim vektorima u pravcima osnovnih vektora dobivaju se *projekcije brzine na ose generalisanih koordinata*,

$$(3) \quad v_{(i)} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{t}_i \quad (i = 1, 2, 3).$$

Kako je $\mathbf{t}_i = \mathbf{g}_i / A_i$ za projekcije brzina se može prema (1.2.1—10) napisati

$$(4) \quad v_{(i)} = \frac{1}{A_i} g_{ij} \dot{q}^j.$$

Prema definiciji kvadrata brzine u (1.4—3), a s obzirom na obrazac (1), za kvadrat brzine u generalisanim koordinatama može se napisati

$$(5) \quad 2\mathcal{B} = \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j \dot{q}^i \dot{q}^j = g_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j.$$

Parcijalnim diferenciranjem po izvodima generalisanih koordinata po vremenu dobiva se

$$(6) \quad \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial \dot{q}^i} = g_{ij} \dot{q}^j,$$

a upoređenjem ovog izraza sa (4) dobiva se za projekcije brzine na ose generalisanih koordinata

$$(7) \quad v_{(i)} = \frac{1}{A_i} \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial \dot{q}^i}.$$

Za razliku od projekcija brzine $v_{(i)}$, izvodi \dot{q}^i nazivju se *generalisane brzine*. Generalisane brzine u opštem slučaju nemaju dimenziju brzine.

Ovde treba napomenuti da projekcije $v_{(i)}$ brzine na ose generalisanih koordinata nisu komponente brzine u odnosnim pravcima. *Komponente brzine u pravcima osa generalisanih koordinata* su vektori

$$A_i \dot{q}^i \mathbf{t}_i = \dot{q}^i \mathbf{g}_i.$$

Pored uvedenih oznaka, za koeficijente u izrazu za kvadrat brzine, odnosno kvadrat elementa luka, vrlo se često koriste i oznake

$$(8) \quad A_1^2 = g_{11}, \quad A_2^2 = g_{22}, \quad A_3^2 = g_{33}; \quad B_1 = g_{23}, \quad B_2 = g_{31}, \quad B_3 = g_{12},$$

gde je

$$(9) \quad B_1 = A_2 A_3 (\mathbf{t}_2 \cdot \mathbf{t}_3), \quad B_2 = A_3 A_1 (\mathbf{t}_3 \cdot \mathbf{t}_1), \quad B_3 = A_1 A_2 (\mathbf{t}_1 \cdot \mathbf{t}_2).$$

Uslov da je sistem generalisanih koordinata ortogonalan glasi tada

$$(10) \quad B_1 = B_2 = B_3 = 0.$$

V e ž b e

1. Naći projekcije brzine na ose sfernih koordinata.

O d g o v o r: Kvadrat elementa luka u sfernim koordinatama ima oblik

$$ds^2 = dr^2 + r^2 \cos^2 \vartheta d\varphi^2 + r^2 d\vartheta^2$$

pa je kvadrat brzine

$$2B = v^2 = \dot{r}^2 + r^2 \cos^2 \vartheta \dot{\varphi}^2 + r^2 \dot{\vartheta}^2.$$

U (1.2.1 — primer 3) navedeni su osnovni vektori za sferne koordinate. Intenziteti tih vektora su

$$A_1 = A_r = 1, \quad A_2 = A_\vartheta = r, \quad A_3 = A_\varphi = r \cos \vartheta.$$

Prema obrascu (7) biće projekcije brzine na ose sfernih koordinata

$$v_{(1)} = v_{(r)} = \dot{r}, \quad v_{(2)} = v_{(\vartheta)} = r \dot{\vartheta}, \quad v_{(3)} = v_{(\varphi)} = r \cos \vartheta \dot{\varphi}.$$

2. Dokazati da su projekcije brzine na ose cilindarskih koordinata

$$v_{(1)} = v_{(\rho)} = \dot{\rho}, \quad v_{(2)} = v_{(\varphi)} = \rho \dot{\varphi}, \quad v_{(3)} = v_{(z)} = \dot{z}.$$

1.4.1.1. Krivolinijske koordinate brzine

Pored projekcija brzine na ose generalisanih koordinata, u opštem slučaju mogu se definisati i dve vrste *krivolinijskih (generalisanih) koordinata brzine*. Prema (1.4.1 — 2) i definiciji kovarijantnih i kontravarijantnih vektorskih baza za generalisane koordinate, za brzinu se mogu napisati naredni vektorski izrazi

$$(1) \quad \mathbf{v} = \dot{q}^i \mathbf{g}_i = \dot{q}^i g_{ij} \mathbf{g}^j.$$

Generalisane brzine

$$(2) \quad v^i = \dot{q}^i$$

predstavljaju *kontravarijantne koordinate brzine* za sistem koordinata q^i , a

$$(3) \quad v_j = \dot{q}^i g_{ij}$$

su *kovarijantne koordinate brzine*. Upoređenjem (2) i (3) vidi se da između ovih dveju vrsta koordinata brzine postoje veze

$$(4) \quad v_i = g_{ij} v^j,$$

odnosno

$$(5) \quad v^i = g^{ij} v_j.$$

Projekcije brzine na ose generalisanih koordinata su, prema ovome, s obzirom na (1.4.1 — 6 i 7) proporcionalne kovarijantnim koordinatama brzine,

$$(6) \quad v_{(i)} = \frac{v_i}{A_i},$$

a zovu se i *fizičke koordinate brzine*, jer imaju uvek dimenziju brzine.

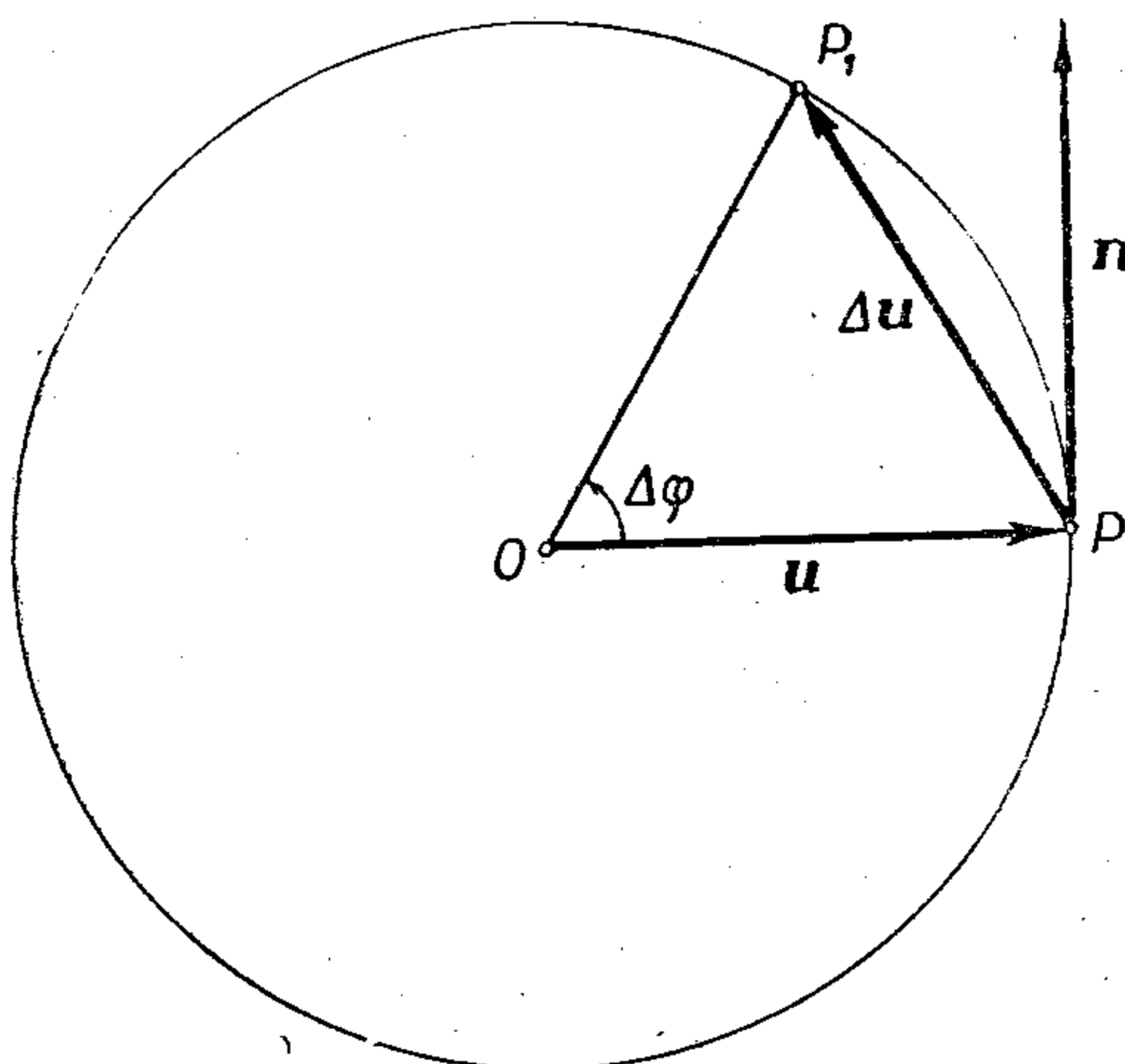
U slučaju Dekartovih pravougljih koordinata, i samo u tom slučaju, projekcije brzina na ose koordinata, kovarijantne i kontravarijantne koordinate brzine se poklapaju i ove razlike iščezavaju.

1.4.2. Radijalna i transverzalna brzina tačke

Ako se sa \mathbf{u} obeleži jedinični vektor vektora položaja \mathbf{r} neke tačke koja se kreće u ravni, biće

$$(1) \quad \mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d(\rho\mathbf{u})}{dt} = \dot{\rho}\mathbf{u} + \rho\dot{\mathbf{u}}$$

pri čemu je intenzitet vektora položaja $|\mathbf{r}| = \rho$ — polarna koordinata pokretne tačke. Kako je



Slika 6

$$(2) \quad \dot{\mathbf{u}} = \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{d\mathbf{u}}{d\varphi} \dot{\varphi} = \dot{\varphi} \mathbf{n},$$

gde je φ polarni ugao pokretne tačke, $\left| \frac{d\mathbf{u}}{d\varphi} \right| = 1$ i $\mathbf{n} \perp \mathbf{u}$, dobićemo za vektor brzine

$$(3) \quad \mathbf{v} = \dot{\rho}\mathbf{u} + \rho\dot{\varphi}\mathbf{n}$$

a za kvadrat brzine

$$(4) \quad v^2 = \dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2.$$

Brzina u pravcu potega

$$(5) \quad \dot{\rho} = v_\rho$$

zove se *radijalna (uzdužna) brzina* tačke, a brzina u pravcu normalnom na poteg

$$(6) \quad \rho \dot{\varphi} = v_{\varphi}$$

je *transverzalna (poprečna, azimutna) brzina tačke*.

Do obrasca (2) za brzinu skretanja dolazi se na naredni način. Sa slike (6) se odmah vidi da je $\widehat{PP_1} = \Delta s = 1 \cdot \Delta \varphi$ i da će za male $\Delta \varphi$ biti $|\Delta \mathbf{u}| \approx \Delta \varphi C |\mathbf{u}| = 1$. Prema tome je

$$\dot{\mathbf{u}} = \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{u}}{\Delta t} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{u}}{\Delta s} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{u}}{\Delta s} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = \dot{\varphi} \frac{d\mathbf{u}}{ds} = \dot{\varphi} \mathbf{n},$$

jer je izvod vektora \mathbf{u} po luku s njegovog kružnog hodografa jedinični vektor \mathbf{n} tangente kruga — normalne na potegu \mathbf{u} .

$\dot{\mathbf{u}}$ je *brzina skretanja potega* (brzina vrha jediničnog vektora potega).

1.5. Uopštenje pojma brzine

Pojam brzine nije vezan isključivo za brzinu kretanja, već može da se proširi na bilo koju veličinu (ili pojavu) koja se menja u toku vremena. Neka je Φ neka takva veličina; njen izvod po vremenu $\dot{\Phi}$ naziva se *brzina promene veličine Φ* .

Npr. obrtanjem vektora položaja neke tačke pri kretanju te tačke u ravni, menja se ugao φ koji vektor položaja obrazuje sa svojim početnim položajem i predstavlja neku funkciju vremena

$$(1) \quad \varphi = \varphi(t).$$

Prvi izvod ove funkcije (ugla) po vremenu, tj.

$$(2) \quad \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi} = \omega$$

zove se *ugaona brzina*. Ustvari ovde se radi o brzini promene ugla u toku vremena i dimenzija ove brzine je

$$(3) \quad [\omega] = T^{-1}.$$

Kad je φ linearna funkcija vremena $\varphi = \alpha t + \beta$, gde su α i β konstante, obrtanje uočenog vektora je *jednoliko* — ugaona brzina je stalna.

U praksi se često, u slučaju jednolikog obrtanja, ugaona brzina određuje pomoću broja n obrtaja u minuti, po obrascu

$$(4) \quad \omega = \frac{\pi n}{30} \approx 0,10472 n$$

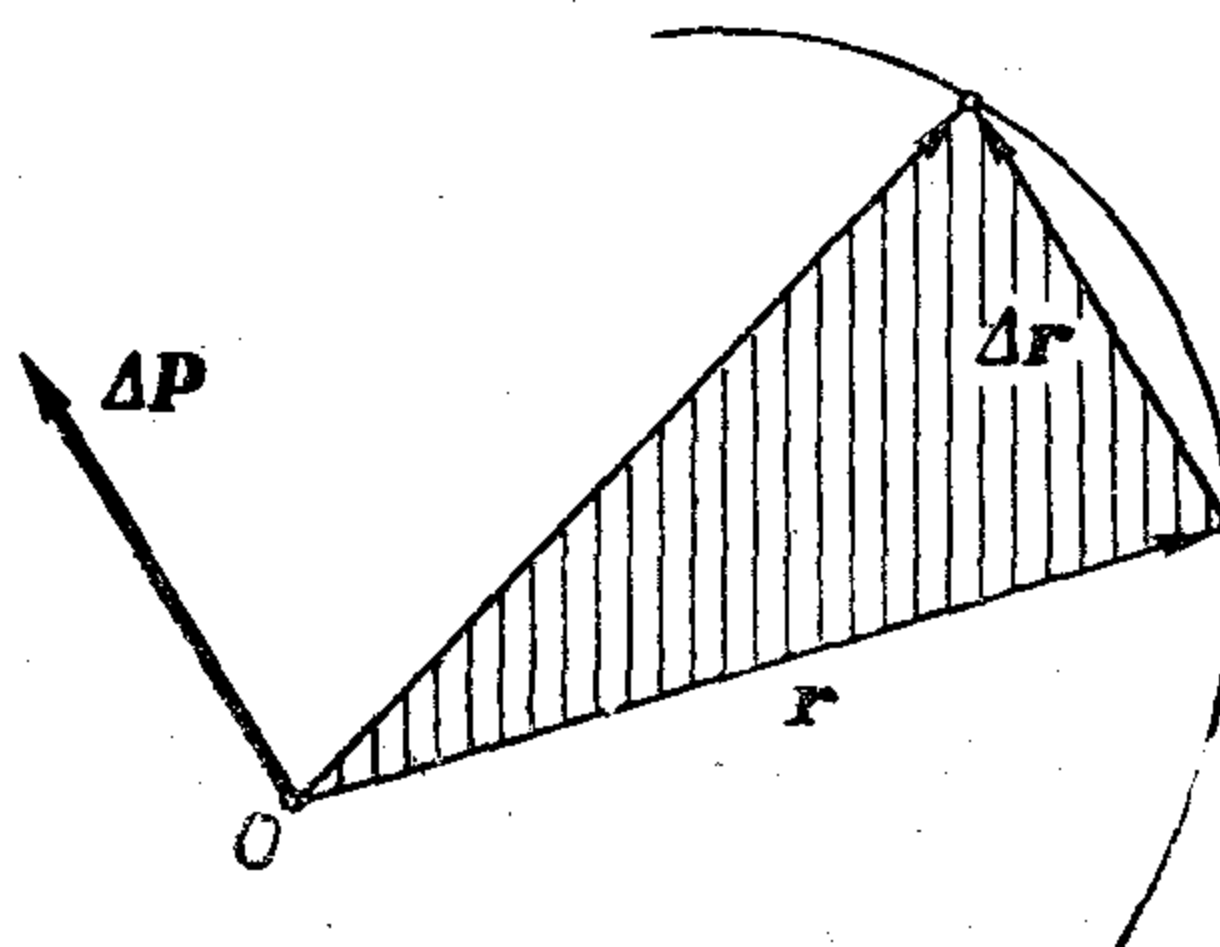
a vreme T obrtanja (vreme obrtaja) obrascem

$$(5) \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{60}{n}.$$

U slučaju nejednolikog kružnog kretanja obrascem (4) određuje se samo srednja ugaona brzina.

Kad se posmatra tačka pri kretanju po ma kakvoj trajektoriji, tada je očigledno (sl. 7) sektor — element površine koju opisuje vektor položaja \mathbf{r} u intervalu Δt — određen, kao vektor po veličini — brojem dužinskih jedinica izabranih u određenoj razmeri prema površinskim jedinicama koje mere veličinu uočene površine, npr. $\mu_s = [\text{cm}^2/\text{cm}]$, po pravcu — normalnom na ravan ili približnu ravan površinskog elementa, a po smeru — da orijentacija konture elementa bude u smeru suprotnom kretanju kazaljke na časovniku, izrazom

$$\Delta \mathbf{P} = \frac{1}{2} (\mathbf{r} \times \Delta \mathbf{r}).$$



Slika 7

Deobom ove jednakosti sa Δt i određivanjem granične vrednosti sektorske površine po vremenu dobiva se

$$(6) \quad \mathbf{S} = \dot{\mathbf{P}} = \frac{1}{2} (\mathbf{r} \times \mathbf{v})$$

gde je \mathbf{S} sektorska brzina uočene tačke. Dimenzija ove uopštene brzine koja je vektorskog karaktera, iznosi

$$(7) \quad [\mathbf{S}] = L^2 T^{-1}$$

i odnosi se na brzinu promene površine sektora.

U odnosu na Dekartove pravouglo koordinatama sektorska brzina ima koordinate

$$(8) \quad S_x = \frac{1}{2} (y\dot{z} - z\dot{y}), \quad S_y = \frac{1}{2} (z\dot{x} - x\dot{z}), \quad S_z = \frac{1}{2} (x\dot{y} - y\dot{x}).$$

Skalarna vrednost sektorske brzine u ravni je u polarnim koordinatama određena obrascem ($|\mathbf{r}| = \rho$)

$$(9) \quad S = \frac{1}{2} \rho^2 \dot{\varphi},$$

a u Dekartovim pravouglim koordinatama obrascem

$$(10) \quad S = \frac{1}{2} (x\dot{y} - y\dot{x}).$$

V e ž b e

1. Tačka se kreće po logaritamskoj spirali

$$\rho = ae^{\varphi}$$

po zakonu $\varphi = \omega t$, gde su a i ω pozitivne konstante. Odrediti njenu brzinu.

Kad je poznata trajektorija tačke koja se kreće u ravni i data je konačna jednačina kretanja u odnosu na jednu koordinatu, konačna jednačina kretanja u odnosu na drugu koordinatu može se neposredno izračunati. Zamenom $\varphi = \omega t$ u jednačini spirale dobiva se konačna jednačina kretanja u odnosu na polarni poteg,

$$\rho = ae^{\omega t}.$$

Generalisane brzine su

$$\dot{\rho} = a\omega e^{\omega t}, \quad \dot{\varphi} = \omega$$

a kad se ovo unese u izraz za kvadrat brzine u polarnim koordinatama biće

$$v^2 = \dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2 = 2a^2 \omega^2 e^{2\omega t}.$$

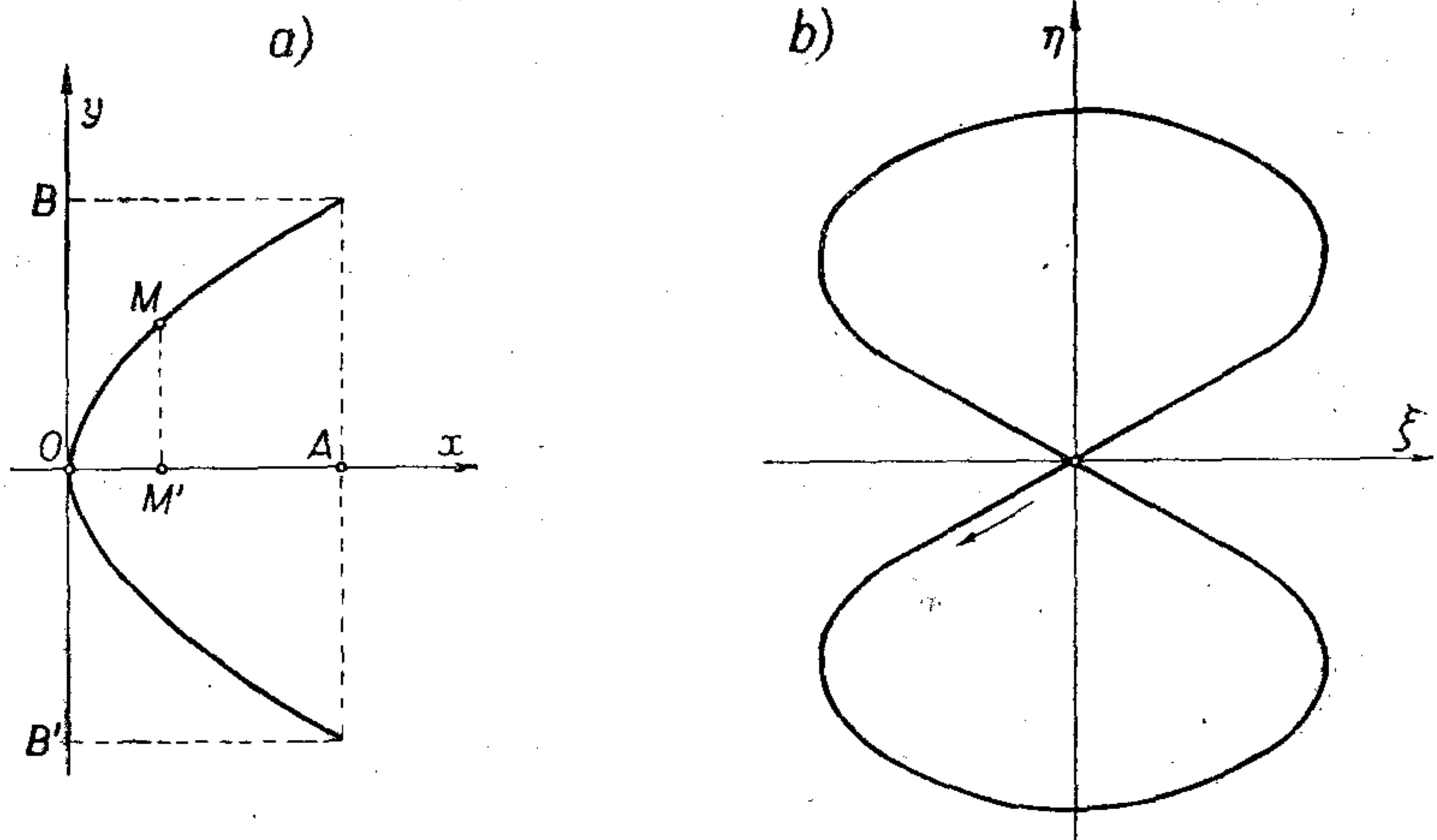
Oдавde se za intenzitet brzine ($v > 0$) dobiva

$$v = \sqrt{2} a\omega e^{\omega t}.$$

Pravac vektora brzine određen je uglom μ koji tangenta putanje obrazuje sa potegom. Kako je $\operatorname{tg} \mu = \frac{\rho d\varphi}{d\rho} = 1$ biće $\mu = \pi/4$ u svakoj tački putanje.

Brzina je orijentisana isto kao jedinični vektor tangente tj. u smeru u kome luk krive linije trajektorije raste.

2. Tačka M opisuje parabolu $y^2 = 2px$, tako da bude $y = b \cos \omega t$, gde su p i b konstante. Odrediti: a) osnovne osobine ovog kretanja, b) projekcije brzine na koordinatne ose, i c) hodograf brzine.



Slika 8

Projekcija pokretne tačke na y -osu (sl. 8, a) osciluje harmonijski između tačaka B i B' čije su ordinate b i $-b$. Period ove oscilacije je $T_y = 2\pi/\omega$. Projekcija M' na x -osu je

$$x = y^2/2p = \frac{b^2}{2p} \cos^2 \omega t = a(1 + \cos 2\omega t),$$

pri čemu je

$$a = b^2/4p.$$

Ova projekcija pokretne tačke osciluje harmonijski između tačaka O i A čije su apscise $x = 0$ i $x_A = 2a = b^2/2p$, a njen period oscilacije je $T_x = \pi/\omega = T_y/2$.

Diferencijaljenjem po vremenu dobiće se projekcije brzine na ose x i y .

$$\dot{x} = \xi = -2a\omega \sin 2\omega t, \quad \dot{y} = \eta = -b\omega \sin \omega t.$$

Eliminacijom vremena iz ove dve jednačine dobiva se jednačina četvrtog reda za hodograf, koji ima oblik osmice (sl. 8, b).

3. Odrediti putanju tačke P , ako njena brzina ima dve komponente \mathbf{v}_1 i \mathbf{v}_2 od kojih je jedna \mathbf{v}_1 stalno kolinearna sa nekim datim pravcem, a druga \mathbf{v}_2 stalno upravna na vektor položaja tačke P u odnosu na neki nepomični pol O . Vektor \mathbf{v}_1 je konstantan, a vektor \mathbf{v}_2 ima stalan intenzitet.

Vektor brzine tačke P je $\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{n}$, gde je \mathbf{i} jedinični vektor u stalnom pravcu, a \mathbf{n} jedinični vektor normale na vektor položaja $\mathbf{r} = \overrightarrow{OP}$. Ako je $\mathbf{r} = r\mathbf{r}_0$, za radijalnu brzinu može se pisati

$$v_r = \dot{r} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{r}_0 = v_1(\mathbf{i} \cdot \mathbf{r}_0) = v_1 \cos \vartheta,$$

gde je ϑ ugao koji obrazuju \mathbf{i} i \mathbf{r} ; dok je transverzalna brzina određena izrazom

$$v_t = r\dot{\vartheta} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = v_1(\mathbf{i} \cdot \mathbf{n}) + v_2 = v_2 + v_1 \cos\left(\frac{\pi}{2} + \vartheta\right) = v_2 - v_1 \sin \vartheta.$$

Ako se uzme u obzir da je poteg r posredna funkcija vremena preko ugla ϑ i ako se iz izraza za radijalnu i transverzalnu brzinu eliminiše vreme, dobiva se diferencijalna jednačina kretanja u polarnim koordinatama

$$\frac{1}{r} \frac{dr}{d\vartheta} = \frac{v_1 \cos \vartheta}{v_2 - v_1 \sin \vartheta},$$

sa očiglednim integralom

$$r = \frac{c/v_2}{1 - (v_1/v_2) \sin \vartheta}.$$

Putanja je konusni presek čija

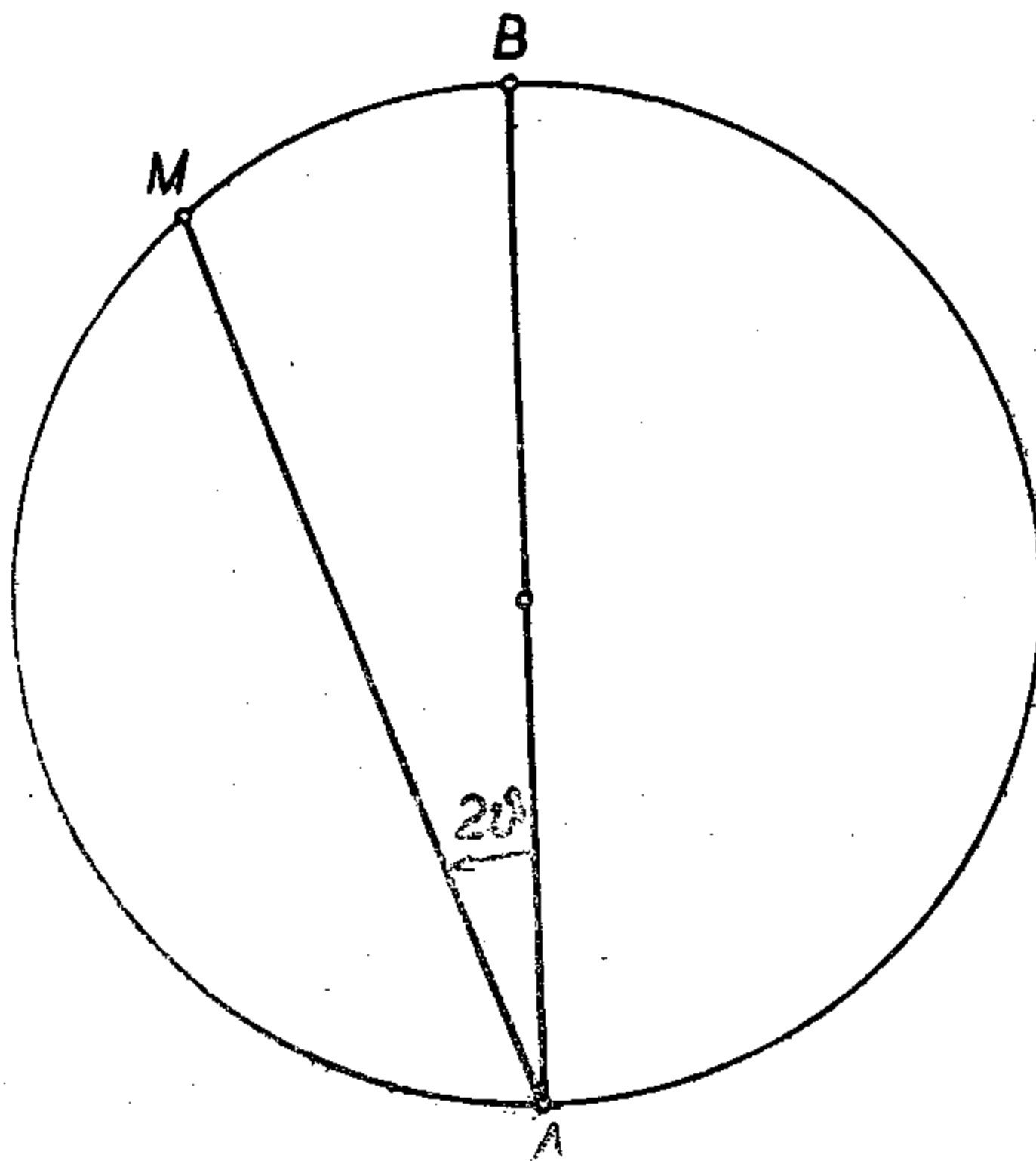
je ekscentričnost $\varepsilon = \frac{v_1}{v_2}$.

4. Tačka M se kreće po krugu prečnika $AB = 2a$ (sl. 9).

Kad se zna da poteg $\overline{AM} = \rho$ opisuje površine proporcionalne vremenu, odrediti algebarsku vrednost brzine tačke M u funkciji polarnog ugla $\varphi = \sphericalangle MAB = 2\vartheta$.

Pri ovom ravanskom kretanju sektorska brzina je konstantna, tj. s obzirom na (1.5 — 9) i uslov zadatka

$$a) \quad \frac{1}{2} \rho^2 \dot{\varphi} = \rho^2 \dot{\vartheta} = k.$$



Slika 9

Kako je jednačina ove kružne trajektorije u polarnim koordinatama

$$b) \quad \rho = 2a \cos 2\vartheta$$

može se za traženu algebarsku vrednost brzine, s obzirom na vrednosti radijalne (1.4 — 5) i transverzalne brzine (1.4 — 6), napisati

$$v^2 = \dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\vartheta}^2 = \dot{\rho}^2 + 4\rho^2 \dot{\vartheta}^2.$$

Odatle se na osnovu (a) i (b) izvodi

$$v^2 = \frac{k^2}{a^2 \cos^4 2\vartheta}, \text{ odn. } v = \frac{k}{a \cos^2 2\vartheta}$$

i znak je određen znakom od k tj. od $\dot{\vartheta}$.

5. Tačka se kreće po konusnom preseku

$$y^2 - 2mx - nx^2 = 0$$

brzinom konstantnog intenziteta c . Naći projekcije brzine na koordinatne ose.

O d g o v o r:

$$v_x = \pm \frac{c_y}{\sqrt{y^2 + (m+nx)^2}}, \quad v_y = v_x \frac{m+nx}{y}.$$

6. Prava p prolazi kroz žižu F nepokretne elipse čije su poluose a i b i obrće se konstantnom ugaonom brzinom ω . Pokazati da će brzina tačke M u kojoj ova prava seče elipsu biti data izrazom

$$v = \frac{\rho\omega}{b} \sqrt{\rho(2a - \rho)} \quad (\rho = \overline{FM}).$$

U p u t s t v o: Jednačinu elipse napisati u obliku

$$\rho = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi}$$

gde je $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$, $p = b^2/a$. Položaj tačke na elipsi je određen potegom ρ i polarnim uglom φ , tako da su ρ i φ polarne koordinate tačke M , sa polom u žiži F .

7. Odrediti trajektoriju tačke koja se kreće u ravni xOy brzinom čije su koordinate

$$\dot{x} = ky, \quad \dot{y} = kx. \quad (k = \text{const.})$$

U početnom trenutku tačka se nalazila u položaju čije su koordinate $(c, 0)$, gde je $c = \text{const}$. Odrediti vreme koje je potrebno da tačka dođe iz početnog položaja u ma koji položaj na trajektoriji.

O d g o v o r: Trajektorija je $x^2 - y^2 = c^2$, a vreme je dato obrascem

$$t = \frac{1}{k} \ln \frac{y + \sqrt{c^2 + y^2}}{c}.$$

8. Veštački satelit Zemlje leti po kružnoj putanji jednoliko brzinom $v = 7,62$ km/sec. Odrediti visinu na kojoj on leti iznad Zemlje, ako je njegovo vreme obilaženja $T = 1$ h 34 min 22 sec. (Poluprečnik Zemlje $R = 6\,370$ km.)

Ako se poluprečnik kružne putanje satelita obeleži sa r , a sa H njegova visina nad Zemljom, biće $H = r - R$.

Put koji pređe veštački satelit pri jednom obilasku oko Zemlje jednak je dužini kružne linije putanje poluprečnika r tj. $2\pi r$. Međutim, pri jednolikom kretanju pređeni put brzinom v za T sekunada biće vT .

Prema tome se iz

$$2\pi r = vT$$

dobiva

$$r = \frac{vT}{2\pi} = \frac{7,62 \text{ km/sec} \cdot 5662 \text{ sec}}{2\pi} \approx 6870 \text{ km},$$

pa će biti

$$H = r - R \approx 500 \text{ km}.$$

1.6. Ubrzanje. Ugaono ubrzanje

Brzina kao vektor u opštem slučaju nije ni stalnog intenziteta niti stalnog pravca, ona je vektorska funkcija vremena, tj. $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t)$. Izvod vektora brzine \mathbf{v} po vremenu, odnosno drugi izvod vektora položaja \mathbf{r} po vremenu, tj.

$$(1) \quad \mathbf{w} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{r}} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2},$$

određuje ubrzanje tačke u datom trenutku t . I ubrzanje tačke je vektor.

Kako je ubrzanje mera promene brzine u jedinici vremena, dimenzija ubrzanja je

$$(2) \quad [\mathbf{w}] = [\mathbf{v}/T] = LT^{-2}.$$

U Dekartovim pravouglim koordinatama biće ubrzanje tačke određeno izrazom

$$\mathbf{w} = \ddot{x} \mathbf{i} + \ddot{y} \mathbf{j} + \ddot{z} \mathbf{k}$$

a Dekartove pravouglove koordinate ubrzanja su

$$(3) \quad w_x = \ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad w_y = \ddot{y} = \frac{d^2y}{dt^2}, \quad w_z = \ddot{z} = \frac{d^2z}{dt^2}.$$

Intenzitet ubrzanja je određen obrascem

$$(4) \quad |\mathbf{w}| = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}.$$

Pri kružnom kretanju tačke, ili uopšte pri obrtanju potega, promena ugaone brzine u jedinici vremena je određena izvodom ugaone brzine po vremenu

$$(5) \quad \frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega} = \varepsilon$$

i naziva se *ugaono ubrzanje*. Dimenzija ugaonog ubrzanja je

$$(6) \quad [\varepsilon] = T^{-2}.$$

Slično kao kod brzine definiše se *generalisano ubrzanje*, kad se ma koja veličina (skalarna ili vektorska), koja zavisi od vremena, dvaput diferencijali po vremenu.

1.6.1. Tangentno i normalno ubrzanje tačke

Diferenciranjem izraza (1.4 — 6) po vremenu dobiće se za ubrzanje izraz

$$\mathbf{w} = \dot{\mathbf{v}} = \dot{v}\mathbf{t} + v\dot{\mathbf{t}}.$$

Međutim, kako je \mathbf{t} jedinični vektor tangente trajektorije, biće njegov hodograf sferna kriva linija pa kad se uzme u obzir prvi *Freneov* (Frenet) obrazac (vidi: Anđelić — Teorija vektora, III izd. str. 205)

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds} = \frac{\mathbf{n}}{\rho},$$

gde je \mathbf{n} jedinični vektor glavne normale trajektorije, a ρ njen poluprečnik krivine, lako se izvodi

$$(1) \quad \dot{\mathbf{t}} = \frac{d\mathbf{t}}{dt} = \frac{d\mathbf{t}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{v}{\rho} \mathbf{n}.$$

Tako se najzad za vektor ubrzanja može napisati

$$(2) \quad \mathbf{w} = \frac{dv}{dt} \mathbf{t} + \frac{v^2}{\rho} \mathbf{n}.$$

Kako su vektori \mathbf{t} i \mathbf{n} uzajamno upravni, projekcija ubrzanja na pravac tangente na trajektoriju

$$(3) \quad w_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$$

određuje *tangentno ubrzanje*, dok projekcija ubrzanja na pravac glavne normale trajektorije

$$(4) \quad w_n = \frac{v^2}{\rho}$$

određuje *normalno ubrzanje*. Kako je vektor normalnog ubrzanja uvek usmeren ka centru krivine putanje ($w_n > 0$), ovo ubrzanje se zove i *centripetalno*.

Jednačina (2) pokazuje da vektor ubrzanja pokretne tačke uvek leži u oskulatornoj ravni krive linije trajektorije.

Kad je kretanje tačke jednoliko ($v = \text{const.}$), biće tangentno ubrzanje nula, ali je normalno ubrzanje različito od nule, ako je $v \neq 0$ i ako je putanja kriva linija. Samo u slučaju nepromenljivog kretanja i tangentno i normalno ubrzanje jednako je nuli — vektor ubrzanja je nula. Kod pravolinijskog kretanja nema normalnog ubrzanja.

U slučaju harmonijskih oscilacija biće ubrzanje određeno izrazom

$$(5) \quad \ddot{x} = -\omega^2 x.$$

Kad je kretanje jednoliko promenljivo (1.3 — 2) biće

$$(6) \quad w_t = 2a,$$

tj. tangentno ubrzanje (u pravcu putanje) konstantno. Kad su v i w_t istog znaka brzina po putanji raste, kretanje je *ubrzan* u pravom smislu reči, a kad su v i w_t različitog znaka brzina po putanji opada i za kretanje se kaže da je *usporeno*.

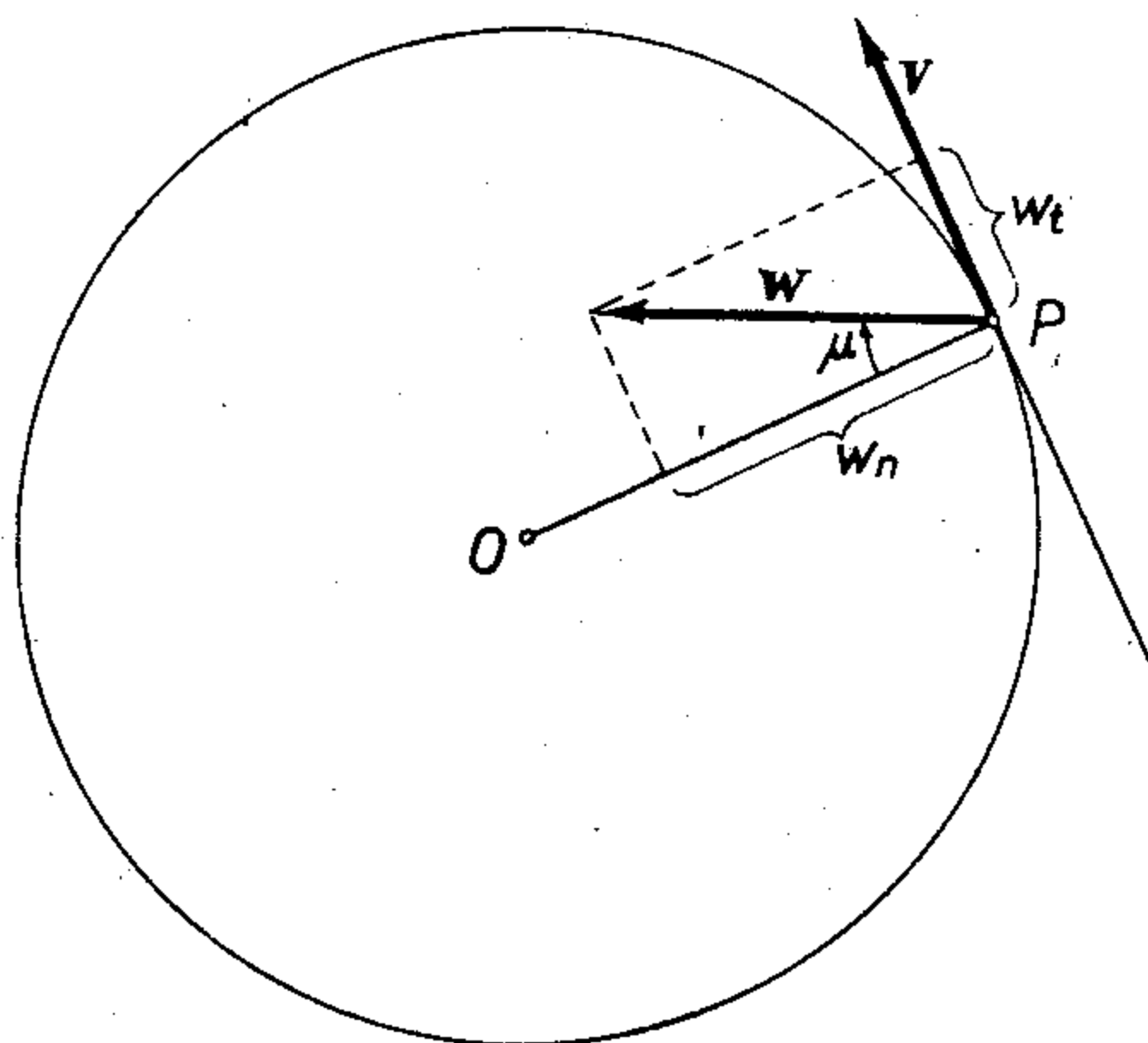
Pri kretanju tačke po krugu poluprečnika $R = \overline{OP}$ biće s obzirom na (1.4 — 8)

$$(7) \quad w_t = R\varepsilon, \quad w_n = R\omega^2 = v \cdot \omega$$

i

$$(8) \quad |w| = R\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2} \quad \text{i} \quad \operatorname{tg} \mu = \frac{|\varepsilon|}{\omega^2}$$

gde je μ ugao koji obrazuje vektor ubrzanja sa poluprečnikom kruga (sl. 10).



Slika 10

U Dekartovim pravouglim koordinatama izraz koji određuje tangентно ubrzanje (vidi 1.4 — 6) glasi

$$(9) \quad w_t = \mathbf{w} \cdot \mathbf{t} = \mathbf{w} \cdot \frac{\mathbf{v}}{v} = \frac{1}{v} (\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z}).$$

Za normalno ubrzanje dobiće se

$$(10) \quad w_n = \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{|v|} |\mathbf{w} \times \mathbf{v}| = \frac{1}{|v|} \sqrt{(\dot{y}\ddot{z} - \dot{y}\ddot{z})^2 + (\dot{z}\ddot{x} - \dot{z}\ddot{x})^2 + (\dot{x}\ddot{y} - \dot{x}\ddot{y})^2},$$

jer je

$$\mathbf{w} \cdot \mathbf{n} = w \cos(\mathbf{w}, \mathbf{n}) = w \sin(\mathbf{w}, \mathbf{t}) = |\mathbf{w} \times \mathbf{t}| = \frac{1}{|v|} |\mathbf{w} \times \mathbf{v}|.$$

1.6.2. Projekcije ubrzanja na ose krivolinijskih koordinata

Izraze za ortogonalne projekcije ubrzanja na ose krivolinijskih koordinata dobićemo najlakše na ovaj način. Parcijalnim diferencijaljenjem kvadrata brzine po generalisanim brzinama dobićemo

$$\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial q^i} = \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial q^i},$$

a pošto je $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^3 \dot{q}^i A_i \mathbf{t}_i$ biće

$$(1) \quad \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial \dot{q}^i} = \mathbf{v} \cdot A_i \mathbf{t}_i = \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^i}.$$

Kad se ova jednačina diferencijali po vremenu dobiće se

$$(2) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial \dot{q}^i} = \mathbf{w} \cdot A_i \mathbf{t}_i + \mathbf{v} \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^i}.$$

Kako je

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^i} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \dot{q}^i},$$

biće

$$\mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \dot{q}^i} = \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial q^i},$$

što zamenjeno u (2) dovodi do traženog izraza za projekcije ubrzanja na ose krivolinijskih koordinata

$$(3) \quad w_{(i)} = \mathbf{w} \cdot \mathbf{t}_i = \frac{1}{A_i} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial q^i} \right).$$

S obzirom na izraze za kvadrat brzine u cilindarskim i sfernim koordinatama (1.4.1 — vežbe 1. i 2.) dobiva se neposredno za projekciju ubrzanja:

1) na ose cilindarskog sistema koordinata ρ, φ, z

$$(4) \quad w_{(1)} = w_{(\rho)} = \ddot{\rho} - \rho \dot{\varphi}^2, \quad w_{(2)} = w_{(\varphi)} = \frac{1}{\rho} \frac{d}{dt} (\rho^2 \dot{\varphi}), \quad w_{(3)} = w_{(z)} = \ddot{z};$$

2) na ose sfernog sistema koordinata

$$w_{(1)} = w_{(r)} = \ddot{r} - r \cos^2 \varphi \dot{\vartheta}^2 - r \dot{\varphi}^2,$$

$$w_{(2)} = w_{(\vartheta)} = \frac{1}{r \cos \varphi} \frac{d}{dt} (r^2 \cos^2 \varphi \dot{\vartheta}),$$

$$w_{(3)} = w_{(\varphi)} = \frac{1}{r} \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\vartheta}) + r \sin \varphi \cos \varphi \dot{\vartheta}^2.$$

1.6.3. Krivolinijske koordinate ubrzanja

Pored projekcija ubrzanja na ose krivolinijskih koordinata, ubrzanje se u odnosu na krivolinijske koordinate može odrediti i pomoću drugih izraza. Svi ti izrazi nisu međusobno nezavisni i između njih, kao i između njih i projekcija ubrzanja na ose generalisanih koordinata postoje jednostavne veze.

Ako vektor brzine u odnosu na neki sistem generalisanih koordinata izrazimo (1.4.1 — 2), u obliku $\mathbf{v} = \dot{q}^j \mathbf{g}_j$, diferencijaljenjem brzine po vremenu dobićemo za ubrzanje

$$(1) \quad \mathbf{w} = \ddot{q}^j \mathbf{g}_j + \dot{\mathbf{g}}_j \dot{q}^j.$$

Osnovni vektori \mathbf{g}_j zavise od vremena samo posredno, preko generalisanih koordinata, pa je stoga

$$(2) \quad \dot{\mathbf{g}}_j = \frac{\partial \mathbf{g}_j}{\partial q^k} \dot{q}^k$$

i za ubrzanje se može napisati

$$(3) \quad \mathbf{w} = \ddot{q}^j \mathbf{g}_j + \frac{\partial \mathbf{g}_j}{\partial q^k} \dot{q}^j \dot{q}^k.$$

Skalarnim množenjem vektora ubrzanja osnovnim vektorima \mathbf{g}_i dobiće se

$$(4) \quad \mathbf{w} \cdot \mathbf{g}_i = g_{ij} \ddot{q}^j + \left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k} \cdot \mathbf{g}_i \right) \dot{q}^j \dot{q}^k.$$

Skalarni proizvod $\mathbf{g}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{g}_j}{\partial q^k}$ može se izraziti pomoću izvoda metričkog tenzora na jedan poseban način. Zbog simetrije indeksa j i k , tj. zbog

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k} = \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial q^j \partial q^k} = \frac{\partial g_{kj}}{\partial q^i},$$

može se napisati identičnost

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k} \cdot \mathbf{g}_i &\equiv \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k} \cdot \mathbf{g}_i + \frac{\partial g_{kj}}{\partial q^i} \cdot \mathbf{g}_i \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k} \cdot \mathbf{g}_i + \frac{\partial g_{kj}}{\partial q^i} \cdot \mathbf{g}_i + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k} \cdot \mathbf{g}_i - \frac{\partial g_{kj}}{\partial q^i} \cdot \mathbf{g}_j + \frac{\partial g_{ij}}{\partial q^j} \cdot \mathbf{g}_k - \frac{\partial g_{ij}}{\partial q^i} \cdot \mathbf{g}_k \right). \end{aligned}$$

Podobnim slaganjem po dva člana ovog izraza dobiće se

$$(5) \quad \frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k} \cdot \mathbf{g}_i \equiv \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial q^k} (g_{ij} \cdot g_j) + \frac{\partial}{\partial q^j} (g_{ki} \cdot g_i) - \frac{\partial}{\partial q^i} (g_j \cdot g_k) \right] \\ = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{ki}}{\partial q^j} + \frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial q^i} \right) \equiv [j k, i].$$

Simbol $[jk, i]$, koji obrazuju parcijalni izvodi koeficijenata metričke forme, definisan obrascem (5) naziva se *Kristofelov (Christoffel) simbol prve vrste*. Iz definicije se odmah vidi da je Kristofelov simbol prve vrste simetričan u odnosu na prva dva indeksa

$$(6) \quad [jk, i] = [kj, i].$$

Sad se izraz (4) može napisati u obliku

$$(7) \quad w_i = \mathbf{w} \cdot \mathbf{g}_i = g_{ij} \ddot{q}^j + [j k, i] \dot{q}^j \dot{q}^k. \quad (i=1, 2, 3)$$

Veličine w_i definisane ovim izrazom predstavljaju *kovarijantne koordinate ubrzanja*.

Kako su projekcije ubrzanja na ose generalisanih koordinata definisane sa $w_{(i)} = \mathbf{w} \cdot \mathbf{t}_i$, kovarijantne koordinate ubrzanja su, s obzirom na (1.1 - 14), proporcionalne projekcijama

$$(8) \quad w_i = A_i w_{(i)}.$$

Pomnožimo li izraze (7) kontravarijantnim metričkim tenzorom g^{il} i saberemo po i , dobićemo

$$(9) \quad \mathbf{w} \cdot \mathbf{g}^l = (\delta_j^l \dot{q}^j + [j k, i] g^{il} \dot{q}^j \dot{q}^k) = \ddot{q}^l + [j k, i] g^{il} \dot{q}^j \dot{q}^k,$$

jer su kontravarijantni osnovni vektori \mathbf{g}^l definisani izrazima

$$\mathbf{g}^l = g^{il} \mathbf{g}_i.$$

Veličine

$$(10) \quad \left\{ \begin{matrix} l \\ j k \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} l \\ k j \end{matrix} \right\} = [j k, i] g^{il}$$

predstavljaju *Kristofelove simbole druge vrste*. Koristeći te simbole možemo mesto (9) pisati

$$(11) \quad w^l = \mathbf{w} \cdot \mathbf{g}^l = \frac{dq^l}{dt} + \left\{ \begin{matrix} l \\ j k \end{matrix} \right\} \dot{q}^j \dot{q}^k,$$

gde w^l predstavljaju *kontravarijantne koordinate ubrzanja*.

Između kovarijantnih i kontravarijantnih koordinata ubrzanja mogu se s obzirom na (1.2.1 — 13 i 16) uspostaviti naredne veze pomoću koordinata metričkog (ko- i kontravarijantnog) tenzora.

$$(12) \quad w_i = \mathbf{w} \cdot \mathbf{g}_i = g_{ij} (\mathbf{w} \cdot \mathbf{g}^j) = g_{ij} w^j, \quad w^i = \mathbf{w} \cdot \mathbf{g}^i = g^{ij} (\mathbf{w} \cdot \mathbf{g}_j) = g^{ij} w_j.$$

Izraz za kovarijantne koordinate ubrzanja (7) može se nešto uprostiti. Stavimo da je

$$g_{ij} \ddot{q}^j = \frac{d}{dt} (g_{ij} \dot{q}^j) - \frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k} \dot{q}^j \dot{q}^k.$$

Kako je

$$-\frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k} + [j k, i] = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial q^i} - \frac{\partial g_{ki}}{\partial q^j} \right) = -[k i, j]$$

to se mesto (7) može pisati

$$(13) \quad w_i = \frac{d}{dt} (g_{ij} \dot{q}^j) - [k i, j] \dot{q}^j \dot{q}^k.$$

Međutim (vidi 1.4.1.1), $\dot{q}^l = v^l$ i $g_{ij} \dot{q}^j = v_i$ su krivolinijske, kovarijantne i kontravarijantne koordinate brzine, pa se za w_i i w^l može napisati

$$(14) \quad w_i = \frac{dv_i}{dt} - [k i, j] v^j v^k = \frac{dv_i}{dt} - \left\{ \begin{matrix} l \\ k i \end{matrix} \right\} v_l v^k,$$

$$(15) \quad w^l \equiv \frac{dv^l}{dt} + \left\{ \begin{matrix} l \\ j k \end{matrix} \right\} v^j v^k.$$

Izrazi

$$(16) \quad \frac{Dv_i}{Dt} \equiv \frac{dv_i}{dt} - \left\{ \begin{matrix} l \\ k i \end{matrix} \right\} v_l v^k;$$

$$\frac{Dv^i}{Dt} \equiv \frac{dv^i}{dt} + \left\{ \begin{matrix} i \\ j k \end{matrix} \right\} v^j v^k$$

predstavljaju apsolutne, Bjankijeve (Bianchi) izvode vektora v_i (kovarijantnih) i v^i (kontravarijantnih) po vremenu. Ova definicija apsolutnog izvoda po vremenu može da se primeni na bilo koji vektor čije su krivolinijske koordinate date.

S obzirom na ovakvu definiciju apsolutnih izvoda može se sad tvrditi da su u ma kom sistemu generalisanih koordinata kovarijantne koordinate ubrzanja jednake apsolutnim izvodima po vremenu kovarijantnih koordinata brzine,

$$(17) \quad w_i = \frac{Dv_i}{Dt},$$

kao i da su kontravarijantne koordinate ubrzanja jednake apsolutnim izvodima kontravarijantnih koordinata brzine po vremenu,

$$(18) \quad w^i = \frac{Dv^i}{Dt}.$$

Kovarijantne koordinate ubrzanja mogu se neposredno izraziti pomoću kvadrata brzine. Naime, projekcije ubrzanja $w_{(i)}$ na ose generalisanih koordinata date sa (1.6.2 — 3) pa je onda s obzirom na (8)

$$(19) \quad w_i = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial q^i}.$$

Dekartove pravougule koordinate ubrzanja su specijalan slučaj ovde izvedenih izraza. Za Dekartove pravougule koordinate biće

$$g_{ij} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i \neq j, \end{cases} \quad g^{ij} = \delta^{ij} = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

pa je

$$(20) \quad [ij, k] = 0 \quad \left\{ \begin{matrix} k \\ i j \end{matrix} \right\} = 0$$

i izrazi (14) i (15) svode se na

$$w^i = \frac{dv^i}{dt}, \quad w_i = \frac{dv_i}{dt},$$

pri čemu za Dekartove pravougle koordinate (i samo za njih) važi

$$\dot{q}^i = \dot{q}_i = v^i = v_i.$$

Drugi izvodi q^i generalisanih koordinata po vremenu su samo tzv. *generalisana ubrzanja*, ali se u opštem slučaju razlikuju od kovarijantnih i kontravarijantnih koordinata vektora ubrzanja.

1.6.4. Radijalno i transverzalno ubrzanje tačke

Ako se trajektorija pokretne tačke nalazi u ravni, diferencijaljenjem relacije (1.4.2–3), u kojoj je brzina predstavljena pomoću svoje radijalne i transverzalne komponente, po vremenu dobiće se

$$(1) \quad \mathbf{w} = (\ddot{\rho} - \rho \dot{\vartheta}^2) \mathbf{u} + (2 \dot{\rho} \dot{\vartheta} + \rho \ddot{\vartheta}) \mathbf{n},$$

jer je

$$\mathbf{n} = -\dot{\vartheta} \mathbf{u},$$

što nije teško potvrditi (vidi sl. 6).

Prema tome je *radijalno (uzdužno) ubrzanje* određeno izrazom

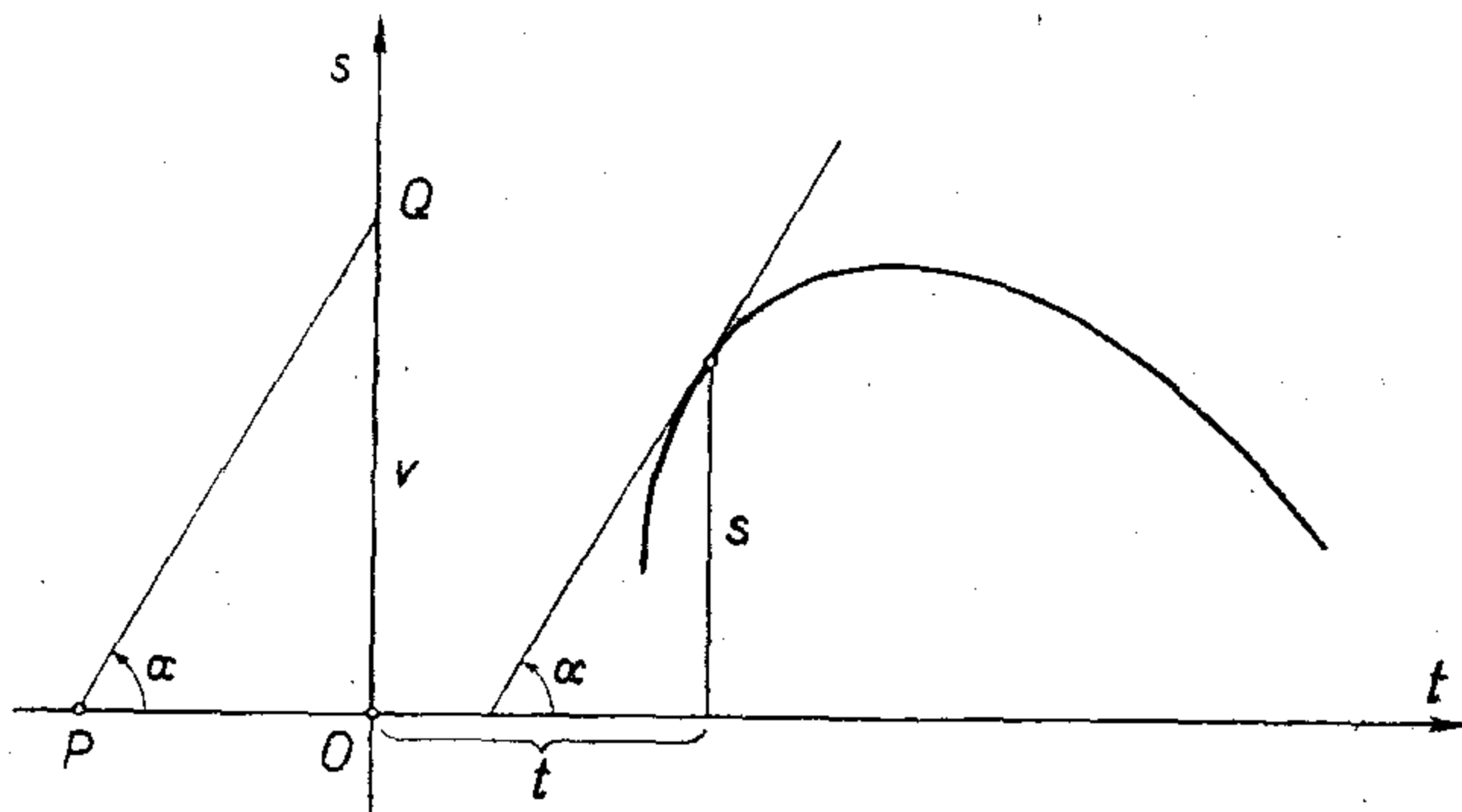
$$(2) \quad w_{\rho} = \ddot{\rho} - \rho \dot{\vartheta}^2$$

a *transverzalno (poprečno) ubrzanje* izrazom

$$(3) \quad w_{\vartheta} = 2 \dot{\rho} \dot{\vartheta} + \rho \ddot{\vartheta}.$$

1.7. Kinematički dijagrami

1. *Dijagram (grafik) put-vreme* (kratko: *dijagram puta*) je u opštem slučaju kriva linija, koja u Dekartovom pravouglom sistemu koordinata predstavlja u proizvoljnoj, ali određenoj, razmeri crtanja zakon puta $s = s(t)$ pokretne tačke. Pored



Slika 11

toga što određuje pređeni put kao ordinatu (sl. 11), ovaj dijagram pruža mogućnost da se odredi algebarska vrednost v brzine za svaki trenutak vremena t .

Ako su izabrane razmere za put $\mu_s = [\text{cm/mm}]$, tj. dužina od 1 mm na dijagramu predstavlja dužinu od 1 cm u stvarnosti, a za vreme $\mu_t = [\text{sec/mm}]$, a to znači da dužina od 1 mm na dijagramu zastupa 1 sec vremena, biće

$$(1) \quad v = \frac{ds}{dt} = \text{tg } \alpha.$$

Naprotiv, ako je npr. $\mu_s = [l \text{ cm/mm}]$, a $\mu_t = [t \text{ sec/mm}]$, tada će biti

$$(2) \quad v = \frac{l}{t} \text{tg } \alpha.$$

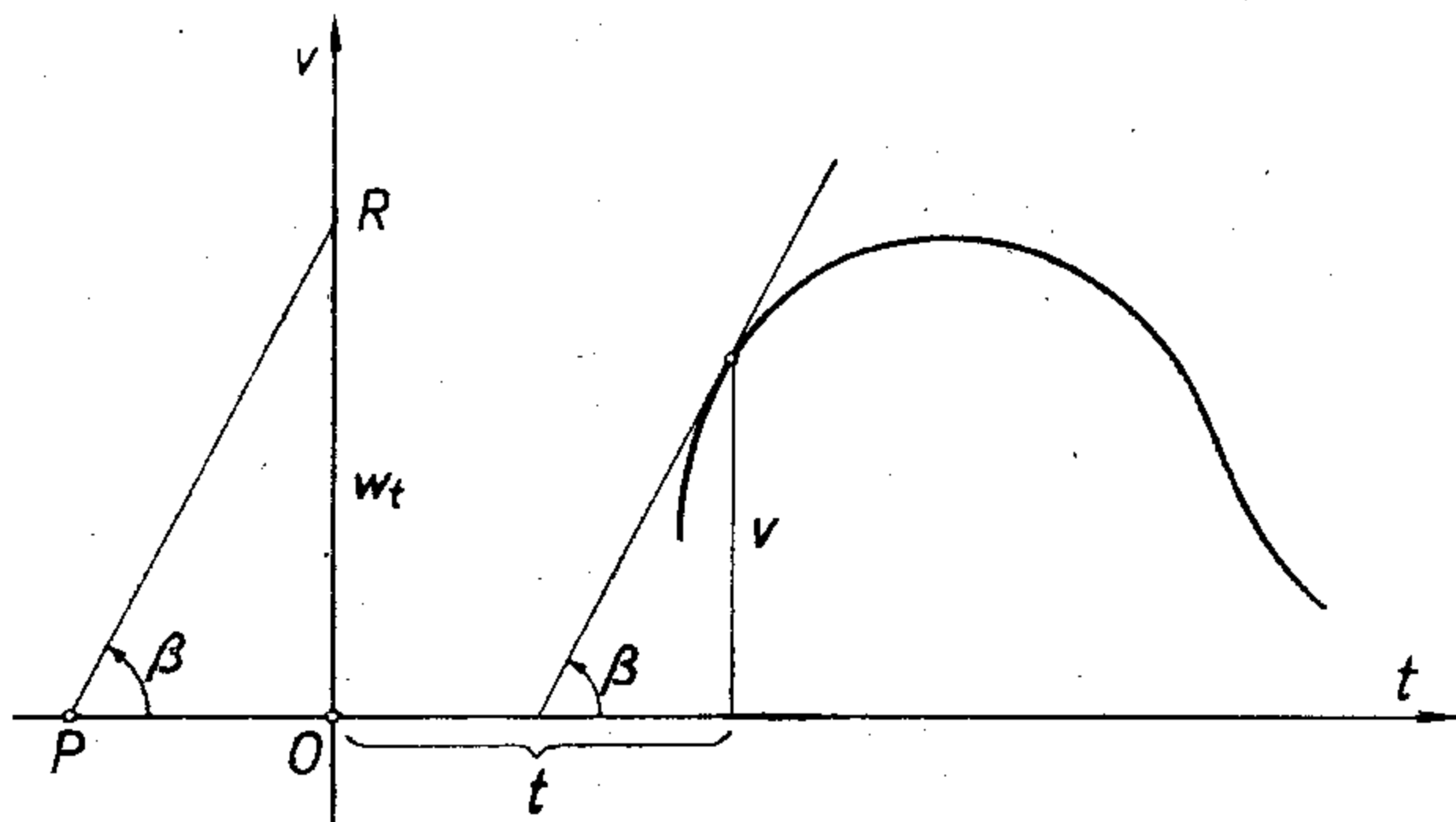
Najzad, ako se uzme $\mu_s = [\text{cm}/\overline{OP}]$ i $\mu_t = [\text{sec}/\overline{OP}]$ tj. neka proizvoljna duž \overline{OP} kao jedinica merenja na obe ose, onda duž \overline{OQ} (sl. 11) određuje algebarsku vrednost brzine v u $[\text{cmsec}^{-1}]$.

Dijagram puta: a) jednolikog kretanja je prava; b) jednoliko promenljivog kretanja je parabola $s = at^2 + bt + c$, čija je osa paralelna osi s i koja je otvorena naviše (u smeru s) za $a > 0$, a naniže za $a < 0$; c) harmonijskih oscilacija (1.3.1 — 3 i 8) je kosinusna, odnosno sinusna linija.

2. *Dijagram brzina-vreme* (kratko: *dijagram brzine*) je ona kriva (ili prava) koja u Dekartovom pravouglom sistemu koordinata predstavlja grafički vezu između algebarske vrednosti brzine i vremena tj. $v = v(t)$. Ona nam pored algebarske vrednosti brzine v omogućuje da odredimo tangentno ubrzanje w_t tačke u svakom trenutku vremena kao brzinu tačke po dijagramu brzine na osnovu relacije

$$(3) \quad w_t = \frac{dv}{dt} = \text{tg } \beta,$$

kad su razmere crtanja podesno izabrane.

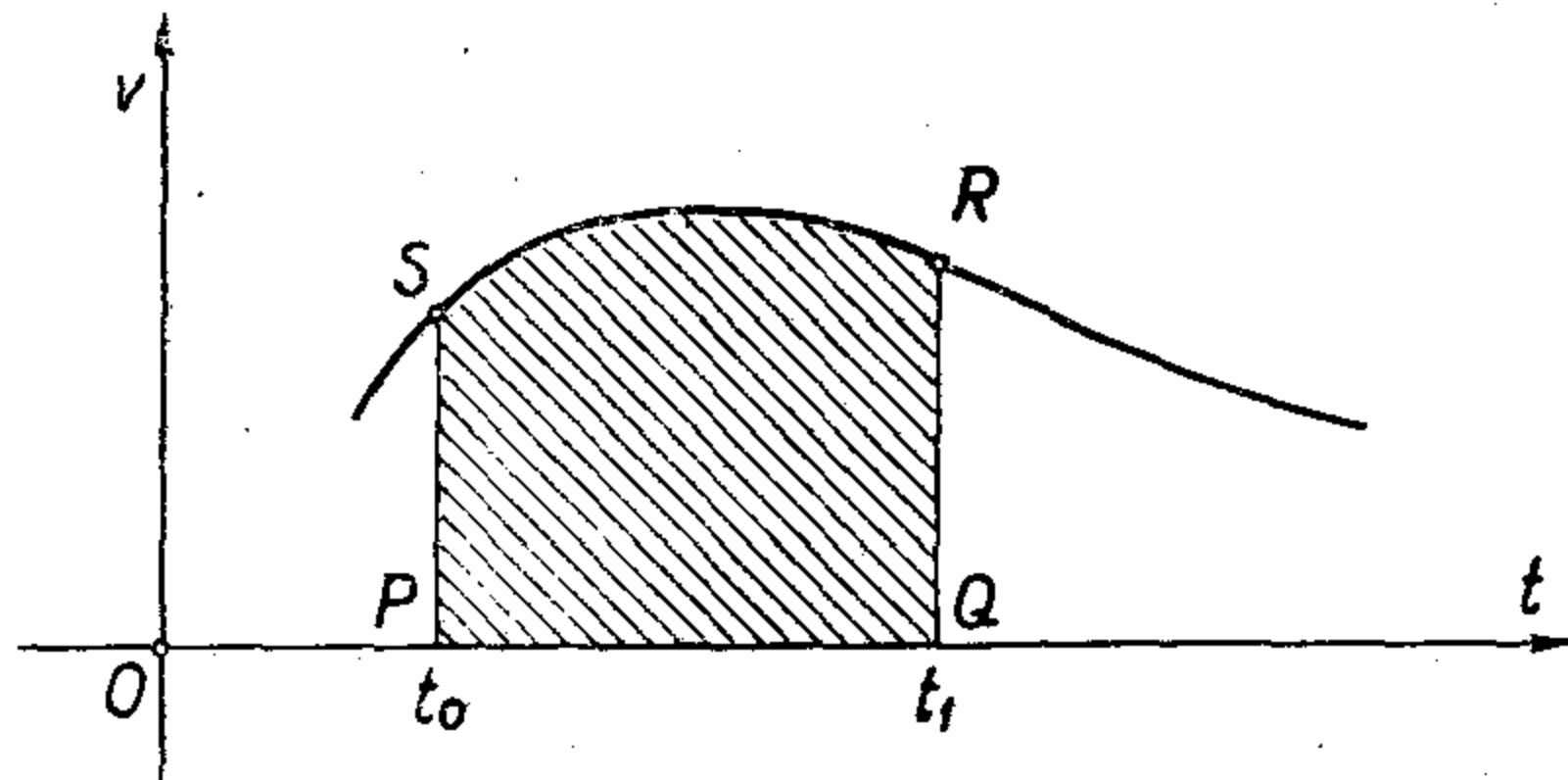


Slika 12

Pomoću dijagrama brzine može se grafički odrediti i pređeni put s u intervalu vremena (t_0, t_1) kao površina $PQRS$ (sl. 13), tj.

$$(4) \quad s - s_0 = \int_{t_0}^{t_1} v dt.$$

Pri tome se put izražava u površinskoj jedinici koja je određena izabranom razmerom crtanja brzine i vremena.

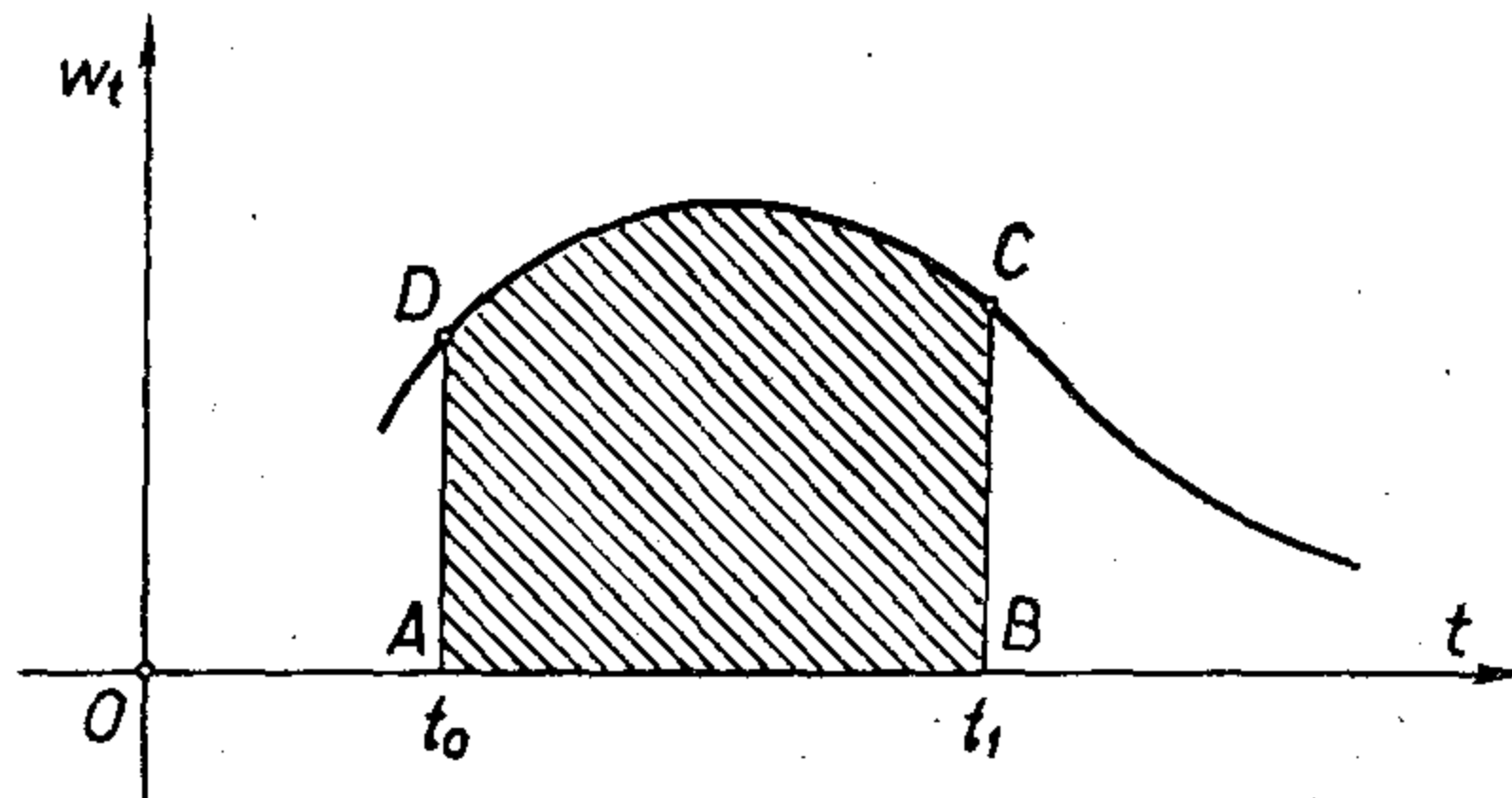


Slika 13

3. *Dijagram tangentnog (putanjskog) ubrzanja* je kriva koja u Dekartovim pravouglim koordinatama predstavlja vezu $w_t = w_t(t)$. Sa odgovarajuće slike (sl. 14) može se odrediti i promena algebarske vrednosti brzine (priraštaj ili pad) u intervalu (t_0, t_1) kao površina $ABCD$, tj.

$$(5) \quad v - v_0 = \int_{t_0}^{t_1} w_t dt,$$

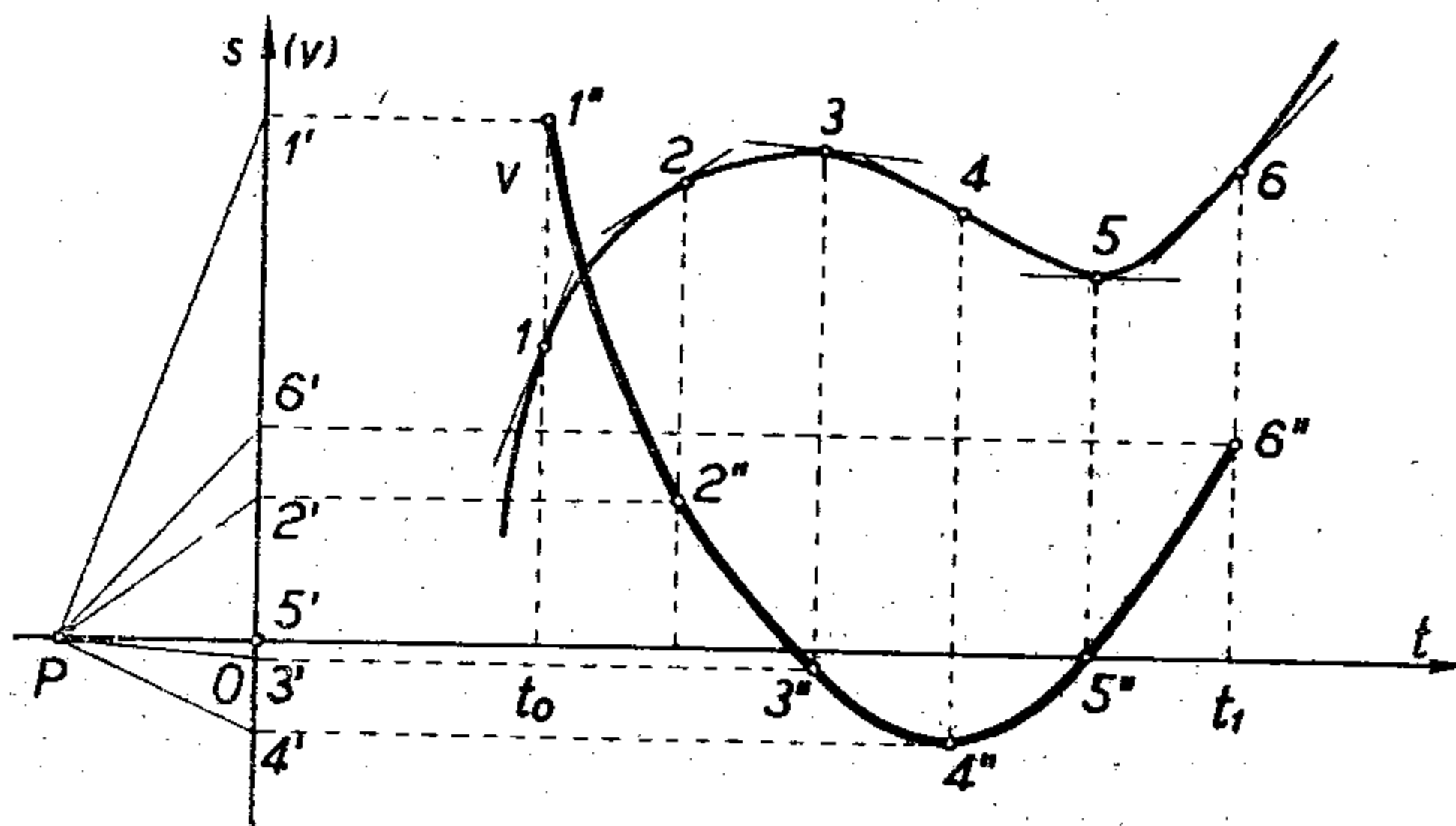
i to u površinskim jedinicama određenim izabranim razmerama crtanja vremena i ubrzanja.



Slika 14

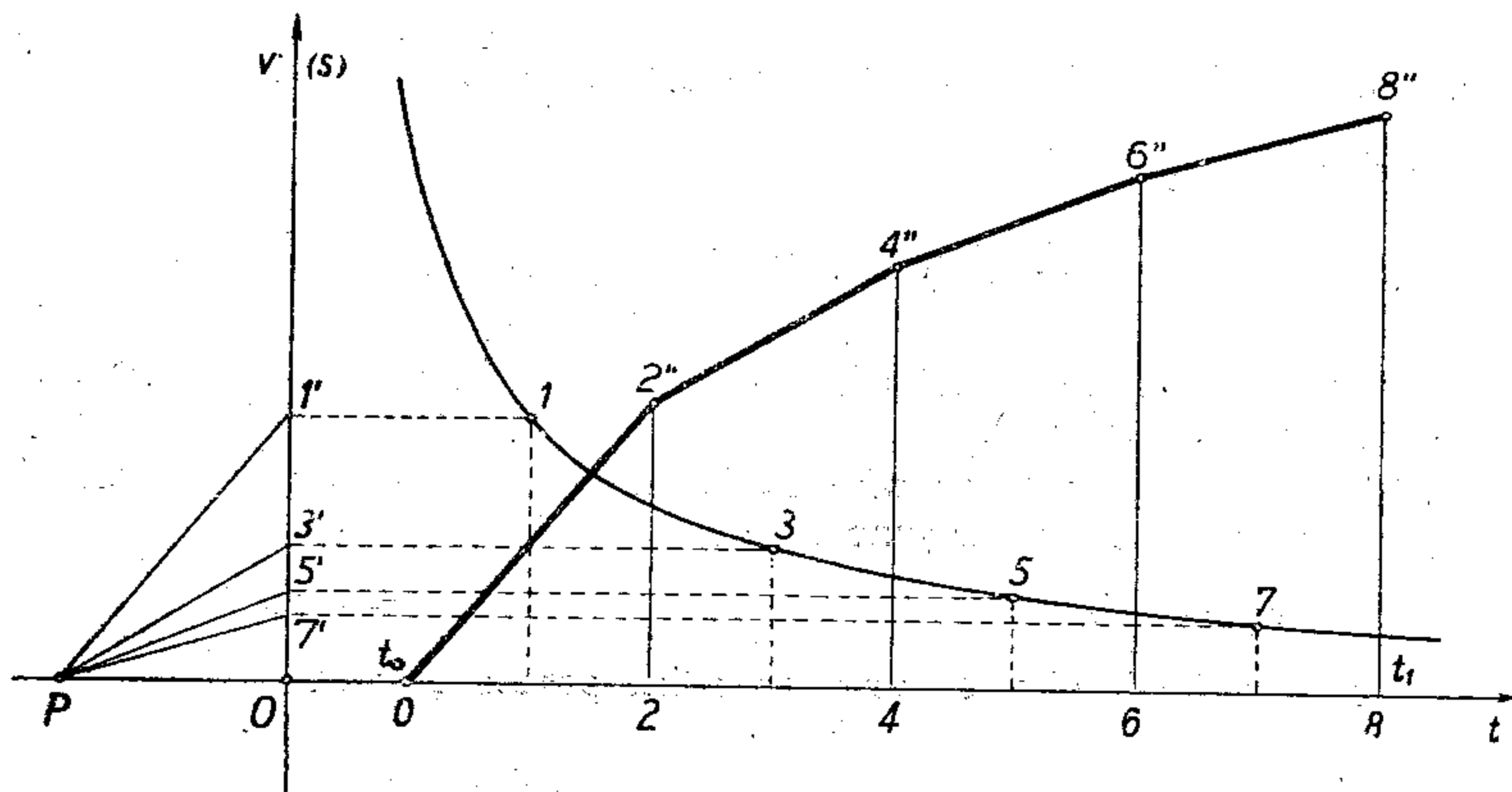
Pomoću dijagrama puta može se *grafičkom diferencijacijom* konstruisati dijagram brzine. Interval vremena (t_0, t_1) (sl. 15), u kome treba konstruisati dijagram brzine, podeli se obično na jednake delove (ali se posebno uočavaju istaknuta mesta dijagrama puta kao ekstremumi i prevojne tačke). U tačkama 1, 2, 3, ... dijagrama puta koje odgovaraju uzetim trenucima vremena konstruišu se tangente i kroz tačku P , kad je $\mu_s = [cm/\overline{OP}]$ i $\mu_t = [sec/\overline{OP}]$, povuku paralele ovim tangentama do preseka $1', 2', 3', \dots$ sa ordinatnom osom. Ovi preseki određuju algebarske vrednosti brzina. Stoga paralele apscisnoj osi kroz ove tačke određuju svojim presecima $1'', 2'', 3'', \dots$ sa odnosnim ordinatama tačke dijagrama brzine. Dobi-vene tačke spojene nekom glatkom krivom određuju traženi dijagram brzine, za koji je onda ordinatna osa — osa brzine v .

Dijagram brzine dopušta da se grafički na sličan način kao u prethodnom slučaju odredi dijagram tangentnog ubrzanja. Međutim, pomoću dijagrama brzine može se (grafička integracija) odrediti i dijagram puta na ovaj način (sl. 16).



Slika 15

Određeni interval vremena (t_0, t_1) podeli se obično na jednake delove tačkama 0, 2, 4, ... i u sredini svakog dela povuče srednja ordinata dijagrama brzine. Tačke 1, 3, 5, ... na dijagramu brzine, koje odgovaraju ovim srednjim brzinama, projiciraju se na ordinatnu osu i tako dobivene tačke 1', 3', ... spoje sa tačkom P, pri čemu je sad $\mu_v = [\text{cmsec}^{-1}/\overline{OP}]$ i $\mu_t = [\text{sec}/\overline{OP}]$. Kroz tačku 0 povuče se onda



Slika 16

duž između ordinata 0-2 paralelna sa $P1'$ do preseka $2''$, od tog preseka duž između ordinata 2-4 paralelna sa $P3'$ do preseka $4''$ itd. Dobivena izlomljena linija je utoliko tačnije dijagram puta ukoliko je broj osnovnih podelaka gušći. Crtanje dijagrama puta može se početi od ma koje tačke na ordinati u tački 0, a kad se počne od tačke na apscisnoj osi, to znači da se put računa od tog trenutka vremena t_0 .

Na sličan način se može grafički pomoću dijagrama tangentsnog ubrzanja odrediti dijagram brzine.

Od ostalih veza koje postoje između s , v i w_t i mogu se grafički predstaviti pomenućemo još dijagram *put-brzina* $s = s(v)$ i inverzni dijagram *brzina-put* $v = v(s)$.

Za ilustraciju relacija između puta, brzine i ubrzanja mogu se koristiti i svi ostali načini predstavljanja funkcija, npr. nomogrami sa dvojnomo skalom itd. Pored grafičkog predstavljanja ove veze se mogu i numerički tabulisati tako da se za svako t u tablici pročita odnosno s , v i w_t za dati zakon puta.

V e ž b e

1. Ubrzanje pokretne tačke predstavljeno je u svakom trenutku sa \overline{CM} , gde je C nepomična tačka, a M opisuje jednolikim kretanjem krug sa centrom u C . Pokazati da se brzina u svakom trenutku može predstaviti sa \overline{OP} , gde je O nepomična tačka i P opisuje jednolikim kretanjem krug, i odrediti putanju tačke.

U zadatku je zadan hodograf vektora ubrzanja \mathbf{w} kao krug. Ako izaberemo neki sistem Dekartovih pravouglavih koordinata sa početkom u C jednačinu hodografa možemo vektorski napisati

$$\mathbf{w} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = a \cos \omega t \mathbf{i} + a \sin \omega t \mathbf{j},$$

gde su \mathbf{i} i \mathbf{j} jedinični vektori u pravcu osa koordinatnog sistema. Odatle se integracijom dobiva za brzinu vektorski izraz

$$\mathbf{v} = \frac{a}{\omega} \sin \omega t \mathbf{i} - \frac{a}{\omega} \cos \omega t \mathbf{j} + \mathbf{A}.$$

Dakle, hodograf brzine je takođe krug poluprečnika $\overline{OP} = \frac{a}{\omega}$. Kako je brzina po definiciji $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$, biće

$$\mathbf{r} = -\frac{a}{\omega^2} (\cos \omega t \mathbf{i} + \sin \omega t \mathbf{j}) + \mathbf{A}t + \mathbf{B},$$

što predstavlja konačnu vektorsku jednačinu putanje (\mathbf{A} i \mathbf{B} su konstantni vektori — konstante integracije).

2. Tačka se kreće u ravni tako da je stalno za vreme kretanja normalno ubrzanje w_n proporcionalno tangentsnom w_t ,

$$w_n = w_t/\lambda \quad (\lambda = \text{const.})$$

a krivina trajektorije je obrnuto proporcionalna pređenom putu,

$$k = \frac{1}{\mu s} \quad (\mu = \lambda = \text{const.})$$

Ako je u početnom trenutku $t_0 = 0$, početna brzina v_0 , a početni položaj je $s_0 \neq 0$, naći: a) brzinu tačke kao funkciju pređenog puta i b) vreme za koje će tačka preći put $s = 2s_0$.

Iz uslova zadatka proističe da je

$$\frac{v^2}{\rho} = \frac{1}{\lambda} \frac{dv}{dt}, \quad \left(\rho = \frac{1}{k} \right)$$

a zbog $\rho = \mu s$ i $\frac{dv}{dt} = \frac{1}{2} \frac{dv^2}{ds}$ problem se svodi na diferencijalnu jednačinu

$$\frac{1}{2\lambda} \frac{dv^2}{v^2} = \frac{1}{\mu} \frac{ds}{s},$$

čiji integral

$$v = v_0 \left(\frac{s}{s_0} \right)^{\lambda/\mu} = v_0 \left(\frac{s}{s_0} \right)^{1/2}$$

daje brzinu kao funkciju pređenog puta.

Stavljanjem $v = \frac{ds}{dt}$ u izraz $v = v(s)$ dobićemo

$$v_0 dt = \left(\frac{s_0}{s} \right)^{\lambda/\mu} ds,$$

odakle se integracijom dobiva

$$t = \frac{1}{v_0} s^{\lambda/\mu} \frac{\mu}{\mu - \lambda} \left(s^{\frac{\mu - \lambda}{\mu}} - s_0^{\frac{\mu - \lambda}{\mu}} \right),$$

odnosno, kad unesemo uslove $s = 2s_0$ i $\mu = 2\lambda$

$$t = 2(\sqrt{2} - 1) \frac{s_0}{v_0}.$$

3. Tačka se kreće u ravni, radijalna brzina joj je konstantna i pozitivna, a radijalno ubrzanje je negativno i obrnuto proporcionalno kubu rastojanja tačke od nekog pola u ravni. Naći trajektoriju i sektorsku brzinu tačke, ako je u početnom trenutku $t_0 = 0$, $\rho_0 \neq 0$ i $\varphi_0 \neq 0$, gde je ρ poteg, a pri tome je $\dot{\varphi}_0 > 0$.

Iz uslova zadatka sledi

$$v_\rho = C > 0, \quad w_\rho = -\frac{a^2}{\rho^3}.$$

Radijalna brzina je $v_\rho = \dot{\rho}$, a radijalno ubrzanje $w_\rho = \ddot{\rho} - \rho \dot{\varphi}^2$ pa je prema uslovima zadatka

$$\dot{\rho} = c, \quad \text{odnosno } \ddot{\rho} = 0,$$

i

$$w_\rho = -\rho \dot{\varphi}^2 = -\frac{a^2}{\rho^3}$$

odakle se za ugaonu brzinu $\dot{\varphi}$ dobiva $\dot{\varphi}^2 = \frac{a^2}{\rho^4}$. Kako je

$$\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\varphi}{d\rho} \dot{\rho} = c \frac{d\varphi}{d\rho},$$

dobiva se diferencijalna jednačina

$$cd\varphi = a \frac{d\rho}{\rho^2}$$

čiji je integral

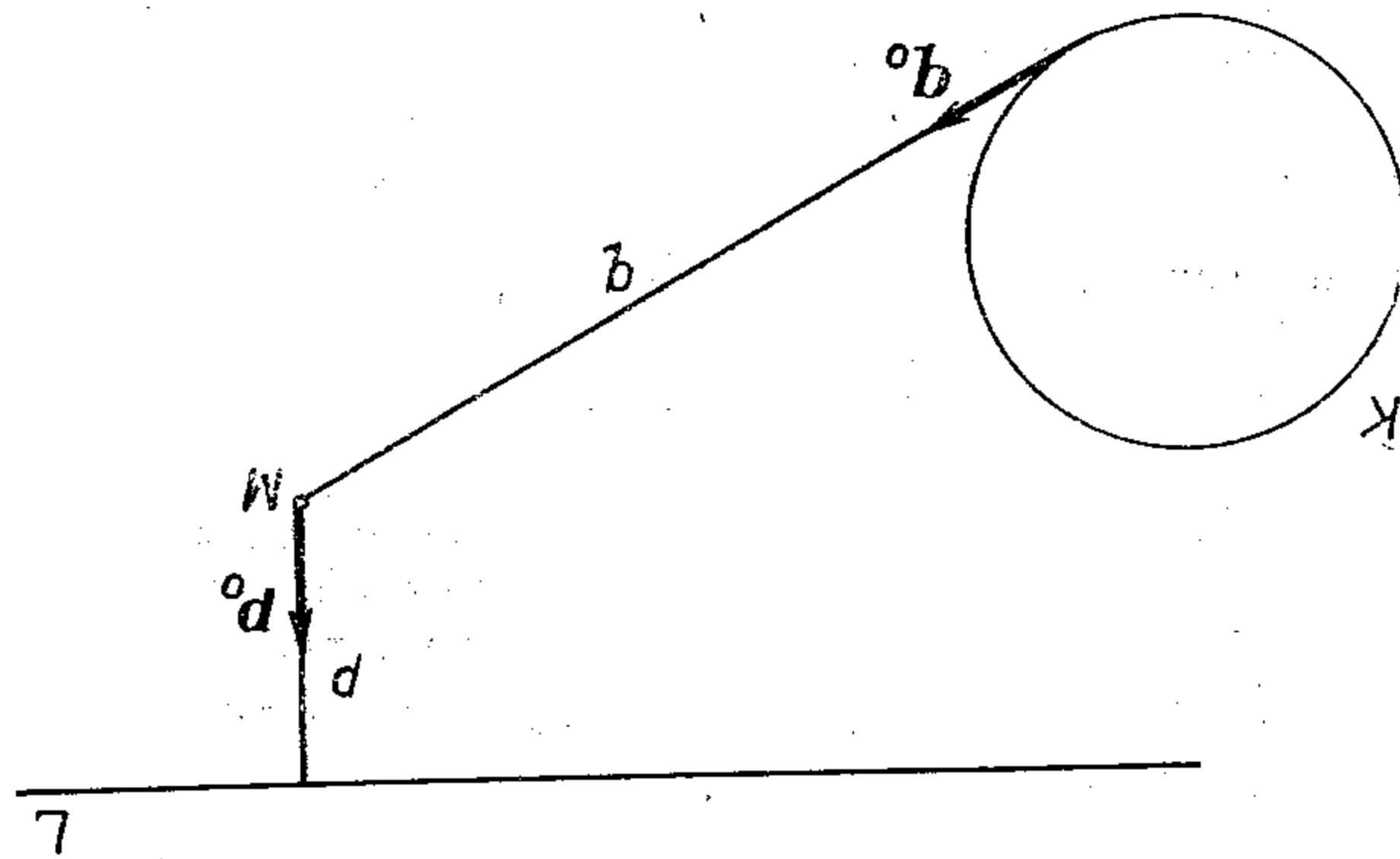
$$c(\varphi - \varphi_0) = a \left(\frac{1}{\rho_0} - \frac{1}{\rho} \right).$$

Oдавде se dobiva polarna jednačina trajektorije

$$r = \frac{a \rho_0}{a - c \rho_0 (\varphi - \varphi_0)}.$$

Sektorska brzina je po definiciji $S = \frac{1}{2} \rho^2 \dot{\varphi}$, a kako je $\dot{\varphi} = \frac{a}{\rho^2}$, to se zamenom u izrazu za sektorsku brzinu dobiva $S = a/2$.

4. Krug K , prava linija L i pokretna tačka M nalaze se u istoj ravni. Položaj tačke M je određen normalnim rastojanjem p od prave L i dužinom q odsečka



Slika 17

tangente od tačke M do kruga K . Ako su u i v intenziteti komponenata brzine tačke M u pravcima generalisnih koordinata p i q i ako je Θ ugao između pravaca tih koordinata, naći komponente ubrzanja u tim pravcima.

Neka su \mathbf{p}_0 , \mathbf{q}_0 jedinični vektori u pravcima koordinata p i q (sl. 17); brzina se može izraziti u obliku

$$\mathbf{v} = u \mathbf{p}_0 + v \mathbf{q}_0$$

a ubrzanje u obliku

$$\mathbf{w} = \dot{u} \mathbf{p}_0 + \dot{v} \mathbf{q}_0 + v \dot{\mathbf{q}}_0 \quad (\dot{\mathbf{p}}_0 = 0)$$

gde $\dot{\mathbf{q}}_0$ označava izvod po vremenu jediničnog vektora promenljivog pravca,

$$\dot{\mathbf{q}}_0 = \dot{\varphi} \mathbf{n}.$$

Ovde je \mathbf{n} jedinični vektor normale na \mathbf{q}_0 , a $\dot{\varphi}$ je brzina skretanja vektora \mathbf{q}_0 , pa je

$$\mathbf{n} = -\operatorname{ctg} \Theta \mathbf{q}_0 + \frac{1}{\sin \Theta} \mathbf{p}_0.$$

Zamenom u izrazu za ubrzanje dobiva se

$$\mathbf{w} = \dot{u} \mathbf{p}_0 + \dot{v} \mathbf{q}_0 + v \dot{\varphi} \left(-\operatorname{ctg} \Theta \mathbf{q}_0 + \frac{1}{\sin \Theta} \mathbf{p}_0 \right).$$

Međutim, pošto treba eliminisati nepoznatu ugaonu brzinu $\dot{\varphi}$ iskoristimo relaciju $q \dot{\varphi} = v_n$, koja određuje brzinu u pravcu normale \mathbf{n} , pa je otuda

$$v_n = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = u \sin \Theta; \quad \dot{\varphi} = \frac{1}{q} u \sin \Theta.$$

Zamena ovoga u izrazu za ubrzanje konačno daje

$$\mathbf{w} = \left(\dot{u} + \frac{uv}{q} \right) \mathbf{p}_0 + \left(\dot{v} - \frac{uv}{q} \cos \Theta \right) \mathbf{q}_0.$$

5. Voz se sa polazne stanice A ubrzava sa $w_1 = 0,2 \text{ m/sec}^2$, dok ne dostigne brzinu $v_1 = 108 \text{ km/h}$, pa se zatim kreće tom brzinom. U blizini stanice B , koja je na rastojanju 12 km od polazne stanice počinje kočenje i voz se usporava za $w_2 = -1 \text{ m/sec}^2$ dok ne stane u stanici B .

Odrediti:

- pređeni put za vreme ubrzavanja, za vreme jednolikog kretanja i za vreme usporavanja;
- vreme proteklo pri prelazu od stanice A do stanice B ;
- srednju brzinu v_s voza;
- nacrtati dijagrame $s = s(t)$, $v = v(t)$, $w = w(t)$ i $v = v(s)$.

Ako se sa t_1 obeleži vreme ubrzavanja i s_1 put pređen za vreme ubrzavanja, biće

$$v_1 = w_1 t_1, \quad s_1 = \frac{1}{2} w_1 t_1^2,$$

a odatle se dobiva odmah

$$t_1 = \frac{v_1}{w_1} = 150 \text{ sec}, \quad s_1 = \frac{v_1^2}{2w_1} = 2250 \text{ m}.$$

Za vreme t_2 kočenja — usporavanja od brzine v_1 do brzine $v_2 = 0$ biće

$$v_1 - w_2 t_2 = 0, \quad s_2 = v_1 t_2 - \frac{1}{2} w_2 t_2^2,$$

odakle je

$$t_2 = \frac{v_1}{w_2} = 30 \text{ sec}, \quad s_2 = \frac{v_1^2}{2w_2} = 450 \text{ m}.$$

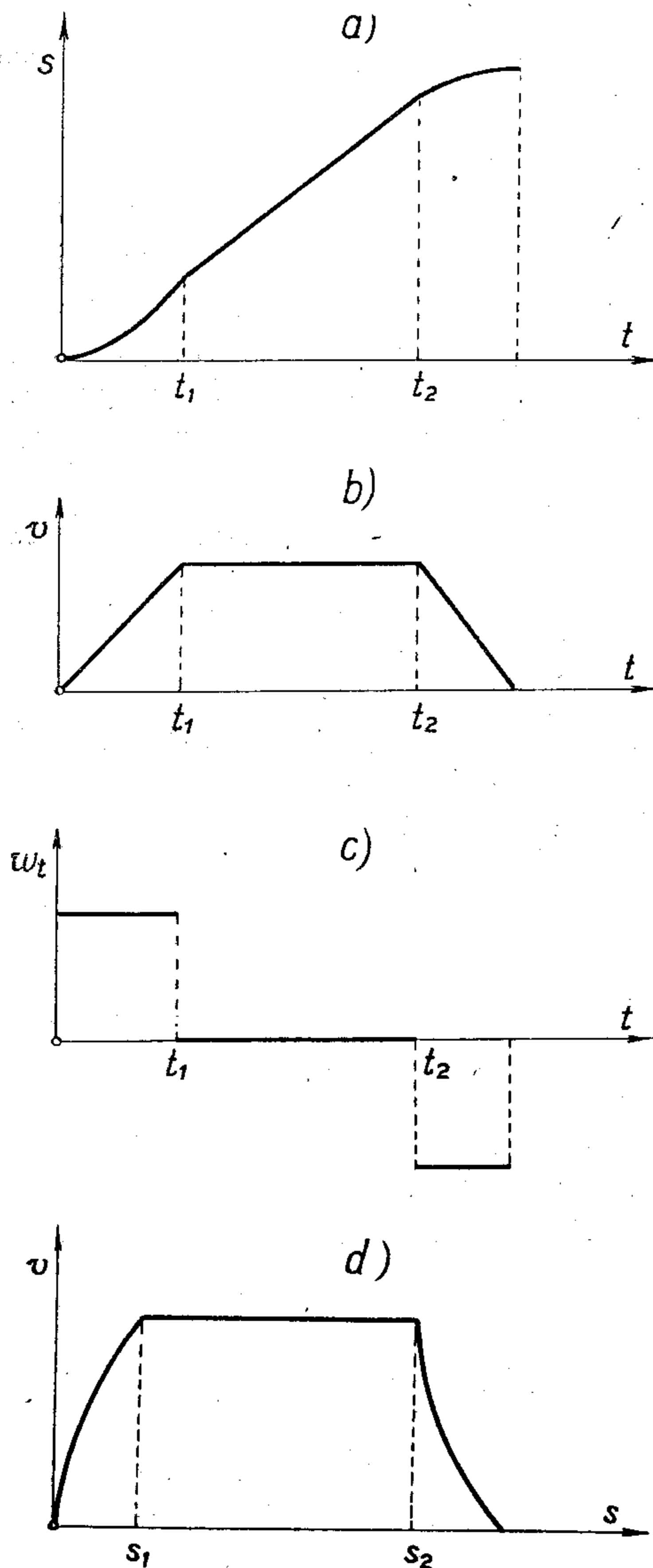
Prema tome voz prelazi $s_1 + s_2 = 2700 \text{ m}$ pri ubrzavanju i usporavanju a $s = 9300 \text{ m}$ jednoliko brzinom $v = 108 \text{ km/h} = 30 \text{ m/sec}$ za vreme $t = 310 \text{ sec}$ ($s = vt$).

Srednja brzina voza na ovom delu puta biće

$$v_s = \frac{12000}{490} \approx 24,5 \text{ m/sec} = 88,2 \text{ km/h}.$$

S obzirom na zakone puta za vreme ubrzavanja, jednolikog kretanja i usporavanja i drugih osobina ovog kretanja biće: dijagram puta sastavljen od dva nejednaka luka parabole spojena kosom duži (sl. 18, a); dijagram brzine je trapez nejednakih krakova (sl. 18, b), dijagram tangentsnog ubrzanja obrazuju tri duži,

od kojih je jedna na samoj osi t (sl. 18, *c*) i najzad dijagram brzina-put biće sastavljen od dva parabolina luka spojena jednom duži koja je paralelna osi s (sl. 18, *d*).



Slika 18

6) Tačka se kreće po sferi konstantnom brzinom v tako da trajektorija tačke seče meridijane sfere pod stalnim uglom α . Naći trajektoriju i izračunati njenu krivinu.

Uputstvo: Izabrati sferne koordinate tako da je $r = \text{const.}$ poluprečnik sfere po kojoj se kreće tačka. Projekcije brzine na pravac meridijana su $v \cdot \sin \alpha = r \dot{\varphi} \cos \vartheta$, $v \cos \alpha = r \dot{\vartheta}$. Za izračunavanje krivine trajektorije mora prethodno da se izračuna ubrzanje (projekcije ubrzanja na ose sfernih koordinata). Iz $v = \text{const.}$ proističe da postoji samo ubrzanje u pravcu glavne normale na trajektoriju, $w = w_n$, pa se iz $w_n = v^2/\rho$ izračunava krivina.

Rešenje: Trajektorija je sferna kriva *loksodroma*

$$\varphi = \text{tg } \alpha \cdot \ln \left[\text{tg} \left(\frac{\vartheta}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right],$$

a poluprečnik krivine trajektorije je

$$\rho = \frac{r}{\sqrt{1 + \text{tg}^2 \vartheta \sin^2 \alpha}}$$

7. Tačka se kreće po krugu poluprečnika R sa centrom u O tako da je hodograf njene brzine konusni presek sa žižom u O . Odrediti ubrzanje tačke.

Uputstvo: Jednačinu hodografa uzeti u obliku

$$v = \frac{\sin a}{(1 + e \cos \vartheta)}, \quad a > 0.$$

Rešenje:

$$\ddot{x} = -\frac{a^2}{R} \frac{\sin \vartheta}{(1 + e \cos \vartheta)^3},$$

$$\ddot{y} = \frac{a^2}{R} \frac{\cos \vartheta + e}{(1 + e \cos \vartheta)^3}.$$

8. Tačka se kreće konstantnom radijalnom ($v_\rho = a$) i transverzalnom brzinom ($v_\varphi = b$).

Odrediti: a) njenu trajektoriju, ako je početni položaj $\rho_0 = R$ i $\varphi_0 = 0$; b) njeno radijalno, transverzalno i normalno ubrzanje i njegov intenzitet; c) sektorsku brzinu.

Iz

$$v_\rho = \dot{\rho} = a$$

dobiva se onda

$$(1) \quad \rho = at + R$$

a iz

$$v_\varphi = \rho \dot{\varphi} = b$$

$$(2) \quad \varphi = \frac{b}{a} \ln \frac{at + R}{R}$$

Putanja je, prema tome, kad se vreme t eliminiše iz (1) i (2) logaritamska spirala

$$\rho = R e^{\frac{a}{b} \varphi}.$$

Kretanje je uniformno, ali krivolinijsko, pa će biti

$$w_\rho = -\frac{b^2}{at + R} = -\frac{b^2}{\rho}, \quad w_\varphi = \frac{ab}{at + R} = \frac{ab}{\rho},$$

odakle se dobiva intenzitet ubrzanja

$$w = \frac{b}{\rho} \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Tangentno ubrzanje je jednako nuli, jer je algebarska vrednost brzine konstantna, a normalno ubrzanje će biti (r poluprečnik krivine)

$$w_n = \frac{v^2}{r} = \frac{a^2 + b^2}{r} = \frac{b}{\rho} \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Najzad, za sektorsku brzinu ovog kretanja dobiva se

$$s = \frac{b}{2} (at + R) = \frac{1}{2} b \rho.$$

9. Tačka se kreće po logaritamskoj spirali

$$\rho = a e^{\lambda \varphi},$$

konstantnom ugaonom brzinom ω oko pola. a) Naći projekcije njenog ubrzanja na polarne koordinatne ose. b) Naći tangentno i normalno ubrzanje te tačke i poluprečnik R krivine trajektorije.

Rešenje

$$a) \quad w_r = \omega^2 \rho (\lambda^2 - 1), \quad w_\varphi = 2 \lambda \omega^2 \rho.$$

$$b) \quad w_t = \lambda \omega^2 \rho \sqrt{1 + \lambda^2}, \quad w_n = \omega^2 \rho \sqrt{1 + \lambda^2}, \quad R = \rho \sqrt{1 + \lambda^2}.$$

10. Odrediti normalno i transverzalno ubrzanje i projekciju ubrzanja na pravac meridijana za tačku koja se kreće po torusu

$$x = (c + a \sin \vartheta) \cos \varphi, \quad y = (c + a \sin \vartheta) \sin \varphi, \quad z = a \cos \vartheta.$$

Uputstvo: Prvo naći transverzalno i radijalno ubrzanje tačke ($w_t = c \ddot{\varphi}$, $w_r = -c \dot{\varphi}^2$) u odnosu na polarni sistem koordinata sa polom u centru meridijanskog preseka torusa, kao da se tačka kreće samo po meridijanskom preseku — krugu, a zatim pustiti taj presek da se obrće oko središta torusa.

Rešenje: Ubrzanje duž meridijana

$$a \ddot{\vartheta} - (c + a \sin \vartheta) \dot{\varphi}^2 \cos \vartheta;$$

normalno ubrzanje

$$-a \dot{\vartheta}^2 - a \dot{\varphi}^2 \sin^2 \vartheta - c \dot{\varphi}^2 \sin \vartheta;$$

transverzalno ubrzanje

$$c \ddot{\varphi} + \frac{a}{\sin \vartheta} \frac{d}{dt} (\sin^2 \vartheta \cdot \dot{\varphi}).$$

11. Tačka se kreće u ravni i njeno kretanje se posmatra u odnosu na sistem Dekartovih kosouglih osa x i y , koje obrazuju uglove α i β sa nekim nepromenljivim pravcem \mathbf{u} , pri čemu su α i β date funkcije vremena. Odrediti brzinu.

Uputstvo: Sistem koordinata x, y vezati za neki ortogonalni Dekartov sistem koordinata sa istim početkom, Ouv tako da je veza između koordinata

$$u = x \cos \alpha + y \cos \beta, \quad v = x \sin \alpha + y \sin \beta.$$

Rešenje: Projekcije brzine na kosouglove ose x i y su

$$v_x = \dot{x} - x \dot{\alpha} \operatorname{ctg}(\beta - \alpha) - y \dot{\beta} / \sin(\beta - \alpha)$$

$$v_y = \dot{y} + y \dot{\beta} \operatorname{ctg}(\beta - \alpha) + x \dot{\alpha} / \sin(\beta - \alpha).$$

12. Brzina tačke M , koja se kreće u ravni, rezultanta je brzine v_1 u pravcu potega $\overrightarrow{OM} = \mathbf{e}$ od neke nepomične tačke O i brzine v_2 paralelne nekom datom nepromenljivom pravcu \mathbf{i} . Naći ubrzanje u pravcu potega \mathbf{i} u pravcu \mathbf{i} , ako \overrightarrow{OM} obrazuje sa \mathbf{i} ugao ϑ i ako je $OM = \rho$.

Rešenje:

$$\mathbf{w} = \left(\frac{dv_1}{dt} - \frac{v_1 v_2}{\rho} \cos \vartheta \right) \mathbf{e} / \rho + \left(\frac{dv_2}{dt} + \frac{v_1 v_2}{r} \right) \mathbf{i}.$$

13. Konstruisati dijagram puta koji odgovara zakonu $s = \ln t$ pa grafičkim putem odrediti dijagram brzine.

14. Konstruisati dijagram brzine koji odgovara brzini $v = t^2 - t$, pa grafičkim putem odrediti odnosni dijagram puta.

15. Ako su A, B, C tri nepomične tačke i ako su v_1, v_2, v_3 algebarske vrednosti komponenata brzine neke pokretne tačke P u pravcima $\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{BP},$ i \overrightarrow{CP} , naći ubrzanja u tim pravcima.

Rešenje: Ako je

$$\mathbf{a} = \frac{\overrightarrow{AP}}{AP}; \quad \mathbf{b} = \frac{\overrightarrow{BP}}{BP}; \quad \mathbf{c} = \frac{\overrightarrow{CP}}{CP},$$

biće

$$\begin{aligned} \mathbf{w} = & v_1 \mathbf{a} + v_2 \mathbf{b} + v_3 \mathbf{c} + \frac{v_1}{AP} [v_1 \mathbf{a} + v_2 \mathbf{b} + v_3 \mathbf{c} - \mathbf{a} (v_1 + v_2 \cos \alpha + v_3 \cos \beta)] \\ & + \frac{v_2}{BP} [v_1 \mathbf{a} + v_2 \mathbf{b} + v_3 \mathbf{c} - \mathbf{b} (v_1 \cos \alpha + v_2 + v_3 \cos \gamma)] \\ & + \frac{v_3}{CP} [v_1 \mathbf{a} + v_2 \mathbf{b} + v_3 \mathbf{c} - \mathbf{c} (v_1 \cos \beta + v_2 \cos \gamma + v_3)]. \end{aligned}$$

16. Tačka se kreće po krugu prečnika $AB = 2R = 8$ cm i iz položaja A , u kome se nalazi u trenutku $t = 0$, dolazi u položaj B posle $2t_1 = 6$ sec, i tamo se zaustavlja pa vraća natrag. Dijagram brzine kretanja ove tačke određen je jednačinom

$$v = at^2 + bt + c$$

i on prolazi kroz tačke $M_0(0,0)$, $M_1(t_1, v_1)$, $M_2(2t_1, 0)$, pri čemu je $v_1 > 0$.

Odrediti algebarsku vrednost v_1 brzine, vreme t_2 posle koga se tačka vraća u položaj A i brzinu v_2 u toj tački. Odrediti tangentno i normalno ubrzanje u tački M_1 .
O d g o v o r: $v_1 = \pi$ cm/sec, $t_2 = 9$ sec, $v_2 = -3\pi$ cm/sec;

$$w_t = 0 \text{ cm/sec}^2, \quad w_n = \pi^2/4 \text{ cm/sec}^2.$$

B. KINEMATIKA KRUTOG TELA

1.8. Kruto telo

Pod *krutim telom* ili *mehanički čvrstim telom* razume se onaj sistem tačaka, čija uzajamna rastojanja ostaju pri svim kretanjima nepromenjena. Broj tačaka, koje obrazuju ovo telo, može biti konačan ili beskonačan. Njihov raspored može biti diskretan (na rastojanjima) ili neprekidan.

U toku daljih izlaganja u ovom odeljku o kinematici krutog tela će se pod „telom“ podrazumevati uvek kruto telo, ako suprotno nije naglašeno.

1.8.1. Položaj krutog tela

Pod položajem krutog tela u prostoru podrazumeva se položaj svih tačaka tela (njegova *konfiguracija*). Po definiciji uzajamna rastojanja tačaka krutog tela su nepromenljiva. Stoga se može položaj neke tačke tela odrediti potpuno jednoznačno, ako su poznata rastojanja te tačke od ostalih tačaka tela.

Za određivanje položaja tačaka tela u prostoru potrebno je pre svega utvrditi u prostoru neki sistem referencija, npr. Dekartov pravougli sistem koordinata $Oxyz$, sa početkom u nekoj utvrđenoj tački prostora O , u odnosu na koji se telo posmatra.

Neka su A , B i C tri proizvoljno izabrane nekolinearne tačke (koje se ne nalaze na istoj pravoj) nekog krutog tela. Položaji tih tačaka u odnosu na izabrani sistem referencije u prostoru određeni su vektorima položaja

$$(1) \quad \mathbf{r}_A = \{x_A, y_A, z_A\}; \quad \mathbf{r}_B = \{x_B, y_B, z_B\}; \quad \mathbf{r}_C = \{x_C, y_C, z_C\}.$$

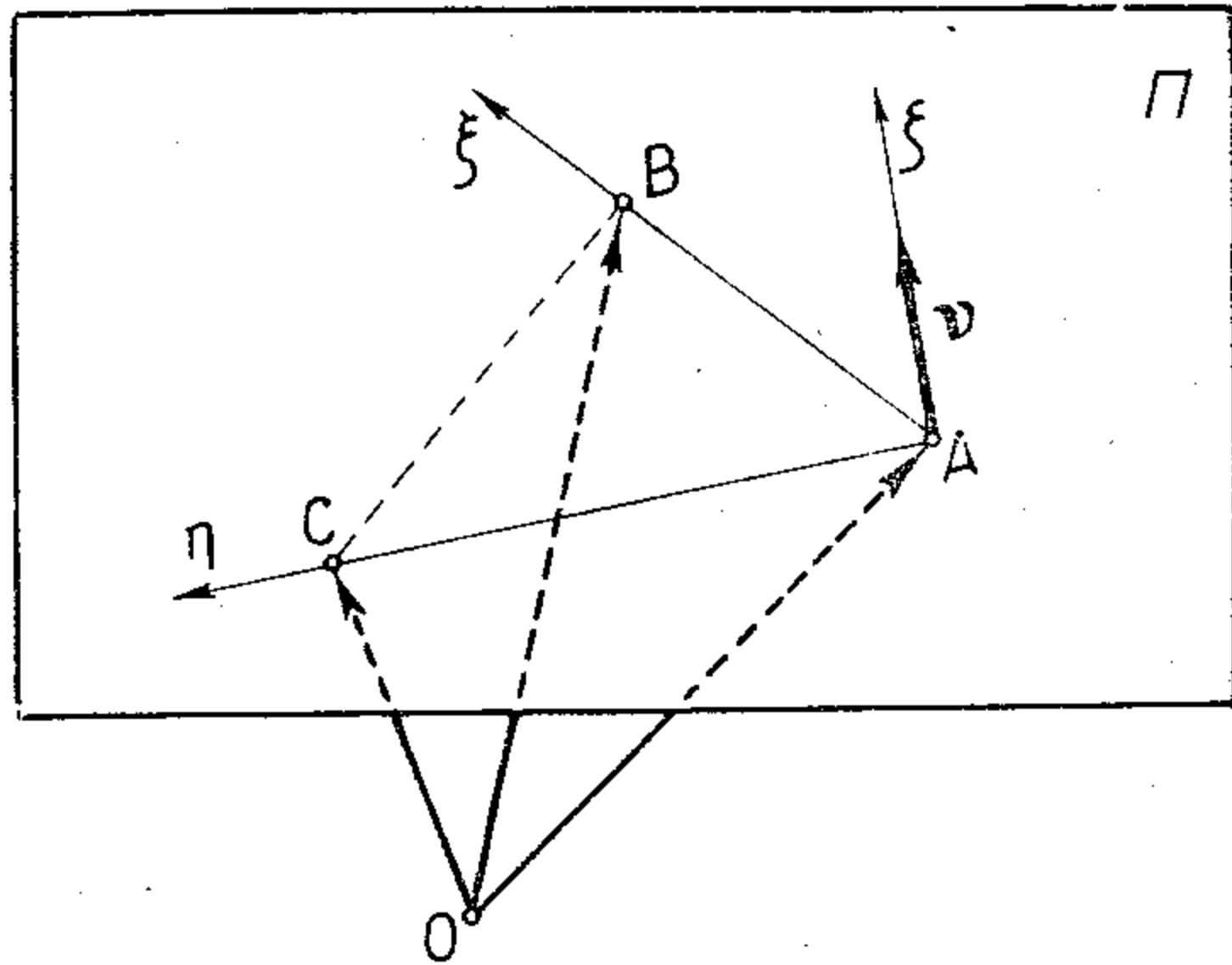
Ako su položaji ovih tačaka poznati i ako su poznata rastojanja neke tačke tela M od ovih tačaka, $AM = a$, $BM = b$, $CM = c$, može se uvek odrediti položaj tačke M u prostoru. Kako su rastojanja nepromenljiva pri svim kretanjima, to mora biti:

$$(2) \quad \begin{aligned} (x_M - x_A)^2 + (y_M - y_A)^2 + (z_M - z_A)^2 &= a^2, \\ (x_M - x_B)^2 + (y_M - y_B)^2 + (z_M - z_B)^2 &= b^2, \\ (x_M - x_C)^2 + (y_M - y_C)^2 + (z_M - z_C)^2 &= c^2. \end{aligned}$$

Ove tri jednačine su u opštem slučaju dovoljne za određivanje tri nepoznate koordinate x_M , y_M , z_M tačke M . Izuzetno, npr. kad je $AM=BM$ ili kad je $AM=BM=CM$ prethodne tri jednačine očigledno neće biti dovoljne za određivanje koordinata x_M , y_M , z_M . Na taj način se može položaj svake tačke M tela odrediti u zavisnosti od položaja tri proizvoljno izabrane tačke tela i rastojanja tačke M od tih tačaka.

Otuda proizlazi da ako je poznat položaj tri nekolinearne proizvoljno izabrane tačke tela, uvek

se može odrediti položaj u prostoru ma koje tačke tela, čija su rastojanja od ove tri tačke data. Tri nekolinearne tačke u prostoru uvek određuju ravan. Sa druge strane, ravan je u prostoru određena kada je poznat položaj neke tačke u ravni i orijentacija ravni — jedinični vektor normale na ravan. Stoga se umesto tri tačke u nekom telu može uočiti neka tačka A (pokretni pol) tela i jedan pravac određen u telu jediničnim vektorom \mathbf{v} , tako da ravan Π tačaka A, B i C bude upravna na \mathbf{v} . U samoj ravni kroz parove tačaka A i B , i A i C mogu se povući dve nekolinearne prave $A\xi$ i $A\eta$. Ako se te prave orijentišu, one određuju sistem koordinatnih linija u ravni, pa je položaj neke tačke M tela potpuno određen u odnosu na samo telo koordinatama, ξ , η i rastojanjem ζ tačke M od ravni $A\xi\eta$.



Slika 19

Kako se tačke A, B i C mogu u telu birati proizvoljno, mogu se uvek uzeti tako, da ugao između osa $A\xi$ i $A\eta$ bude prav, pa je na taj način u telu definisan jedan za telo nepromenljivo vezan pravougli Dekartov sistem koordinata $A\xi\zeta\eta$ u odnosu na koji su koordinate svih tačaka tela pri svim kretanjima nepromenljive.

Radi određivanja položaja tela u prostoru treba šad odrediti položaj za telo vezanog pravouglonog Dekartovog sistema koordinata $A\xi\eta\zeta$ prema nekom nepokretnom koordinatnom sistemu $Oxyz$. Za određivanje položaja koordinatnog sistema $A\xi\eta\zeta$ u odnosu $Oxyz$ potrebne su:

- a) koordinate pokretnog pola A

$$\mathbf{r}_A = \{x_A, y_A, z_A\};$$

- b) koordinate jediničnog vektora \mathbf{v} ose $A\zeta$

$$\mathbf{v} = \{a_{13}, a_{23}, a_{33}\};$$

- c) koordinate jediničnog vektora $\boldsymbol{\lambda}$ ose $A\xi$

$$\boldsymbol{\lambda} = \{a_{11}, a_{21}, a_{31}\}.$$

Jedinični vektor $\boldsymbol{\mu}$ ose $A\eta$ biće onda određen obrascem $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{v} \times \boldsymbol{\lambda}$ zbog ortogonalnosti jediničnih vektora \mathbf{v} , $\boldsymbol{\lambda}$ i $\boldsymbol{\mu}$. Prema tome, izgleda da je za određivanje položaja koordinatnog sistema $A\xi\eta\zeta$ prema sistemu $Oxyz$ potrebno devet podataka. Međutim, svi navedeni podaci nisu međusobno nezavisni, jer su vektori \mathbf{v} i $\boldsymbol{\lambda}$ po pretpostavci jedinični i uzajamno upravni (ortonormirani), tako da među njihovim koordinatama postoje ove tri veze

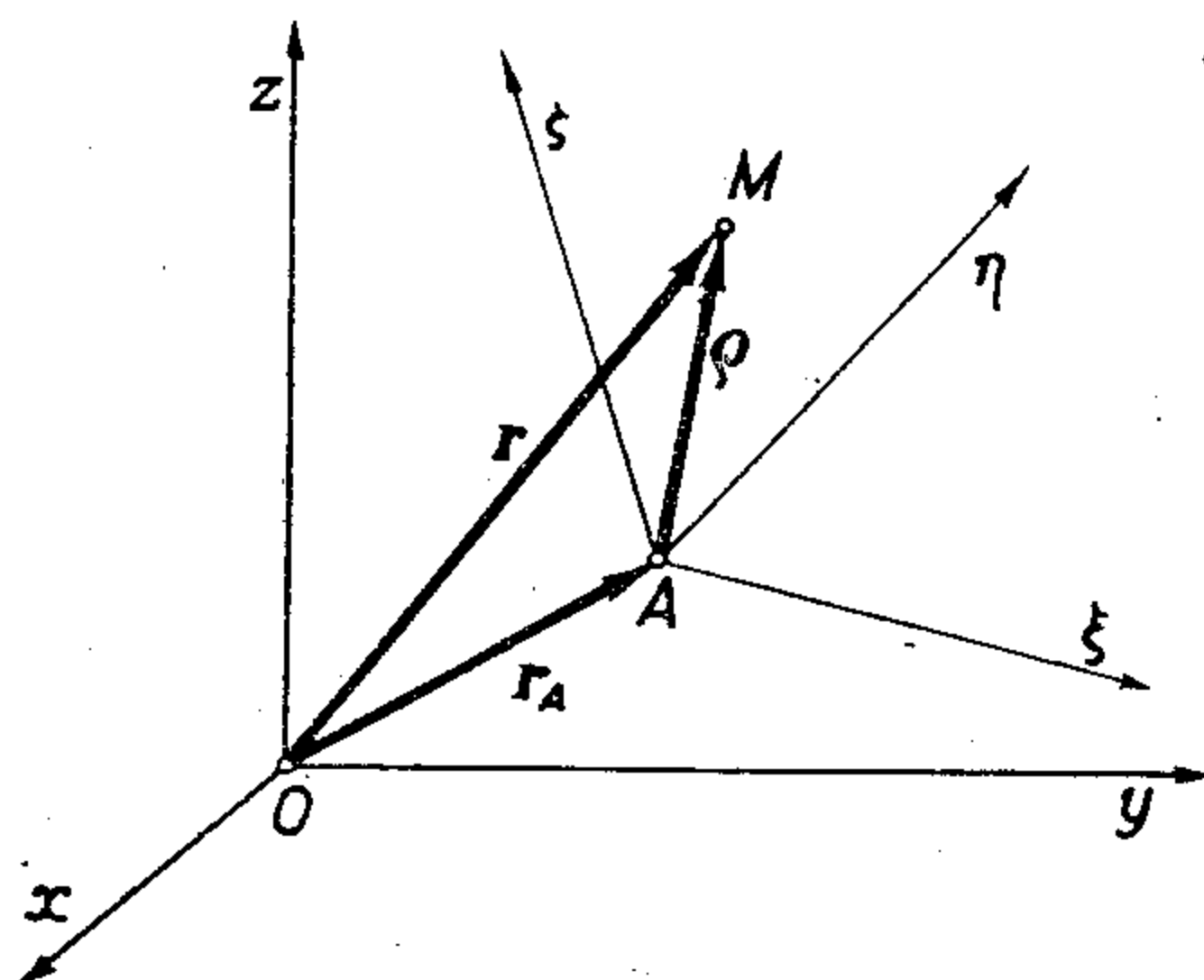
$$\boldsymbol{\lambda}^2 = a_{11}^2 + a_{21}^2 + a_{31}^2 = 1,$$

$$\mathbf{v}^2 = a_{13}^2 + a_{23}^2 + a_{33}^2 = 1,$$

$$\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\lambda} = a_{13} a_{11} + a_{23} a_{21} + a_{33} a_{31} = 0.$$

Dakle, svega $9 - 3 = 6$ međusobno nezavisnih podataka potrebno je za određivanje položaja krutog tela u prostoru. Stoga se kaže da *kruto telo ima šest stepena slobode*.

Ako je utvrđen položaj početka A za telo nepromenljivo vezanog koordinatnog sistema $A\xi\eta\xzeta$ (koji se zove i *pokretni koordinatni sistem*), prema *nepokretnom sistemu* koordinata $Oxyz$, potrebno je još utvrditi *orijentaciju* pokretnog sistema prema nepokretnom (sl. 20).



Slika 20

Videli smo da je za to potrebno još tri nezavisna podatka.

Kad se jedinični vektori osa nepokretnog sistema koordinata obeleže \mathbf{i} , \mathbf{j} i \mathbf{k} , a pokretnog $\boldsymbol{\lambda}$, $\boldsymbol{\mu}$ i $\boldsymbol{\nu}$, kosinusi uglova među osama ova dva koordinatna sistema mogu se izraziti tablicom

$$(3) \quad \begin{array}{c|ccc} & \boldsymbol{\lambda} & \boldsymbol{\mu} & \boldsymbol{\nu} \\ \hline \mathbf{i} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \hline \mathbf{j} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \hline \mathbf{k} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ \hline \end{array}$$

tako da je

$$(4) \quad \begin{aligned} \mathbf{i} &= a_{11} \boldsymbol{\lambda} + a_{12} \boldsymbol{\mu} + a_{13} \boldsymbol{\nu}; & \mathbf{j} &= a_{21} \boldsymbol{\lambda} + a_{22} \boldsymbol{\mu} + a_{23} \boldsymbol{\nu}; \\ \mathbf{k} &= a_{31} \boldsymbol{\lambda} + a_{32} \boldsymbol{\mu} + a_{33} \boldsymbol{\nu}, \end{aligned}$$

a takođe i

$$(5) \quad \boldsymbol{\lambda} = a_{11} \mathbf{i} + a_{21} \mathbf{j} + a_{31} \mathbf{k}; \quad \boldsymbol{\mu} = a_{12} \mathbf{i} + a_{22} \mathbf{j} + a_{32} \mathbf{k}; \quad \boldsymbol{\nu} = a_{13} \mathbf{i} + a_{23} \mathbf{j} + a_{33} \mathbf{k}.$$

Kako su vektori \mathbf{i} , \mathbf{j} , i \mathbf{k} uzajamno upravni i jedinični, a takođe i vektori $\boldsymbol{\lambda}$, $\boldsymbol{\mu}$ i $\boldsymbol{\nu}$, to kosinusi pravaca a_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) zadovoljavaju naredne relacije

$$(6) \quad \begin{aligned} \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} &= \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = 0, \\ \mathbf{i} \cdot \mathbf{i} &= \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1; \end{aligned}$$

i

$$(7) \quad \begin{aligned} \boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{\nu} &= \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{\mu} = 0, \\ \boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{\lambda} &= \boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu} = 1. \end{aligned}$$

Te iste veze se, koristeći obrasce (4) i (5) mogu napisati u skalarnom obliku:

$$(6a) \quad \begin{aligned} a_{21} a_{31} + a_{22} a_{32} + a_{23} a_{33} &= 0, & a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 &= 1; \\ a_{31} a_{11} + a_{32} a_{12} + a_{33} a_{13} &= 0, & a_{21}^2 + a_{22}^2 + a_{23}^2 &= 1; \\ a_{11} a_{21} + a_{12} a_{22} + a_{13} a_{23} &= 0, & a_{31}^2 + a_{32}^2 + a_{33}^2 &= 1; \end{aligned}$$

odnosno

$$(7a) \quad \begin{aligned} a_{12} a_{13} + a_{22} a_{23} + a_{32} a_{33} &= 0, & a_{11}^2 + a_{21}^2 + a_{31}^2 &= 1; \\ a_{13} a_{11} + a_{23} a_{21} + a_{33} a_{31} &= 0, & a_{12}^2 + a_{22}^2 + a_{32}^2 &= 1; \\ a_{11} a_{12} + a_{21} a_{22} + a_{31} a_{32} &= 0, & a_{13}^2 + a_{23}^2 + a_{33}^2 &= 1. \end{aligned}$$

Sistemi skalarnih jednačina (6a) i (7a) su ekvivalentni, jer ako je jedan do tih sistema zadovoljen, zbog veza (4) i (5) između trijedara $\boldsymbol{\lambda}$, $\boldsymbol{\mu}$, $\boldsymbol{\nu}$ i \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} mora biti

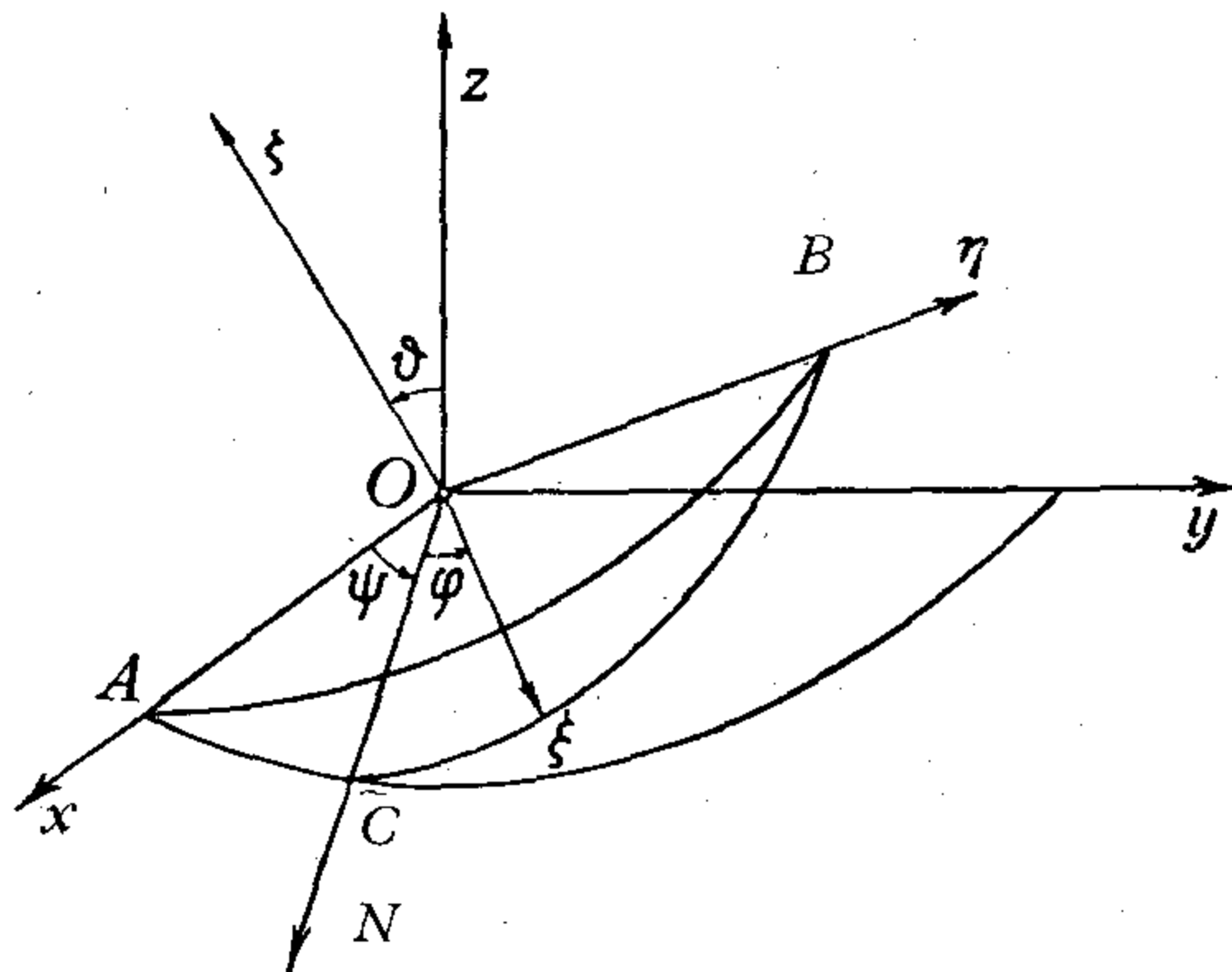
i drugi. Zaista, ako su vektori λ , μ i ν određeni izrazima (5) i ako između vektora i , j i k postoje veze (6) onda jednačine (6) predstavljaju sistem od 6 jednačina sa 6 nepoznatih skalarnih proizvoda $\lambda \cdot \lambda$, $\lambda \cdot \mu$, $\lambda \cdot \nu$, $\mu \cdot \mu$, $\mu \cdot \nu$, $\nu \cdot \nu$. Jednačine (7) su rešenja tog sistema.

Postoji dakle, šest nezavisnih veza između devet kosinusa uglova, pa je od devet kosinusa samo njih tri nezavisna. Do ovog zaključka smo već došli kada smo analizirali broj potrebnih i dovoljnih podataka za određivanje položaja krutog tela u prostoru.

1.8.1.1. Ojlerovi uglovi

Kako su od devet kosinusa a_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) samo tri nezavisna mogu se naći tri međusobno nezavisna parametra tako da se svih devet kosinusa izraze kao funkcije tih parametara.

Najčešće su u upotrebi i najpogodniji su za određivanje položaja krutog tela, odnosno pokretnog trijedra prema nepokretnom (ili obratno) tri na naročit način definisana ugla, koji su poznati pod nazivom *Ojlerovi* (Euler) *uglovi*. Radi nji-



Slika 21

h ovog određivanja povucimo kroz početak O nepokretnog koordinatnog sistema $Oxyz$ (sl. 21) ose $O\xi\eta\zeta$ paralelne osama pokretnog sistema $A\xi\eta\zeta$.

Ravni xOy i $\xi O\eta$ seku se duž prave ON , koja se naziva *linija čvorova*. Ugao φ koji se nalazi u $\xi O\eta$ ravni i koji obrazuje liniju čvorova i osa $O\xi$,

$$\varphi = \sphericalangle NO\xi,$$

naziva se *ugao sopstvene rotacije*.

Ugao precesije ψ nalazi se u xOy ravni i obrazuju ga osa Ox i linija čvorova,

$$\psi = \sphericalangle xON.$$

Ugao nutacije ϑ jeste ugao između ravni xOy i $\xi O\eta$, odnosno između osa Oz i $O\zeta$, pa se nalazi u ravni upravnoj na liniji čvorova,

$$\vartheta = \sphericalangle zO\zeta.$$

Ovi nazivi za Ojlerove uglove φ , ψ i ϑ potiču iz astronomije. Uglovi φ , ψ i ϑ u potpunosti određuju svih devet kosinusa a_{ij} uglova između osa pokretnog

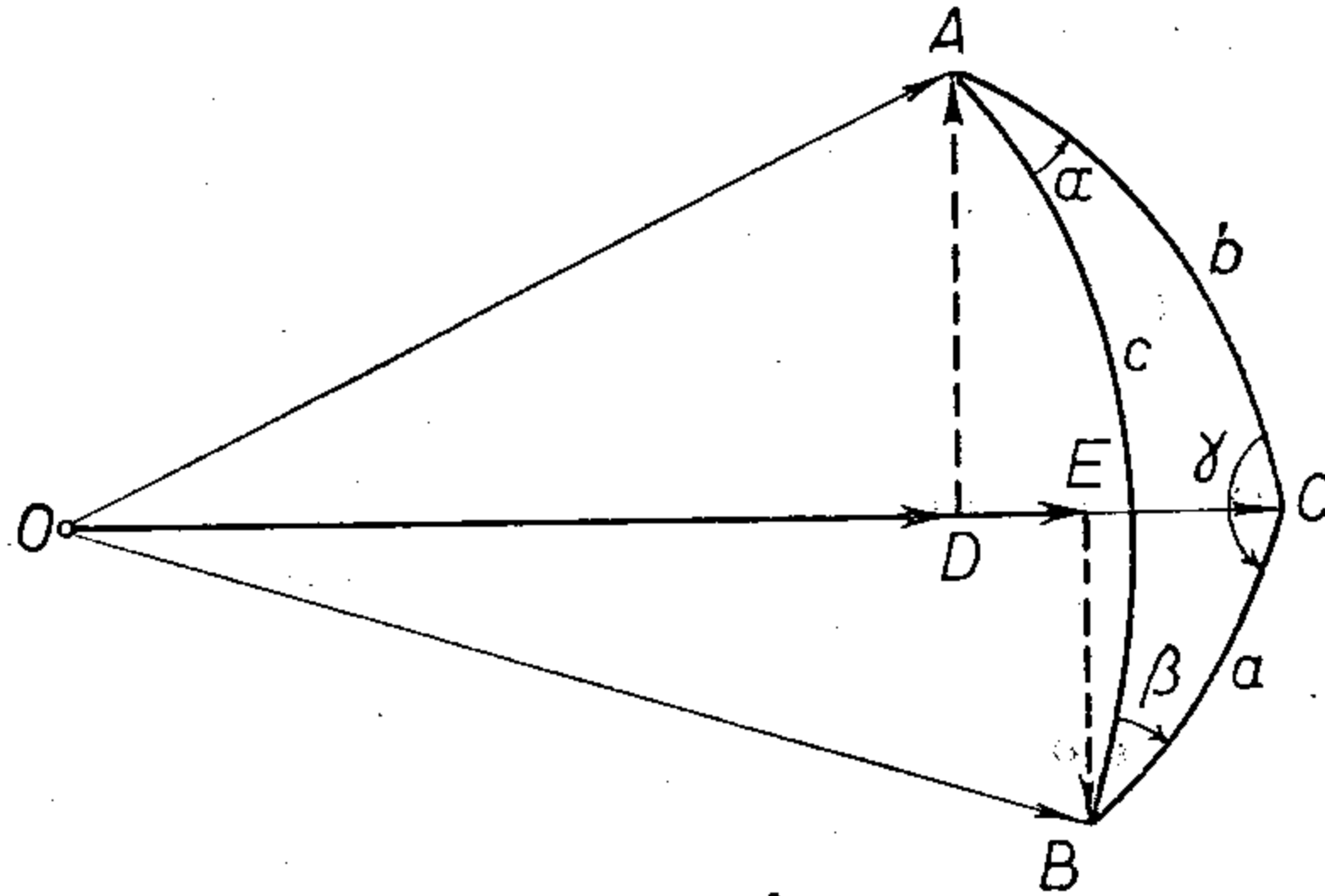
i nepokretnog koordinatnog sistema. Kosinusi a_{ij} najjednostavnije mogu da se izraze Ojlerovim uglovima pomoću kosinusne teoreme za sferni trougao.

Pod sfernim trouglom podrazumeva se trougao na sferi čije su stranice lukovi velikih krugova manji od polukruga. Tačke na sferi u kojima se lukovi seku jesu temena sfernog trougla. Posmatrajmo na nekoj sferi jediničnog poluprečnika trougao ABC (sl. 22). Poluprečnici OA , OB i OC obrazuju među sobom uglove

$$\sphericalangle BOC = a, \quad \sphericalangle COA = b, \quad \sphericalangle AOB = c,$$

a ravni određene tim poluprečnicima obrazuju među sobom diedre čiji su uglovi

$$\sphericalangle (COA, AOB) = \alpha, \quad \sphericalangle (AOB, BOC) = \beta, \quad \sphericalangle (BOC, COA) = \gamma.$$



Slika 22

Spustimo iz temena A i B normale na poluprečnik OC , neka su podnožja tih normala u tačkama D i E . Očigledne su sa slike 22 vektorske jednačine

$$\vec{OA} = \vec{OD} + \vec{DA}, \quad \vec{OB} = \vec{OE} + \vec{EB}.$$

Kako je posmatrana sfera jediničnog poluprečnika biće

$$\vec{OA} \cdot \vec{OB} = \cos c = (\vec{OD} + \vec{DA}) \cdot (\vec{OE} + \vec{EB}).$$

Međutim je

$$\overline{OD} = \cos b, \quad \overline{OE} = \cos a, \quad \overline{DA} = \sin b, \quad \overline{EB} = \sin a,$$

a

$$\sphericalangle (\vec{OD}, \vec{EB}) = \frac{\pi}{2}, \quad \sphericalangle (\vec{DA}, \vec{OE}) = \frac{\pi}{2}, \quad \sphericalangle (\vec{DA}, \vec{EB}) = \gamma$$

pa će biti

$$(1) \quad \cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \gamma,$$

što predstavlja kosinusnu teoremu za stranice sfernog trougla.

Pogodnim izborom sfernih trouglova mogu se primenom obrasca (1) odrediti svi kosinusi a_{ij} . Treba uvek izabrati takav sferni ugao da mu jedna stranica određuje ugao čiji se kosinus traži, a jedno teme da mu bude na liniji čvorova. Ti sferni trouglovi su:

Za $\sphericalangle xO\xi$ — teme C je na ON , A na x -, a B na ξ -osi

$$(2) \quad a_{11} = \cos \psi \cos \varphi - \sin \psi \sin \varphi \cos \vartheta.$$

Za $\sphericalangle xO\eta$ – teme C je na ON , A na x -, a B na η -osi,

$$(3) \quad a_{12} = -\cos \psi \sin \varphi - \sin \psi \cos \varphi \cos \vartheta.$$

Za $\sphericalangle xO\zeta$ – teme C je na ON , A na x -, a B na ζ -osi,

$$(4) \quad a_{13} = \sin \psi \sin \vartheta$$

Za $\sphericalangle yO\xi$ – teme C je na ON , A na y -, a B na ξ -osi,

$$(5) \quad a_{21} = \sin \psi \cos \varphi + \cos \psi \sin \varphi \cos \vartheta.$$

Za $\sphericalangle yO\eta$ – teme C je na ON , A na y -, a B na η -osi,

$$(6) \quad a_{22} = -\sin \psi \sin \varphi + \cos \psi \cos \varphi \cos \vartheta.$$

Za $\sphericalangle yO\zeta$ – teme C je na ON , A na y -, a B na ζ -osi,

$$(7) \quad a_{23} = -\cos \psi \sin \vartheta.$$

Za $\sphericalangle zO\xi$ – teme C je na ON , A na z -, a B na ξ -osi,

$$(8) \quad a_{31} = \sin \varphi \sin \vartheta.$$

Za $\sphericalangle zO\eta$ – teme C je na ON , A na z -, a B na η -osi,

$$(9) \quad a_{32} = \cos \varphi \sin \vartheta.$$

Za $\sphericalangle zO\zeta$ – teme C je na ON , A na z -, a B na ζ -osi,

$$(10) \quad a_{33} = \cos \vartheta,$$

što je očigledno (jer je $a_{33} = \cos(z, \zeta) = \cos \vartheta$).

Prema tome, položaj krutog tela može se potpuno odrediti koordinatama x_A, y_A, z_A pokretnog pola prema nepokretnom koordinatnom sistemu i Ojlerovim uglovima φ, ψ i ϑ . Tih šest veličina nazivaju se i *koordinate krutog tela*.

1.8.2. Određivanje položaja tačke krutog tela

Položaj jedne ma koje tačke M tela u odnosu na samo telo može se odrediti vektorom položaja $\boldsymbol{\rho} = \overrightarrow{AM}$ prema pokretnom polu A ,

$$(1) \quad \boldsymbol{\rho} = \xi \boldsymbol{\lambda} + \eta \boldsymbol{\mu} + \zeta \boldsymbol{\nu}.$$

Prema nepokretnom polu O položaj te tačke je određen vektorom položaja $\mathbf{r} = \overrightarrow{OM}$, a kako je $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM}$, može se pisati

$$(2) \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_A + \boldsymbol{\rho}.$$

Vektor \mathbf{r} se u odnosu na nepokretni koordinatni sistem može izraziti

$$(3) \quad \mathbf{r} = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k},$$

a vektor \mathbf{r}_A položaja A prema nepokretnom polu O ,

$$(4) \quad \mathbf{r}_A = x_A \mathbf{i} + y_A \mathbf{j} + z_A \mathbf{k}.$$

S obzirom na vektorske jednačine (1), (3) i (4) jednačina (2) se može napisati u obliku:

$$(5) \quad x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k} = (x_A \mathbf{i} + y_A \mathbf{j} + z_A \mathbf{k}) + (\xi \boldsymbol{\lambda} + \eta \boldsymbol{\mu} + \zeta \boldsymbol{\nu}).$$

Skalarnim množenjem ove jednačine redom jediničnim vektorima \mathbf{i} , \mathbf{j} i \mathbf{k} dobiće se naredne tri skalarne jednačine za određivanje položaja uočene tačke M u odnosu na nepokretni koordinatni sistem $Oxyz$, (naravno kad je uzajmani položaj pokretnog i nepokretnog sistema poznat)

$$(6) \quad \begin{aligned} x &= x_A + \xi a_{11} + \eta a_{12} + \zeta a_{13}, \\ y &= y_A + \xi a_{21} + \eta a_{22} + \zeta a_{23}, \\ z &= z_A + \xi a_{31} + \eta a_{32} + \zeta a_{33}. \end{aligned}$$

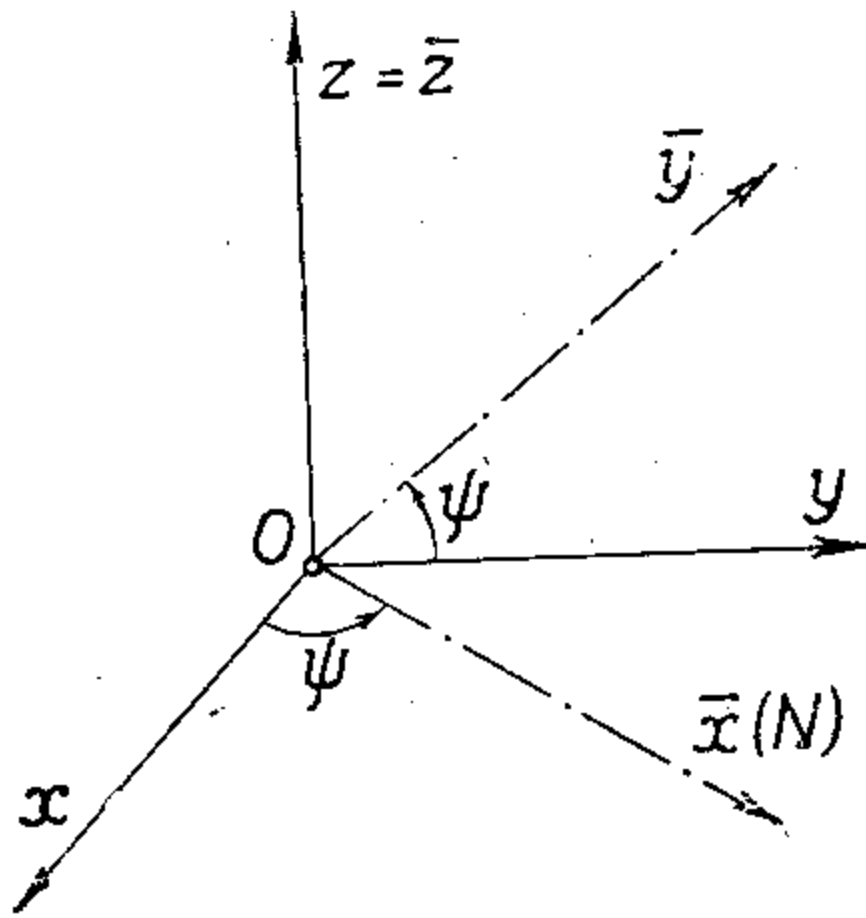
Ako je poznat položaj tačke M krutog tela i položaj pokretnog pola A prema nepokretnom polu O , može se iz vektorske jednačine (2) odrediti položaj tačke M prema pokretnom polu pomoću vektorske jednačine

$$(7) \quad \mathbf{q} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_A.$$

Skalarnim množenjem ove jednačine redom jediničnim vektorima $\mathbf{\lambda}$, $\mathbf{\mu}$ i $\mathbf{\nu}$ dobiće se tri skalarne jednačine za određivanje položaja tačke M u odnosu na pokretni koordinatni sistem $A\xi\eta\zeta$.

$$(8) \quad \begin{aligned} \xi &= a_{11}(x - x_A) + a_{21}(y - y_A) + a_{31}(z - z_A), \\ \eta &= a_{12}(x - x_A) + a_{22}(y - y_A) + a_{32}(z - z_A), \\ \zeta &= a_{13}(x - x_A) + a_{23}(y - y_A) + a_{33}(z - z_A). \end{aligned}$$

Ako se u skalarnim jednačinama (6) i (8) kosinusi a_{ij} izraze pomoću obrazaca (1.8.1.1,2—10) kao funkcije Ojlerovih uglova, koordinate tačke M će biti funkcije koordinata krutog tela $x_A, y_A, z_A, \varphi, \psi, \vartheta$.



Slika 23.1

Do tih izraza se može doći i neposredno bez korišćenja obrazaca (1.8.1.1, 2—10) pomoću tri uzastopna obrtanja koordinatnog sistema $Oxyz$, odnosno $A\xi\eta\zeta$ oko tri različite ose. Pretpostavimo zasad da se pokretni i nepokretni polovi O i A poklapaju.

1. Obrtanjem koordinatnog sistema $Oxyz$ oko ose Oz u direktnom smeru za ugao ψ ose x i y će se dovesti do poklapanja sa osama \bar{x} (linija čvorova) i \bar{y} koje se nalaze u ravni xOy , dok z -osa ostaje nepromenjena (sl. 23.1). Koristeći poznate obrasce za obrtanje pravougljih Dekartovih koordinatnih osa u ravni dobiće se

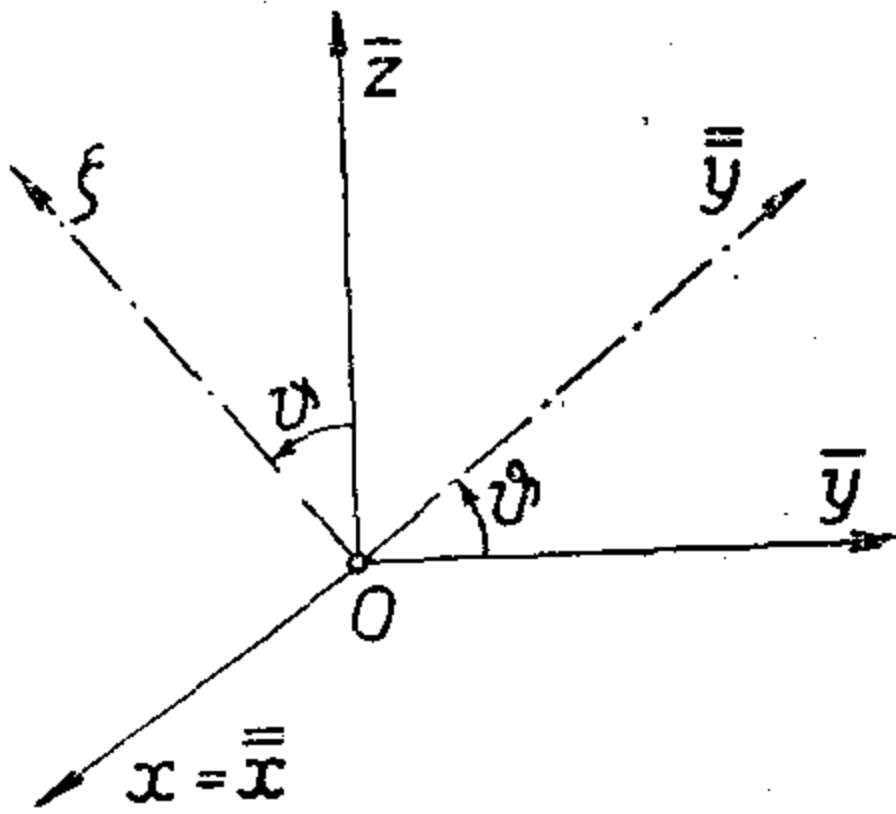
$$(9) \quad \begin{aligned} x &= \bar{x} \cos \psi - \bar{y} \sin \psi, \\ y &= \bar{x} \sin \psi + \bar{y} \cos \psi, \\ z &= \bar{z}. \end{aligned}$$

2. Obrtanjem koordinatnog sistema $\bar{O}\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ oko linije čvorova (ose $\bar{O}\bar{x}$) za ugao ϑ u direktnom smeru dovešće se osa \bar{y} do poklapanja sa osom $\bar{\bar{y}}$, a osa \bar{z} do poklapanja sa osom $\bar{\bar{\zeta}}$, koje se nalaze u ravni $\bar{y}O\bar{z}$, dok osa \bar{x} ostaje nepromenjena (sl. 23.2):

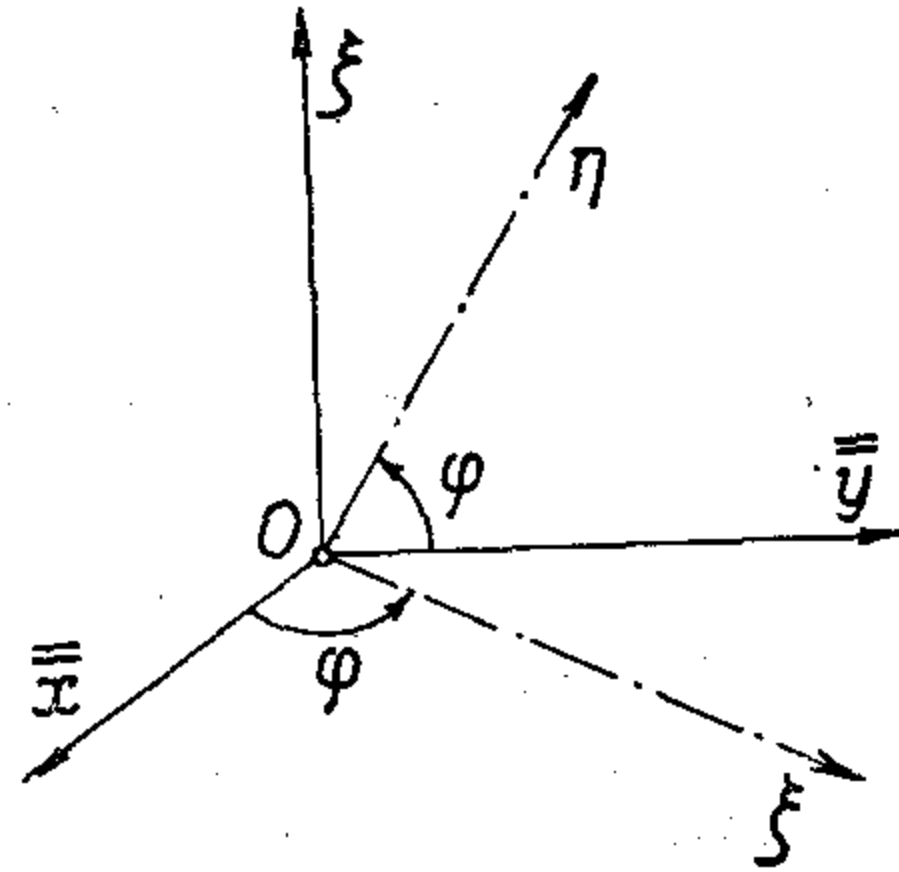
$$(10) \quad \begin{aligned} \bar{x} &= \bar{\bar{x}}, \\ \bar{y} &= \bar{\bar{y}} \cos \vartheta - \bar{\bar{\zeta}} \sin \vartheta, \\ \bar{z} &= \bar{\bar{y}} \sin \vartheta + \bar{\bar{\zeta}} \cos \vartheta. \end{aligned}$$

3. Obrtanjem koordinatnog sistema $\overline{Ox\bar{y}\bar{z}}$, najzad, oko $O\bar{z}$ u direktnom smeru za ugao ϑ , tako da se \bar{x} dovede do poklapanja sa osom ξ , a osa \bar{y} sa osom η , koje se nalaze u ravni \overline{xOy} , dok osa \bar{z} ostaje nepromenjena (sl. 23.3), dobiće se

$$(11) \quad \begin{aligned} \bar{x} &= \xi \cos \varphi - \eta \sin \varphi; \\ \bar{y} &= \xi \sin \varphi + \eta \cos \varphi; \\ \bar{z} &= \zeta. \end{aligned}$$



Slika 23.2



Slika 23.3

Zamenom obrazaca (11) u (10) dobiće se

$$(12) \quad \begin{aligned} \bar{x} &= \xi \cos \varphi - \eta \sin \varphi; \\ \bar{y} &= \xi \sin \varphi \cos \vartheta + \eta \cos \varphi \cos \vartheta - \zeta \sin \vartheta; \\ \bar{z} &= \xi \sin \varphi \sin \vartheta + \eta \cos \varphi \sin \vartheta + \zeta \cos \vartheta, \end{aligned}$$

a zamenom ovih izraza u (9) dobiće se najzad

$$(13) \quad \begin{aligned} x &= \xi (\cos \psi \cos \varphi - \sin \psi \sin \varphi \cos \vartheta) + \eta (-\cos \psi \sin \varphi - \\ &\quad - \sin \psi \cos \varphi \cos \vartheta) + \zeta \sin \psi \sin \vartheta; \\ y &= \xi (\sin \psi \cos \varphi + \cos \psi \sin \varphi \cos \vartheta) + \eta (-\sin \psi \sin \varphi + \\ &\quad + \cos \psi \cos \varphi \cos \vartheta) - \zeta \cos \psi \sin \vartheta; \\ z &= \xi \sin \varphi \sin \vartheta + \eta \cos \varphi \sin \vartheta + \zeta \cos \vartheta. \end{aligned}$$

Kad se nepokretni pol O i pokretni A ne poklapaju, sa leve strane jednačina (13) treba x, y i z zameniti sa $x - x_A, y - y_A, z - z_A$, pa će se dobiti izrazi (6).

Izrazi (8) se mogu dobiti na sličan način: 1) Koordinatni sistem $A\xi\eta\zeta$ treba obrnuti oko ζ -ose za ugao $-\varphi$ tako da se ose ξ i η dovedu do poklapanja sa osama \bar{x} i \bar{y} ; 2) tako dobiveni sistem koordinata $A\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ treba obrnuti oko \bar{x} za ugao $-\vartheta$ da bi se ose \bar{y} i \bar{z} dovele do poklapanja sa osama y i z , i najzad 3) koordinatni sistem $Axyz$ treba obrnuti za ugao $-\psi$ oko ose z da bi se ose x i y dovele do poklapanja sa osama $x = \bar{x}$ i y . Na taj način dobivene veze između koordinata tačke M u odnosu na pokretni i nepokretni sistem koordinata mogu se dobiti rešavanjem jednačina (13) po ξ, η i ζ kao sistema od tri linearne jednačine sa tri nepoznate, ξ, η, ζ . Ti obrasci glase

$$\begin{aligned}
 \xi &= (x - x_A)(\cos \psi \cos \varphi - \sin \psi \sin \varphi \cos \vartheta) + \\
 &\quad + (y - y_A)(\sin \psi \cos \varphi + \cos \psi \sin \varphi \cos \vartheta) + \\
 &\quad + (z - z_A) \sin \varphi \sin \vartheta, \\
 (14) \quad \eta &= (x - x_A)(-\cos \psi \sin \varphi - \sin \psi \cos \varphi \cos \vartheta) + \\
 &\quad + (y - y_A)(-\sin \psi \sin \varphi + \cos \psi \cos \varphi \cos \vartheta) + \\
 &\quad + (z - z_A) \cos \varphi \sin \vartheta, \\
 \zeta &= (x - x_A) \sin \varphi \sin \vartheta - (y - y_A) \cos \psi \sin \vartheta + \\
 &\quad + (z - z_A) \cos \vartheta.
 \end{aligned}$$

Obrasci (13) odnosno (14) mogu da posluže i za određivanje kosinusa a_{ii} pomoću Ojlerovih uglova.

1.9. Kretanje krutog tela. Konačne jednačine kretanja krutog tela

Kad se neko telo kreće njegove tačke menjaju svoje položaje u prostoru. U odeljku 1.8.2. pokazano je da se položaj neke tačke tela može uvek odrediti kad su poznati položaji tačke prema pokretnom polu i položaj samoga tela, tj. vektor \mathbf{p} i šest koordinata krutog tela $\mathbf{r}_A = \{x_A, y_A, z_A\}$ i φ, ψ, ϑ . Položaj pokretnog tela je u svakom trenutku vremena određen koordinatama vektora položaja pokretnog pola i Ojlerovim uglovima kao funkcijama vremena. Stoga su

$$(1) \quad x_A = x_A(t), \quad y_A = y_A(t), \quad z_A = z_A(t); \quad \varphi = \varphi(t), \quad \psi = \psi(t), \quad \vartheta = \vartheta(t)$$

konačne jednačine kretanja krutog tela. Ako se telo upošte kreće, bar jedna od šest koordinata krutog tela mora biti promenljiva u toku vremena.

Jednačine (1) ne određuju na jedinstven način kretanje koordinatnog sistema $A\xi\eta\zeta$ prema koordinatnom sistemu $Oxyz$. Koordinate krutog tela prema jednačinama (1) određuju u svakom trenutku vremena položaj sistema $A\xi\eta\zeta$ prema sistemu $Oxyz$ pod pretpostavkom da je sistem $Oxyz$ utvrđen u prostoru. Ta pretpostavka se, međutim, iz jednačina (1) ne vidi. Stoga se može slobodno reći da jednačine (1) određuju i kretanje sistema $Oxyz$ prema sistemu $A\xi\eta\zeta$, odnosno da koordinate krutog tela određuju samo *relativan položaj* jednog koordinatnog sistema u odnosu na drugi.

Za svaki od ova dva koordinatna sistema može se vezati po jedno kruto telo, kao nepromenljiva sredina za sistem za koji je vezana. Ove dve sredine mogu menjati položaj jedna prema drugoj. Ako se jedna sredina posmatra kao nepokretna (možemo je nazvati i *nepokretni prostor*), druga sredina (*pokretni prostor*) će se kretati *p r e m a* nepokretnoj. Do istog relativnog položaja dve sredine doći će se nezavisno od toga koja se sredina kreće, a koja se smatra za nepokretnu, jer jednačine kretanja (1) određuju samo relativan položaj u zavisnosti od vremena. Kad se jedna sredina smatra nepokretnom, kretanje druge sredine u odnosu na ovu naziva se *direktno kretanje*. Ako, međutim, dve posmatrane sredine promene uloge takvo kretanje se naziva *inverzno (obrnuto) kretanje*. Koje će se od dva kretanja smatrati kao direktno, a koje kao inverzno zavisi od dogovora, jer inverzno kretanje inverznog kretanja je direktno itd.

U ovim izlaganjima kretanje sistema $A\xi\eta\zeta$ i sredine za njega vezane prema $Oxyz$ smatraće se direktnim.

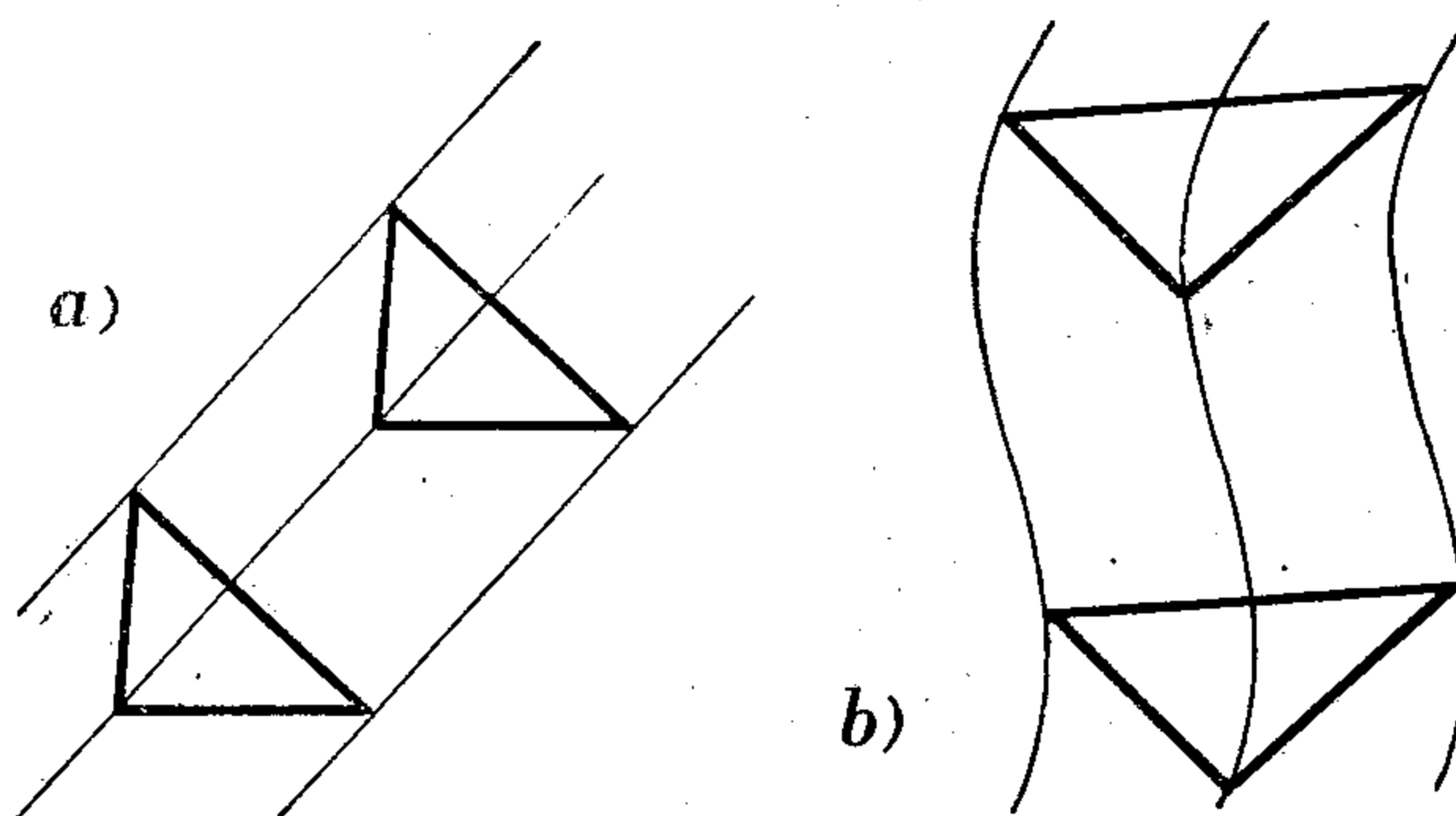
Direktno i inverzno kretanje nisu u opštem slučaju ista kretanja. Jednačine (1.8.2—6), za dato kretanje tela su konačne jednačine kretanja tačke tela prema koordinatnom sistemu $Oxyz$ (nepokretnom prostoru); to su dakle jednačine di-

reknog kretanja tačke M tela i određuju njenu direktnu trajektoriju. Pri tome mogu biti promenljivi parametri položaja tela tj. x_A, y_A, z_A i a_{ij} , ali su koordinate ξ, η, ζ tačke nepromenljive. Jednačine (1.8.2—8) određuju inverzno kretanje tačke M nepromenljivo vezane za sredinu $Oxyz$. U ovom slučaju su opet promenljivi parametri položaja krutog tela, ali su sad koordinate x, y, z tačke u odnosu na sistem $Oxyz$ nepromenljive. *Trajektorija inverznog kretanja (inverzna trajektorija) se ne mora poklapati sa direktnom.*

Konačne jednačine kretanja (1) određuju kretanje tela u opštem slučaju. U pojedinim slučajevima jedna ili više koordinata tela mogu za vreme kretanja imati stalnu vrednost. Među takvim kretanjima posebno su važne neke osnovne vrste kretanja kao: *translacija, rotacija oko nepokretne ose, ravansko kretanje, sferno kretanje i zavojno kretanje.*

1.9.1. Translatorno kretanje (translacija)

Translacija je takvo kretanje krutog tela pri kome se ne menja pravac i smer (orijentacija) pravih (ili duži) nepromenljivo vezanih sa telom; sve prave i duži vezane nepromenljivo sa telom pomeraju se paralelno. Pri takvom kretanju



Slika 24

trajektorije svih tačaka tela su ili a) paralelne prave i translacija je *pravolinijska*; ili b) podudarne, samo paralelno pomerene krive linije i onda je *translacija krivolinijska* (sl. 24, a i b).

Posmatrajmo u nekoj početnoj konfiguraciji tela vektor $\vec{c} = \overrightarrow{AM}$ vezan za ma koje dve tačke A i M tela. Kretanjem tela tačka A će preći u položaj A_1 , a tačka M u položaj M_1 . Ako je kretanje translatorno iz definicije takvog kretanja proističe da vektor $\vec{c}_1 = \overrightarrow{A_1M_1}$ mora biti jednak vektoru \vec{c} (sl. 25) ($\vec{c}_1 = \vec{c}$).

U početnoj konfiguraciji tela položaj tačke M je određen vektorom položaja

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_A + \mathbf{c}.$$

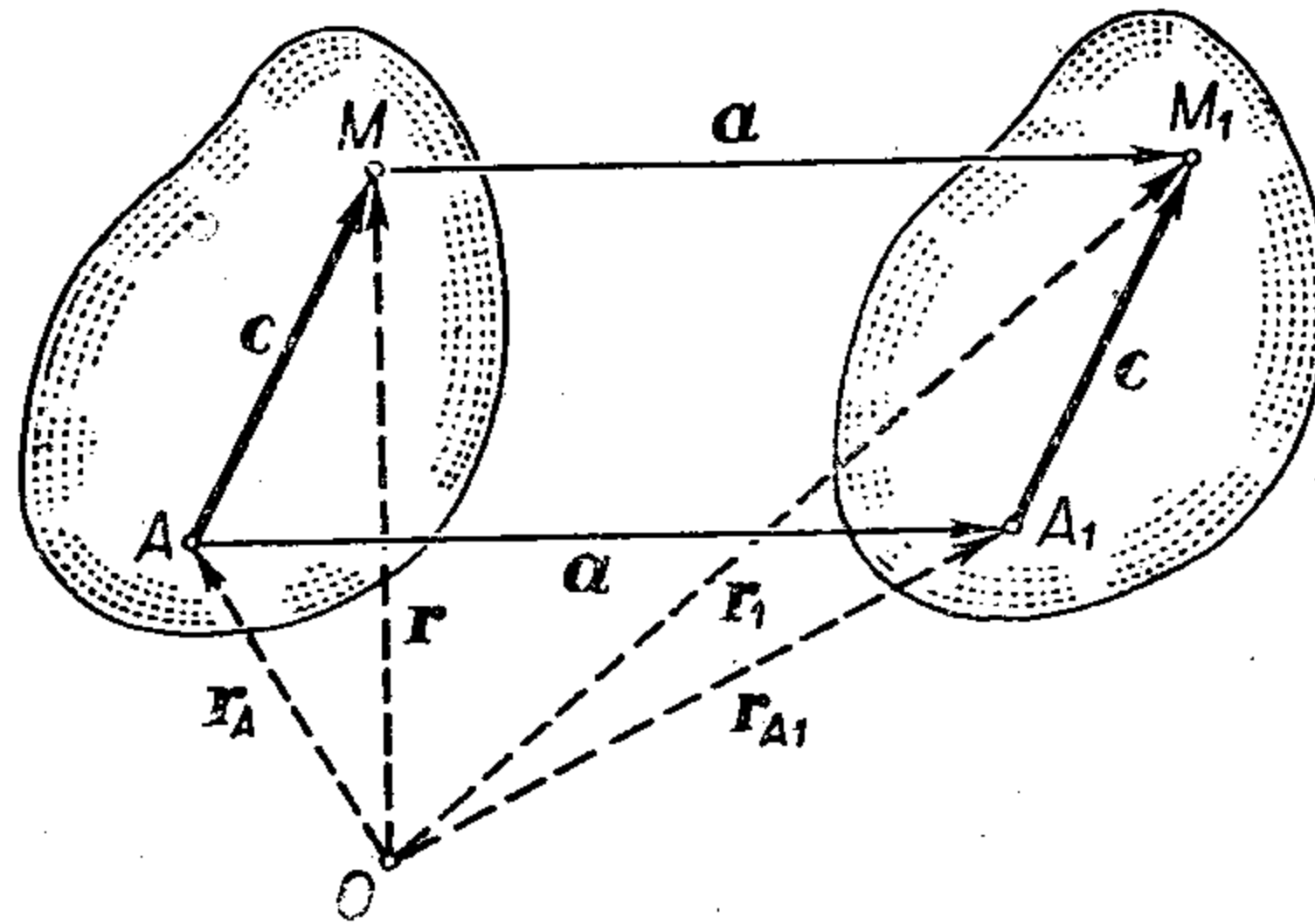
Posle translatornog kretanja novi položaj M_1 tačke M biće određen vektorom položaja \mathbf{r}_1 ,

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_{A_1} + \mathbf{c}_1 = \mathbf{r}_{A_1} + \mathbf{c}.$$

Pomeranje tačke M iznosi:

$$(1) \quad \overrightarrow{MM_1} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r} = \mathbf{r}_{A_1} - \mathbf{r}_A = \overrightarrow{AA_1}.$$

Kako su tačke A i M proizvoljno izabrane u telu, odavde se može zaključiti da pri translatorsnom kretanju sve tačke tela izvrše jednaka pomeranja. Prema tome, *pri translatorsnom kretanju dovoljno je odrediti kretanje samo jedne tačke tela, recimo pola A ; kretanje svih ostalih tačaka tela, pa i samog tela, time je potpuno određeno.*



Slika 25

Kretanje pokretnog pola određeno je sa tri skalarne jednačine kretanja

$$(2) \quad x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t),$$

a kako pri translatorsnom kretanju kretanje pola određuje i kretanje tela, to su za vreme translatorsnog kretanja Ojlerovi uglovi nepromenljivi,

$$\varphi = \text{const.}, \quad \psi = \text{const.}, \quad \vartheta = \text{const.}$$

Stoga kruto telo, u slučaju translatorsnog kretanja, ima *tri stepena slobode*.

Ako se sa \mathbf{a} obeleži vektor pomeranja jedne tačke tela, prema (1) je pomeranje svih tačaka tela određeno tim vektorom,

$$\mathbf{r}_1 - \mathbf{r} = \mathbf{r}_{A_1} - \mathbf{r}_A = \mathbf{a}.$$

Translacija određena vektorom \mathbf{a} obeležava se kratko simbolom $T(\mathbf{a})$.

Kad se translatorsnim kretanjem telo prevodi iz jednog položaja u njemu blizak, tako da tačke tela izvrše elementarna pomeranja $\Delta \mathbf{r}$, pokretni pol A izvrši elementarno pomeranje $\Delta \mathbf{r}_A$ i za sve tačke tela važi

$$(3) \quad \Delta \mathbf{r} = \Delta \mathbf{r}_A.$$

1.9.2. Rotacija krutog tela oko nepokretne ose

Neka su dve tačke, recimo M i N krutog tela nepokretne u prostoru. Položaji tih tačaka su određeni prema obrascu (1.8.2 — 2) vektorskim izrazima

$$(1) \quad \mathbf{r}_M = \mathbf{r}_A + \mathbf{e}_M \quad \text{i} \quad \mathbf{r}_N = \mathbf{r}_A + \mathbf{e}_N,$$

pri čemu je A neka tačka tela koju smo izabrali za pokretni pol. Posmatrajmo tačke

koje se nalaze na pravoj određenoj tačkama M i N . Položaj neke tačke na pravoj kroz M i N biće prema pokretnom polu određen vektorom položaja

$$(2) \quad \mathbf{q} = \mathbf{q}_M + \lambda \overrightarrow{MN},$$

gde je za svaku uočenu tačku na posmatranoj pravoj $\lambda = \text{const.}$ Prema nepokretnom polu O položaj ma koje tačke na pravoj MN određen je izrazom:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_A + \mathbf{q} = \mathbf{r}_A + \mathbf{q}_M + \lambda \overrightarrow{MN},$$

a kako je $\mathbf{r}_A + \mathbf{q}_M = \mathbf{r}_M$, biće

$$(3) \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_M + \lambda \overrightarrow{MN}.$$

Zbog nepokretnosti tačaka M i N i konstantne vrednosti parametra λ za svaku uočenu tačku na pravoj MN može se neposredno zaključiti da je i vektor \mathbf{r} položaja ma koje tačke na pravoj MN nepromenljiv. Dakle, *ako se kruto telo kreće tako da su dve tačke tela nepokretne u prostoru, nepokretne su i sve tačke tela koje se nalaze na pravoj liniji koja prolazi kroz te dve nepokretne tačke.* Takvo kretanje tela zove se *rotacija (obrtnanje)* oko nepokretne ose

Orijentisana prava kroz nepokretne tačke tela naziva se *osa obrtnanja (rotacije)*. Orijetacijom ose određen je smer obrtnanja. Smatra se da je obrtnanje pozitivno kad je, gledano iz pozitivnog smera ose, suprotno kretanju kazaljke na časovniku.

Za početak A pokretnog koordinatnog sistema $A\xi\eta\zeta$ (pokretni pol) može se uzeti ma koja tačka tela; izaberimo ga na osi obrtnanja. Takođe, za početak O nepokretnog koordinatnog sistema (nepokretni pol) može se izabrati ma koja tačka u prostoru; izaberimo i za taj pol neku tačku na osi obrtnanja i to upravo onu koju smo izabrali za pol A . Za tako izabrane polove vektorska jednačina (1.8.2 — 2) za određivanje položaja tačaka tela svodi se na

$$(4) \quad \mathbf{r} = \mathbf{q},$$

jer je $\mathbf{r}_A = \overrightarrow{OA} = \mathbf{0}$. Prema pokretnom koordinatnom sistemu vektor \mathbf{q} ima za svaku tačku krutog tela stalne koordinate. Ako se sa \mathbf{u} označi jedinični vektor koji određuje osu obrtnanja, koordinate vektora \mathbf{u} prema pokretnom i prema nepokretnom koordinatnom sistemu imaju stalne vrednosti.

Skalarnim množenjem jednačine (4) jediničnim vektorom \mathbf{u} dobiva se

$$(5) \quad \mathbf{r} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{q} \cdot \mathbf{u} = \text{const.},$$

što znači da se pri rotaciji krutog tela oko nepokretne ose tačke tela nalaze u stalnim ravnima upravnim na osu rotacije (sl. 26, a). Ako se vektorska jednačina (4) pomnoži vektorski stalnim vektorom \mathbf{u} dobiva se

$$(6) \quad |\mathbf{r} \times \mathbf{u}| = |\mathbf{q} \times \mathbf{u}| = \text{const.},$$

pa se vidi da su tada rastojanja tačaka tela od ose rotacije stalna.

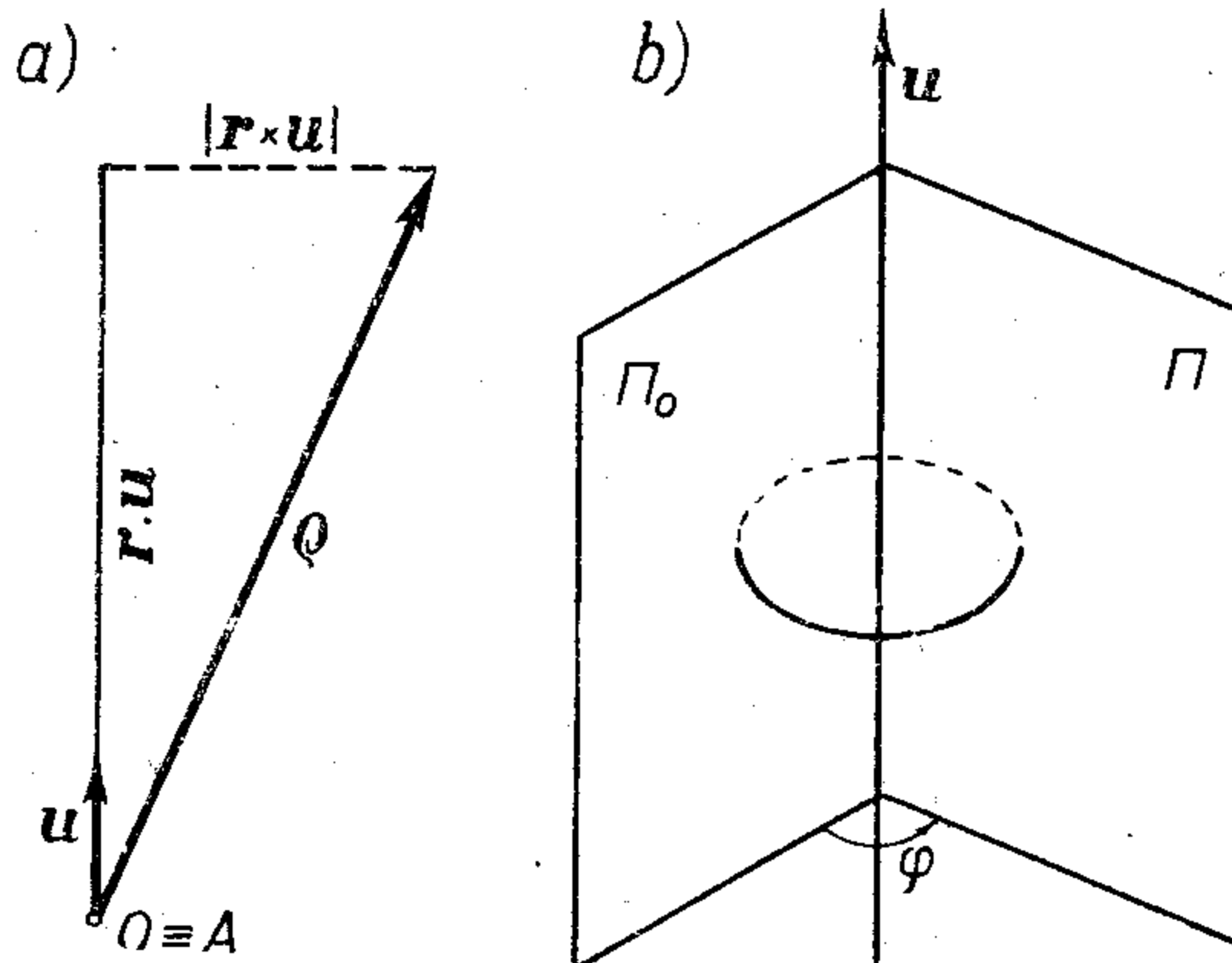
Prema tome, pri rotaciji krutog tela oko nepokretne ose tačke tela opisuju oko ose rotacije krugove u nepokretnim ravnima upravnim na osu rotacije.

Položaj krutog tela koje se obrće oko neke nepokretne ose može se odrediti pomoću jednog jedinog parametra, pod uslovom da je osa rotacije određena. Neka

je Π (sl. 26, b) neka ravan u telu koja prolazi kroz osu obrtanja, a Π_0 neka nepokretna ravan u prostoru, koja takođe prolazi kroz osu obrtanja. Ugao φ između ravni Π i Π_0 se naziva *ugao obrtanja* i određuje položaj tela. Konačna jednačina rotacije tela oko nepokretne ose glasi onda

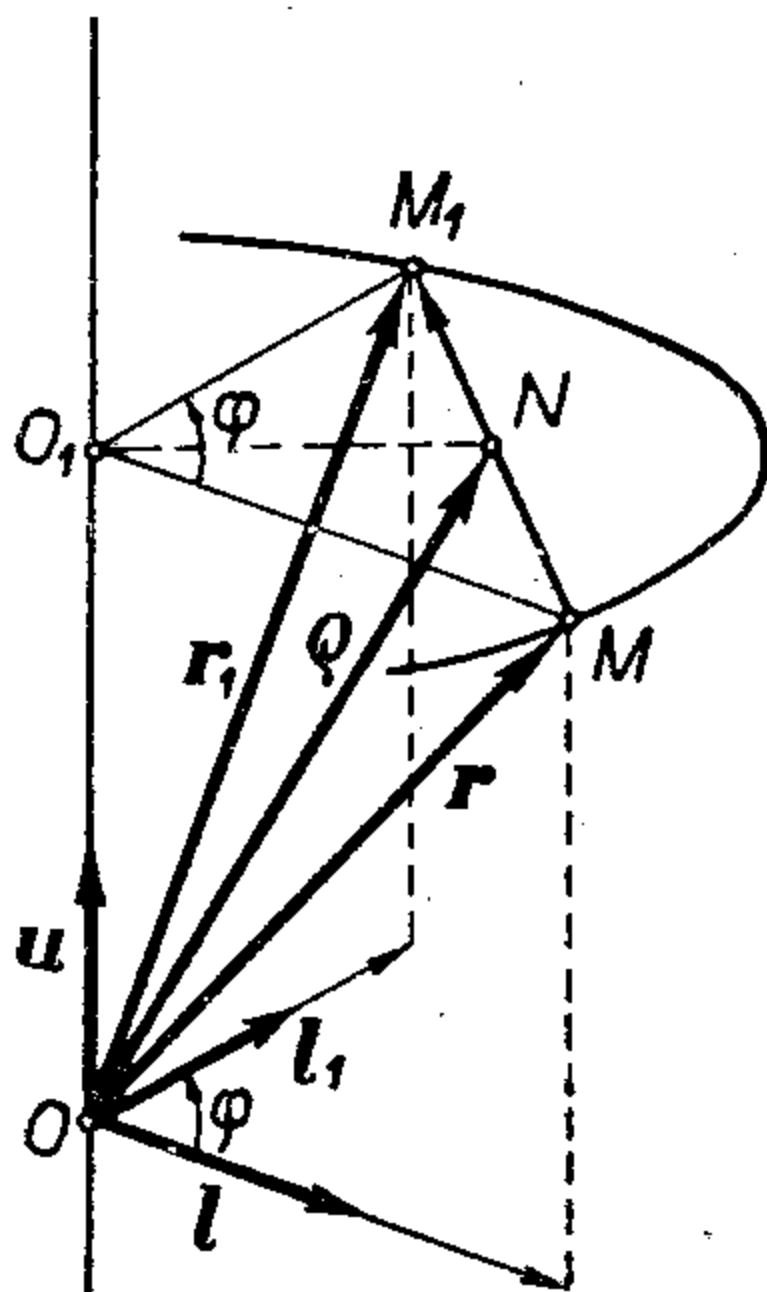
$$(7) \quad \varphi = \varphi(t)$$

pa telo ima *jedan stepen slobode*.



Slika 26

Obično se osa obrtanja uzima i za Oz i za $O\xi$ osu jer je istovremeno i nepokretna u prostoru i nepromenljivo vezana za tačke tela. U tom slučaju nema nutacije ($\vartheta = 0$). Dovođenjem ose $O\xi$ do poklapanja sa Oz (uporedi sl. 21) linija čvorova postaje nedefinisana jer se xOy i $\xi O\eta$ ravni poklapaju, pa je ugao obrtanja upravo ugao između ravni zOx i $\zeta O\xi$, odnosno između osa Ox i $O\xi$.



Slika 27

1.9.2.1. Pomeranje tačke tela pri rotaciji oko nepokretne ose.

OJLEROV I RODRIGOV OBRAZAC

Neka se kruto telo obrne za ugao φ oko stalne ose OO_1 , određene jediničnim vektorom \mathbf{u} (sl. 27). Tačka M tela opiše pri tome kružni luk MM_1 čiji je centar O_1 na osi obrtanja, a centralni ugao $\sphericalangle MO_1M_1 = \varphi$. Neka \mathbf{r} i \mathbf{r}_1 budu vektori položaja uočene tačke na početku i na kraju kretanja u odnosu na pol O na nepokretnoj osi.

Za određivanje vektora položaja \mathbf{r}_1 tačke tela posle obrtanja oko nepomične ose, kad je dat početni položaj \mathbf{r} , osa obrtanja \mathbf{u} i ugao obrtanja φ koristi se *Ojlerov obrazac*.

Vektori \mathbf{r} i \mathbf{r}_1 mogu se rastaviti u po dve komponente, u pravcu ose obrtanja i u ravni kroz O upravnoj na osu obrtanja,

$$(1) \quad \mathbf{r} = l\mathbf{l} + \overline{OO_1}\mathbf{u};$$

$$(2) \quad \mathbf{r}_1 = l_1\mathbf{l}_1 + \overline{OO_1}\mathbf{u},$$

gde je l projekcija vektora \mathbf{r} na ravan upravnu na \mathbf{u} u O , l_1 projekcija vektora \mathbf{r}_1 na istu ravan, a \mathbf{l} i \mathbf{l}_1 su jedinični vektori u pravcima tih projekcija.

Jedinični vektor \mathbf{l}_1 može se (sl. 27) izraziti pomoću jediničnog vektora \mathbf{l} , ugla φ koji obrazuju \mathbf{l} i \mathbf{l}_1 i jediničnog vektora $\mathbf{u} \times \mathbf{l}$ upravnog na \mathbf{l} , obrascem

$$(3) \quad \mathbf{l}_1 = \mathbf{l} \cos \varphi + (\mathbf{u} \times \mathbf{l}) \sin \varphi.$$

Kako je $\overline{O_1M} = \overline{O_1M_1}$, to je i $l_1 = l$. Poluprečnik l kruga koji opisuje tačka M je određen vektorom \mathbf{r} i osom \mathbf{u} pomoću obrasca

$$l = r \sin(\mathbf{r}, \mathbf{u}) = |\mathbf{r} \times \mathbf{u}|,$$

a rastojanje ravni kruga od ravni kroz pol O iznosi $\overline{OO_1} = r \cos(\mathbf{r}, \mathbf{u}) = \mathbf{r} \cdot \mathbf{u}$. Sad se za vektor \mathbf{r}_1 može pisati:

$$\mathbf{r}_1 = l[\mathbf{l} \cos \varphi + (\mathbf{u} \times \mathbf{l}) \sin \varphi] + (\mathbf{r} \cdot \mathbf{u}) \mathbf{u},$$

odn.

$$(4) \quad \mathbf{r}_1 = l\mathbf{l} \cos \varphi + (\mathbf{u} \times l\mathbf{l}) \sin \varphi + (\mathbf{r} \cdot \mathbf{u}) \mathbf{u}.$$

Iz obrasca (1) imamo

$$l\mathbf{l} = \mathbf{r} - \overrightarrow{OO_1} \mathbf{u} = \mathbf{r} - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{u}) \mathbf{u},$$

što kad se unese u (4) daje definitivno Ojlerov obrazac u vektorskom obliku,

$$(5) \quad \mathbf{r}_1 = \mathbf{r} \cos \varphi + (\mathbf{u} \times \mathbf{r}) \sin \varphi + \mathbf{u}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{u})(1 - \cos \varphi).$$

Skalarnim množenjem jediničnim vektorima \mathbf{i} , \mathbf{j} i \mathbf{k} Dekartovih pravougljih osa dobivaju se Ojlerovi obrasci u skalarnom obliku

$$(6) \quad \begin{aligned} x_1 &= x \cos \varphi + (\beta z - \gamma y) \sin \varphi + \alpha(\alpha x + \beta y + \gamma z)(1 - \cos \varphi), \\ y_1 &= y \cos \varphi + (\gamma x - \alpha z) \sin \varphi + \beta(\alpha x + \beta y + \gamma z)(1 - \cos \varphi), \\ z_1 &= z \cos \varphi + (\alpha y - \beta x) \sin \varphi + \gamma(\alpha x + \beta y + \gamma z)(1 - \cos \varphi), \end{aligned}$$

gde su x, y, z i x_1, y_1, z_1 Dekartove pravougule koordinate vektora \mathbf{r} i \mathbf{r}_1 , sa polom u tački O , a α, β i γ su kosinusi pravca ose \mathbf{u} obrtanja prema istom koordinatnom sistemu.

Do obrasca analognog obrascu (5) može se doći ako se pretpostavi da se telo obrnulo oko ose \mathbf{u} za ugao $-\varphi$ tako da tačka M_1 pređe u položaj M (tačke M i M_1 razmene uloge). Tada je položaj tačke M određen obrascem

$$(7) \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 \cos \varphi - (\mathbf{u} \times \mathbf{r}_1) \sin \varphi + \mathbf{u}(\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{u})(1 - \cos \varphi).$$

Oduzme li se jednačina (7) od jednačine (5) dobiće se

$$(8) \quad \mathbf{r}_1 - \mathbf{r} = -(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}) \cos \varphi + \mathbf{u} \times (\mathbf{r} + \mathbf{r}_1) \sin \varphi - \mathbf{u}[(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}) \cdot \mathbf{u}](1 - \cos \varphi).$$

Skalarnim množenjem ovog izraza jediničnim vektorom \mathbf{u} dobiva se da je

$$(9) \quad (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}) \cdot \mathbf{u} = 0,$$

tj. vektor pomeranja $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}$ je upravnan na osu obrtanja (što je očigledno jer tačka M opisuje krug u ravni upravnoj na \mathbf{u}). Zbog toga se (8) svodi na jednostavniji oblik

$$(10) \quad (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r})(1 + \cos \varphi) = \mathbf{u} \times (\mathbf{r} + \mathbf{r}_1) \sin \varphi.$$

Ako se ovde stavi

$$1 + \cos \varphi = 2 \cos^2 \frac{\varphi}{2}, \quad \sin \varphi = 2 \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2},$$

dobiva se konačno *Rodrigov* (Rodrigues) *obrazac*

$$(11) \quad \mathbf{r}_1 - \mathbf{r} = \mathbf{u} \times (\mathbf{r} + \mathbf{r}_1) \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \mathbf{W} \times (\mathbf{r} + \mathbf{r}_1),$$

koji određuje pomeranje tačke pri konačnoj rotaciji oko ose.

Vektor koji ima pravac i smer ose rotacije, a intenzitet određen na naredni način uglom obrtanja,

$$(12) \quad \mathbf{W} = \mathbf{u} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$$

naziva se *verzor konačne rotacije*.

Vektor $\overrightarrow{ON} = \mathbf{q} = (\mathbf{r} + \mathbf{r}_1)/2$ određuje položaj sredine duži $\overline{MM_1}$, koja spaja početni i krajnji položaj tačke M tela. Pomoću verzora \mathbf{W} i vektora \mathbf{q} Rodrigov obrazac se može napisati u obliku

$$(13) \quad \mathbf{r}_1 - \mathbf{r} = 2\mathbf{W} \times \mathbf{q}.$$

Pri tzv. *elementarnoj rotaciji* za vrlo mali ugao $\Delta\varphi$ biće

$$\mathbf{W} = \mathbf{u} \operatorname{tg} \frac{\Delta\varphi}{2} \approx \mathbf{u} \frac{\Delta\varphi}{2} = \frac{1}{2} \Delta\boldsymbol{\varphi},$$

gde je

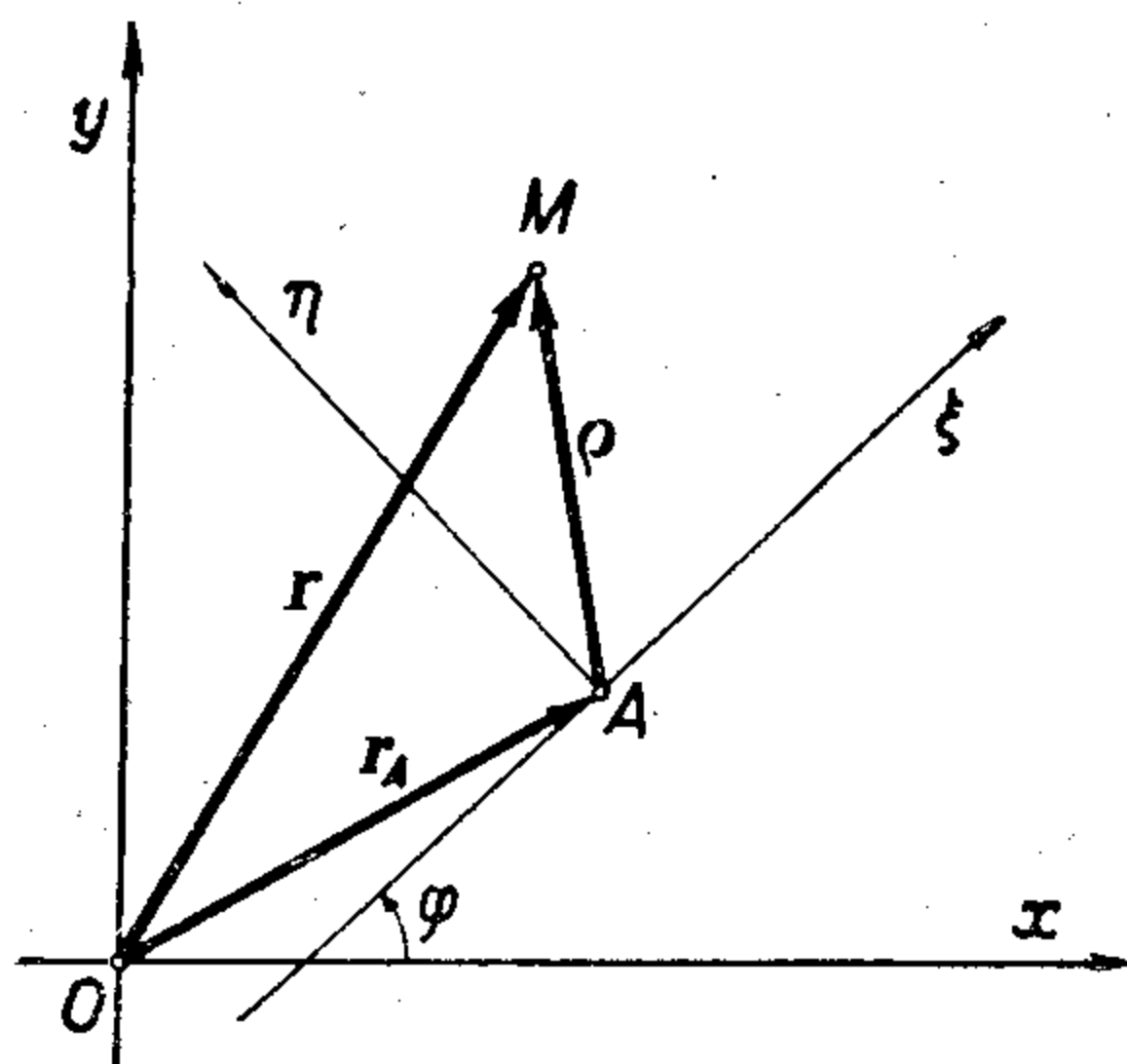
$$(14) \quad \Delta\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{u} \Delta\varphi$$

vektor elementarne rotacije. Ovaj vektor ima orijentaciju (pravac i smer) istu kao osa rotacije, a intenzitet jednak uglu obrtanja. Pomeranje $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}$ tačke tela pri elementarnoj rotaciji je takođe elementarno; ako se za elementarno pomeranje stavi

$$\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}$$

i uzme u obzir da je onda $\mathbf{q} \approx \mathbf{r}$, Rodrigov obrazac za elementarno pomeranje se svodi na oblik

$$(15) \quad \Delta\mathbf{r} = \Delta\boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{r}.$$



Slika 28

1.9.3. Ravansko kretanje

Kao ravansko smatra se ono kretanje krutog tela pri kome se sve tačke tela kreću samo u ravnima paralelnim nekoj stalnoj osnovnoj ravni. Sve trajektorije onih tačaka tela koje su na istoj normali na osnovnoj ravni kretanja podudarne su i samo paralelno pomerene. Stoga se i kretanje čitavog tela može odrediti posmatranjem kretanja u jednoj ravni. Mesto dva prostorna koordinatna sistema dovoljno je u ovom slučaju za određivanje položaja tela i za opisivanje kretanja uočiti samo dva ravanska koordinatna sistema Oxy i $A\xi\eta$ (sl. 28) pa posmatrati kretanje pokretne ravni $A\xi\eta$ vezane sa telom, po nepokretnoj ravni Oxy . Položaj pokretne

ravni, a time i čitavog tela, biće određen npr. Dekartovim pravouglim koordinatama x_A, y_A pokretnog pola A i uglom φ koji osa $A\xi$ obrazuje sa osom Ox .

Konačne jednačine kretanja tela biće stoga

$$(1) \quad x_A = x_A(t), \quad y_A = y_A(t), \quad \varphi = \varphi(t),$$

pa ono ima *tri stepena slobode*.

Položaj ma koje tačke M (sl. 28) ravne figure biće određen vektorskom relacijom

$$(2) \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_A + \mathbf{q},$$

ili skalarnim relacijama

$$(3) \quad \begin{aligned} x &= x_A + \xi \cos \varphi - \eta \sin \varphi, \\ y &= y_A + \xi \sin \varphi + \eta \cos \varphi. \end{aligned}$$

Kada su parametri položaja tela x_A, y_A i φ promenljivi u toku vremena, jednačine (3) predstavljaju konačne jednačine kretanja tačke čije su koordinate (ξ, η) konstantne. Jednačine (3) određuju i inverzno kretanje tačke, kad se koordinate (x, y) smatraju kao konstantne a koordinate (ξ, η) kao promenljive. Rešene po ξ i η one glase

$$(4) \quad \begin{aligned} \xi &= (x - x_A) \cos \varphi + (y - y_A) \sin \varphi, \\ \eta &= -(x - x_A) \sin \varphi + (y - y_A) \cos \varphi. \end{aligned}$$

Ravansko kretanje se sastoji iz dva nezavisna kretanja, *translacije* određene konačnim jednačinama kretanja pokretnog pola,

$$(5) \quad x_A = x_A(t), \quad y_A = y_A(t)$$

i *obrtnja* oko ose upravne na ravan kretanja, određenog konačnom jednačinom

$$(6) \quad \varphi = \varphi(t)$$

Rotacija tela oko nepokretne ose je poseban slučaj ravanskog kretanja tela. Ako se tada za pol A izabere neka tačka na osi rotacije, za pol O izabere ista tačka, $A \equiv O$, i osa rotacije uzme istovremeno za Oz i $O\xi$ osu, konačne jednačine kretanja neke tačke tela čije su koordinate ξ, η i ζ biće pri rotaciji oko nepokretne ose

$$(7) \quad \begin{aligned} x &= \xi \cos \varphi - \eta \sin \varphi, \\ y &= \xi \sin \varphi + \eta \cos \varphi, \\ z &= \zeta. \end{aligned}$$

Eliminacijom ugla obrtnja φ iz ovih jednačina dobiva se jednačina trajektorije pokretne tačke

$$(8) \quad x^2 + y^2 = \xi^2 + \eta^2; \quad z = \zeta.$$

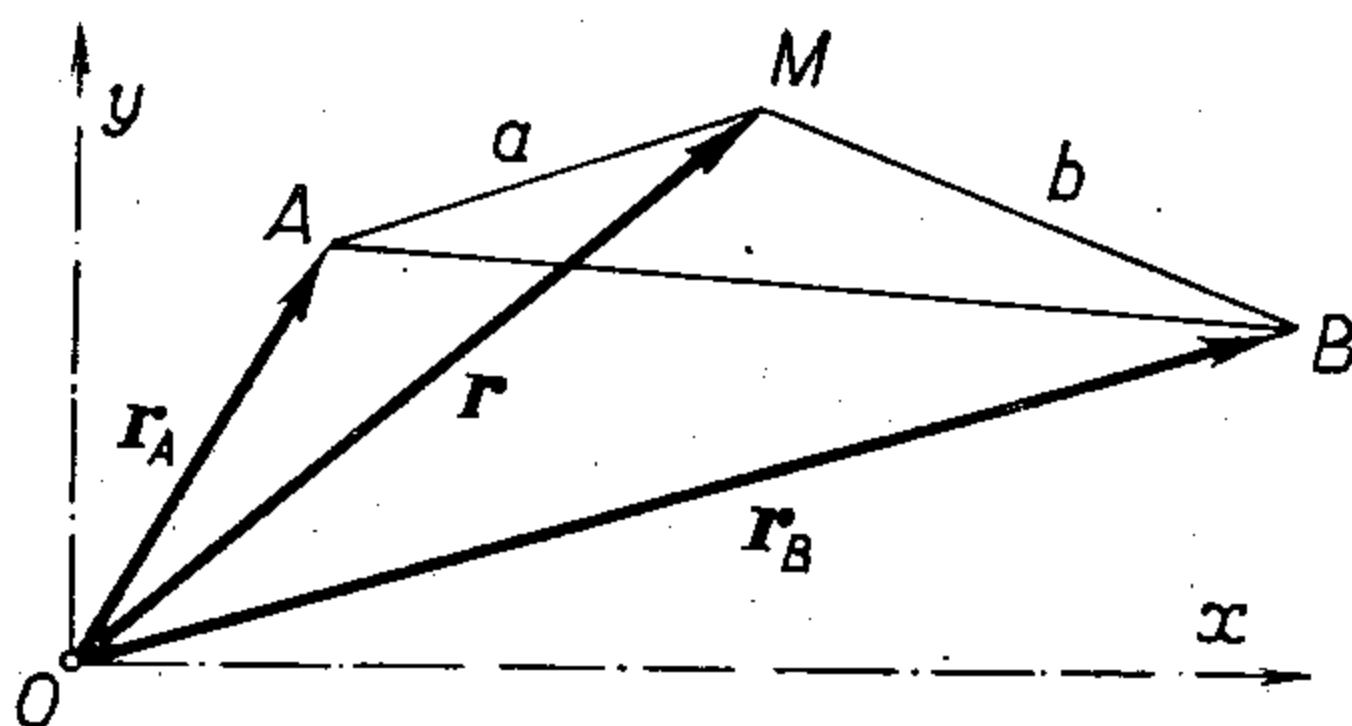
Pri tome su za svaku uočenu tačku tela koordinate ξ, η i ζ nepromenljive, pa su očevidno trajektorije tačaka tela krugovi u paralelnim ravnima, kao što je bilo pokazano u odeljku 1.9.2 izrazima (5) i (6).

1.9.3.1. Centar konačne rotacije

Položaj neke ravne figure, kad se zna njena ravan, potpuno je određen položajem dvaju ma kojih tačaka A i B te figure, tj. položajem neke duži AB (sl. 29). Neka je M neka tačka ravne figure, a $\overline{AM} = a$ i $\overline{BM} = b$ rastojanje tačke M od tačaka A i B . Ako se ravan xOy poklapa sa ravni figure biće

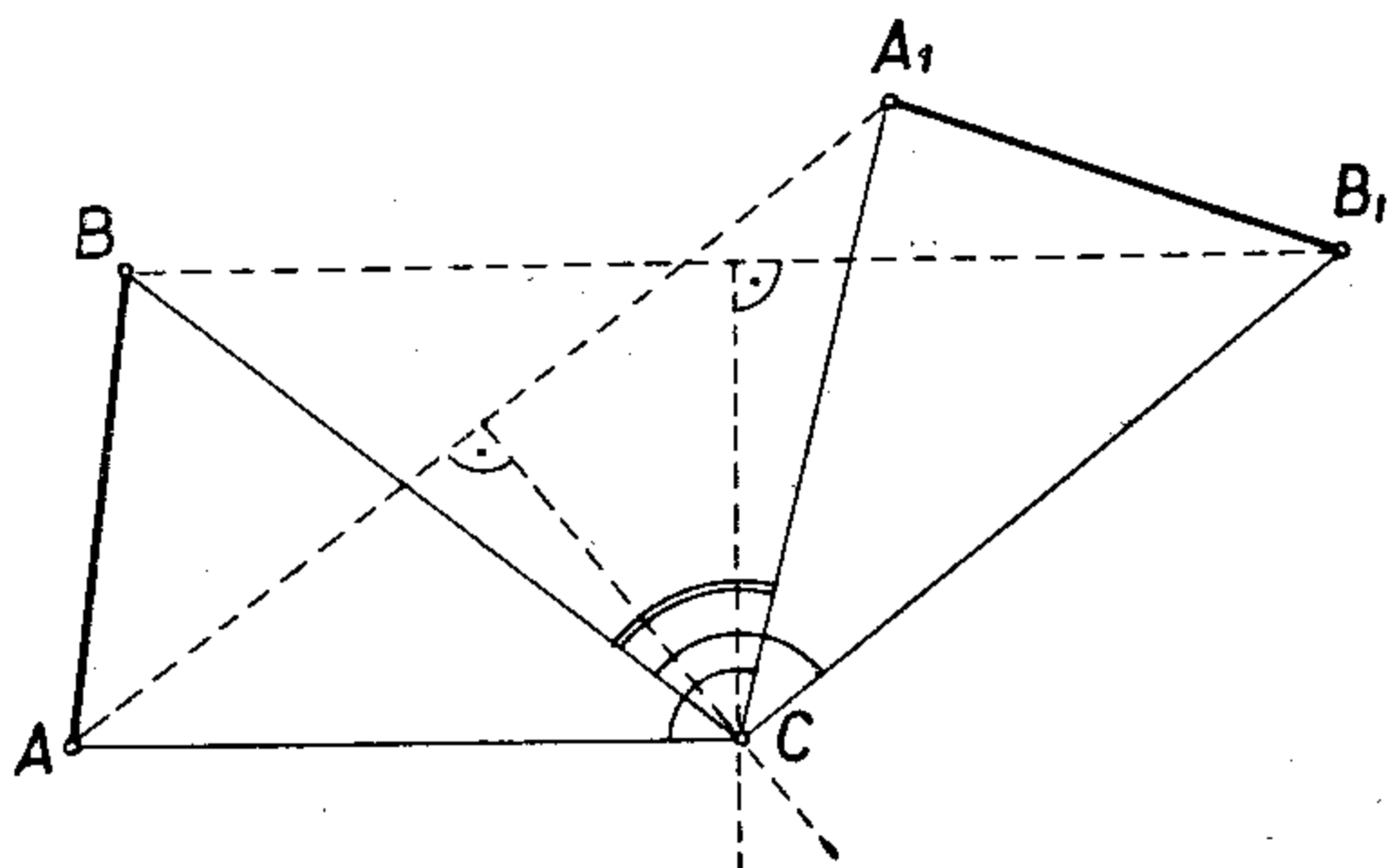
$$(1) \quad \begin{aligned} (x-x_A)^2 + (y-y_A)^2 &= a^2; \\ (x-x_B)^2 + (y-y_B)^2 &= b^2, \end{aligned}$$

pa se položaj ma koje tačke $M(x, y)$ figure može odrediti kada su poznati položaji tačaka $A(x_A, y_A)$ i $B(x_B, y_B)$ i rastojanja a i b tačke M od A i B , pod uslovom da je $a \neq b$.



Slika 29

Ako se orijentisana prava kroz A i B uzme za ξ -ocuu, a orijentisana prava kroz A upravna na pravu AB za η -osuu, tako da te dve ose grade desni koordinatni sistem (ravan crtanja se smatra orijentisanom prema gledaocu), rastojanja a i b su određena koordinatama ξ i η tačke M prema sistemu $A\xi\eta$, pri čemu je $\xi_A = \eta_A = \eta_B = 0$ i $\xi_B = \overline{AB}$.



Slika 30

Ako su tačke A i B utvrđene, uočena ravna figura se ne može kretati u samoj pokretnoj ravni već samo zajedno sa njom. Pri ravanskom kretanju tela pokretna ravan prelazi u neki drugi položaj i sa njom uočena ravna figura. Duž \overline{AB} zauzima pri tome neki novi položaj $\overline{A_1B_1}$. Simetrale pomeranja $\overline{AA_1}$ i $\overline{BB_1}$ seku se tada u nekoj tački C , tako da je $CA = CA_1$ i $CB = CB_1$ (sl. 30).

Sem toga, duži \overline{AB} i $\overline{A_1B_1}$ su jednake pa su trouglovi ACB i A_1CB_1 podudarni; otuda proističe da su i uglovi ACB i A_1CB_1 jednaki,

$$\sphericalangle ACB = \sphericalangle A_1CB_1.$$

Ako se ovim uglovima doda ugao $\sphericalangle BCA_1$, dobiva se

$$\sphericalangle ACB + \sphericalangle BCA_1 = \sphericalangle BCA_1 + \sphericalangle A_1CB_1,$$

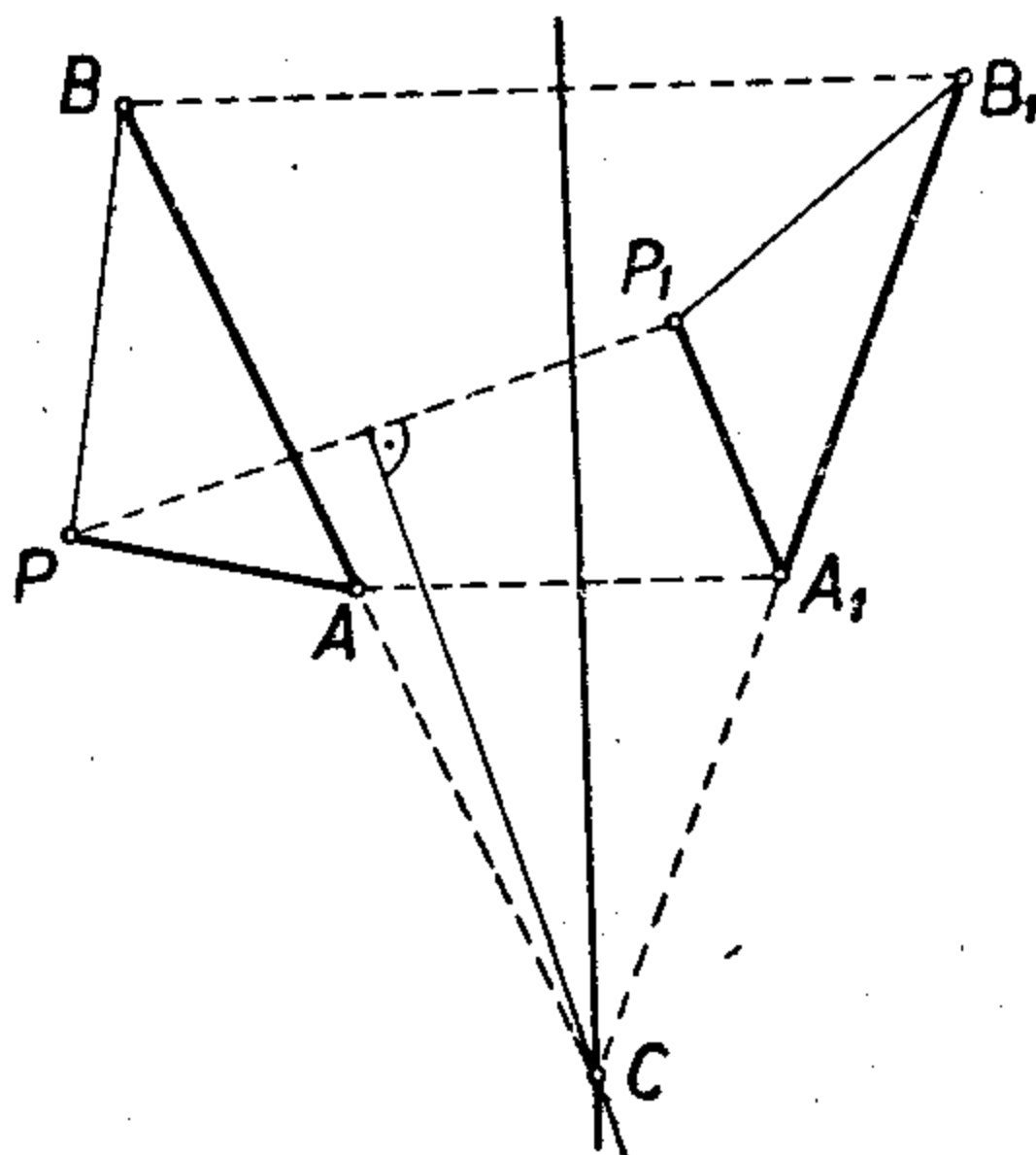
tj.

$$\sphericalangle ACA_1 = \sphericalangle BCB_1 = \alpha.$$

Iz ove relacije se vidi da su duži \overline{CA} i \overline{CB} prevedene u nove položaje $\overline{CA_1}$ i $\overline{CB_1}$ rotacijom oko tačke C za isti ugao α , što znači da je i duž \overline{AB} prevedena u položaj $\overline{A_1B_1}$ rotacijom pokretne ravni oko tačke C za ugao α .

Dakle, pri pomeranju jedne ravni po drugoj pokretna ravan se može prevesti iz jednog položaja u drugi rotacijom oko određene tačke za određeni ugao. Ta tačka C se zove centar konačne rotacije, a ugao ACA_1 je ugao rotacije.

Kad su pomeranja AA_1 i BB_1 paralelna i jednaka (tj. $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{BB_1}$), tada se radi o translaciji. Simetrale duži $\overline{AA_1}$ i $\overline{BB_1}$ se ne seku na konačnom rastojanju,



Slika 31

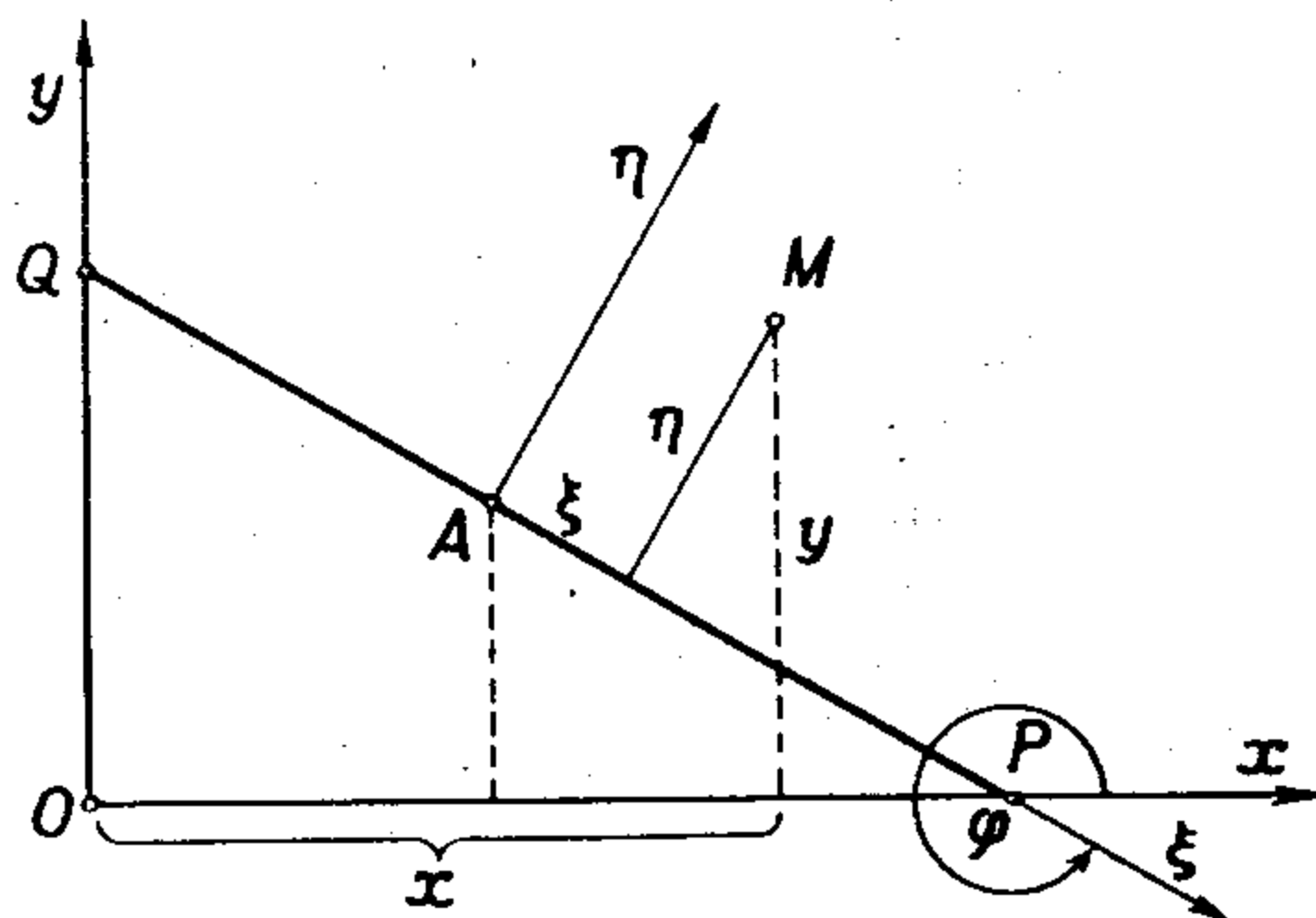
pa se, stoga, ravanska translacija može tumačiti kao rotacija, ali oko centra u beskonačnosti.

Ako su pomeranja AA_1 i BB_1 paralelna, ali nisu jednaka, tada se njihove simetrale poklapaju (sl. 31), ali će centar rotacije postojati na konačnom rastojanju. On se može odrediti izborom drugih dveju tačaka (A i P , ili B i P) za određivanje položaja ravne figure, ali se dobiva i jednostavno kao presek C produženja duži \overline{AB} sa onom zajedničkom simetralom. Nije nimalo teško pokazati da će tada C biti centar konačne rotacije.

Prethodna izlaganja važe i za ravansko kretanje tela s tim što su sve tačke na normali osnovne ravni u centru C u miru pa imamo konačnu rotaciju oko nepokretne ose. Translacija tela se, dakle, može smatrati kao rotacija oko nepokretne ose koja se nalazi u beskonačnosti.

1.9.3.2. Primer ravanskog kretanja: Kardanovo kretanje

Ravansko kretanje pri kojemu se dve tačke P i Q pokretne ravne figure kreću po dvema nepokretnim upravnim pravima zove se *Kardanovo* (Cardano). Nepokretne upravne prave mogu se uzeti za ose Ox i Oy (sl. 32), a za pokretni sistem koordinata $A\xi\eta$ prava PQ i normala u sredini duži PQ , pri čemu osa $A\xi$ obrazuje ugao φ sa osom Ox . Oba ova koordinatna sistema treba da budu propisno orijentisana (npr. kao desni sistemi).



Slika 32

Kad se stavi $PQ = 2R$, biće konačne jednačine kretanja ravne figure

$$x_A = R \cos \varphi, \quad y_A = -R \sin \varphi; \quad \varphi = \varphi(t).$$

Ovo kretanje ima samo jedan stepen slobode. Jednačine kretanja ma koje tačke M pokretne figure, čije su koordinate ξ i η stalne biće onda

$$\begin{aligned} x &= (R + \xi) \cos \varphi - \eta \sin \varphi, \\ y &= -(R - \xi) \sin \varphi + \eta \cos \varphi. \end{aligned}$$

Eliminacijom ugla φ iz ovih jednačina dobiva se kao jednačina krive linije trajektorije tačke M pri direktnom kretanju tj. za konstantno ξ i η

$$(1) \quad [(R - \xi)^2 + \eta^2]x^2 - 4R\eta xy + [(R + \xi)^2 + \eta^2]y^2 = (R^2 - \xi^2 - \eta^2)^2,$$

a to je u opštem slučaju elipsa.

Da je to elipsa vidi se odmah određivanjem diskriminante

$$4R^2\eta^2 - [(R - \xi)^2 + \eta^2][(R + \xi)^2 + \eta^2] = -(R^2 - \xi^2 - \eta^2)^2,$$

koja je stalno negativna i može biti jednaka nuli samo za tačke na krugu

$$\xi^2 + \eta^2 = R^2.$$

Za tačke na tom krugu elipsa degeneriše u dvostruku pravu

$$(2) \quad y(R + \xi) = \eta x.$$

Najzad tačka A opisuje krug poluprečnika R čiji je centar u tački O .

Sprava konstruisana na osnovu osobina Kardanovog kretanja koristi se za crtanje elipsa i zove se *elipsograf*.

Ako se posmatra inverzno kretanje tačke M sa konstantnim x i y u odnosu na sistem $A\xi\eta$, tada se iz jednačine (1) vidi da će po promenljivim ξ, η to biti kriva četvrtog reda i to *Paskalov (Pascal) puž*.

1.9.4. Kretanje krutog tela oko nepokretne tačke

Kad se kruto telo kreće tako da je jedna tačka A tela nepokretna, može se ta tačka izabrati jednovremeno i za početak nepokretnog i za početak pokretnog koordinatnog sistema, $O \equiv A$. Tada se vektorski izraz za određivanje položaja tačke tela svodi na

$$(1) \quad \mathbf{r} = \boldsymbol{\rho},$$

odn.

$$(1') \quad x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = \xi\boldsymbol{\lambda} + \eta\boldsymbol{\mu} + \zeta\mathbf{v}.$$

Kako je $\boldsymbol{\rho}$ u telu nepromenljivi vektor, za svaku uočenu tačku tela je $\rho = |\boldsymbol{\rho}| = \text{const.}$ i iz (1) se dobiva

$$(2) \quad |\mathbf{r}| = |\boldsymbol{\rho}| = \rho = \text{const.}$$

što predstavlja jednačinu sfere poluprečnika ρ sa centrom u nepokretnoj tački. Prema tome, pri kretanju krutog tela oko nepokretne tačke sve tačke tela opisuju samo krive linije (među njima i krugove) na sferama čiji su centri u nepokretnoj tački. Kretanje se stoga zove *sferno kretanje*, ali se često naziva i *rotacija (obrtanje) oko nepokretne tačke*. Tačke koje leže na istom potegu iz nepokretne tačke opisuju pri ovom kretanju homotetične sferne krive linije.

Ako se nepokretna tačka uzme kao početak i nepokretnog i pokretnog koordinatnog sistema, biće $x_A = y_A = z_A = 0$, pa je ovakvo kretanje tela određeno samo poznavanjem Ojlerovih uglova u funkciji vremena

$$(3) \quad \varphi = \varphi(t), \quad \psi = \psi(t), \quad \vartheta = \vartheta(t)$$

i ima *tri stepena slobode*.

Konačne jednačine kretanja neke tačke M tela u vektorskom obliku date su sa (1), odn. (1'), čemu odgovaraju tri skalarne jednačine

$$(4) \quad \begin{aligned} x &= a_{11}\xi + a_{12}\eta + a_{13}\zeta, \\ y &= a_{21}\xi + a_{22}\eta + a_{23}\zeta, \\ z &= a_{31}\xi + a_{32}\eta + a_{33}\zeta, \end{aligned}$$

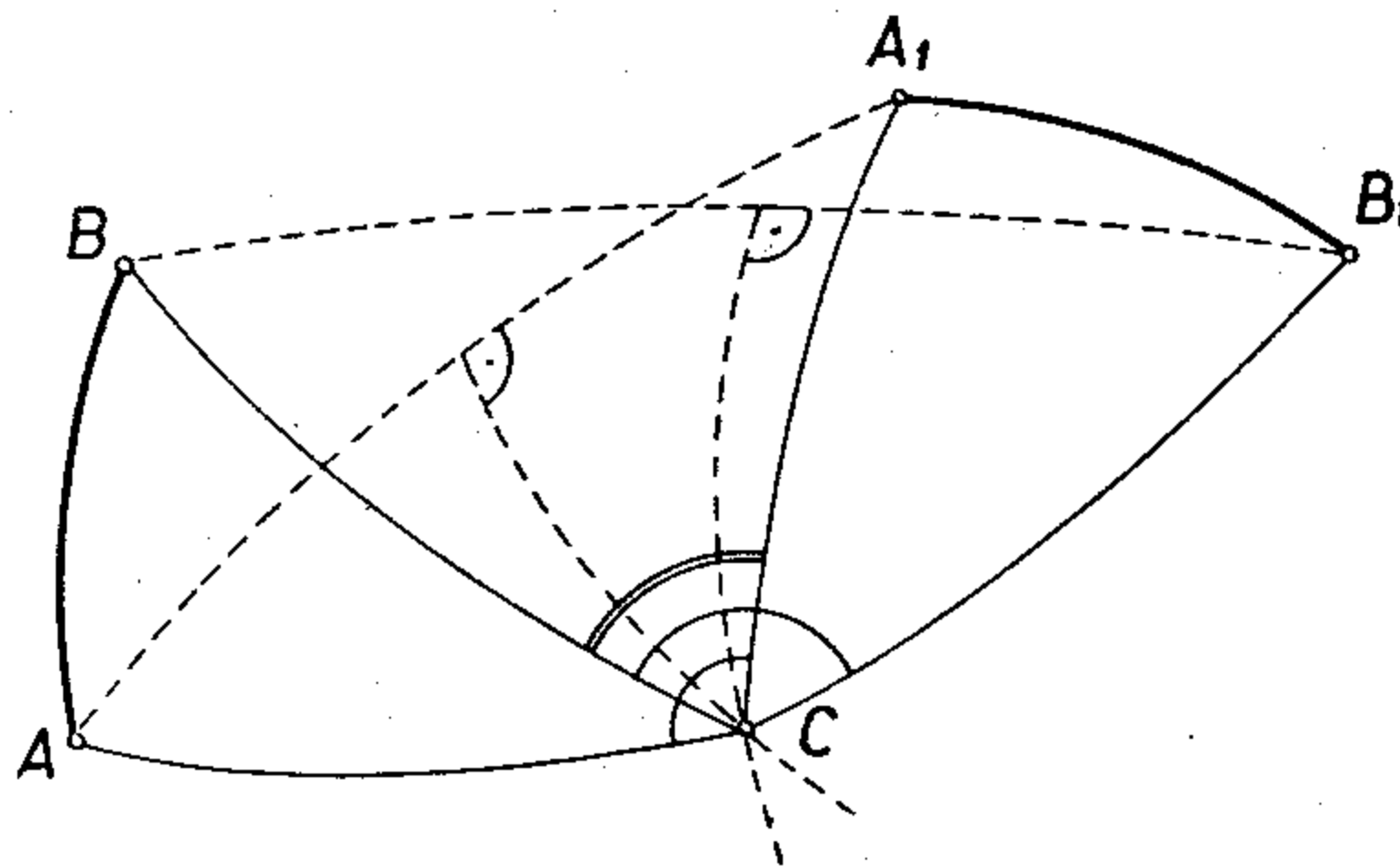
koje se dobivaju množenjem jednačine (1') skalarno jediničnim vektorima \mathbf{i}, \mathbf{j} i \mathbf{k} . U ove jednačine treba još za kosinuse uglova uneti njihove vrednosti izražene pomoću Ojlerovih uglova (1.8.1, 2—10), da bi konačne jednačine kretanja tačke bile izražene pomoću parametara položaja tela. Jednačine (4) određuju i inverzno kretanje tačke, kad se uloge koordinatnih sistema $Oxyz$ i $A\xi\eta\zeta$ razmene, tj. kad se x, y, z smatraju kao konstante a ξ, η, ζ kao promenljive. Jednačine (4) rešene po ovim drugim promenljivima glase

$$(5) \quad \begin{aligned} \xi &= a_{11}x + a_{21}y + a_{31}z, \\ \eta &= a_{12}x + a_{22}y + a_{32}z, \\ \zeta &= a_{13}x + a_{23}y + a_{33}z. \end{aligned}$$

Ove jednačine se mogu dobiti i skalarnim množenjem jednačine (1') jediničnim vektorima $\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}$ i \mathbf{v} .

1.9.4.1. Osa konačne rotacije

Proučavanje sfernog kretanja tela može se svesti na proučavanje kretanja pokretne sfere po nepokretnoj sferi jednakih poluprečnika (recimo, jediničnih) sa zajedničkim centrom u nepokretnoj tački. Tada je položaj svake sferne figure na pokretnoj sferi, u odnosu na tu sferu, određen dvema tačkama A i B te sferne figure koje nisu krajevi istog prečnika, odn. lukom AB velikog kruga koji te dve tačke tada određuju na pokretnoj sferi (sl. 33). Neka novi položaj tela posle konačnog pomeranja bude $\widehat{A_1B_1}$. Tada ravni simetrije lukova AA_1 i BB_1 velikih krugova, koje prolaze kroz nepokretnu tačku, svojim presekom određuju neku pravu. Rotacijom tela oko te prave kao ose u jednom ili drugom smeru telo se može prevesti iz prvog u drugi položaj. Samo kad je presečna prava orijentisana na određeni način biće i smer rotacije određen. Dakle, *pri sfernom kretanju kruto telo se uvek može prevesti iz jednog položaja u drugi rotacijom oko određene ose (koja uvek prolazi kroz nepokretnu tačku) za određeni ugao*. Ta osa se zove *osa konačne rotacije*, a ugao je *ugao rotacije*.



Slika 33

Kod ovog kretanja je luk AB analogan duži AB kod ravanskog kretanja, pa se i ovde može dogoditi sličan slučaj da se ravni simetrije lukova AA_1 i BB_1 poklapaju. Međutim, tražena osa je tada određena kao presek zajedničke ravni simetrije i ravni velikog kruga određenog lukom AB ili lukom A_1B_1 .

I dva Dekartova pravouglata koordinatna sistema iste orijentacije sa zajedničkim nepokretnim početkom, čiji je uzajamni položaj određen Ojlerovim uglovima, mogu se dovesti do poklapanja konačnom rotacijom jednog od njih oko određene ose rotacije.

1.9.5. Zavojno kretanje

Kretanje krutog tela sastavljeno (složeno) od obrtanja oko date *nepokretne* ose i istovremene pravolinijske translacije u smeru te ose zove se *zavojno (helioidno) kretanje*. U odnosu na orijentaciju ose (istovremeno i smer translacije) ovakvo kretanje može biti *desno zavojno* i *levo zavojno*, prema tome da li se zavijanje izvodi nalevo ili obrnuto, gledano iz smera ose. Putanje pojedinih tačaka tela su *zavojne linije (zavojnice, helise)* i to *kružne zavojnice* (sl. 34).

Ako se u telu uoči ma koja tačka M , tada se rastojanje h , koje pri jednom punom obrtu (zavoju) pređe projekcija ove tačke na osi zavojnice, zove *korak zavoja* ili *visina zavojnog hoda*, ali se zbog primene kod zavrtnja zove i *korak zavrtnja*.

Uspón i zavojnice — putanje tačke M tela — određen je obrascem

$$(1) \quad i = \operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{2\pi r},$$

kad je r udaljenje tačke M od ose zavojnice.

Konačne jednačine kretanja tela u ovom slučaju, kad se data osa rotacije i translacije uzme kao x -osa, glase

$$(2) \quad x_A = x_A(t) \quad \text{i} \quad \varphi = \varphi(t).$$

Zavojno (helikoidno) pomeranje tela, određeno uglom obrtanja φ i translatornim pomeranjem s , zove se *zavrt*.

Ako se osa zavojnog kretanja uzme i za ξ -osu, konačne skalarne jednačine zavojnog kretanja za neku tačku $M(\xi, \eta, \zeta)$ tela su

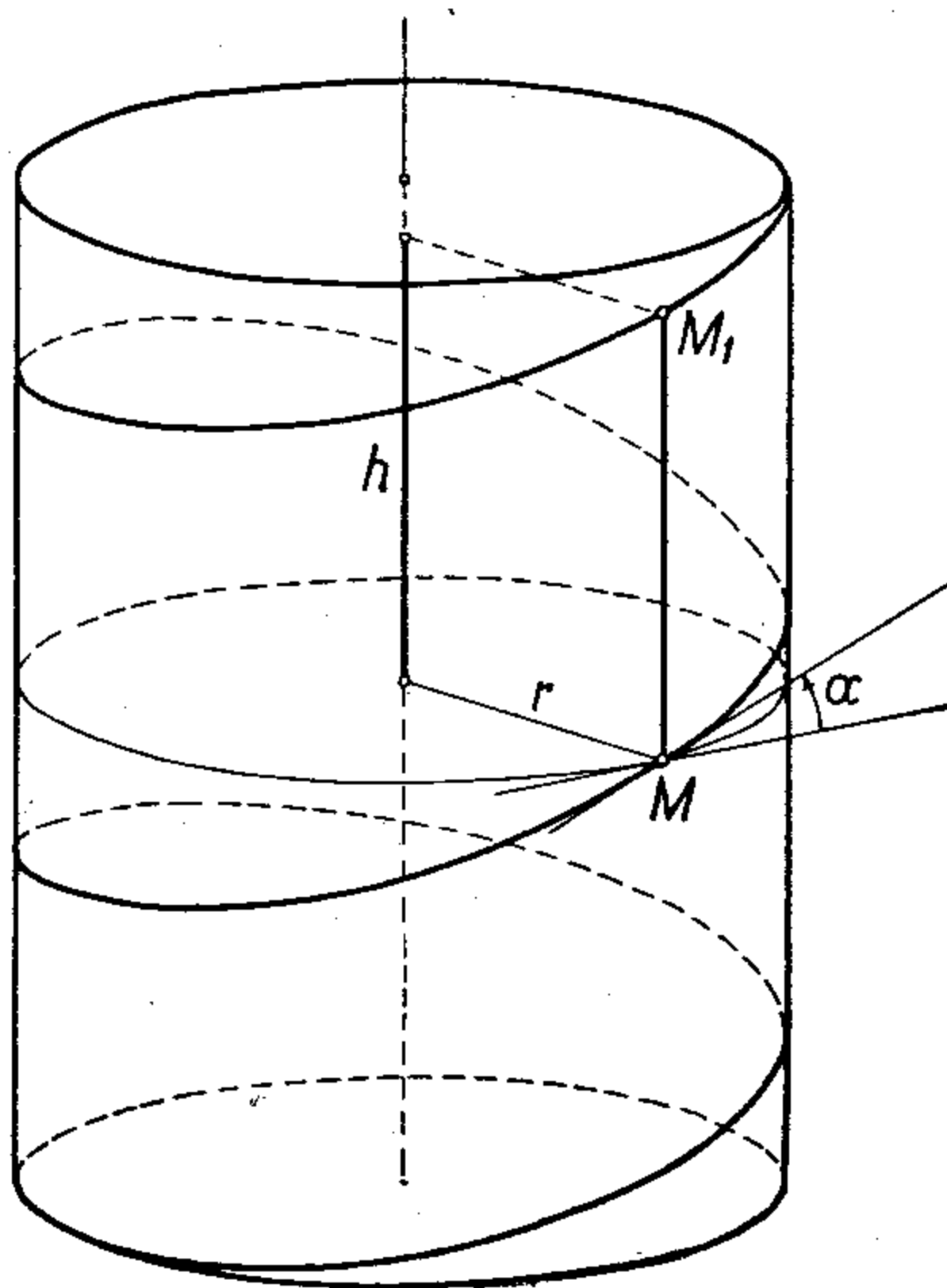
$$(3) \quad \begin{aligned} x &= x_A(t) + \xi, \\ y &= \eta \cos \varphi(t) - \zeta \sin \varphi(t), \\ z &= \eta \sin \varphi(t) + \zeta \cos \varphi(t). \end{aligned}$$

Ako se mesto Dekartovih pravougljih koordinata ξ, η, ζ uvedu cilindarske koordinate ξ, ρ, α , konačne jednačine zavojnog kretanja biće

$$(4) \quad \begin{aligned} x &= x_A(t) + \xi, \\ y &= \rho \cos(\varphi + \alpha), \\ z &= \rho \sin(\varphi + \alpha), \end{aligned}$$

gde je za uočenu tačku tela $\rho = \sqrt{y^2 + z^2} = \sqrt{\eta^2 + \zeta^2}$. Ako je T vreme za koje se telo obrne jednom oko ose obrtanja, tj. $\varphi(t+T) = \varphi(t) + 2\pi$, sve tačke tela će se pomeriti u pravcu x -ose za $h = x(t+T) - x(t) = x_A(t+T) - x_A(t)$. Ako, međutim, obrtanje tela nije jednoliko, tj. φ nije linearna funkcija vremena, ni T niti h kao ni uspon i nisu konstante. Tada možemo govoriti o usponu zavojnice samo kao o veličini određenoj u posmatranom trenutku, odnosno u uočenoj tački putanje posmatrane tačke tela.

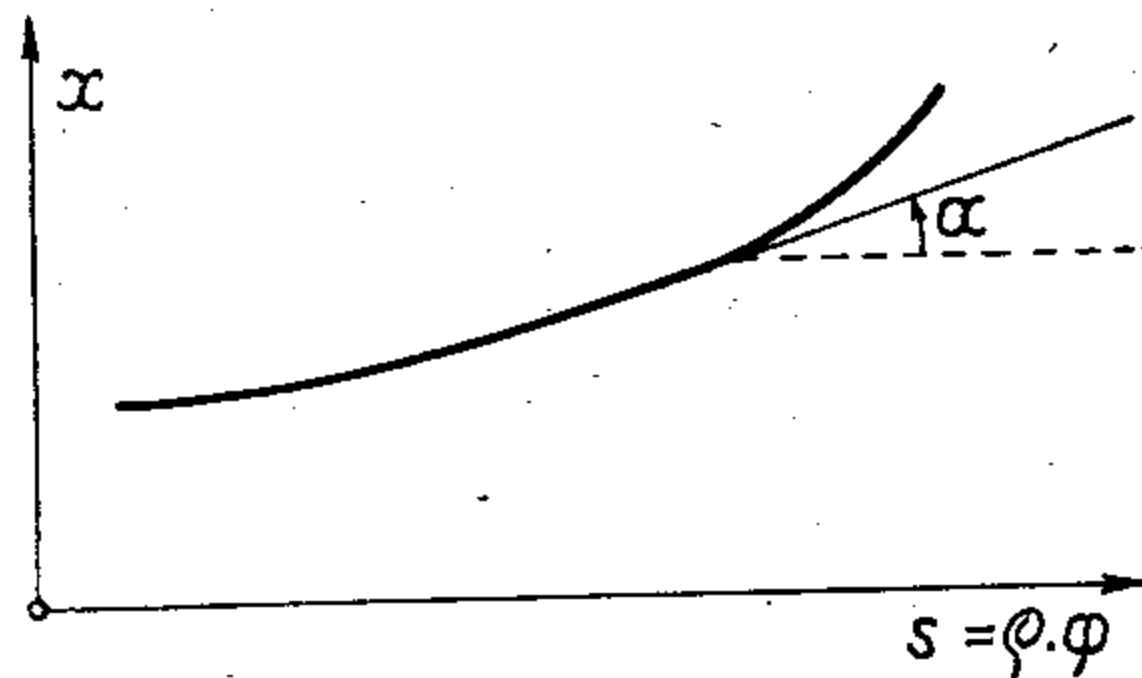
Pri zavojnom kretanju tačke tela opisuju zavojnice na koaksijalnim kružnim cilindrima; zajednička osa cilindara je osa rotacije tela. Cilindar kao razvojna površina može da se razvije u ravan. Izabere li se u toj ravni za ordinatnu osu prava



Slika 34

paralelna osi cilindra, a za apscisnu osu s -osa upravna na x -osu, $s = \rho\varphi$ (sl. 35) $\rho = \sqrt{\eta^2 + \xi^2}$, biće, za svako ρ , putanje tačaka tela kongruentne krive u ravni xOs . Uspon i zavojnice u svakoj tački će biti određen nagibom tangente zavojnice prema s -osi,

$$i = \operatorname{tg} \alpha = \frac{dx}{ds} = \frac{1}{\rho} \frac{dx}{d\varphi}.$$



Slika 35

Kad su date konačne jednačine kretanja, iz prve jednačine (3) i zbog konstantnosti ξ za svaku tačku tela biće

$$\begin{aligned} a \quad dx &= \dot{x}_A dt, \\ d\varphi &= \dot{\varphi} dt, \end{aligned}$$

pa je uspon u trenutku t određen obrascem

$$(5) \quad i = \frac{1}{\rho} \frac{\dot{x}_A}{\dot{\varphi}}.$$

Kad je zavojno kretanje jednoliko, tj.

$$\begin{aligned} x_A &= at + b; \\ \varphi &= \omega t + \varphi_0, \end{aligned}$$

za uspon se iz (5) dobiva

$$(6) \quad i = \frac{a}{\rho\omega}.$$

Ako se ugao poveća u ovom slučaju za 2π za vreme T , a tačka A pomeri za isto vreme za h (korak zavojnice), biće

$$\omega = \frac{2\pi}{T}, \quad a = \frac{h}{T}$$

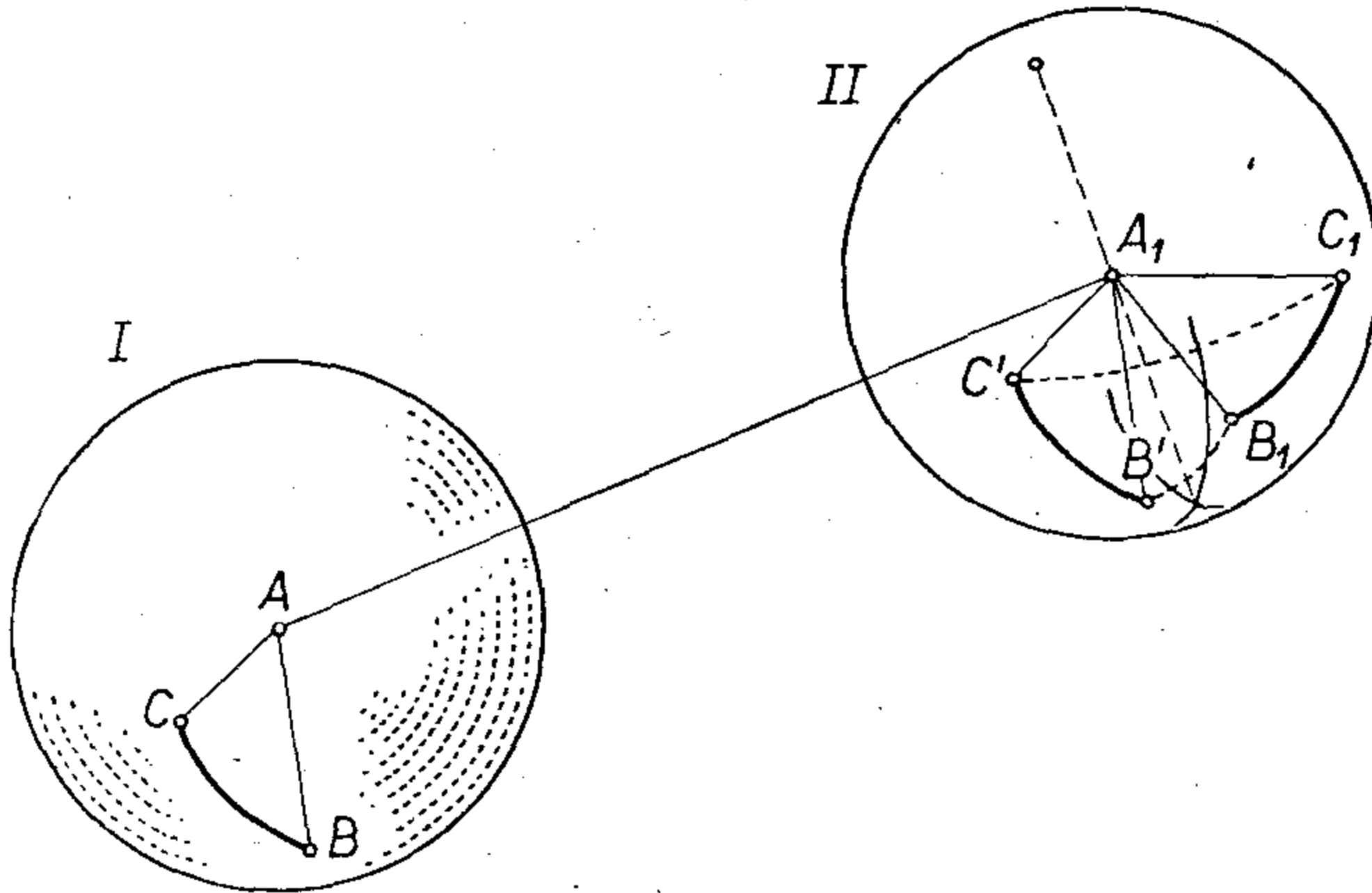
i obrazac (6) se svodi na oblik (1).

1.9.6. Opšti slučaj kretanja krutog tela

Najopštije kretanje tela — ono koje ima svih šest stepena slobode — može se uvek smatrati kao složeno od translacije i rotacije oko nepokretne tačke.

Ovo razlaganje najopštijeg kretanja tela na translaciju (i to pravolinijsku) i sferno kretanje može se izvesti na beskonačno mnogo načina i zavisi od izbora

pola A u telu, ali Ojlerovi uglovi φ , ψ , ϑ u funkciji od vremena uopšte ne zavise od izbora pola, kad se jednom izaberu ose pokretnog sistema, jer se onda njihovim paralelnim pomeranjem Ojlerovi uglovi ne menjaju.



Slika 36

Prema tome, kad se uoči konačno pomeranje tela iz položaja I, određenog trouglom ABC u položaj II, određen trouglom $A_1B_1C_1$ (sl. 36) u najopštijem slučaju, tada se telo iz položaja I uvek može prevesti u položaj II (nezavisno od konkretnog načina kretanja tela između ta dva položaja) pravolinijskom translacijom koja $\triangle ABC$ prevodi u $\triangle A_1B'C'$, kad je A pol, i zatim rotacijom oko nepokretne tačke A_1 , koja tačke B' i C' prevodi u tačke B_1 i C_1 . Ova dva kretanja se mogu izvesti i obrnutim redom sa istim rezultatom. Kako se sa svoje strane svako konačno pomeranje sfernim kretanjem tela može zameniti konačnom rotacijom tela oko neke stalne ose, važi teorema: *Svako telo se pri najopštijem kretanju može prevesti iz jednog položaja u ma koji drugi jednom translacijom i jednom rotacijom oko određene ose.*

Prilikom ovog prevođenja tela iz jednog položaja u drugi za isto konačno pomeranje razne tačke tela kao polovi mogu određivati razne translacije (ukoliko kretanje nije samo translacija).

Pomeranje $\overrightarrow{MM_1}$ ma koje tačke tela iz položaja M u položaj M_1 (sl. 37) ima, dakle, dve komponente: *translatornu*

$$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AA_1}, \text{ tj. } \mathbf{r}' - \mathbf{r} = \mathbf{r}_{A_1} - \mathbf{r}_A$$

i *rotacionu* (od rotacije oko neke ose \mathbf{u}_1 kroz tačku A_1 za ugao φ), za koju je prema Rodrigovom obrascu (1.9.2.1—13)

$$\overrightarrow{M'M_1} = \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} (\mathbf{u}_1 \times \mathbf{q}) = \mathbf{W} \times \mathbf{q},$$

gde je $\mathbf{W} = \mathbf{u}_1 \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$ verzor ove rotacije, a $\mathbf{q} = \overrightarrow{A_1N}$.

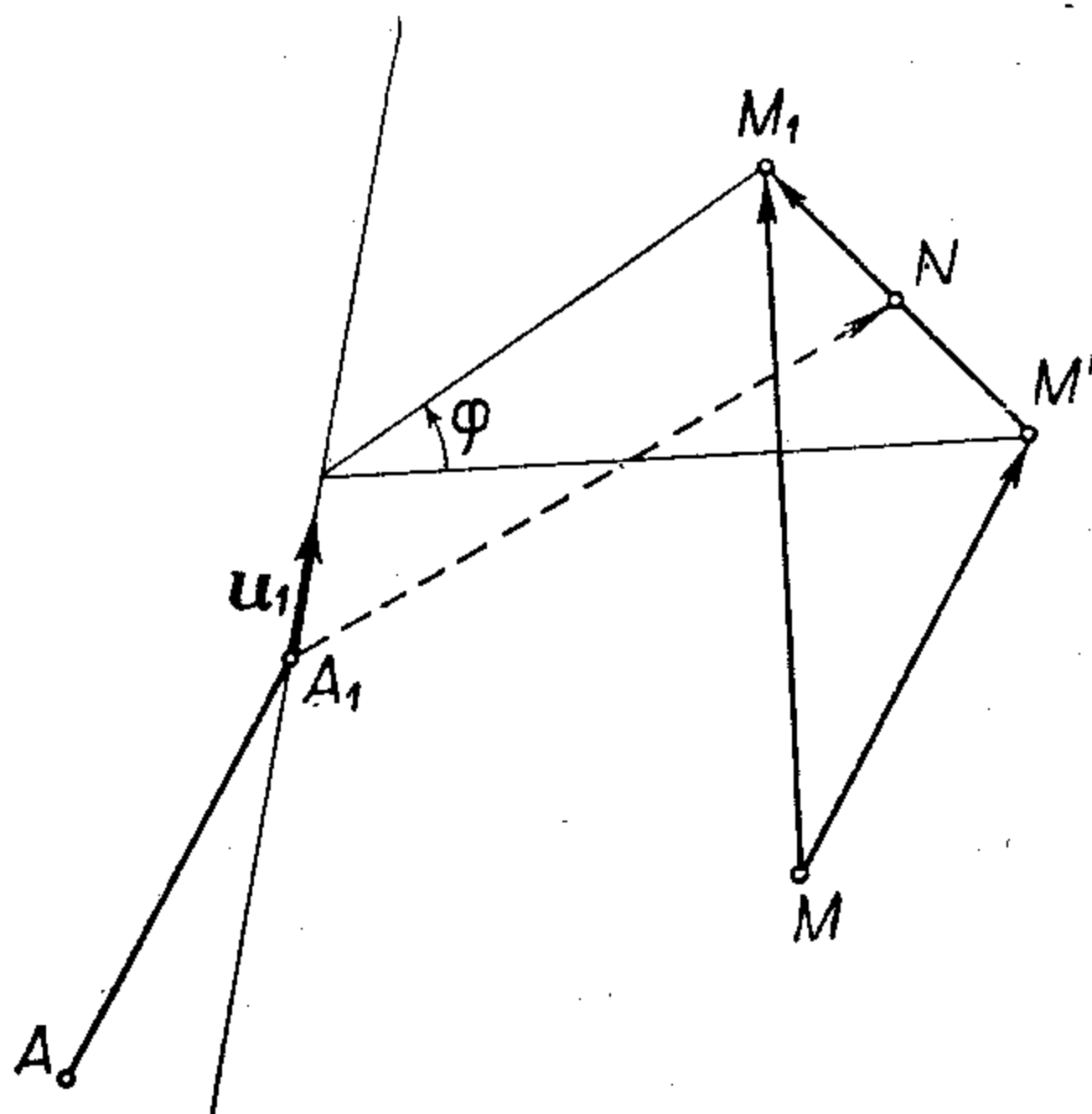
Ukupno konačno pomeranje biće, prema tome,

$$(1) \quad \overrightarrow{MM_1} = \mathbf{r}_{A_1} - \mathbf{r}_A + \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} (\mathbf{u}_1 \times \boldsymbol{\rho}).$$

Ukupno elementarno pomeranje biće s obzirom na (1.9.1—3) i (1.9.2.1—15)

$$(2) \quad \Delta \mathbf{r} = \Delta \mathbf{r}_A + \Delta \boldsymbol{\varphi} \times \boldsymbol{\rho}.$$

Kruto telo se može iz položaja I prevesti u položaj II (sl. 36) i rotacijom oko određene ose i istovremeno translacijom u pravcu te ose, tj. zavojnim kretanjem.



Slika 37

Konačno pomeranje u ovom slučaju biće određeno: 1) vektorom $\mathbf{W} = \mathbf{u} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$, gde je \mathbf{u} jedinični vektor ose obrtanja, a φ ugao konačne rotacije oko te ose; 2) translatorskim pomeranjem s duž ose \mathbf{u} i 3) položajem neke tačke na osi obrtanja.

Ako je C neka tačka na osi obrtanja, vektorska jednačina te ose je

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_C) \times \mathbf{u} = 0,$$

pri čemu je \mathbf{r} vektor položaja proizvoljne tačke na osi u odnosu na dati pol a \mathbf{r}_C vektor položaja tačke C .

Pri translatorskom pomeranju duž obrtne ose tačke tela će se pomeriti za $s\mathbf{u}$. Ako je \mathbf{r} početni položaj neke tačke M , posle translacije tela tačka M će preći u M' sa vektorom položaja

$$(3) \quad \mathbf{r}' = \mathbf{r} + s\mathbf{u}.$$

Rotacijom tela oko ose \mathbf{u} tačka M' će preći u konačan položaj M_1 kome odgovara vektor \mathbf{r}_1 . Ako je C neka tačka na obrtnoj osi, prema Rodrigovom obrascu (1.9.2.1—11) je

$$(4) \quad \overrightarrow{CM_1} - \overrightarrow{CM'} = \mathbf{W} \times (\overrightarrow{CM_1} + \overrightarrow{CM'}).$$

Ako se tačka C uzme na osi obrtanja \mathbf{u} u onoj ravni upravnoj na tu osu u kojoj se tačka M' obrće oko ose, biće

$$\overrightarrow{CM_1} + \overrightarrow{CM'} \perp \mathbf{u}, \quad \text{odn.} \quad \overrightarrow{CM_1} + \overrightarrow{CM'} \perp \mathbf{W}.$$

Vektorskim množenjem jednačine (4) sleva vektorom-verzorom \mathbf{W} dobiće se tada

$$\mathbf{W} \times (\overrightarrow{CM_1} - \overrightarrow{CM'}) = \mathbf{W} \times [\mathbf{W} \times (\overrightarrow{CM_1} + \overrightarrow{CM'})],$$

a odatle proističe

$$(5) \quad \mathbf{W} \times (\overrightarrow{CM_1} - \overrightarrow{CM'}) = -\mathbf{W}^2 (\overrightarrow{CM_1} + \overrightarrow{CM'}),$$

jer je $\mathbf{W} \cdot (\overrightarrow{CM_1} + \overrightarrow{CM'}) = 0$.

Prema nepokretnom polu O biće prema (3)

$$\overrightarrow{CM_1} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_C, \quad \overrightarrow{CM'} = \mathbf{r}' - \mathbf{r}_C = \mathbf{r} - \mathbf{r}_C + \mathbf{su},$$

što zamenom u (5) daje

$$(6) \quad \mathbf{W} \times (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}) = -\mathbf{W}^2 (\mathbf{r}_1 + \mathbf{r} - 2\mathbf{r}_C),$$

pošto je

$$\mathbf{W} \times (\overrightarrow{CM_1} + \overrightarrow{CM'}) = \mathbf{W} \times (\mathbf{r}_1 + \mathbf{r} - 2\mathbf{r}_C + \mathbf{su}) = \mathbf{W} \times (\mathbf{r}_1 + \mathbf{r} - 2\mathbf{r}_C),$$

jer su \mathbf{W} i \mathbf{u} kolinearni vektori.

Ova se jednačina može neposredno rešiti po vektoru \mathbf{r}_C položaja tačke C na osi obrtanja, tako da se konačno dobiva

$$(7) \quad \mathbf{r}_C = \frac{1}{2} \left[\mathbf{r}_1 + \mathbf{r} + \frac{1}{\mathbf{W}^2} \mathbf{W} \times (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}) \right].$$

Vektor $\mathbf{r}_C = \overrightarrow{OC}$ određuje položaj naročite tačke C koja se nalazi na osi rotacije. Vektori \mathbf{r}_C i \mathbf{u} potpuno određuju osu onog zavojnog kretanja koje prevodi telo iz položaja I u položaj II. Prema tome proizvoljno konačno pomeranje tela može se samo na jedan način svesti na helikoidno pomeranje.

Najzad, pomenimo da se telo može prevesti iz jednog položaja u ma koji drugi i konačnim rotacijama oko dve ose koje se mimoilaze i to na neograničen broj načina.

1.9.7. Polje elementarnog pomeranja tačaka krutog tela

Vektor elementarnog pomeranja $\Delta \mathbf{r}$ tačaka krutog tela, određen obrascem (1.9.6—2) zavisao je od položaja tačke i ugaone brzine, kao i od izbora pokretnog pola. Stoga se pomeranje tačaka krutog tela može posmatrati i kao da je određeno vektorskim poljem $\Delta \mathbf{r}$. Jednostavnijeg pisanja radi stavimo da je $\Delta \mathbf{r} \equiv \mathbf{p}$. Polje pomeranja ne može biti proizvoljno, već vektor \mathbf{p} mora zadovoljavati izvesne uslove da bi mogao određivati stvarna pomeranja tačaka krutog tela. Ukoliko ti uslovi nisu zadovoljeni, ne može se vektor \mathbf{p} predstaviti u obliku (1.9.6 — 2).

Polje vektora \mathbf{p} može se proučavati u odnosu na generalisane koordinate q^i , ($i = 1, 2, 3$) tako da se za sam vektor pomeranja može pisati

$$(1) \quad \mathbf{p} = p^k \mathbf{g}_k,$$

gde su p^k , ($k = 1, 2, 3$) krivolinijske koordinate vektora elementarnog pomeranja, a \mathbf{g}_k osnovni vektori za sistem q^i (1.1 — 11).

U opštem slučaju vektor \mathbf{p} je vezan za tačku čije se elementarno pomeranje posmatra, tako da je za ma koju tačku tela

$$(2) \quad \mathbf{p} = \mathbf{p}(q^1, q^2, q^3),$$

a za pokretni pol A biće vektor elementarnog pomeranja

$$(3) \quad \mathbf{p}_A = \mathbf{p}(q_A^1, q_A^2, q_A^3).$$

Elementarno pomeranje tačaka krutog tela, u opštem slučaju određeno obrascem (1.9.6 — 2), može se sad napisati u obliku

$$(4) \quad \mathbf{p} = \mathbf{p}_A + \Delta\boldsymbol{\varphi} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_A).$$

Parcijalnim diferencijaljenjem jednačine (4) po generalisanoj koordinati q^i dobiće se, s obzirom (1.1 — 11)

$$(5) \quad \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial q^i} = \Delta\boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{g}_i,$$

jer \mathbf{p}_A , \mathbf{r}_A i $\Delta\boldsymbol{\varphi}$ ne zavise od koordinata q^i , već samo od q_A^i , odnosno Ojlerovih uglova.

Skalarnim množenjem jednačine (5) osnovnim vektorom \mathbf{g}_j dobiva se:

$$(6) \quad \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial q^i} \cdot \mathbf{g}_j = (\Delta\boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{g}_i) \cdot \mathbf{g}_j = \Delta\boldsymbol{\varphi} \cdot (\mathbf{g}_i \times \mathbf{g}_j).$$

Zamenom indeksa i i j u (6) dobiće se analogan obrazac

$$(7) \quad \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial q^j} \cdot \mathbf{g}_i = \Delta\boldsymbol{\varphi} \cdot (\mathbf{g}_j \times \mathbf{g}_i).$$

Zbir jednačina (6) i (7) daje

$$(8) \quad \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial q^j} \cdot \mathbf{g}_i + \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial q^i} \cdot \mathbf{g}_j = 0$$

jer je $\mathbf{g}_j \times \mathbf{g}_i = -\mathbf{g}_i \times \mathbf{g}_j$. Oduzimanjem jednačine (7) od jednačine (6) dobiće se

$$(9) \quad \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial q^i} \cdot \mathbf{g}_j - \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial q^j} \cdot \mathbf{g}_i = 2 \Delta\boldsymbol{\varphi} \cdot (\mathbf{g}_i \times \mathbf{g}_j).$$

Relacije (8) i (9) predstavljaju karakteristične osobine polja infinitezimalnih (elementarnih) pomeranja tačaka krutog tela. Relacija (8) je potreban i dovoljan uslov da neko vektorsko polje bude polje pomeranja krutog tela. Da je taj uslov potreban vidi se otuda što je izveden iz pretpostavke da vektor \mathbf{p} predstavlja polje pomeranja. Da je uslov dovoljan dokazuje se na taj način što se obrazac (8) posmatra kao sistem od 6 (među sobom nezavisnih) diferencijalnih jednačina, pa se dokazuje da rešenja tog sistema zaista predstavljaju polje pomeranja krutog tela. Relacija (9) omogućuje da se za svako elementarno pomeranje odredi odgovarajuća elementarna rotacija $\Delta\boldsymbol{\varphi}$.

Obrasci (8) i (9) mogu se izraziti neposredno pomoću koordinata p^k vektora pomeranja. Skalarni proizvod $\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial q^i} \cdot \mathbf{g}_j$ može se napisati u obliku

$$(10) \quad \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial q^i} \cdot \mathbf{g}_j = \frac{\partial}{\partial q^i} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{g}_j) - \mathbf{p} \cdot \frac{\partial \mathbf{g}_j}{\partial q^i}.$$

Pomoću (1) i (1.2.1 — 10) dobiće se sad

$$(11) \quad \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial q^i} \cdot \mathbf{g}_j = \frac{\partial}{\partial q^i} (p^l g_{lj}) - p^l \mathbf{g}_l \cdot \frac{\partial \mathbf{g}_j}{\partial q^i}.$$

Prema definiciji Kristofelovih simbola prve vrste (1.6.2.1 — 5) je

$$\mathbf{g}_l \cdot \frac{\partial \mathbf{g}_j}{\partial q^i} = [ij, l]$$

pa će biti

$$(12) \quad \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial q^i} \cdot \mathbf{g}_j = \frac{\partial}{\partial q^i} (p^l g_{lj}) - p^l [ij, l].$$

Sad se može iskoristiti definicija Kristofelovog simbola druge vrste (1.6.2.1—10)

$$[ij, l] = \left\{ \begin{matrix} m \\ i \ j \end{matrix} \right\} g_{ml}$$

i ako se, sem toga, još uvedu oznake

$$p^l g_{lj} \equiv p_j, \quad g_{mi} p^m \equiv p_m,$$

može se (12) napisati konačno u obliku

$$(13) \quad \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial q^i} \cdot \mathbf{g}_j = \frac{\partial p_j}{\partial q^i} - \left\{ \begin{matrix} m \\ i \ j \end{matrix} \right\} p_m.$$

Desna strana ovog izraza predstavlja tzv. kovarijantni izvod vektora p_j po koordinati q^i i obeležava se obično $p_{j,i}$

$$(14) \quad p_{j,i} \equiv \frac{\partial p_j}{\partial q^i} - \left\{ \begin{matrix} m \\ i \ j \end{matrix} \right\} p_m.$$

Obrasci (8) i (9) mogu se sada napisati u obliku

$$(15) \quad \dot{p}_{j,i} + p_{i,j} = 0$$

$$(16) \quad p_{i,j} - p_{j,i} = 2 \Delta \varphi \cdot (\mathbf{g}_i \times \mathbf{g}_j).$$

Razlika $p_{j,i} - p_{i,j}$ kovarijantnih izvoda jednaka je, zbog simetrije Kristofelovih simbola druge vrste (1.6.2.1—10) u odnosu na donje indekse, razlici parcijalnih izvoda.

$$(17) \quad p_{j,i} - p_{i,j} = \frac{\partial p_j}{\partial q^i} - \frac{\partial p_i}{\partial q^j}.$$

Kako razlike parcijalnih izvoda koordinata vektora po koordinatama tačaka oblika (17) određuju koordinate rotora vektora, to u opštem slučaju izraz (17) određuje rotor vektora \mathbf{p} .

Vektor elementarne rotacije $\Delta \varphi$ može se u Dekartovim pravouglim koordinatama izraziti u obliku

$$\Delta \varphi \equiv \mathbf{\Omega} = \Omega_x \mathbf{i} + \Omega_y \mathbf{j} + \Omega_z \mathbf{k}.$$

Ako se iskoriste veze (1.1 — 17) između jediničnih vektora \mathbf{i} , \mathbf{j} i \mathbf{k} i osnovnih vektora \mathbf{g}_i generalisanih koordinata, za $\mathbf{\Omega}$ se može napisati

$$\Delta \varphi \equiv \mathbf{\Omega} = \left(\Omega_x \frac{\partial q^k}{\partial x} + \Omega_y \frac{\partial q^k}{\partial y} + \Omega_z \frac{\partial q^k}{\partial z} \right) \mathbf{g}_k,$$

pa veličine

$$(18) \quad \Omega_x \frac{\partial q^k}{\partial x} + \Omega_y \frac{\partial q^k}{\partial y} + \Omega_z \frac{\partial q^k}{\partial z} \equiv \Omega^k$$

predstavljaju *krivolinijske koordinate vektora elementarne rotacije*, a sam vektor $\Delta\varphi$ se može izraziti u obliku

$$(19) \quad \Delta\varphi \equiv \Omega = \Omega^k \mathbf{g}_k.$$

Desna strana obrasca (9) dobiva sad oblik

$$(20) \quad \Delta\varphi \cdot (\mathbf{g}_i \times \mathbf{g}_j) = \Omega^k \mathbf{g}_k \cdot (\mathbf{g}_i \times \mathbf{g}_j).$$

Mešoviti proizvod $\mathbf{g}_k \cdot (\mathbf{g}_i \times \mathbf{g}_j)$ sastavljen je od osnovnih vektora sistema generalisanih koordinata q^i . Svi vektori sadržani u mešovitom proizvodu moraju biti među sobom nezavisni, inače je mešoviti proizvod jednak nuli; otuda indeksi i, j, k moraju biti među sobom različiti. Sem toga, $(G_{ijk})^2 \equiv [(\mathbf{g}_i \times \mathbf{g}_j) \cdot \mathbf{g}_k]^2$ predstavlja Gramovu determinantu trećeg reda (vidi T. Anđelić, Teorija vektora, III izdanje, str. 64, 65), pa je

$$(21) \quad (G_{ijk})^2 \equiv [(\mathbf{g}_i \times \mathbf{g}_j) \cdot \mathbf{g}_k]^2 = \begin{vmatrix} g_{ii} & g_{ij} & g_{ik} \\ g_{ji} & g_{jj} & g_{jk} \\ g_{ki} & g_{kj} & g_{kk} \end{vmatrix}.$$

Obeležimo mešoviti proizvod osnovnih vektora $[(\mathbf{g}_1 \times \mathbf{g}_2) \cdot \mathbf{g}_3]$ sa G . Kad indeksi i, j, k obrazuju parnu permutaciju brojeva 1, 2, 3, vrednost G_{ijk} je $+G$, ako indeksi i, j, k obrazuju neparnu permutaciju tih brojeva, vrednost G_{ijk} je $-G$, a ako su bar dva indeksa jednake vrednosti, G_{ijk} je jednako nuli.

Koristan je i tzv. e -simbol e_{ijk} koji ima vrednost $+1, -1$ ili 0 , prema tome da li indeksi i, j, k obrazuju parnu, ili neparnu permutaciju brojeva 1, 2, 3 ili su bar dva indeksa među sobom jednaka. Pomoću tog simbola može se napisati

$$(22) \quad G_{ijk} \equiv (\mathbf{g}_i \times \mathbf{g}_j) \cdot \mathbf{g}_k = G e_{ijk}.$$

Međutim, desna strana izraza (21) je determinanta g metričkog tenzora g_{ij} pod uslovom da indeksi i, j, k imaju različite vrednosti, pa je $G^2 = g$ i

$$(23) \quad (\mathbf{g}_i \times \mathbf{g}_j) \cdot \mathbf{g}_k = \sqrt{g} e_{ijk}.$$

Uvede li se još oznaka

$$(24) \quad \sqrt{g} e_{ijk} = \epsilon_{ijk}$$

izraz (20) se može napisati u obliku

$$(25) \quad \Delta\varphi \cdot (\mathbf{g}_i \times \mathbf{g}_j) = \Omega^k \epsilon_{ijk}.$$

Veličina

$$(26) \quad \Omega_{ij} \equiv \Omega^k \epsilon_{ijk}$$

predstavlja *tenzor elementarne rotacije*. Zbog očigledne osobine koordinata tog tenzora

$$(27) \quad \Omega_{ij} = -\Omega_{ji}$$

koja proističe iz toga što se znak koeficijenta ϵ_{ijk} menja kad dva susedna indeksa razmene mesta, kaže se da je ovaj tenzor *antisimetričan*.

Sad se za rotor vektora elementarnog pomeranja tačkaka krutog tela može pisati

$$(28) \quad p_{j,i} - p_{i,j} = 2 \Omega_{ij}.$$

Ako se stavi još

$$\text{rot } \mathbf{p} = (p_{3,2} - p_{2,3}) \mathbf{g}_1 + (p_{1,3} - p_{3,1}) \mathbf{g}_2 + (p_{2,1} - p_{1,2}) \mathbf{g}_3$$

i

$$\mathbf{\Omega} = \Omega_{23} \mathbf{g}_1 + \Omega_{31} \mathbf{g}_2 + \Omega_{12} \mathbf{g}_3,$$

za (28) dobiva se izraz napisan na način uobičajen u vektorskom računu

$$(29) \quad \text{rot } \mathbf{p} = 2\mathbf{\Omega}.$$

1.10. Slaganje kretanja

Pod slaganjem (sabiranjem) dva ili više kretanja nekog krutog tela razume se određivanje rezultatnog kretanja.

a) *Slaganje translacija.* — Za slaganje translacija $T(\mathbf{a}_1)$ i $T(\mathbf{a}_2)$ (1.9.1) važe očigledne relacije

$$T(\mathbf{a}_1) + T(\mathbf{a}_2) = T(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2),$$

$$T(\mathbf{a}_2) + T(\mathbf{a}_1) = T(\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_1).$$

Kako je uvek $\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2$ biće

$$(1) \quad T(\mathbf{a}_1) + T(\mathbf{a}_2) = T(\mathbf{a}_2) + T(\mathbf{a}_1).$$

Osim toga uvek je

$$T(\mathbf{a}) + T(\mathbf{o}) = T(\mathbf{a}),$$

(2)

$$T(\mathbf{a}) + T(-\mathbf{a}) = T(\mathbf{o}),$$

gde je $T(\mathbf{o})$ tzv. neutralni element operacije slaganja translacija i predstavlja translaciju određenu vektorom nula, tj. mirovanje, a $T(-\mathbf{a})$ je inverzni element operacije — translacija suprotna translaciji $T(\mathbf{a})$ koju ova poništava i telo vraća u prvobitni položaj.

Translacije (dve ili više njih) sabiraju se kao vektori, pa se sabiranjem translacija dobiva opet translacija.

Prema tome, translacije obrazuju zatvoreni sistem, koji je asocijativan, ima u odnosu na operaciju slaganja neutralni i inverzni element pa stoga one obrazuju komutativnu (Abelovu) grupu kretanja.

b) *Slaganje rotacija oko nepokretne ose.* — Rotacija oko nepokretne ose određena je (1.9.2), kad je data osa, npr. jediničnim vektorom \mathbf{u} , i ugao obrtanja α . Takvu rotaciju obeležavaćemo kratko $R(\mathbf{u}, \alpha)$. Očigledno je, kad znak sabiranja označava operaciju slaganja rotacija, da će biti

$$R(\mathbf{u}, \alpha_1) + R(\mathbf{u}, \alpha_2) = R(\mathbf{u}, \alpha_1 + \alpha_2),$$

(1)

$$R(\mathbf{u}, \alpha_2) + R(\mathbf{u}, \alpha_1) = R(\mathbf{u}, \alpha_2 + \alpha_1),$$

$$R(\mathbf{u}, \alpha) + R(\mathbf{u}, 0) = R(\mathbf{u}, \alpha),$$

$$R(\mathbf{u}, \alpha) + R(\mathbf{u}, -\alpha) = R(\mathbf{u}, 0).$$

Prema tome, dve uzastopne rotacije oko neke nepokretne ose određuju opet rotaciju oko te iste ose, red izvođenja rotacija je bez uticaja na rezultat, postoji neutralni element $R(\mathbf{u}, 0)$ koji ne menja rezultat prethodne rotacije, i inverzni element $R(\mathbf{u}, -\alpha)$ koji poništava prethodnu rotaciju $R(\mathbf{u}, \alpha)$. Sve ovo se odnosi i na proizvoljan broj rotacija oko iste ose, tako da se slaganje rotacija oko iste nepokretne ose u stvari svodi na sabiranje (i oduzimanje) uglova rotacije.

To znači da rotacije krutog tela oko nepokretne ose obrazuju u pogledu slaganja komutativnu grupu kretanja.

Naročitu ulogu kod rotacija oko nepokretne ose igraju one rotacije čiji je ugao rotacije π , dakle, $R(\mathbf{u}, \pi)$. Takve rotacije zovu se i *osna (aksijalna) simetrija*, jer posle takvog obrtanja sve tačke tela dolaze u simetričan položaj prema osi obrtanja kao osi simetrije. Očigledno je

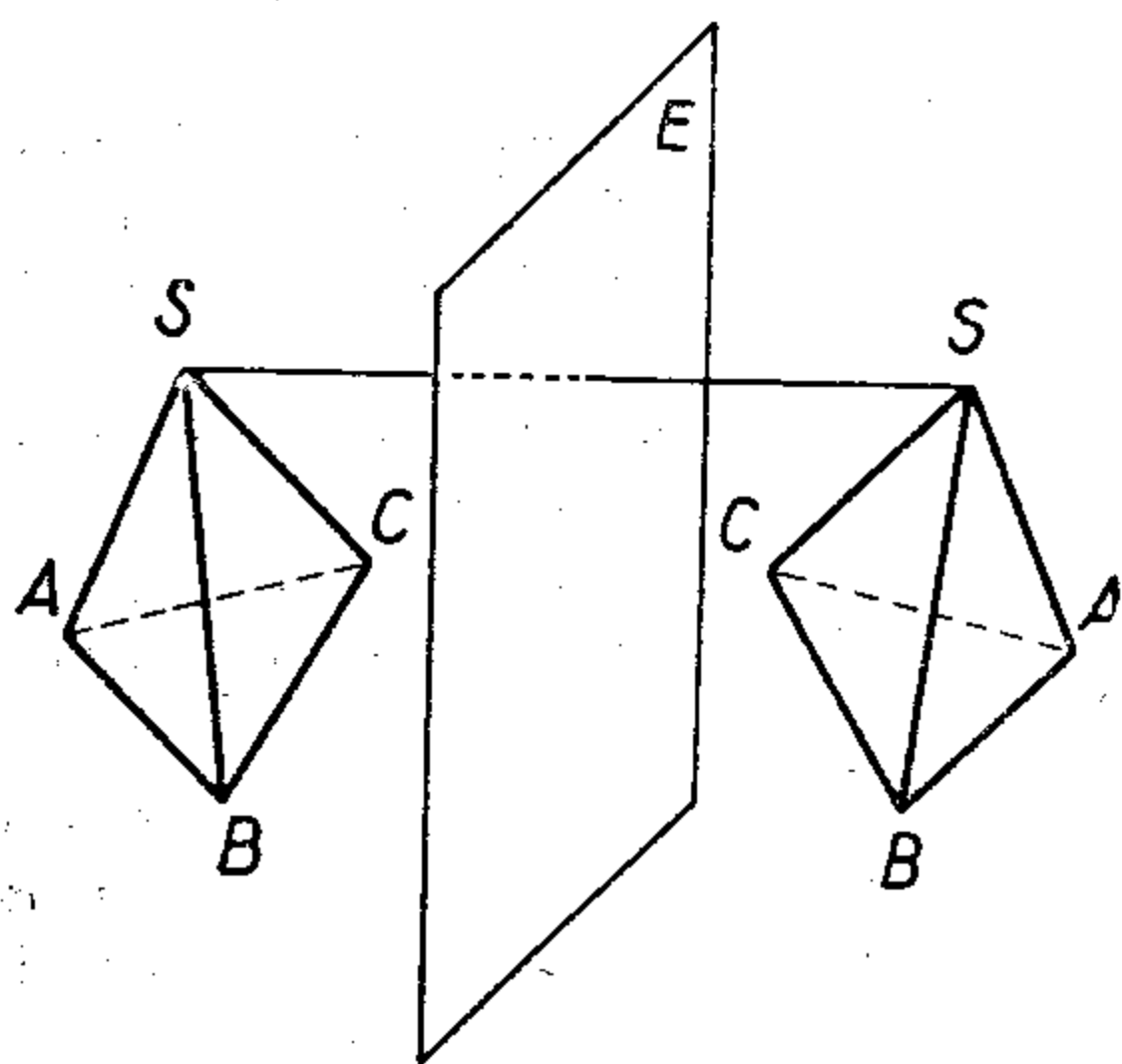
$$(2) \quad R(\mathbf{u}, \pi) + R(\mathbf{u}, \pi) = R(\mathbf{u}, 2\pi) = R(\mathbf{u}, 0),$$

jer se posle dve aksijalne simetrije odn. dve rotacije u istom smeru za po π telo obrne za ugao 2π i vraća u svoj prvobitni položaj. Prema tome rotacija oko nepokretne ose je periodni proces čiji je period 2π . Osim toga jasno je dalje

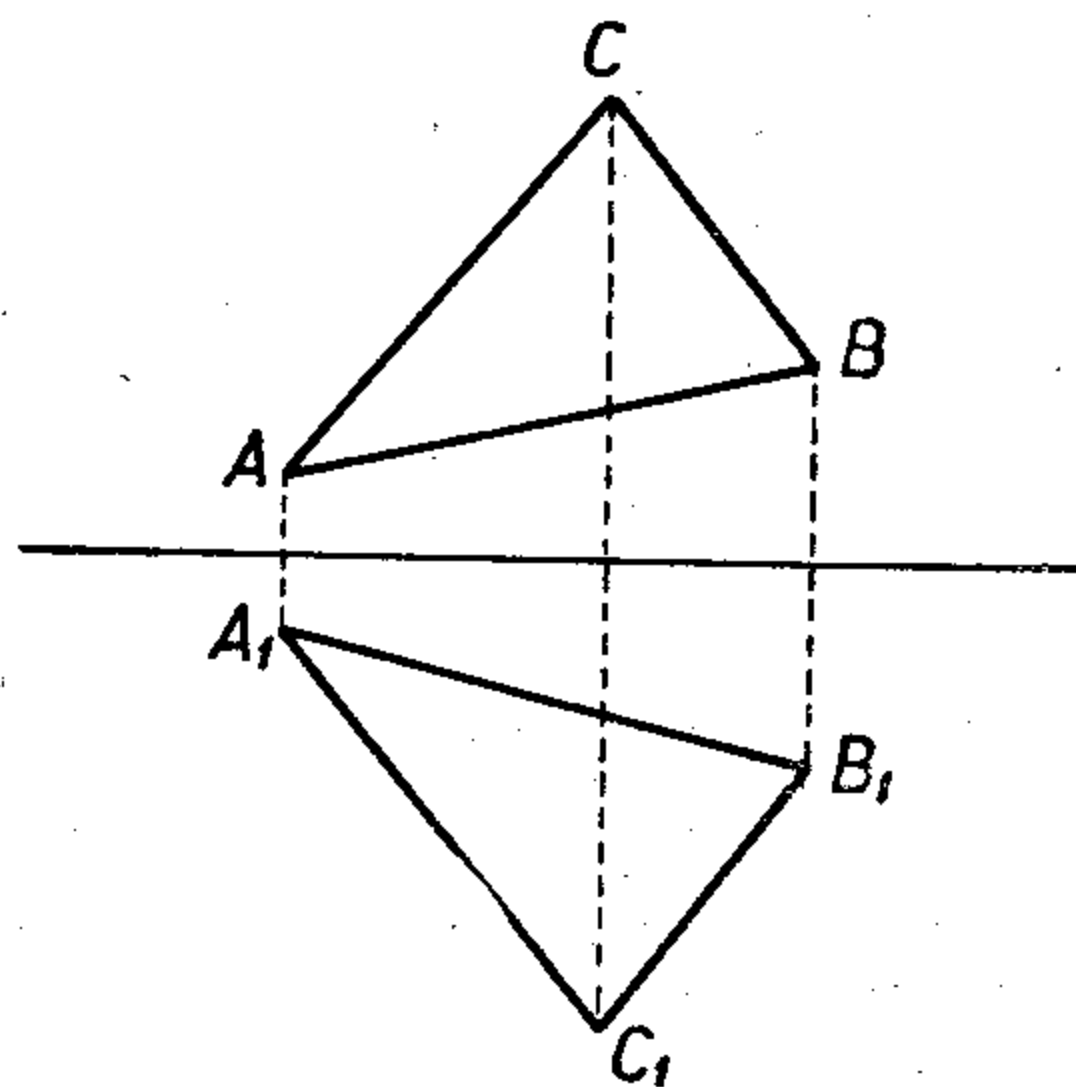
$$(3) \quad R(\mathbf{u}, -\pi) = R(\mathbf{u}, \pi),$$

tj. sama aksijalna simetrija je nezavisna od orijentacije ose rotacije.

c) *Ogledanje tela na ravni.* — Pod ogledanjem krutog tela na datoj ravni E , kratko $S(E)$, razume se *ogledalska slika* tela na toj ravni, tj. položaj tela simetričan prema ravni E . Telo se u opštem slučaju ne može nikakvim pomeranjem u običnom prostoru prevesti u položaj svoje ogledalske slike, jer iako su elementi tela u simetričnom položaju ostali isti oni su drukčije raspoređeni (sl. 38). Međutim, ako se u ravni odredi ogledalska slika neke ravne figure na datoj pravoj, tj. njen aksijalno simetrični položaj (sl. 39), ta ravna figura se može dovesti do poklapanja sa svojom slikom uvek rotacijom poluravnini, u kojoj je ravna figura, oko ose simetrije (prave ogledanja) za ugao π . To je *prevrtanje (inverzija)* ravne figure na drugu stranu. Analogno prevrtanje tela se ne može izvesti u trodimenzionom prostoru.



Slika 38



Slika 39

U kinematici se ogledanje na ravni koristi samo kao sredstvo za izvođenje nekih rezultata slaganja kretanja tela. Radi toga ćemo navesti naredne geometrijski jasne rezultate dva uzastopna ogledanja, pri čemu se naravno razume da se drugo ogledanje odnosi na ogledalsku sliku tela.

1) Za dva uzastopna ogledanja na paralelnim ravnima E_1 i E_2 ($E_1 \parallel E_2$) važi

$$(1) \quad S(E_1) + S(E_2) = T(\mathbf{a})$$

gde je \mathbf{a} vektor čija je dužina jednaka dvostrukom rastojanju paralelnih ravni E_1 i E_2 a orijentacija obavezno od prve ravni ogledanja E_1 ka drugoj E_2 . Prema tome važe i sledeće relacije

$$(2) \quad \begin{aligned} S(E_2) + S(E_1) &= T(-\mathbf{a}), \\ S(E) + S(E) &= T(\mathbf{o}). \end{aligned}$$

Dakle, ogledanja na paralelnim ravnima nisu komutativna, ali su asocijativna. Naime, ako su ravni E_1 , E_2 i E_3 paralelne, biće uvek

$$\begin{aligned} S(E_1) + S(E_2) + S(E_3) &= [S(E_1) + S(E_2)] + S(E_3) = \\ &= S(E_1) + [S(E_2) + S(E_3)]. \end{aligned}$$

Svaka translacija se može na beskonačno mnogo načina tumačiti kao dva ovakva ogledanja.

2) Naprotiv, za dva uzastopna ogledanja na dvema *neparalelnim ravnima* E_1 i E_2 važi

$$(3) \quad S(E_1) + S(E_2) = R(p, 2\alpha),$$

gde je p presečna prava ravni E_1 i E_2 , a α ugao koji one među sobom obrazuju. Naravno, neorijentisana prava p ne određuje jednoznačno smer obrtanja, ali se on može po dogovoru odrediti. Npr. ako se kao ugao α između datih ravni definiše onaj koji je manji od $\pi/2$ (kad ravni nisu upravne), tada je ugao obrtanja $2\alpha < \pi$ i na taj način smer obrtanja od E_1 ka E_2 i orijentacija presečne prave p utvrđena i određena jediničnim vektorom \mathbf{u} . Stoga se onda može napisati

$$(3a) \quad S(E_1) + S(E_2) = R(\mathbf{u}, 2\alpha).$$

Radi obrazloženja prethodnih tvrđenja uočimo (sl. 40) tragove l_1 i l_2 ravni E_1 i E_2 u ravni normalnoj na presečnoj pravoj p ovih ravni i neka tačka C bude presek te normalne ravni sa pravom p . Tada se tačka M_1 preslikava

u odnosu na l_1 u tačku M_2 , a ova tačka u tačku M_3 u odnosu na l_2 . Ako je pri tom $\sphericalangle(l_1, l_2) = \alpha$ biće, što je očigledno sa slike,

$$\overline{CM_1} = \overline{CM_2} = \overline{CM_3}$$

i

$$\sphericalangle M_1 C M_3 = 2\alpha.$$

Jasno je da ni slaganje ogledanja na neparalelnim ravnima nije komutativno, već alternativno i važi

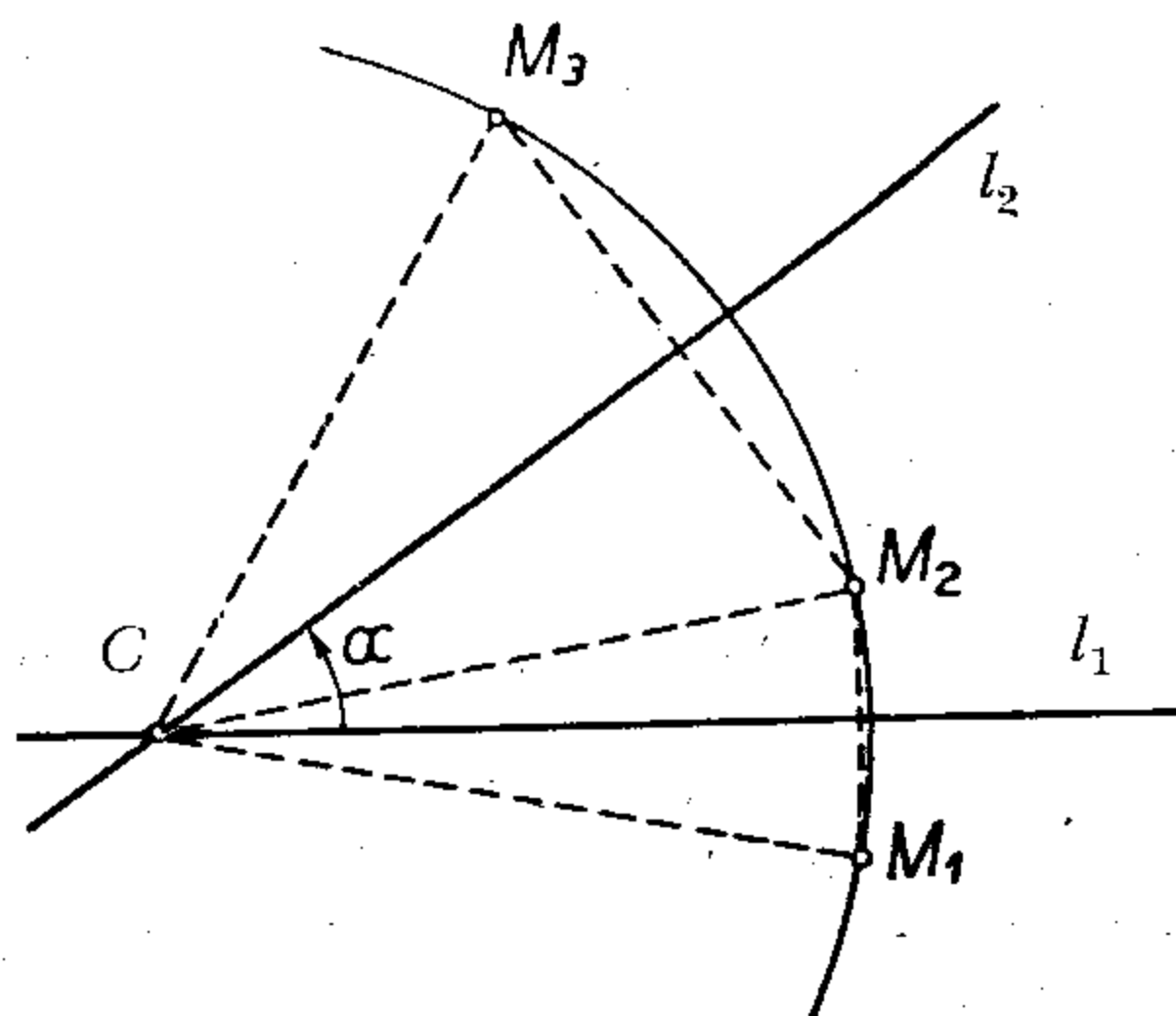
$$(4) \quad S(E_2) + S(E_1) = R(\mathbf{u}, -2\alpha).$$

I ovo slaganje ogledanja je asocijativno i postoji neograničeno mnogo načina da se rotacija oko određene ose predstavi kao zbir dva ogledanja.

U naročitom slučaju, kad su ravni ogledanja E_1 i E_2 normalne ($E_1 \perp E_2$) tada važi

$$(5) \quad S(E_1) + S(E_2) = S(E_2) + S(E_1) = R(p, \pi).$$

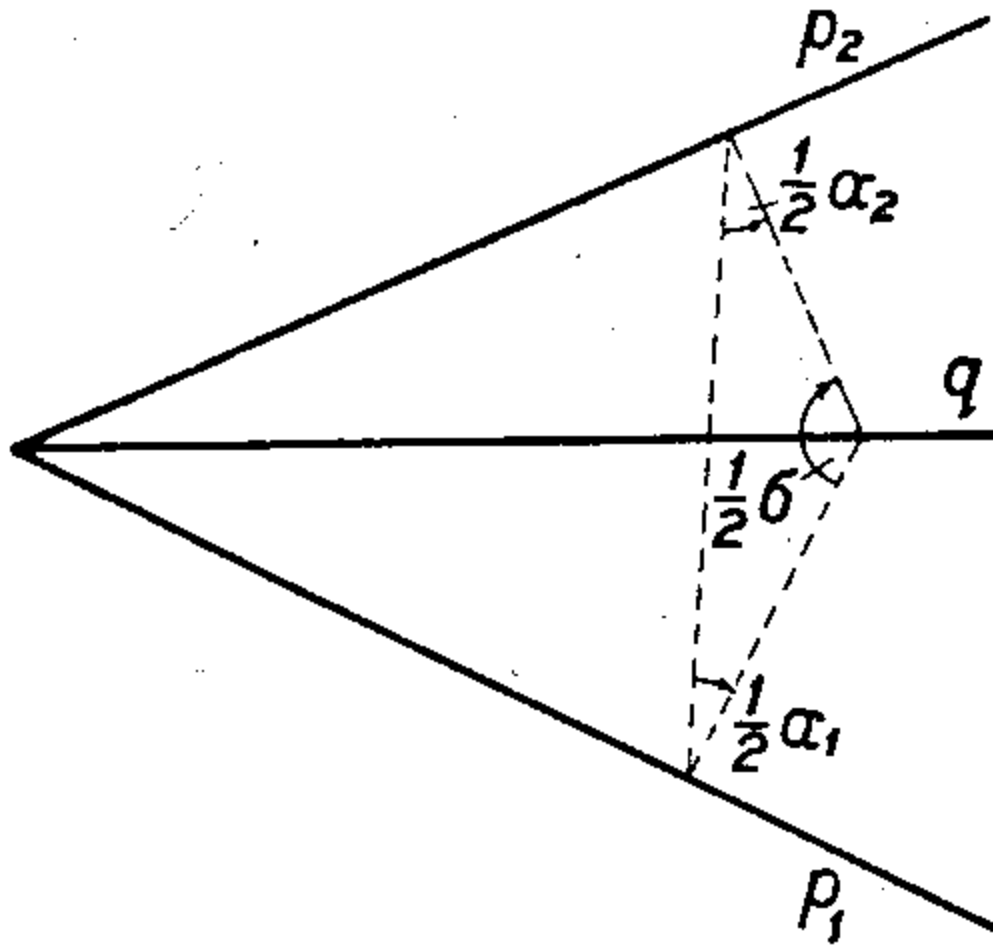
Orijentacija ose u ovom slučaju nije važna.



Slika 40

d) *Slaganje konačnih rotacija oko nepokretnih osa.* —

1) Neka su date rotacije $R(p_1, \alpha_1)$ i $R(p_2, \alpha_2)$ oko dveju sticajinih pravih (pravih koje se seku) (sl. 41). Ako se ravan (p_1, p_2) obeleži E i kroz pravu p_1 postavi ravan E_1 tako da diedar $(E p_1 E_1)$ iznosi $\frac{1}{2} \alpha_1$ a kroz pravu p_2 ravan E_2 tako da diedar $(E p_2 E_2)$ bude $\frac{1}{2} \alpha_2$, tada se podesnim razlaganjem datih rotacija na ogledanja može napisati s obzirom na (2 i 3)



Slika 41

$$(6) \quad R(p_1, \alpha_1) + R(p_2, \alpha_2) = S(E_1) + S(E) + S(E) + S(E_2) = S(L_1) + S(E_2) = R(q, \sigma),$$

gde je q presečna prava ravni E_1 i E_2 a $\frac{1}{2} \sigma$ ugao koji one obrazuju.

Prema tome, dve rotacije oko osa koje se seku opet su rotacija oko ose koja prolazi kroz presek prve dve a za ugao koji se može odrediti.

Operacija slaganja konačnih rotacija nije komutativna, jer je

$$(7) \quad R(p_2, \alpha_2) + R(p_1, \alpha_1) = S(E_2) + S(E_1) = R(q, -\sigma),$$

pa promena reda rotacija *menja smer* rezultatnog obrtanja.

Ugao $\frac{1}{2} \sigma$ između ravni E_1 i E_2 (sl. 41) odnosno ugao σ rezultatnog obrtanja može se odrediti po obrascu

$$(8) \quad \cos \frac{1}{2} \sigma = -\cos \frac{1}{2} \alpha_1 \cos \frac{1}{2} \alpha_2 + \sin \frac{1}{2} \alpha_1 \sin \frac{1}{2} \alpha_2 \cos \alpha,$$

gde je $\alpha = \sphericalangle(p_1, p_2)$. Obrazac (8) se dobiva primenom kosinusne teoreme za uglove na sferni trougao koji nastaje, kad se oko zajedničkog preseka pravih p_1, p_2 i q (oko temena trijedra čije su ivice p_1, p_2 i q) opiše jedinična sfera.

Kad su date rotacije određene verzorima

$$\mathbf{W}_1 = \mathbf{u}_1 \operatorname{tg} \frac{\alpha_1}{2} \quad \text{i} \quad \mathbf{W}_2 = \mathbf{u}_2 \operatorname{tg} \frac{\alpha_2}{2},$$

rezultantna rotacija biće određena verzorom (Bilimović — Kinematika čvrstog tela, str. 98).

$$(9) \quad \mathbf{W} = \frac{\mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_2 - \mathbf{W}_1 \times \mathbf{W}_2}{1 - \mathbf{W}_1 \cdot \mathbf{W}_2},$$

što pokazuje da *konačne rotacije oko osa predstavljene kao verzori nisu pravi vektori, jer se ne sabiraju kao vektori.*

Elementarne (infinitesimalne) rotacije oko osa se, međutim, mogu u prvoj aproksimaciji smatrati kao vektori, pošto se u tom slučaju obrazac (9) svodi na

$$(10) \quad \mathbf{W} = \mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_2,$$

zato što se onda

$$\mathbf{W}_1 \times \mathbf{W}_2 \quad \text{i} \quad \mathbf{W}_1 \cdot \mathbf{W}_2$$

mogou kao beskonačno male veličine višeg reda zanemariti. Na taj način za infinitesimalne rotacije važi

$$(11) \quad \mathbf{u} \Delta \sigma = \mathbf{u}_1 \Delta \alpha_1 + \mathbf{u}_2 \Delta \alpha_2,$$

što se može napisati u obliku

$$\Delta \sigma = \Delta \alpha_1 + \Delta \alpha_2.$$

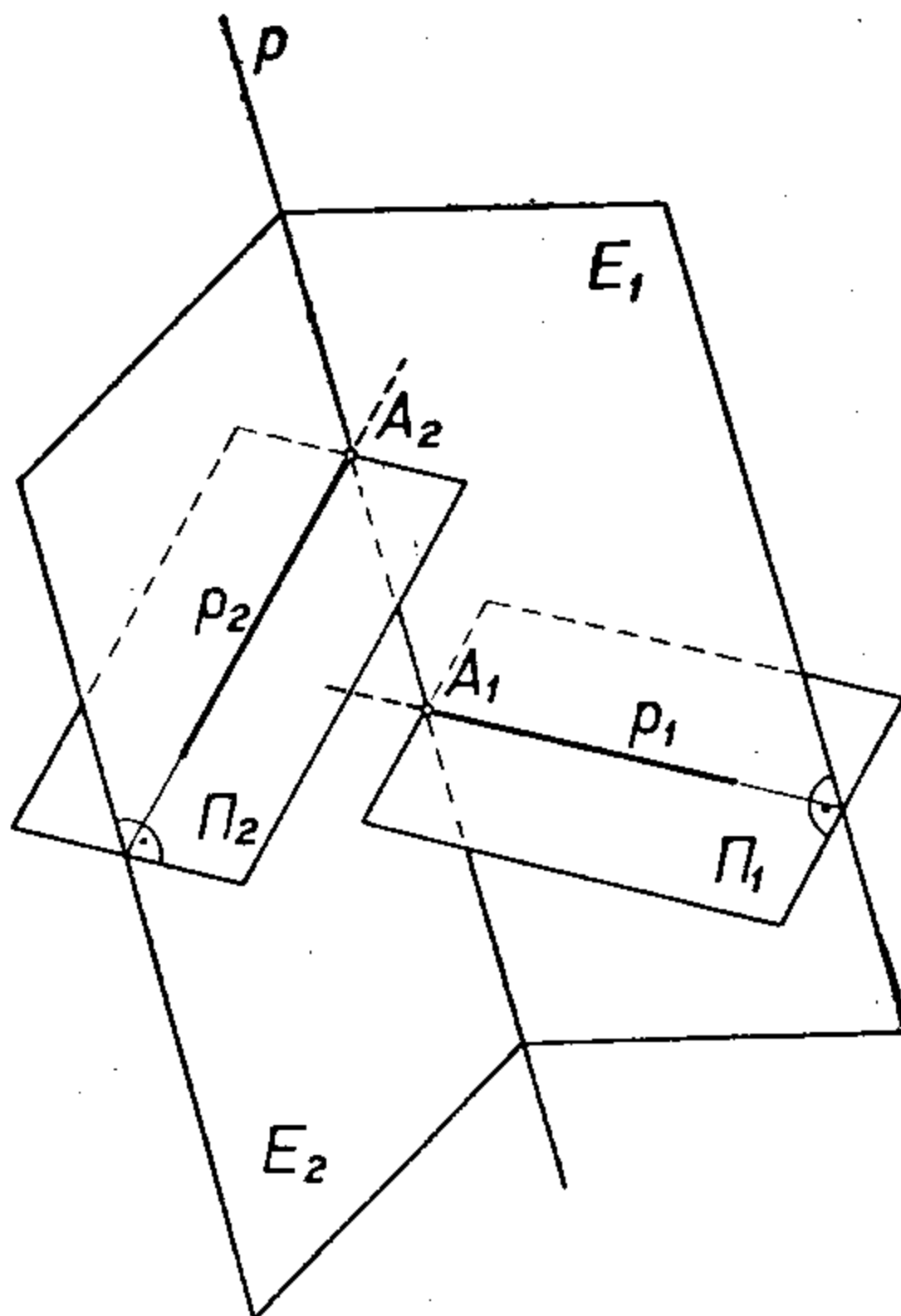
Videli smo (1.8.2) da se pokretni koordinatni sistem može prevesti u položaj nepokretnog sistema pomoću tri rotacije: oko ose (\mathbf{k}), ose (\mathbf{v}) i linije čvorova (\mathbf{N}). Ove tri rotacije određuju, kad se radi o konačnoj razlici položaja oba sistema, jednu konačnu rotaciju na prilično složen način. Međutim, kad se radi samo o infinitezimalnoj promeni položaja pri ovom sfernom kretanju, tada se može napisati (kad se sa $\Delta \Omega$ obeleži ugao elementarne rotacije)

$$(12) \quad \Delta \Omega = \mathbf{u} \Delta \Omega = \\ = \mathbf{k} \Delta \psi + \mathbf{v} \Delta \varphi + \mathbf{N} \Delta \vartheta,$$

tj. rezultatna rotacija je kao vektor zbir vektora elementarnih rotacija oko osa z , ζ i ON .

2) Kad su prave p_1 i p_2 oko kojih se izvodi obrtanje paralelne ($p_1 \parallel p_2$), relacija (6) ostaje u važnosti, s tim što je sad (sl. 42) ugao σ rezultatne konačne rotacije određen obrascem

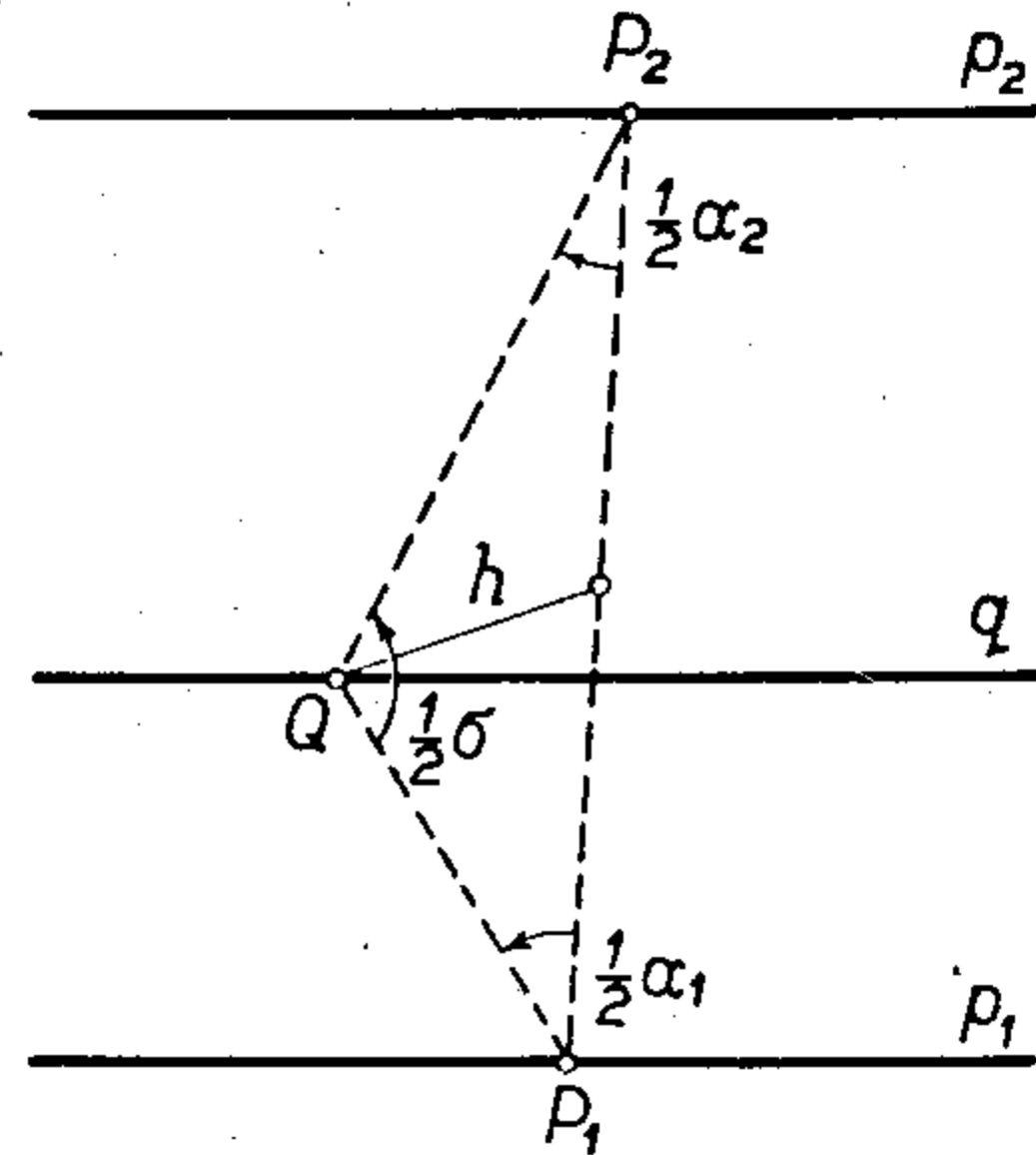
$$(13) \quad \sigma = 2\pi - (\alpha_1 + \alpha_2).$$



Slika 43

Iz prethodnih izlaganja se vidi da rotacije oko sticajnih osa obrazuju grupu kretanja, ali ona nije komutativna. Rotacije oko paralelnih osa same za sebe ne obrazuju grupu kretanja.

3) Najzad, u slučaju p_1 mimoilazno sa p_2 (sl. 43) neka p bude zajednička normala tih pravih a $A_1 A_2$ njihovo najkraće rastojanje. Dalje neka bude:



Slika 42

Osa q rezultatne rotacije paralelna je datim osama i nalazi se na rastojanju h od ravni datih paralelnih pravih.

Tako, ako je rastojanje datih paralelnih pravih p_1 i p_2 (sl. 42) $P_1 P_2 = d$, tada se h može odrediti kao visina trougla $P_1 P_2 Q$, u kome je poznata stranica d i na njoj nalegli uglovi, obrascem

$$(14) \quad h = \frac{d \sin \frac{1}{2} \alpha_1 \sin \frac{1}{2} \alpha_2}{\sin \frac{1}{2} (\alpha_1 + \alpha_2)},$$

koji nije teško izvesti.

Pri slaganju rotacija oko paralelnih osa može nastupiti slučaj da ravnine E_1 i E_2 budu paralelne pa se ne seku. Tada i samo tada se slaganjem dveju rotacija oko paralelnih osa dobiva translacija kao rezultatno kretanje. Npr. slaganje dve aksijalne simetrije oko paralelnih osa uvek se svodi na translaciju.

ravan $(p_1, p) = E_1$, ravan $(p_2, p) = E_2$, ravan kroz pravu p_1 upravna na $p = \Pi_1$, ravan kroz p_2 upravna na $p = \Pi_2$; dakle $\Pi_1 \parallel \Pi_2$, $\Pi_1 \perp E_1$ i $\Pi_2 \perp E_2$. Najzad neka bude $\sphericalangle(p_1, p_2) = \alpha$. Uočimo sad aksijalne simetrije oko pravih p_1 i p_2 , tj. uočimo rotacije $R(p_1, \pi)$ i $R(p_2, \pi)$ i rastavimo ih na ogledanje pa se može napisati

$$(15) \quad R(p_1, \pi) + R(p_2, \pi) = S(\Pi_1) + S(E_1) + S(E_2) + S(\Pi_2) = \\ = S(E_1) + S(\Pi_1) + S(\Pi_2) + S(E_2) = \\ = T(\overrightarrow{2A_1A_2}) + R(p, 2\alpha),$$

što je moguće pošto su ogledanja na normalnim ravnima (5) komutativna.

Rezultantno kretanje je rotacija oko zajedničke normale datih mimoilaznih osa za ugao koji je dvaput veći od ugla koji obrazuju mimoilazne ose i translacija duž zajedničke normale za dvostruko najkraće rastojanje među osama. Dakle, rezultantno kretanje je helikoidno.

1.11. Brzina tačke krutog tela. Trenutna ugaona brzina. Trenutna osa rotacije

U odeljku 1.4 brzina tačke je u opštem slučaju definisana kao granična vrednost količnika priraštaja $\Delta \mathbf{r}$ vektora položaja i priraštaja vremena Δt , za koje se tačka iz položaja $\mathbf{r}(t)$ pomerila u položaj $\mathbf{r} + \Delta \mathbf{r}$, kada priraštaj vremena Δt teži nuli.

Na istovetan način se definiše i brzina tačke krutog tela. Međutim, prema (1.9.6—2) elementarna pomeranja $\Delta \mathbf{r}$ tačaka krutog tela nisu potpuno proizvoljna, već su određena pomeranjem nekog proizvoljno izabranog pola A u telu, elementarnom rotacijom $\Delta \boldsymbol{\varphi} = \Delta \varphi \mathbf{u}$ i položajem posmatrane tačke M tela prema pokretnom polu A , određenim vektorom $\boldsymbol{\rho} = \overrightarrow{AM}$. Prema tome, brzina neke tačke M tela biće u nekom trenutku t

$$(1) \quad \mathbf{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}_A}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \boldsymbol{\varphi}}{\Delta t} \times \boldsymbol{\rho}.$$

Ovde je \mathbf{v} brzina tačke M tela, dok je

$$(2) \quad \mathbf{v}_A = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}_A}{\Delta t}$$

brzina pola A , a

$$(3) \quad \boldsymbol{\omega} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \boldsymbol{\varphi}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta \varphi}{\Delta t} \mathbf{u}_1 \right) = \mathbf{u} \frac{d\varphi}{dt} = \mathbf{u} \omega$$

je trenutna ugaona brzina tela.

Kao što je pokazano u odeljku 1.9.6, pomeranje tela je sastavljeno od translacije određene pomeranjem jedne tačke, recimo pokretnog pola A i rotacije za određeni ugao oko određene ose \mathbf{u} kroz tačku A . Stoga brzina \mathbf{v}_A pola određuje *translatornu komponentu* brzine \mathbf{v} tačke tela, a $\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}$ *rotacionu komponentu* te brzine. Jedinični vektor \mathbf{u} određuje granični položaj ose rotacije pa predstavlja u posmatranom trenutku vremena *trenutnu osu rotacije*. Sve tačke na trenutnoj osi rotacije u uočenom trenutku vremena nalaze se u miru. Prema tome, brzina neke tačke M krutog tela određena je, s obzirom na (1), (2) i (3), obrascem

$$(4) \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}.$$

Vektorsko polje \mathbf{v} ne može biti svako proizvoljno vektorsko polje, tj. polje brzina tačaka krutog tela ne može biti dato kao proizvoljna funkcija položaja.

U odeljku 1.9.7 pokazano je da elementarno kruto pomeranje $\Delta \mathbf{r} = \mathbf{p}$ kao vektorsko polje mora zadovoljavati uslov (1.9.7—8).

Iz tog uslova neposredno se dobiva deljenjem sa Δt i puštanjem da $\Delta t \rightarrow 0$

$$(5) \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial q^i} \cdot \mathbf{g}_j + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial q^j} \cdot \mathbf{g}_i = 0$$

ili, u odnosu na Dekartove pravougle koordinate

$$(6) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} \cdot \mathbf{i} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} \cdot \mathbf{j} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} \cdot \mathbf{k} = 0, \\ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} \cdot \mathbf{i} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} \cdot \mathbf{k} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} \cdot \mathbf{j} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} \cdot \mathbf{i} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} \cdot \mathbf{k} = 0. \end{aligned}$$

Na isti način, prema (1.9.7—29) ugaona brzina je određena obrascem

$$(7) \quad \text{rot } \mathbf{v} = 2\boldsymbol{\omega}.$$

Pored uslova (5) i (7) koje neko vektorsko polje mora zadovoljavati da bi moglo da predstavlja polje brzina tačaka nekog krutog tela, brzine tačaka krutog tela imaju još neke osobine karakteristične za kruto telo.

a) Projekcije brzine tačke P i tačke Q na vektor \overrightarrow{PQ} koji spaja te dve tačke jednake su.

Prema (4) brzine tačaka P i Q su:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_P &= \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{AP}, \\ \mathbf{v}_Q &= \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{AQ}. \end{aligned}$$

Skalarnim množenjem ovih jednačina vektorom \overrightarrow{PQ} i oduzimanjem jedne tako dobivene skalarne jednačine od druge dobiće se

$$\mathbf{v}_P \cdot \overrightarrow{PQ} - \mathbf{v}_Q \cdot \overrightarrow{PQ} = \boldsymbol{\omega} \cdot [(\overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AQ}) \times \overrightarrow{PQ}].$$

Kako je $\overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AQ} = -\overrightarrow{PQ}$, a vektorski proizvod kolinearnih vektora je jednak nuli, biće

$$(8) \quad \mathbf{v}_P \cdot \overrightarrow{PQ} = \mathbf{v}_Q \cdot \overrightarrow{PQ}.$$

Na osnovu ove osobine, kad su poznate brzine ma koje tri nekolinearne tačke tela, može se odrediti brzina svake dalje tačke izvan ravni određene ovim trima tačkama.

b) Projekcija brzine \mathbf{v}_M ma koje tačke M tela na trenutnu osu rotacije jednaka je projekciji translatorne brzine \mathbf{v}_A na tu istu osu.

Ova osobina neposredno proističe posle skalarnog množenja obrasca (4) jediničnim vektorom \mathbf{u} trenutne ose rotacije jer je $\mathbf{u} \cdot (\boldsymbol{\omega} \mathbf{u} \times \mathbf{q}) = 0$, pošto su vektori obuhvaćeni ovim mešovitim proizvodom komplanarni pa je

$$(9) \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{u}.$$

c) Trenutna ugaona brzina $\boldsymbol{\omega}$ ne zavisi od izbora pola A u telu.

Pretpostavimo suprotno, da se promenom pola menja i trenutna ugaona brzina. Neka su A i B dve tačke nekog krutog tela koje su izabrane za polove i neka ω i ω_1 budu odgovarajuće trenutne ugaone brzine, a $\rho = \overrightarrow{AM}$ i $\rho_1 = \overrightarrow{BM}$ vektori položaja neke tačke M tela prema uočenim polovima. Prema (4) brzina tačke M za pol A je

$$(10) \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}_A + \omega \times \overrightarrow{AM}$$

a za pol B

$$(11) \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}_B + \omega_1 \times \overrightarrow{BM}.$$

Za brzinu \mathbf{v}_B pola B kao tačke krutog tela može se takođe prema (4) napisati

$$(12) \quad \mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \omega \times \overrightarrow{AB}.$$

Brzine \mathbf{v} u (10) i (11) su prema definiciji jednake. Unoseći \mathbf{v}_B iz (12) u (11) i izjednačujući desne strane izraza (11) i (10) dobićemo

$$\mathbf{v}_A + \omega \times \overrightarrow{AB} + \omega_1 \times \overrightarrow{BM} = \mathbf{v}_A + \omega \times \overrightarrow{AM}.$$

Kako je, međutim, $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}$ ova se relacija svodi na

$$\omega_1 \times \overrightarrow{BM} = \omega \times \overrightarrow{BM},$$

odnosno

$$(\omega_1 - \omega) \times \overrightarrow{BM} = \mathbf{0}.$$

Tačka M je proizvoljna tačka tela pa u opštem slučaju vektor \overrightarrow{BM} nije nula-vektor, a takođe nije ni kolinearan sa $\omega_1 - \omega$, odakle proističe da mora biti

$$(13) \quad \omega_1 = \omega,$$

što je trebalo dokazati.

d) Translatorna komponenta brzine neke tačke tela menja se pri promeni pola po obrascu

$$(14) \quad \mathbf{v}_B - \mathbf{v}_A = \omega \times \overrightarrow{AB}.$$

Za polove A i B , prema (10), (11) i (13), brzina neke tačke M tela je

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_A + \omega \times \overrightarrow{AM} = \mathbf{v}_B + \omega \times \overrightarrow{BM}$$

odakle se dobiva

$$\mathbf{v}_B - \mathbf{v}_A = \omega \times (\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{BM}) = \omega \times \overrightarrow{AB}.$$

1.11.1. Dekartove pravouglo koordinatne brzine tačke. Jednačina trenutne ose rotacije

Vektor brzine tačke M krutog tela određen je vektorima: brzine \mathbf{v}_A pokretnog pola, trenutne ugaone brzine ω i položaja $\rho = \overrightarrow{AM} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_A$ tačke M prema polu A .

Projekcije vektora \mathbf{v} , \mathbf{v}_A i \mathbf{q} na ose nepokretnog koordinatnog sistema $Oxyz$ su

$$(1) \quad \mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \{\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}\}; \quad \mathbf{v}_A = \frac{d\mathbf{r}_A}{dt} = \{\dot{x}_A, \dot{y}_A, \dot{z}_A\};$$

$$\mathbf{q} = \{x - x_A, y - y_A, z - z_A\},$$

a za projekcije vektora trenutne ugaone brzine $\boldsymbol{\omega}$ na ose nepokretnog trijedra koriste se oznake

$$(2) \quad \boldsymbol{\omega} = \{P, Q, R\}.$$

Projekcije tih vektora na ose pokretnog koordinatnog sistema $A\xi\eta\zeta$ su

$$(3) \quad \mathbf{v} = \{v_\xi, v_\eta, v_\zeta\}; \quad \mathbf{v}_A = \{v_{A\xi}, v_{A\eta}, v_{A\zeta}\};$$

$$\boldsymbol{\omega} = \{p, q, r\}; \quad \mathbf{q} = \{\xi, \eta, \zeta\}.$$

Pomoću (1), (2) i (3) mogu se sada napisati obrasci za projekcije obrasca (1.11—4) za brzinu tačke krutog tela na ose pokretnog i nepokretnog Dekartovog pravouglog koordinatnog sistema. Projekcije na ose nepokretnog sistema dobivaju se skalarnim množenjem vektorske jednačine (1.11—4) jediničnim vektorima \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} osa x , y , z . Kako je

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{q} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ P & Q & R \\ x - x_A & y - y_A & z - z_A \end{vmatrix},$$

dobiće se

$$(4) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= \dot{x}_A + Q(z - z_A) - R(y - y_A), \\ \dot{y} &= \dot{y}_A + R(x - x_A) - P(z - z_A), \\ \dot{z} &= \dot{z}_A + P(y - y_A) - Q(x - x_A). \end{aligned}$$

Slično je i za ose pokretnog sistema. Zbog

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{q} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{\lambda} & \boldsymbol{\mu} & \boldsymbol{\nu} \\ p & q & r \\ \xi & \eta & \zeta \end{vmatrix},$$

biće

$$(5) \quad \begin{aligned} v_\xi &= v_{A\xi} + q\zeta - r\eta, \\ v_\eta &= v_{A\eta} + r\xi - p\zeta, \\ v_\zeta &= v_{A\zeta} + p\eta - q\xi. \end{aligned}$$

Kad je rotaciona komponenta $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{q}$ brzine svih tačaka tela jednaka nuli, tj. kad se telo kreće translatorno, brzine svih tačaka tela su među sobom jednake, tj. jednake brzini pokretnog pola,

$$(6) \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}_A.$$

U ovom slučaju može se govoriti o *brzini tela* i ma koja njegova tačka zastupa celo telo. Skalarni izrazi za brzinu tela su tada

$$(7) \quad \dot{x} = \dot{x}_A, \quad \dot{y} = \dot{y}_A, \quad \dot{z} = \dot{z}_A.$$

Međutim, ako je u nekom trenutku $\boldsymbol{\omega} = 0$, telo ne mora da se *trajno* kreće translatorno, već je translatorno samo njegovo *trenutno* kretanje.

Ako nema translacije ($\mathbf{v}_A = 0$) telo se samo obrće oko nepokretne tačke A . Tada je brzina neke tačke tela

$$(8) \quad \mathbf{v} = \dot{\mathbf{q}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{q} = \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_A),$$

jer je zbog $\mathbf{r}_A = \text{const.}$

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{q}},$$

i zavisi samo od trenutne ugaone brzine i položaja tačke u telu.

Skalarne jednačine rotacione brzine oko nepokretne tačke glase u odnosu na nepokretni sistem, prema (4),

$$(9) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= Q(z - z_A) - R(y - y_A), \\ \dot{y} &= R(x - x_A) - P(z - z_A), \\ \dot{z} &= P(y - y_A) - Q(x - x_A), \end{aligned}$$

a u odnosu na pokretni sistem, prema (5),

$$(10) \quad \begin{aligned} v_\xi &= q\zeta - r\eta, \\ v_\eta &= r\xi - p\zeta, \\ v_\zeta &= p\eta - q\xi. \end{aligned}$$

Prema nepokretnom sistemu koordinata jedinični vektori λ, μ, ν osa pokretnog koordinatnog sistema nisu konstantni vektori, već menjaju svoju orijentaciju (pravac i smer) u prostoru. Unoseći u vektorsku relaciju (8) redom $\mathbf{q} = \lambda$, $\mathbf{q} = \mu$, i $\mathbf{q} = \nu$ dobiće se obrasci za brzinu skretanja vektora λ, μ i ν pri direktnom kretanju,

$$(11) \quad \dot{\lambda} = \boldsymbol{\omega} \times \lambda, \quad \dot{\mu} = \boldsymbol{\omega} \times \mu, \quad \dot{\nu} = \boldsymbol{\omega} \times \nu.$$

Slično tome, u slučaju inverznog kretanja mogu se jedinični vektori $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ koordinatnog sistema $Oxyz$ posmatrati iz sistema $A\xi\eta\zeta$ kao pokretni. Pri tome je smer rotacije sistema $Oxyz$ prema sistemu $A\xi\eta\zeta$ kao nepokretnom suprotan smeru rotacije sistema $A\xi\eta\zeta$ prema sistemu $Oxyz$ kao nepokretnom. Stoga u (8) treba $\boldsymbol{\omega}$ zameniti sa $-\boldsymbol{\omega}$. Stavljajući sada da je $\mathbf{r} - \mathbf{r}_A = \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ dobiće se

$$(12) \quad \dot{\mathbf{i}} = -\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{i}, \quad \dot{\mathbf{j}} = -\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{j}, \quad \dot{\mathbf{k}} = -\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{k}.$$

Ovi obrasci određuju brzinu skretanja jediničnih vektora $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ u slučaju inverznog kretanja.

Za telo koje se obrće oko stalne ose \mathbf{u} je $\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{u}$; kad se još pol A izabere na osi obrtanja, brzina neke tačke M tela je određena izrazom

$$(13) \quad \mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{q} = \omega \mathbf{u} \times \mathbf{q}.$$

Kad se ose z i ζ poklapaju sa osom obrtanja relacija (13) se projiciranjem na ose x, y i z svodi na

$$(14) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= -\omega(y - y_A); \\ \dot{y} &= \omega(x - x_A); \\ \dot{z} &= 0, \end{aligned}$$

a projiciranjem na ose ξ, η, ζ ,

$$(15) \quad v_\xi = -\omega\eta, \quad v_\eta = \omega\xi, \quad v_\zeta = 0.$$

Intenzitet brzine je u ovom slučaju

$$(16) \quad v = \omega |\mathbf{u} \times \mathbf{q}| = \omega r,$$

gde je r rastojanje tačke M od ose obrtanja. Kad je obrtanje jednoliko ($\omega = \text{const.}$) i telo se obrne n puta u minuti, $\omega = \frac{n\pi}{30}$, intenzitet brzine određen je obrascem

$$(17) \quad v = \frac{\pi n r}{30}.$$

U slučaju ravanskog kretanja, prema odeljku 1.9.3, može se kretanje tela posmatrati kao kretanje neke ravne figure. Izaberu li se ose Oz i $A\zeta$ tako da budu upravne na ravan kretanja te figure, brzina tačaka tela će imati translatornu komponentu u ravni xOy , odnosno $A\xi\eta$ koja je istovremeno i ravan kretanja, a osa obrtanja je upravna na tu ravan. Prema tome, za ravansko kretanje je ($\boldsymbol{\omega} \perp \mathbf{r}$, $\boldsymbol{\omega} \perp \dot{\mathbf{r}}$, $\boldsymbol{\omega} \perp \mathbf{q}$, $\boldsymbol{\omega} \perp \dot{\mathbf{q}}$)

$$(18) \quad \begin{aligned} P = Q = p = q = 0, \quad R = r = \omega = \dot{\varphi}, \\ z = 0, \quad \zeta = 0. \end{aligned}$$

Izrazi (4) za projekcije brzine na nepokretni koordinatni sistem onda dobivaju oblik

$$(19) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= \dot{x}_A - (y - y_A) \dot{\varphi}; \\ \dot{y} &= \dot{y}_A + (x - x_A) \dot{\varphi}; \\ \dot{z} &= 0, \end{aligned}$$

a za pokretni koordinatni sistem glase

$$(20) \quad \begin{aligned} v_\xi &= v_{A\xi} - \eta \dot{\varphi}; \\ v_\eta &= v_{A\eta} + \xi \dot{\varphi}; \\ v_\zeta &= 0. \end{aligned}$$

Prema odeljku 1.9.6 svako se telo u najopštijem slučaju može prevesti iz jednog položaja u ma koji drugi jednom translacijom i jednom rotacijom oko određene ose. U svakom trenutku vremena ta osa je upravo trenutna osa rotacije \mathbf{u} . Ako je $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{u}\omega$ trenutna ugaona brzina tela, trenutna osa rotacije kroz pokretni pol A je prava koja prolazi kroz tačku A i kolinearna je sa vektorom $\boldsymbol{\omega}$. Neka je \mathbf{r} vektor položaja proizvoljne tačke na toj osi; tada vektor $\mathbf{r} - \mathbf{r}_A$ mora biti kolinearan sa vektorom $\boldsymbol{\omega}$, tj.

$$(21) \quad \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_A) = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{q} = 0$$

ili

$$(22) \quad \mathbf{r} - \mathbf{r}_A = \lambda \boldsymbol{\omega},$$

gde je λ neki parametar.

Jednačina (21) odn. (22) predstavlja vektorsku jednačinu trenutne ose rotacije. Iz (22) projiciranjem na ose nepokretnog i pokretnog koordinatnog sistema

i eliminacijom parametra λ dobiće se skalarne jednačine trenutne ose rotacije, za nepokretni sistem

$$(23) \quad \frac{x-x_A}{P} = \frac{y-y_A}{Q} = \frac{z-z_A}{R},$$

i za pokretni

$$(24) \quad \frac{\xi}{p} = \frac{\eta}{q} = \frac{\zeta}{r}.$$

Za vektor elementarne rotacije $\Delta \Omega$ izveden je u odeljku 1.10 obrazac (12) u kome je elementarna rotacija izražena kao funkcija elementarnih promena Ojlerovih uglova. Ako se (1.10—12) podeli priraštajem vremena Δt , pusti da taj priraštaj teži nuli i odredi granična vrednost dobiva se

$$(25) \quad \omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \Omega}{\Delta t} = \dot{\psi} \mathbf{k} + \dot{\varphi} \mathbf{v} + \dot{\vartheta} \mathbf{N},$$

čime je vektor trenutne ugaone brzine određen pomoću komponenata u pravcima osa Oz , $O\zeta$ i ON (linije čvorova).

Projeciranjem relacije (25) na ose pokretnog i nepokretnog koordinatnog sistema dobivaju se projekcije vektora trenutne ugaone brzine na te ose izražene pomoću Ojlerovih uglova i njihovih prvih izvoda po vremenu. Za nepokretni sistem imamo

$$(26) \quad \begin{aligned} P &= \omega \cdot \mathbf{i} = \dot{\varphi} \sin \psi \sin \vartheta + \dot{\vartheta} \cos \psi; \\ Q &= \omega \cdot \mathbf{j} = -\dot{\varphi} \cos \psi \sin \vartheta + \dot{\vartheta} \sin \psi; \\ R &= \omega \cdot \mathbf{k} = \dot{\varphi} \cos \vartheta + \dot{\psi}; \end{aligned}$$

a za pokretni

$$(27) \quad \begin{aligned} p &= \omega \cdot \boldsymbol{\lambda} = \dot{\psi} \sin \varphi \sin \vartheta + \dot{\vartheta} \cos \varphi; \\ q &= \omega \cdot \boldsymbol{\mu} = \dot{\psi} \cos \varphi \sin \vartheta - \dot{\vartheta} \sin \varphi; \\ r &= \omega \cdot \mathbf{v} = \dot{\psi} \cos \vartheta + \dot{\varphi}. \end{aligned}$$

Projekcije vektora trenutne ugaone brzine na ose nepokretnog i pokretnog koordinatnog sistema mogu se korišćenjem relacija (11) i (12) izraziti i pomoću kosinusa uglova između osa jednog i drugog sistema i njihovih izvoda. Skalarnim množenjem vektorskih relacija (11) vektorima $\boldsymbol{\lambda}$, $\boldsymbol{\mu}$ i \mathbf{v} dobiće se naredni skalarni izrazi

$$(28) \quad \begin{aligned} p &= \frac{d\boldsymbol{\mu}}{dt} \cdot \mathbf{v} = -\boldsymbol{\mu} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt}, & \frac{d\boldsymbol{\mu}}{dt} \cdot \boldsymbol{\mu} &= 0, \\ q &= \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \boldsymbol{\lambda} = -\mathbf{v} \cdot \frac{d\boldsymbol{\lambda}}{dt}, & \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v} &= 0, \\ r &= \frac{d\boldsymbol{\lambda}}{dt} \cdot \boldsymbol{\mu} = -\boldsymbol{\lambda} \cdot \frac{d\boldsymbol{\mu}}{dt}, & \frac{d\boldsymbol{\lambda}}{dt} \cdot \boldsymbol{\lambda} &= 0. \end{aligned}$$

Tako, npr. ako se pođe od

$$\frac{d\boldsymbol{\lambda}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\lambda}$$

i ona skalarno pomnoži jediničnim vektorom $\boldsymbol{\mu}$, dobiće se veza

$$\frac{d\boldsymbol{\lambda}}{dt} \cdot \boldsymbol{\mu} = (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\lambda}) \cdot \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\omega} \cdot (\boldsymbol{\lambda} \times \boldsymbol{\mu}) = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{v} = r.$$

Ako se, međutim pođe od

$$\frac{d\boldsymbol{\mu}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\mu}$$

i ona skalarno pomnoži jediničnim vektorom $\boldsymbol{\lambda}$, dobiće se sad veza

$$\frac{d\boldsymbol{\mu}}{dt} \cdot \boldsymbol{\lambda} = (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\mu}) \cdot \boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\omega} \cdot (\boldsymbol{\mu} \times \boldsymbol{\lambda}) = -\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{v} = -r.$$

Na sličan način se izvode i ostale relacije koje određuju p , q i r . Tri poslednje od relacija (28) se dobivaju odmah diferenciranjem po vremenu izraza

$$\boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{\lambda} = 1; \quad \boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{\mu} = 1, \quad \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v} = 1.$$

Isto tako, množeći vektorske relacije (12) skalarno jediničnim vektorima \mathbf{i} , \mathbf{j} i \mathbf{k} nepokretnih Dekartovih pravougljih osa dobiće se

$$(29) \quad \begin{aligned} P &= -\frac{d\mathbf{j}}{dt} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{j} \cdot \frac{d\mathbf{k}}{dt}, & \frac{d\mathbf{i}}{dt} \cdot \mathbf{i} &= 0, \\ Q &= -\frac{d\mathbf{k}}{dt} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{k} \cdot \frac{d\mathbf{i}}{dt}, & \frac{d\mathbf{j}}{dt} \cdot \mathbf{j} &= 0, \\ R &= -\frac{d\mathbf{i}}{dt} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{i} \cdot \frac{d\mathbf{j}}{dt}, & \frac{d\mathbf{k}}{dt} \cdot \mathbf{k} &= 0. \end{aligned}$$

Ako se koordinate jediničnih vektora pokretnog sistema izraze pomoću Ojlerovih uglova preko jediničnih vektora nepokretnog koordinatnog sistema,

$$(30) \quad \begin{aligned} \boldsymbol{\lambda} &= a_{11} \mathbf{i} + a_{21} \mathbf{j} + a_{31} \mathbf{k}, \\ \boldsymbol{\mu} &= a_{12} \mathbf{i} + a_{22} \mathbf{j} + a_{32} \mathbf{k}, \\ \boldsymbol{v} &= a_{13} \mathbf{i} + a_{23} \mathbf{j} + a_{33} \mathbf{k}, \end{aligned}$$

obrasci (28) se svode na naredne izraze za koordinate vektora trenutne ugaone brzine u pokretnom koordinatnom sistemu:

$$(31) \quad \begin{aligned} p &= \dot{a}_{12}a_{12} + \dot{a}_{22}a_{23} + \dot{a}_{32}a_{33} = -(\dot{a}_{12}a_{13} + \dot{a}_{22}a_{23} + \dot{a}_{32}a_{33}), \\ q &= \dot{a}_{13}a_{11} + \dot{a}_{23}a_{21} + \dot{a}_{33}a_{31} = -(\dot{a}_{13}a_{11} + \dot{a}_{23}a_{21} + \dot{a}_{33}a_{31}), \\ r &= \dot{a}_{11}a_{12} + \dot{a}_{21}a_{22} + \dot{a}_{31}a_{32} = -(\dot{a}_{11}a_{12} + \dot{a}_{21}a_{22} + \dot{a}_{31}a_{32}). \end{aligned}$$

Slično, ako se vektori \mathbf{i} , \mathbf{j} i \mathbf{k} izraze u obliku

$$(32) \quad \begin{aligned} \mathbf{i} &= a_{11} \boldsymbol{\lambda} + a_{12} \boldsymbol{\mu} + a_{13} \boldsymbol{v}, \\ \mathbf{j} &= a_{21} \boldsymbol{\lambda} + a_{22} \boldsymbol{\mu} + a_{23} \boldsymbol{v}, \\ \mathbf{k} &= a_{31} \boldsymbol{\lambda} + a_{32} \boldsymbol{\mu} + a_{33} \boldsymbol{v}, \end{aligned}$$

obrasci (30) postaju

$$(33) \quad \begin{aligned} P &= -(\dot{a}_{21}a_{31} + \dot{a}_{22}a_{32} + \dot{a}_{23}a_{33}) = a_{21}\dot{a}_{31} + a_{22}\dot{a}_{32} + a_{23}\dot{a}_{33}, \\ Q &= -(\dot{a}_{31}a_{11} + \dot{a}_{32}a_{12} + \dot{a}_{33}a_{13}) = a_{31}\dot{a}_{11} + a_{32}\dot{a}_{12} + a_{33}\dot{a}_{13}, \\ R &= -(\dot{a}_{11}a_{21} + \dot{a}_{12}a_{22} + \dot{a}_{13}a_{23}) = a_{11}\dot{a}_{21} + a_{12}\dot{a}_{22} + a_{13}\dot{a}_{23}. \end{aligned}$$

1.11.2. Trenutni centar rotacije. Centroide

Pri ravanskom kretanju, kad se sve tačke krutog tela kreću u ravnima paralelnim nekoj stalnoj osnovnoj ravni, vektor trenutne ugaone brzine $\boldsymbol{\omega}$ ima stalan pravac — upravan na toj osnovnoj ravni. Kako su brzine tačaka na trenutnoj osi

u svakom uočenom trenutku u miru, to u svakoj od ravni upravni na ovoj osi postoji po jedna tačka — presek trenutne ose obrtanja i uočene ravni — u trenutnom miru. Ako se ravansko kretanje krutog tela proučava pomoću kretanja pokretne ravni (sa polom A) po nepokretnoj ravni (sa polom O), tada se oko takve tačke C kao centra, u uočenom trenutku, pokretna ravan obrće po nepokretnoj ravni. Ta tačka C je *trenutni centar rotacije (obrtanja)* ili *trenutni pol brzina* uočene pokretne ravni. Tada je u svakoj paralelnoj ravni krutog tela u tom trenutku isto stanje kretanja (brzine u odnosnim tačkama imaju iste veličine i smerove a pravce paralelno pomerene). Za sve tačke M pokretne ravni važi $\mathbf{v} = \overrightarrow{CM} \perp \boldsymbol{\omega}$. Prema obrascu (1.11—4) ta tačka C je definisana jednačinom

$$(1) \quad \mathbf{v}_C = 0 = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_C,$$

gde je $\mathbf{e}_C = \overrightarrow{AC}$ vektor položaja tačke C prema pokretnom polu A . Izabere li se C za pokretni pol, brzina \mathbf{v} ma koje tačke M u tom trenutku biće

$$(2) \quad \mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{CM},$$

jer je $\mathbf{v}_C = 0$.

Položaj trenutnog centra obrtanja može se naći rešavanjem jednačine (1). Množenjem te jednačine vektorski sleva vektorom $\boldsymbol{\omega}$ dobiće se

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \cdot (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{e}_C) - \omega^2 \mathbf{e}_C = 0.$$

Međutim, pri ravanskom kretanju osa obrtanja je uvek upravna na ravan kretanja $\boldsymbol{\omega} \perp \mathbf{e}_C$ pa je

$$(3) \quad \mathbf{e}_C = \frac{1}{\omega^2} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_A).$$

Kako je \mathbf{e}_C vektor položaja trenutnog centra obrtanja u odnosu na pokretni pol A , položaj tog centra u nepokretnom prostoru, prema nepokretnom polu O određen je obrascem

$$(4) \quad \mathbf{r}_C = \mathbf{r}_A + \mathbf{e}_C = \mathbf{r}_A + \frac{1}{\omega^2} \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_A.$$

Koordinate trenutnog centra obrtanja lako se nalaze iz vektorskih izraza (3) i (4). Kad se vektor \mathbf{e}_C , određen obrascem (3), projicira na ose pokretnog koordinatnog sistema i uvedu oznake (1.11.1—20), biće

$$(5) \quad \xi_C = -\frac{v_{A\eta}}{\dot{\varphi}}, \quad \eta_C = \frac{v_{A\xi}}{\dot{\varphi}}.$$

Ako se brzina \mathbf{v}_A pokretnog pola A izrazi pomoću njenih koordinata u pokretnom koordinatnom sistemu,

$$(6) \quad \mathbf{v}_A = (\dot{x}_A \cos \varphi + \dot{y}_A \sin \varphi) \boldsymbol{\lambda} + (-\dot{x}_A \sin \varphi + \dot{y}_A \cos \varphi) \boldsymbol{\mu},$$

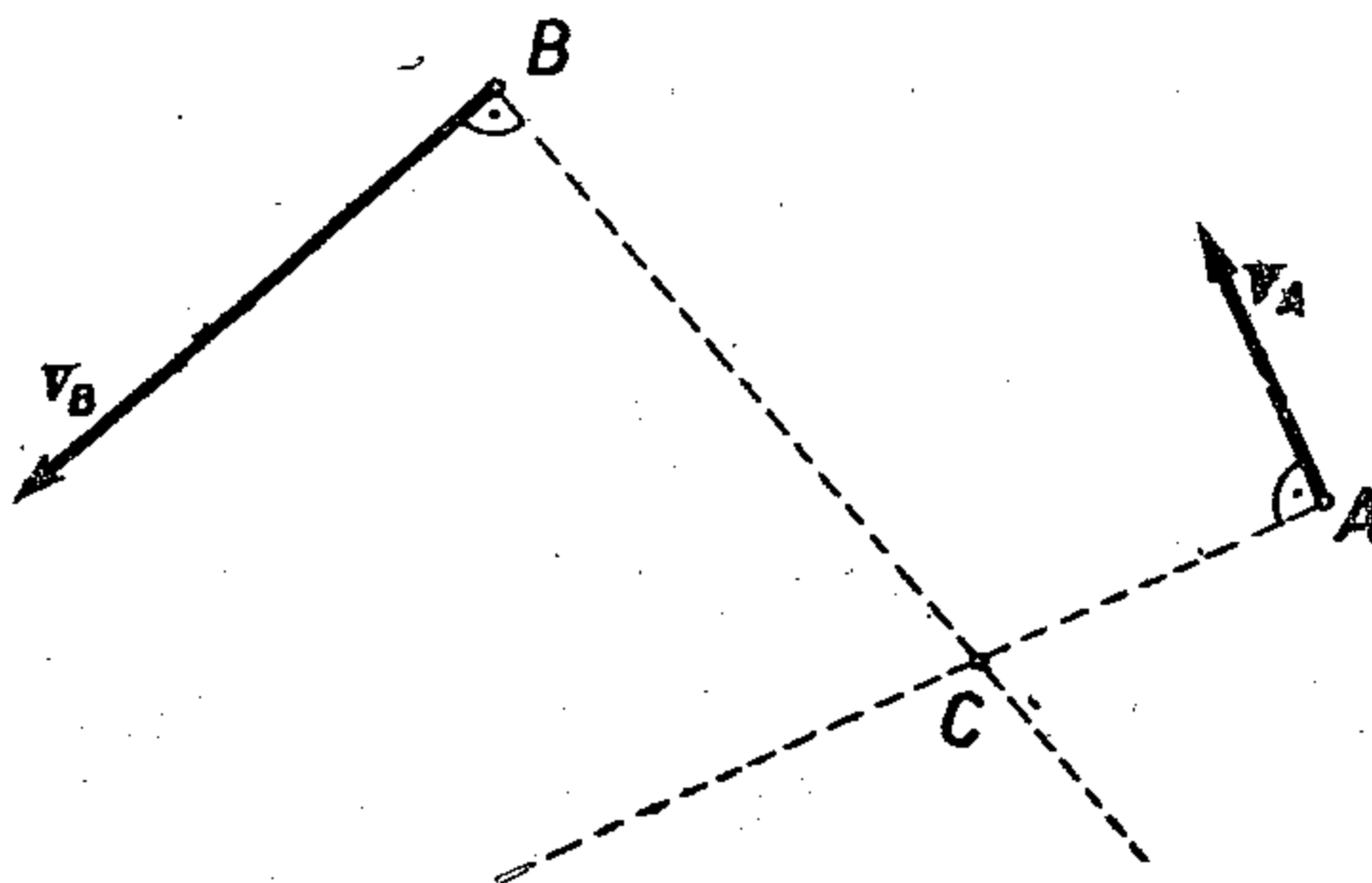
obrasci (5) se mogu napisati i u obliku

$$(7) \quad \xi_C = \frac{1}{\dot{\varphi}} (\dot{x}_A \sin \varphi - \dot{y}_A \cos \varphi); \quad \eta_C = \frac{1}{\dot{\varphi}} (\dot{x}_A \cos \varphi + \dot{y}_A \sin \varphi).$$

U nepokretnom koordinatnom sistemu će se koordinate trenutnog centra rotacije dobiti projiciranjem vektorske relacije (4),

$$(8) \quad x_C = x_A - \frac{y_A}{\dot{\varphi}}, \quad y_C = y_A + \frac{x_A}{\dot{\varphi}}.$$

Obrazac (2) može da posluži za grafičko određivanje položaja trenutnog centra obrtanja. Vektor \mathbf{v} je uvek upravan na vektorima $\boldsymbol{\omega}$ i \overrightarrow{CM} . Kad su poznate brzine \mathbf{v}_A i \mathbf{v}_B dve bilo koje tačke A i B tela (sl. 44), prema obrascu (2) je

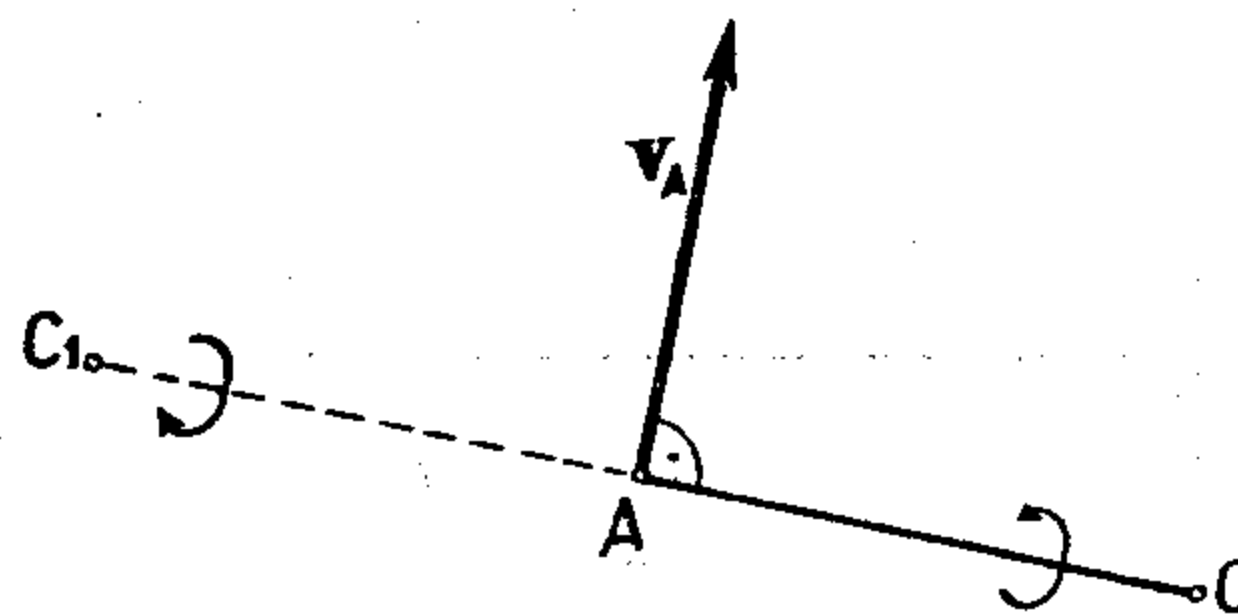


Slika 44

$$(9) \quad \mathbf{v}_A = \boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{CA}, \quad \mathbf{v}_B = \boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{CB}$$

pa se tačka C nalazi u preseku normala na brzine u tačkama A i B . Naravno kod translacije, ma i trenutne, brzine svih tačaka tela su paralelne i trenutni centar brzine je u beskonačnosti.

Usled obrtanja oko trenutnog centra rotacije veličine brzina pojedinih tačaka tela određene su obrascem



Slika 45

$$(10) \quad v_A = \omega \overline{CA}, \quad v_B = \omega \overline{CB},$$

pa je

$$(11) \quad \frac{v_A}{v_B} = \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}},$$

tj. u datom trenutku veličine brzina pojedinih tačaka tela se odnose kao njihova rastojanja od trenutnog centra obrtanja.

Položaj trenutnog centra obrtanja može se odrediti i kad je poznata brzina (kao vektor) samo jedne tačke ravne figure, npr. \mathbf{v}_A (sl. 45) i algebarska vrednost ω ugaone brzine $\boldsymbol{\omega}$. Tada se na normalni datog vektora brzine u tački A prenese u odgovarajućoj razmeri dužina $d = \frac{v_A}{\omega}$ i to kad je $\omega > 0$ na onu stranu

odakle je posmatrano obrtanje u smeru suprotnom kretanju kazaljke na časovniku, inače se prenosi na suprotnu stranu.

Iz obrazaca (7) i (8) se vidi da trenutni centar obrtanja menja svoj položaj u toku vremena. Geometrijsko mesto trenutnih centara rotacije u nepokretnoj ravni je kriva linija koja se zove *nepokretna centroida* ili *baza*, a geometrijsko mesto tih centara u pokretnoj ravni je *pokretna centroida* ili *ruleta*.

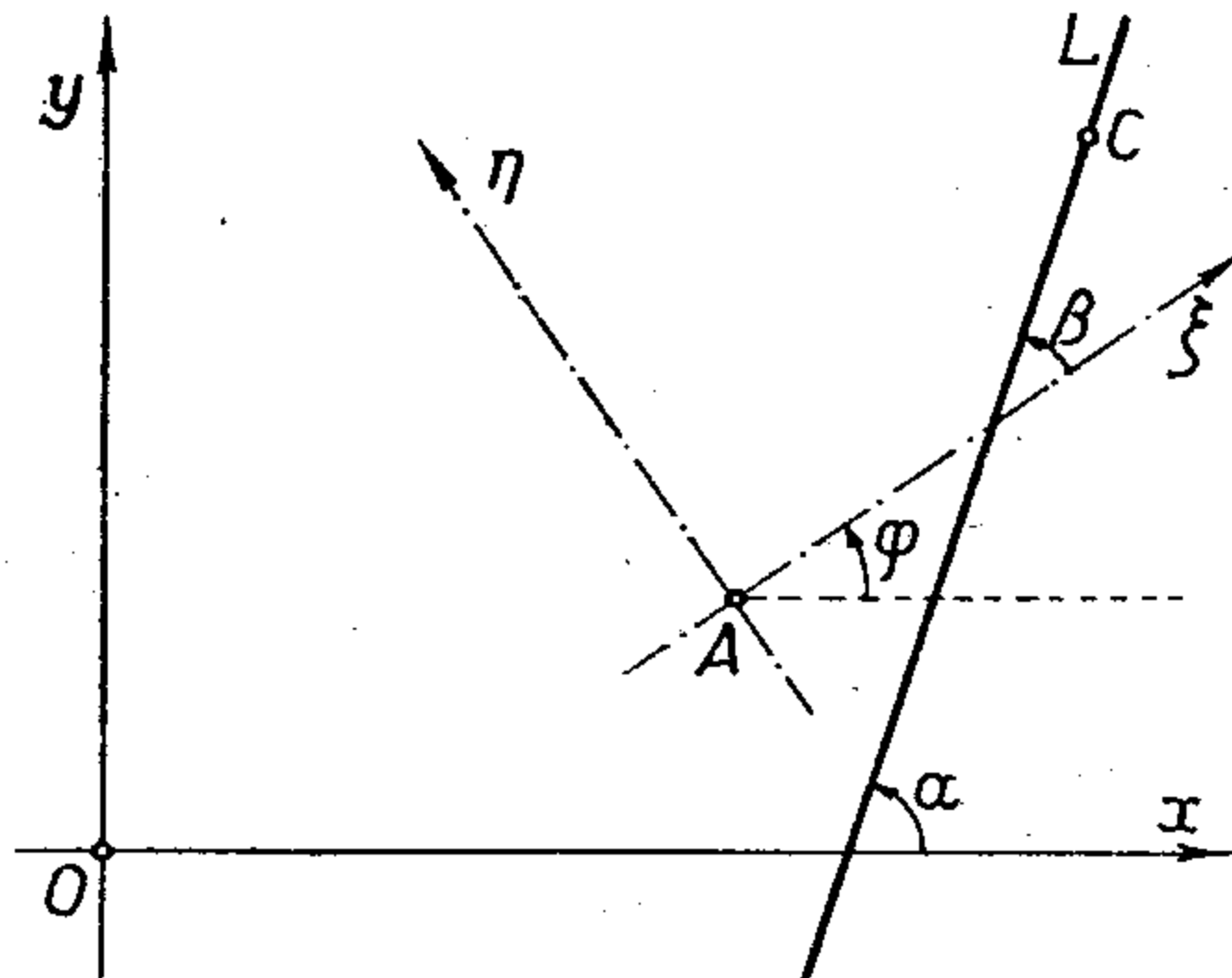
Jednačine (8) su parametarske jednačine baze (parametar je vreme, jer su \mathbf{r}_A , ω i φ u opštem slučaju funkcije vremena). Eliminacijom parametra iz tih dvaju jednačina dobiva se jednačina baze u obliku

$$(12) \quad f(x_C, y_C) = 0.$$

Slično tome jednačine (7) predstavljaju parametarske jednačine, a eliminacijom parametra za ruletu se dobiva jednačina

$$(13) \quad \varphi(\xi_C, \eta_C) = 0.$$

U svakom trenutku krive baze i ruleta imaju jednu zajedničku tačku, a to je upravo tačka u kojoj se u posmatranom trenutku nalazi trenutni centar rotacije.



Slika 46

U opštem slučaju to je u toku vremena stalno neka druga tačka tela. Ako je trenutni centar obrtanja stalno jedna ista tačka tela, i pokretna i nepokretna ruleta degenerišu u tu tačku; tada se telo obrće oko nepomične tačke.

Međutim, baza i ruleta nemaju u svakom trenutku zajedničku samo jednu tačku, već imaju i zajedničku tangentu. Neka je L tangenta na ruletu u tački C (sl. 46) i neka obrazuje sa x -osom ugao α , a sa ξ -osom ugao β . Ako je φ ugao između osa x i ξ , tada je $\alpha = \varphi + \beta$ i veza između nagiba tangente L prema osama x i ξ je

$$(14) \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{tg} \varphi + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \beta}.$$

Iz parametarskih jednačina (5) rulete nalazi se da je tangens ugla β koji tangenta na ruletu obrazuje sa ξ -osom određen obrascem

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\dot{\eta}_C}{\dot{\xi}_C},$$

što kad se unese u (14) daje za nagib tangente na ruletu kroz trenutni centar rotacije

$$(15) \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\dot{\xi}_C \sin \varphi + \dot{\eta}_C \cos \varphi}{\dot{\xi}_C \cos \varphi - \dot{\eta}_C \sin \varphi}.$$

Ako se za $\dot{\xi}_C$ i $\dot{\eta}_C$ iskoriste izrazi (7) dobiva se

$$(16) \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\dot{y}_A \dot{\varphi}^2 + \ddot{x}_A \dot{\varphi} - \dot{x}_A \ddot{\varphi}}{x_A \dot{\varphi}^2 - \dot{y}_A \dot{\varphi} + \dot{y}_A \ddot{\varphi}}$$

Neka je α' ugao što ga obrazuje tangenta na bazu u tački C sa x -osom; iz parametarskih jednačina (8) baze dobiva se

$$(17) \quad \operatorname{tg} \alpha' = \frac{\dot{y}_C}{x_C} = \frac{\dot{y}_A \dot{\varphi}^2 + \ddot{x}_A \dot{\varphi} - \dot{x}_A \ddot{\varphi}}{x_A \dot{\varphi}^2 - \dot{y}_A \dot{\varphi} + \dot{y}_A \ddot{\varphi}}$$

Upoređenjem izraza (16) i (17) vidi se da se u trenutnom centru rotacije tangente baze i rulete zaista poklapaju, što znači da se baza i ruleta u trenutnom centru rotacije dodiruju.

Brzina pomeranja trenutnog centra rotacije u pokretnoj ravni $A\xi\eta$ može se izraziti u obliku

$$(18) \quad \mathbf{v}_r = \dot{\xi}_C \boldsymbol{\lambda} + \dot{\eta}_C \boldsymbol{\mu} = (\dot{\xi}_C \cos \varphi - \dot{\eta}_C \sin \varphi) \mathbf{i} + (\dot{\xi}_C \sin \varphi + \dot{\eta}_C \cos \varphi) \mathbf{j},$$

gde je sa \mathbf{v}_r naznačeno da je to istovremeno i brzina pomeranja tačke na ruleti u kojoj se ova dodiruje sa bazom.

Brzina pomeranja trenutnog centra rotacije u nepokretnoj ravni Oxy , odnosno brzina pomeranja tačke na bazi u kojoj se ova dodiruje sa ruletom je

$$(19) \quad \mathbf{v}_b = \dot{x}_C \mathbf{i} + \dot{y}_C \mathbf{j}.$$

Ako se za koordinate ξ_C , η_C i x_C , y_C unesu vrednosti (7) i (8), neposredno će se dobiti da je

$$(20) \quad \mathbf{v}_r = \mathbf{v}_b = \mathbf{v}_k = \frac{1}{\dot{\varphi}^2} [(\dot{x}_A \dot{\varphi}^2 - \dot{y}_A \dot{\varphi} + \dot{y}_A \ddot{\varphi}) \mathbf{i} + (\dot{y}_A \dot{\varphi}^2 + \dot{x}_A \dot{\varphi} - \dot{x}_A \ddot{\varphi}) \mathbf{j}]$$

Dakle, brzina pomeranja \mathbf{v}_k trenutnog centra rotacije je za svaki trenutak u obe ravni ista. Zbog toga se i kaže da se pokretna centroida *kotrlja bez klizanja* po nepokretnoj. Brzina \mathbf{v}_k određena obrascem (20) zove se *brzina kotrljanja* rulete po bazi.

Iz jednakosti vektora \mathbf{v}_r i \mathbf{v}_b proističe i jednakost $d\mathbf{r} = d\mathbf{Q}$, tj. elementarno pomeranje $d\mathbf{r}$ dodirne tačke po bazi jednako je elementarnom pomeranju $d\mathbf{Q}$ dodirne tačke duž rulete. Ako se sa s obeleži luk baze a sa σ luk rulete, biće i

$$ds = d\sigma,$$

gde je $ds = |d\mathbf{r}|$ i $d\sigma = |d\mathbf{Q}|$, jer su vektori $d\mathbf{r}$ i $d\mathbf{Q}$ kolinearni pa su i dužine lukova koje pređe dodirna tačka za određeni interval dt vremena jednake. Odatle se integracijom dobiva i veza između odgovarajućih konačnih lukova

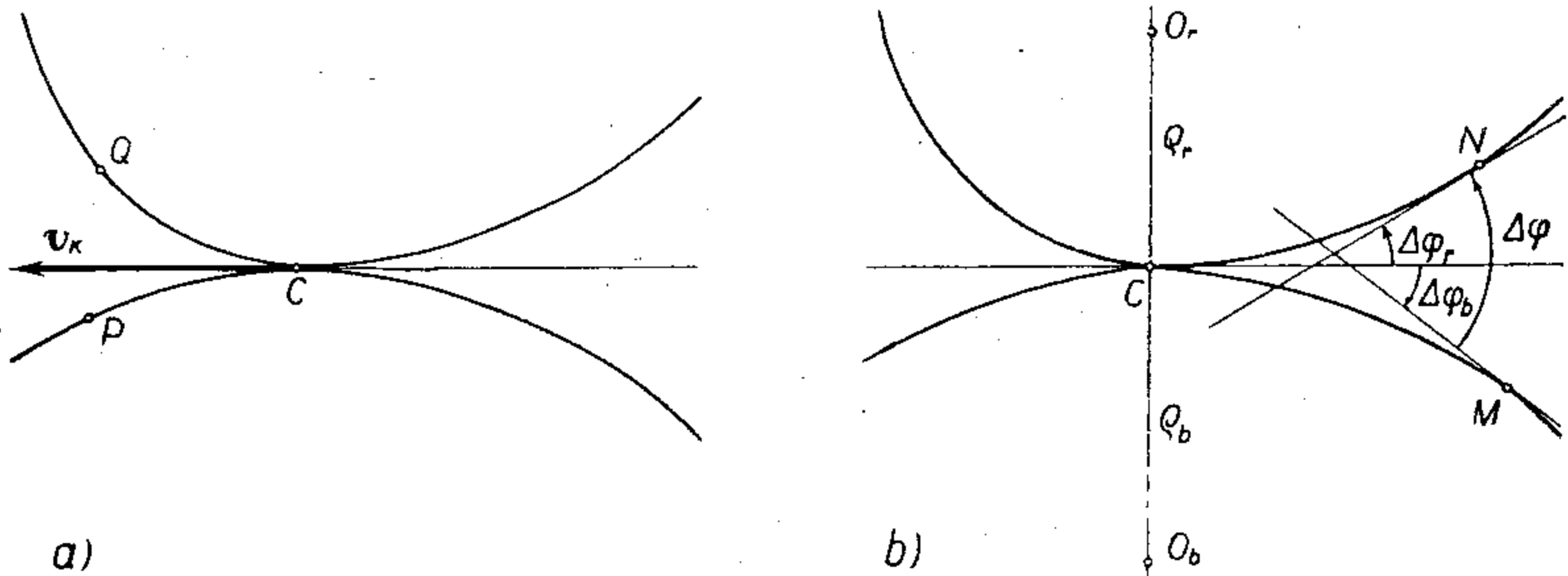
$$s = \sigma,$$

kad se dužine lukova mere od neke tačke, npr. C (sl. 47, a), u kojoj je izabrano $s = \sigma = 0$. Ako se onda stavi $s = \widehat{CP}$, $\sigma = \widehat{CQ}$, biće $\widehat{CP} = \widehat{CQ}$. To znači da ako se posle nekog vremena tačka Q rulete poklopi sa tačkom P baze, odgovarajući lukovi CP baze i CQ rulete moraju biti jednaki.

Algebarska vrednost brzine kotrljanja može se sad izraziti u obliku

$$(21) \quad v_k = \frac{d\sigma}{dt}.$$

Ova algebarska vrednost brzine kotrljanja može se bliže odrediti na ovaj način. Neka se za neki priraštaj vremena Δt telo obrne za ugao $\Delta\varphi$, a dodirna tačka pokretne i nepokretne centroide pomeri duž obe krive za dužinu luka $\Delta s = \Delta\sigma$ od tačke M na bazi odn. od tačke N na ruleti (sl. 47, b). Pri tome će se promeniti



Slika 47

nagib tangente nepokretne centroide prema prvobitnom pravcu tangente za ugao $\Delta\varphi_b$, a pokretne centroide za $\Delta\varphi_r$. Ugao $\Delta\varphi$ za koji se telo obrnulo jednak je ukupnom uglu koji obrazuju tangente u novim položajima.

$$(22) \quad \Delta\varphi = \Delta\varphi_b + \Delta\varphi_r.$$

Ova relacija može da se podeli odgovarajućim lukom $\Delta\sigma$. Za obrtanje tela može se onda napisati

$$\frac{\Delta\varphi}{\Delta\sigma} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \frac{\Delta t}{\Delta\sigma}.$$

Kad $\Delta\sigma \rightarrow 0$ biće granična vrednost

$$\lim_{\Delta\sigma \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta\sigma} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\left(\frac{\Delta\sigma}{\Delta t}\right)} = \frac{\omega}{v_k}.$$

Granična vrednost promene nagiba tangente (ugla kontingencije) u odnosu na luk krive je krivina te krive u odnosnoj tački, pa je stoga

$$\lim_{\Delta\sigma \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi_b}{\Delta\sigma} = K_b = \frac{1}{\rho_b}, \quad \lim_{\Delta\sigma \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi_r}{\Delta\sigma} = K_r = \frac{1}{\rho_r},$$

gde je K_b krivina baze, K_r krivina rulete, a ρ_b i ρ_r odgovarajući poluprečnici krivine. Sada iz (22) može da se izvede interesantna veza između krivina baze i rulete, brzine kotrljanja i brzine obrtanja tela u uočenom trenutku

$$(23) \quad \frac{1}{k} = K_b + K_r = \frac{\omega}{v_k}.$$

Ako su centroide sa iste strane zajedničke tangente u tački C , obrazac (23) će glasiti

$$(24) \quad K_b - K_r = \frac{\omega}{v_k},$$

jer će mesto (22) veza između promena uglova biti $\Delta\varphi = \Delta\varphi_b - \Delta\varphi_r$.

1.11.3. Trenutna zavojna osa. Aksoidi

U odeljku (1.11) pokazano je da trenutna ugaona brzina ω ne zavisi od izvora pola. Otuda se može zaključiti da u svakom trenutku opšteg kretanja tela postoji beskonačno mnogo međusobno paralelnih trenutnih osa rotacije, kroz razne tačke, jer se ma koja od njih može izabrati za pokretni pol. Kako se pri opštem kretanju telo može iz jednog položaja prevesti u drugi zavojnim kretanjem, znači da u telu postoji jedna osa takva da su translatorne brzine tačaka te ose kolinearne sa trenutnom ugaonom brzinom u nekom uočenom trenutku. Ta osa određuje trenutno helikoidno kretanje i naziva se *trenutna zavojna (helikoidna) osa*.

Zbog kolinearnosti brzina tačaka na trenutnoj zavojnoj osi sa trenutnom ugaonom brzinom je

$$(1) \quad \omega \times \mathbf{v} = \omega \times \mathbf{v}_A + \omega \times (\omega \times \mathbf{e}) = \mathbf{0},$$

odnosno

$$\omega \times \mathbf{v}_A + \omega (\omega \cdot \mathbf{e}) = \omega^2 \mathbf{e}.$$

Ako se između svih tačaka na osi uoči jedna, recimo C koja se nalazi u podnožju normale iz pokretnog pola A na osu obrtanja, biće $\omega \cdot \mathbf{e}_C = 0$ i

$$(2) \quad \mathbf{e}_C = \frac{1}{\omega^2} (\omega \times \mathbf{v}_A).$$

Koordinate tačke C za pokretni koordinatni sistem su

$$(3) \quad \xi_C = \frac{1}{\omega^2} (q v_{A\zeta} - r v_{A\eta}), \quad \eta_C = \frac{1}{\omega^2} (r v_{A\xi} - p v_{A\zeta}), \quad \zeta_C = \frac{1}{\omega^2} (p v_{A\eta} - q v_{A\xi}).$$

Trenutna helikoidna osa je sada određena kao prava koja prolazi kroz tačku C i kolinearna je sa vektorom ω trenutne ugaone brzine. U odnosu na pokretni pol njena jednačina glasi

$$(4) \quad \mathbf{e} = \frac{1}{\omega^2} (\omega \times \mathbf{v}_A) + \lambda \omega,$$

gde je λ proizvoljni parametar. U skalarnom obliku za pokretni sistem koordinata parametarske jednačine trenutne helikoidne ose su

$$(5) \quad \begin{aligned} \xi &= \xi_C + \lambda p, \\ \eta &= \eta_C + \lambda q, \\ \zeta &= \zeta_C + \lambda r, \end{aligned}$$

ili, ako se eliminiše parametar λ

$$(6) \quad \frac{\xi - \xi_C}{p} = \frac{\eta - \eta_C}{q} = \frac{\zeta - \zeta_C}{r}.$$

Za nepokretni sistem vektorska jednačina trenutne helikoidne ose je

$$(7) \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_C + \lambda \omega,$$

gde je

$$(8) \quad \mathbf{r}_C = \mathbf{r}_A + \frac{1}{\omega^2} (\omega \times \mathbf{v}_A).$$

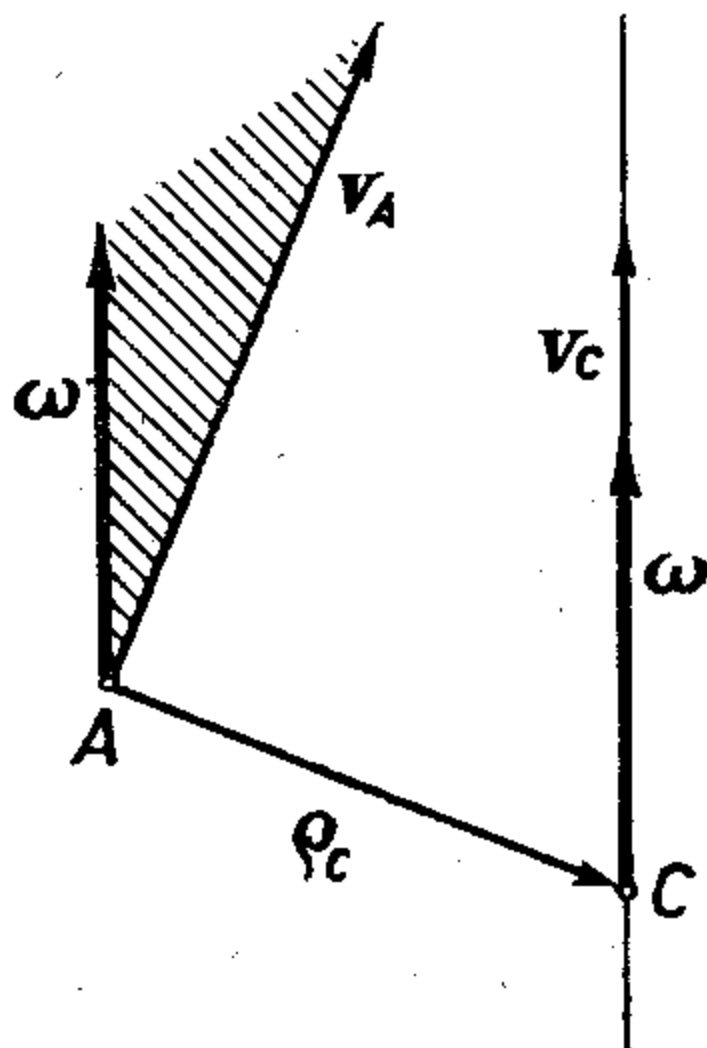
U skalarnom obliku za nepokretni sistem će biti

$$(9) \quad \begin{aligned} x &= x_A + \frac{1}{\omega^2} (Q\dot{z}_A - R\dot{y}_A) + \lambda P, \\ y &= y_A + \frac{1}{\omega^2} (R\dot{x}_A - P\dot{z}_A) + \lambda Q, \\ z &= z_A + \frac{1}{\omega^2} (P\dot{y}_A - Q\dot{x}_A) + \lambda R. \end{aligned}$$

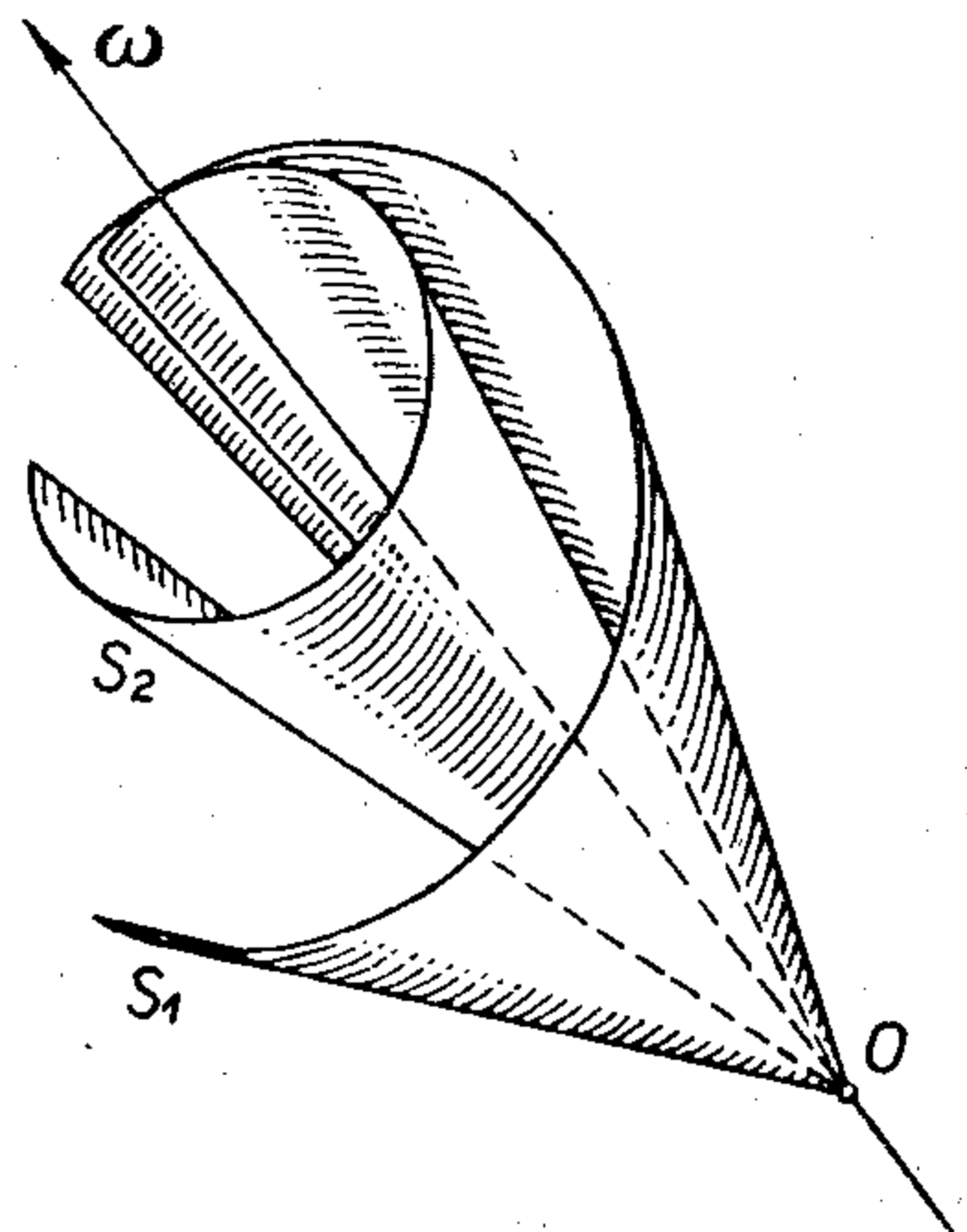
Ako se eliminiše parametar λ ove se jednačine svode na

$$(10) \quad \frac{x-x_C}{P} = \frac{y-y_C}{Q} = \frac{z-z_C}{R}.$$

$\vec{AC} = \mathbf{e}_C$ je vektor povučen od pola A normalno na trenutnu zavojnu osu i omogućuje konstrukciju ove ose, kad je dato \mathbf{e}_C i $\boldsymbol{\omega}$. Radi toga treba (sl. 48) od tačke A preneti u određenom smeru vektor \mathbf{e}_C (upravno na ravan određenu vektorima \mathbf{v}_A i $\boldsymbol{\omega}$) pa kroz tako određenu tačku C povući osu $\boldsymbol{\omega}$. Trenutna helikoidna osa menja svoj položaj u toku vremena u opštem slučaju.



Slika 48



Slika 49

U slučaju sfernog kretanja tela trenutna helikoidna osa prolazi stalno kroz nepokretnu tačku i opisuje u nepokretnom prostoru neku konusnu površ S_1 , koja se zove *nepokretni aksoid*. U pokretnom prostoru ona opisuje takođe konusnu površ S_2 , koja se zove *pokretni aksoid* (sl. 49). Za vreme kretanja pokretni aksoid se *kotrlja bez klizanja* po nepokretnom i u svakom trenutku ima sa njim dodir duž trenutne helikoidne ose. Oba konusa imaju u svakom trenutku zajedničku tangentnu ravan u kojoj se nalaze brzine zajedničkih tačaka oba aksoida u tom trenutku. Svaka tačka trenutne helikoidne ose kreće se jednakim brzinama i u pokretnom i u nepokretnom prostoru. U ovom slučaju mogu se oko nepokretne tačke (zajedničkog temena oba konusna aksoida) opisati sfere u nepokretnom i pokretnom prostoru jednakih, npr. jediničnih poluprečnika. One seku aksoidu po sfernim krivim linijama, koje se zovu *sferna baza* ili *herpolhodija* (na nepokretnom aksoidu) i *sferna ruleta* ili *polhodija*. Za vreme sfernog kretanja polhodija se kotrlja bez klizanja po herpolhodiji. Aksoidi degenerišu u pravu liniju kad se telo obrće oko stalne ose.

I pri najopštijem kretanju tela trenutna helikoidna osa menja svoj položaj i u nepokretnom i u pokretnom prostoru i obrazuje aksoide, koji su opet pravolinijske površi, ali više nisu konusi. Ovakvi aksoidi mogu biti opšte tangentne površi ili razvojne površi (torze). Ipak, može se dokazati da za jedno kretanje i nepokretni i pokretni aksoidi moraju biti zajedno ili opšte tangentne površi ili torze. Kad ugaona brzina u toku kretanja ima stalan pravac biće oba aksoida cilindarske površi.

Mehanizam kretanja se odvija na taj način što se pokretni aksoid kotrlja bez klizanja po nepokretnom u pravcu normalnom na zajedničku izvodnicu u datom trenutku (odgovara rotaciji tela) i istovremeno klizi duž te izvodnice (odgovara translaciji tela).

1.11.4. Brzine tačaka pri složenom kretanju tela

Pri složenom kretanju tela, sastavljenom od više komponentnih kretanja, *rezultantna brzina* \mathbf{v} određene tačke tela biće vektorski zbir njenih *komponentnih brzina* \mathbf{v}_i , koje ona ima u istom trenutku pri pojedinim kretanjima, tj.

$$\mathbf{v} = \sum \mathbf{v}_i.$$

Međutim, raspored brzina u datom telu (brzine tačaka tela), kad su dati položaji pojedinih tačaka u odnosu na neki pol A , biće određen poznavanjem brzine pola \mathbf{v}_A i trenutne ugaone brzine $\boldsymbol{\omega}$. Pri tome se (1.11) $\boldsymbol{\omega}$ pri promeni pola ne menja, a \mathbf{v}_A menja kao moment vezanog vektora. Vektori \mathbf{v}_A i $\boldsymbol{\omega}$ nisu iste prirode i ne mogu se svesti na jedan vektor, ali se i u najopštijem slučaju u svakom trenutku mogu, određivanjem naročite trenutne helikoidne ose, svesti na par kolinearnih vektora, koji se zove *kinematički zavrtnj* (torzor).

Prema tome, za određivanje rasporeda rezultantnih brzina u telu pri složenom kretanju treba poznavati translatorne brzine $\mathbf{v}_A^{(i)}$ izabranog pola A i trenutne ugaone brzine $\boldsymbol{\omega}_i$ komponentnih kretanja, pa se onda može odrediti rezultantno \mathbf{v}_A i $\boldsymbol{\omega}$.

Naročito se ističu ovi slučajevi:

1. *Složeno kretanje sastavljeno od samih translacija.* — Rezultantna brzina \mathbf{v}_A je translatorna i vektorski je zbir komponentnih translatornih brzina $\mathbf{v}_A^{(i)}$

$$\mathbf{v}_A = \sum \mathbf{v}_A^{(i)}.$$

Ova brzina je ista za sve tačke tela.

2. *Složeno kretanje sastavljeno od rotacije oko paralelnih trenutnih osa.* — Rezultantna brzina biće u opštem slučaju rotaciona. U slučaju dve paralelne trenutne ose, biće određena vektorom

$$(1) \quad \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2$$

trenutne ugaone brzine, kad su komponentne ugaone brzine $\boldsymbol{\omega}_1$ i $\boldsymbol{\omega}_2$. Pošto su $\boldsymbol{\omega}_1$, $\boldsymbol{\omega}_2$ i $\boldsymbol{\omega}$ kolinearni rezultantna ugaona brzina je određena i relacijom

$$(1a) \quad \omega = \omega_1 + \omega_2,$$

gde su ω_1 i ω_2 algebarske vrednosti komponentnih trenutnih ugaonih brzina. Ako ravan normalna na zajednički pravac ugaonih brzina $\boldsymbol{\omega}_1$, $\boldsymbol{\omega}_2$ i $\boldsymbol{\omega}$ seče njihove ose u tačkama A_1 , A_2 i C , tada za proizvoljnu tačku M tela važi relacija

$$(2) \quad \overrightarrow{\omega_1 A_1 M} + \overrightarrow{\omega_2 A_2 M} = (\omega_1 + \omega_2) \overrightarrow{CM},$$

koja određuje tzv. *centar* C *sistema paralelnih vektora* (Anđelić, Teorija vektora III izd., str. 145) kroz koji prolazi osa rezultantne brzine obrtanja.

Iz (2) se lako izvodi da će trenutna osa rotacije rezultantne ugaone brzine da deli duž $\overline{A_1A_2}$ unutrašnjom ili spoljašnjom podelom u obrnutoj razmeri ugaonih brzina ω_1 i ω_2 , tj. biće

$$(3) \quad \frac{\overline{A_1C}}{\omega_2} = \frac{\overline{CA_2}}{\omega_1} = \frac{\overline{A_1A_2}}{\omega}$$

Da li će biti unutrašnja ili spoljašnja podela zavisi od toga jesu li ω_1 i ω_2 jednako ili različito označeni.

Kad je $\omega_1 + \omega_2 = 0$ imamo spreg ugaonih brzina (*kinematički spreg*). Tačka C i osa rezultantne trenutne ugaone brzine se udaljava u beskonačnost i kretanje u uočenom trenutku degeneriše u translaciju. Rezultantna, sad translatorna, brzina jednaka je $\omega \overline{A_1A_2}$ a ima pravac upravan na ravan određenu datim osama ω_1 i ω_2 sa odgovarajućim smerom.

Prethodna razmatranja se lako proširuju na određivanje rezultante trenutne ugaone brzine pri obrtanju tela oko više paralelnih osa. Tada je položaj tačke C određen relacijom

$$(4) \quad \sum \omega_i \overrightarrow{A_iM} = \omega \overrightarrow{CM},$$

gde je

$$\omega = \sum \omega_i$$

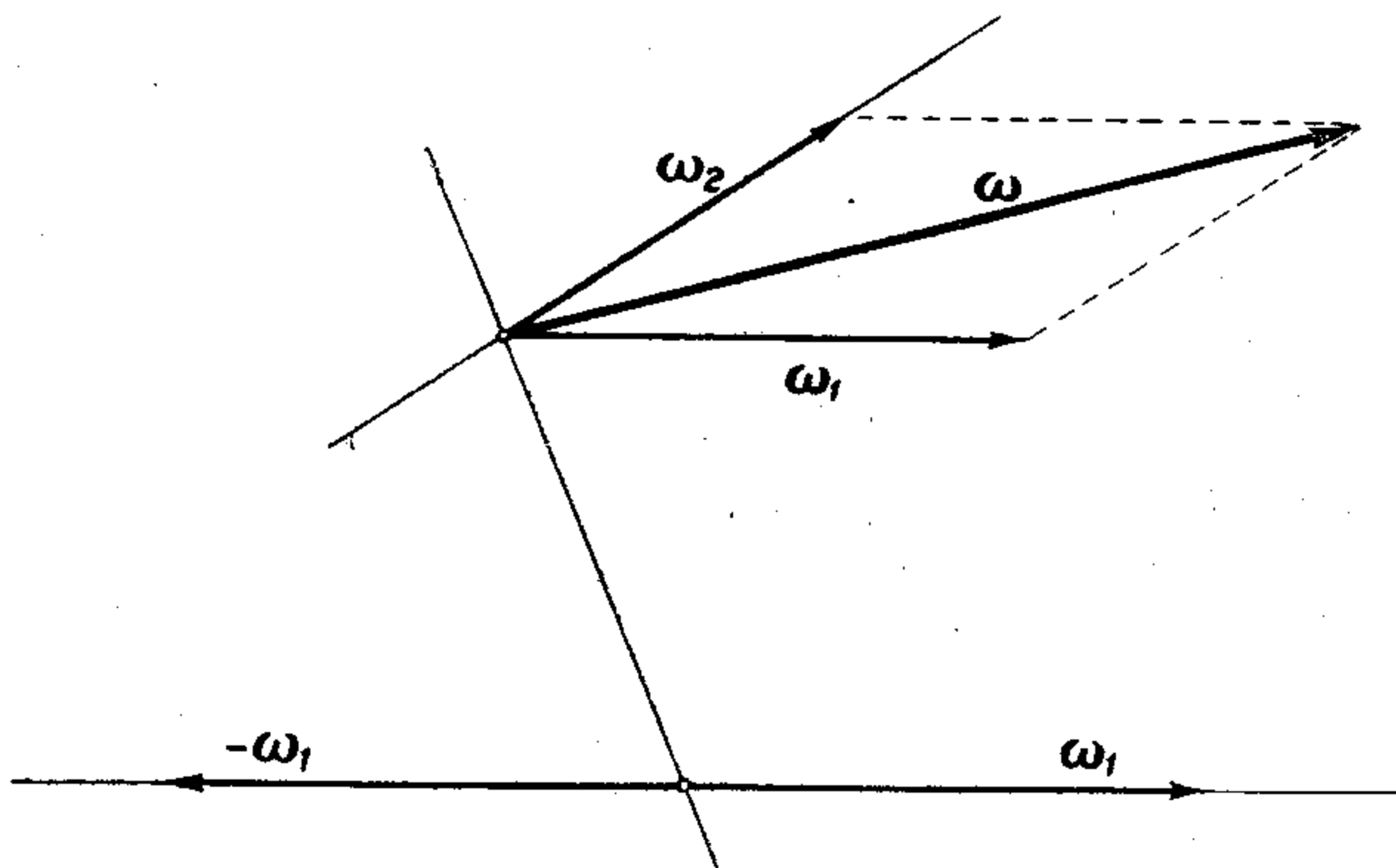
rezultantna trenutna ugaona brzina.

3) *Složeno kretanje sastavljeno od rotacija oko sticajnih osa.* — Rezultantna trenutna ugaona brzina (bez obzira na broj osa obrtanja) je potpuno određena kao vektorski zbir

$$\omega = \sum \omega_i,$$

a njena osa prolazi kroz zajedničku tačku datih osa rotacija.

4. *Složeno kretanje sastavljeno od rotacija oko mimoilaznih osa se uvek može svesti na kretanje složeno od rotacije i translacije.* — I zaista u tom slučaju se može npr. vektor ω_1 paralelnim pomeranjem preneti do zajedničkog početka sa vektorom ω_2 (sl. 50) dodavanjem kinematičkog sprega ($\omega_1, -\omega_1$). Tada kinematički spreg određuje translaciju, a slaganjem rotacija oko sticajnih osa dobiva se rotacija.



Slika 50

5) *Kretanje složeno od translacija i rotacija (i svih drugih kretanja koja se svode na ova).* — Rezultantna brzina u ovom slučaju biće određena kinematič-

kim zavrtnjem \mathbf{v}_A i $\boldsymbol{\omega}$. On se dobiva svodenjem datih komponentnih translatorskih i trenutnih ugaonih brzina na dati pol A .

Pri tome u datom trenutku mogu nastupiti ovi slučajevi:

- a) $\mathbf{v}_A = \mathbf{0}$, $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$ — trenutni zastoje;
- b) $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$ — trenutno translatorsko kretanje;
- c) $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, $\boldsymbol{\omega} \neq \mathbf{0}$ — obrtanje oko trenutne ose rotacije;
- d) $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, $\boldsymbol{\omega} \neq \mathbf{0}$ — $(\mathbf{v}_A \perp \boldsymbol{\omega})$ trenutno ravansko kretanje;
- e) $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, $\boldsymbol{\omega} \neq \mathbf{0}$ — $(\mathbf{v}_A \parallel \boldsymbol{\omega})$ — trenutno zavojno kretanje;
- f) $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, $\boldsymbol{\omega} \neq \mathbf{0}$ — (ugaon $(\mathbf{v}_A, \boldsymbol{\omega})$ kos) — podesnim izborom pola svodi se na prethodni slučaj.

Ponekad rezultantna brzina može ispunjavati i trajno pojedine od gornjih uslova i tada je kretanje odnosnog karaktera trajno. Npr. brzina pri kotrljanju točka na kolima, kad se kola kreću ispunjava uslov d) trajno.

1.12. Ubrzanje tačke krutog tela

Ubrzanje \mathbf{w} proizvoljne tačke M krutog tela je izvod brzine \mathbf{v} te tačke po vremenu. Iz (1.11—4) diferencijaljenjem po vremenu se dobiva

$$(1) \quad \mathbf{w} = \mathbf{w}_A + \boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\omega} \times \dot{\boldsymbol{\rho}}.$$

Ovde je

$$(2) \quad \mathbf{w}_A = \frac{d\mathbf{v}_A}{dt} = \ddot{\mathbf{r}}_A$$

vektor ubrzanja pokretnog pola A , a

$$(3) \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \dot{\boldsymbol{\omega}}$$

vektor trenutnog ugaonog ubrzanja. Ako je φ ugaona brzina obrtanja tela oko trenutne zavojne ose, skalar

$$(4) \quad \varepsilon = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \ddot{\varphi}$$

predstavlja algebarsku vrednost trenutnog ugaonog ubrzanja.

Iz $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_A$ se diferenciranjem dobiva

$$\dot{\boldsymbol{\rho}} = \dot{\mathbf{r}} - \dot{\mathbf{r}}_A$$

a kako je za tačke krutog tela $\dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}}_A + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}$, biće

$$(5) \quad \dot{\boldsymbol{\rho}} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}.$$

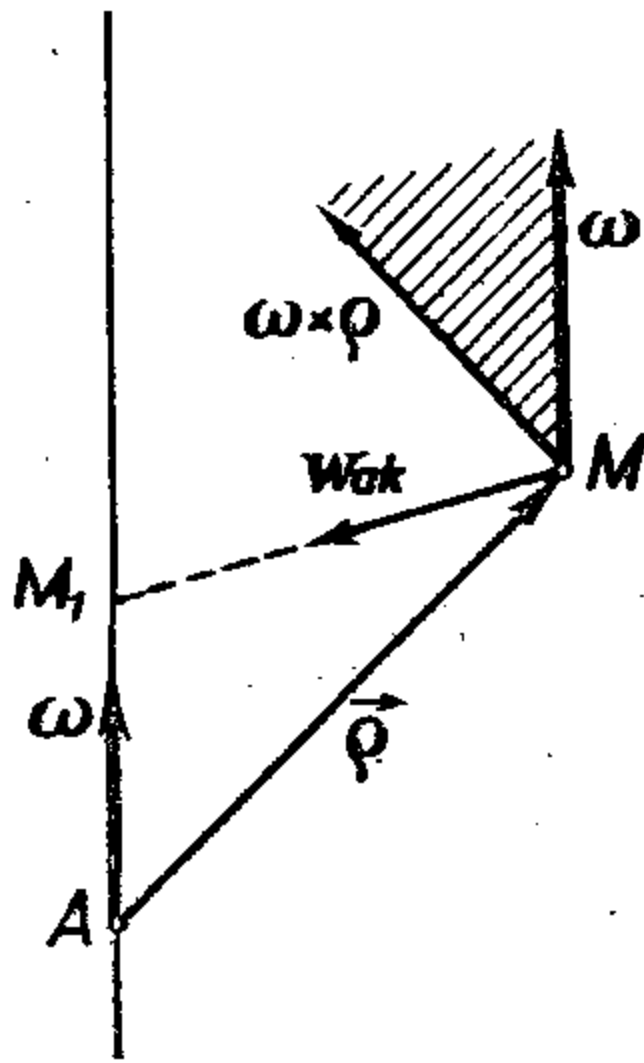
Sa ovom vrednošću za izvod vektora $\boldsymbol{\rho}$ po vremenu vektor ubrzanja se može napisati u obliku

$$(6) \quad \mathbf{w} = \mathbf{w}_A + \boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}).$$

Izrazom (6) određeno je ubrzanje proizvoljne tačke krutog tela u najopštijem slučaju. Razvijanjem dvostrukog vektorskog proizvoda u relaciji (6) dobiće se za ubrzanje izraz

$$(7) \quad \mathbf{w} = \mathbf{w}_A + \boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\omega} (\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\rho}) - \omega^2 \boldsymbol{\rho}.$$

Ukupno ubrzanje neke tačke krutog tela se u opštem slučaju sastoji od translatornog ubrzanja \mathbf{w}_A , rotacionog ubrzanja $\boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{\rho}$ i aksipetalnog ubrzanja $\mathbf{w}_{ak} = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho})$.



Slika 51

Aksipetalno ubrzanje neke tačke tela uvek je usmereno od te tačke ka trenutnoj osi obrtanja (sl. 51), jer je $\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}$ upravno na $\boldsymbol{\omega}$ i $\boldsymbol{\rho}$, a $\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho})$ je opet upravno na $\boldsymbol{\omega}$ (dakle, nalazi se u ravni upravnoj na $\boldsymbol{\omega}$), ali je upravno i na $\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}$, što znači da je kolinearno sa normalom MM' na trenutnu osu obrtanja i orijentisano ka osi. Ako se sa \mathbf{u} označi jedinični vektor trenutne ose rotacije $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{u} \omega$, intenzitet aksipetalnog ubrzanja je

$$w_{ak} = \omega^2 |\mathbf{u} \times (\mathbf{u} \times \boldsymbol{\rho})| = \omega^2 |\mathbf{u} \times \boldsymbol{\rho}|,$$

jer je ugao između \mathbf{u} i $\mathbf{u} \times \boldsymbol{\rho}$ prav. Kako je $|\mathbf{u} \times \boldsymbol{\rho}| = \rho \sin(\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho}) = d$, rastojanje tačke tela od trenutne ose obrtanja, biće

$$(8) \quad w_{ak} = \omega^2 d.$$

Projekcije vektora \mathbf{w} , \mathbf{w}_A i $\boldsymbol{\varepsilon}$ na ose nepokretnog koordinatnog sistema su

$$(9) \quad \mathbf{w} = (\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}); \quad \mathbf{w}_A = (\ddot{x}_A, \ddot{y}_A, \ddot{z}_A); \quad \boldsymbol{\varepsilon} = (\dot{P}, \dot{Q}, \dot{R}).$$

Projekcije tih vektora na ose pokretnog koordinatnog sistema mogu se obeležiti sa

$$(10) \quad \mathbf{w} = (w_\xi, w_\eta, w_\zeta); \quad \mathbf{w}_A = (w_{A\xi}, w_{A\eta}, w_{A\zeta}); \quad \boldsymbol{\varepsilon} = (\dot{p}, \dot{q}, \dot{r}).$$

Ako se vektorska relacija (7) pomnoži skalarno jediničnim vektorima \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} , odnosno $\boldsymbol{\lambda}$, $\boldsymbol{\mu}$, $\boldsymbol{\nu}$ dobiće se projekcije ubrzanja na ose nepokretnog i pokretnog koordinatnog sistema. Ako se pri tome iskoriste i u odeljku (1.11.1) uvedene oznake za projekcije vektora $\boldsymbol{\rho}$ i $\boldsymbol{\omega}$, biće za nepokretni sistem

$$(11) \quad \begin{aligned} \ddot{x} &= \ddot{x}_A + \dot{Q}(z - z_A) - \dot{R}(y - y_A) + P[P(x - x_A) + Q(y - y_A) + R(z - z_A)] - \omega^2(x - x_A); \\ \ddot{y} &= \ddot{y}_A + \dot{R}(x - x_A) - \dot{P}(z - z_A) + Q[P(x - x_A) + Q(y - y_A) + R(z - z_A)] - \omega^2(y - y_A); \\ \ddot{z} &= \ddot{z}_A + \dot{P}(y - y_A) - \dot{Q}(x - x_A) + R[P(x - x_A) + Q(y - y_A) + R(z - z_A)] - \omega^2(z - z_A), \end{aligned}$$

a za pokretni koordinatni sistem

$$(12) \quad \begin{aligned} w_\xi &= w_{A\xi} + \dot{q}\zeta - \dot{r}\eta + p(p\xi + q\eta + r\zeta) - \omega^2\xi; \\ w_\eta &= w_{A\eta} + \dot{r}\xi - \dot{p}\zeta + q(p\xi + q\eta + r\zeta) - \omega^2\eta; \\ w_\zeta &= w_{A\zeta} + \dot{p}\eta - \dot{q}\xi + r(p\xi + q\eta + r\zeta) - \omega^2\zeta. \end{aligned}$$

Pri tome se koordinate $w_{A\xi}, \dots$ translatornog ubrzanja dobivaju projiciranjem vektorske relacije (2) na ose pokretnog sistema,

$$(13) \quad \begin{aligned} w_{A\xi} &= a_{11}\ddot{x}_A + a_{21}\ddot{y}_A + a_{31}\ddot{z}_A; \\ w_{A\eta} &= a_{12}\ddot{x}_A + a_{22}\ddot{y}_A + a_{32}\ddot{z}_A; \\ w_{A\zeta} &= a_{13}\ddot{x}_A + a_{23}\ddot{y}_A + a_{33}\ddot{z}_A. \end{aligned}$$

Pri translaciji tela je $\omega = 0$ i (7) se svodi na

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}_A,$$

odnosno u skalarnom obliku

$$\ddot{x} = \ddot{x}_A, \quad \ddot{y} = \ddot{y}_A, \quad \ddot{z} = \ddot{z}_A$$

i sve tačke tela imaju isto ubrzanje, pa se može govoriti o ubrzanju tela.

U slučaju rotacije tela oko nepokretne ose, ako se za pol A izabere neka tačka na osi rotacije, biće $\mathbf{w}_A = 0$. Kod ovakvog kretanja putanje tačaka tela su krugovi. Ako je ugaona brzina tela $\omega = \omega \mathbf{u}$, ugaono ubrzanje je $\boldsymbol{\varepsilon} = \dot{\omega} \mathbf{u}$ i za ubrzanje neke tačke tela se iz (7) dobiva

$$(14) \quad \mathbf{w} = \dot{\omega} \mathbf{u} \times \boldsymbol{\rho} - \omega^2 [\boldsymbol{\rho} - \mathbf{u}(\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\rho})].$$

Vektor $\dot{\omega} \mathbf{u} \times \boldsymbol{\rho}$ je upravna na osi rotacije i na vektoru položaja $\boldsymbol{\rho}$, pa je stoga tangentan na putanju tačke i predstavlja *rotacionu komponentu* ubrzanja. Vektor $\boldsymbol{\rho} - \mathbf{u}(\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\rho})$ je komponenta vektora $\boldsymbol{\rho}$ upravna na \mathbf{u} , pa je $-\omega^2 [\boldsymbol{\rho} - \mathbf{u}(\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\rho})]$ vektor usmeren ka osi rotacije, normalan na putanju; to je *aksipetalna komponenta* ubrzanja. Algebarske vrednosti ovih komponentata ubrzanja su

$$(15) \quad w_{\text{rot}} = \dot{\omega} d, \quad w_{\text{ak}} = -\omega^2 d.$$

Pri ravanskom kretanju je osa obrtanja upravna na ravan kretanja. Stoga je $\omega \cdot \boldsymbol{\rho} = 0$ u (7) i za ubrzanje se dobiva

$$(16) \quad \mathbf{w} = \mathbf{w}_A + \boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{\rho} - \omega^2 \boldsymbol{\rho}.$$

Ako se stavi $\omega = \dot{\varphi} \mathbf{k} = \dot{\varphi} \mathbf{v}$ projekcije ove jednačine će, sa oznakama iz odeljka (1.11.1), biti:

na ose nepokretnog koordinatnog sistema

$$(17) \quad \begin{aligned} \ddot{x} &= \ddot{x}_A - \ddot{\varphi} (y - y_A) - \dot{\varphi}^2 (x - x_A); \\ \ddot{y} &= \ddot{y}_A + \ddot{\varphi} (x - x_A) - \dot{\varphi}^2 (y - y_A); \\ \ddot{z} &= 0, \end{aligned}$$

na ose pokretnog koordinatnog sistema

$$(18) \quad \begin{aligned} w_{\xi} &= w_{A\xi} - \ddot{\varphi} \eta - \dot{\varphi}^2 \xi, \\ w_{\eta} &= w_{A\eta} + \ddot{\varphi} \xi - \dot{\varphi}^2 \eta, \\ w_{\zeta} &= 0. \end{aligned}$$

Pri ravanskom kretanju ubrzanje tačaka krutog tela ima u opštem slučaju tri komponente: translatornu \mathbf{w}_A , rotacionu $\boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{\rho}$ čija je algebarska vrednost

$$(19) \quad w_t = R \varepsilon, \quad (|\boldsymbol{\rho}| = R)$$

jer je vektor $\boldsymbol{\varepsilon} = \dot{\omega} \mathbf{u}$ upravna na $\boldsymbol{\rho}$, i aksipetalnu komponentu $-\omega^2 \boldsymbol{\rho}$, čija je algebarska vrednost

$$(20) \quad w_n = R \omega^2.$$

Kad se telo obrće oko nepokretne tačke i za pol A izabere ta tačka, biće $\mathbf{w}_A = 0$, a vektorski izraz za ubrzanje tačke tela je

$$(21) \quad \mathbf{w} = \boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{\rho} + \omega(\omega \cdot \boldsymbol{\rho}) - \omega^2 \boldsymbol{\rho}.$$

Projekcije ove vektorske jednačine na ose nepokretnog i pokretnog sistema mogu se odmah dobiti iz jednačina (11) i (12), kad se tamo izostave projekcije translatorsnog ubrzanja.

1.12.1. Trenutni centar ubrzanja kod ravanskog kretanja. Bresovi krugovi. Ojler-Savarijev obrazac

U izvesnim slučajevima kretanja krutog tela može postojati u nekom trenutku tačka tela čije je ubrzanje jednako nuli. Takva se tačka naziva *trenutni centar ubrzanja* ili trenutni pol ubrzanja. Položaj trenutnog centra ubrzanja K određuje se, prema (1.12—7), rešavanjem vektorske jednačine

$$(1) \quad \mathbf{w}_A + \boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{\rho}_K + \boldsymbol{\omega} (\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\rho}_K) - \omega^2 \boldsymbol{\rho}_K = 0.$$

Ova jednačina u opštem slučaju ne dopušta neko rešenje $\boldsymbol{\rho}_K$, što znači da u opštem slučaju ne mora postojati u telu neka tačka sa ubrzanjem jednakim nuli.

Ravansko kretanje, međutim, uvek dopušta postojanje trenutnog centra ubrzanja. Pri ravanskom kretanju su vektori trenutne ugaone brzine $\boldsymbol{\omega}$ i trenutnog ugaonog ubrzanja $\boldsymbol{\varepsilon}$ uvek kolinearni i upravni na ravan kretanja, pa se jednačina (1) svodi na oblik

$$(2) \quad \mathbf{w}_A + \boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{\rho}_K - \omega^2 \boldsymbol{\rho}_K = 0.$$

Vektorskim množenjem ove jednačine sleva vektorom $\boldsymbol{\varepsilon}$ dobiva se

$$\boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{w}_A - \varepsilon^2 \boldsymbol{\rho}_K - \omega^2 (\boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{\rho}_K) = 0$$

a pošto se $\boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{\rho}_K$ izračuna iz (2),

$$(3) \quad \boldsymbol{\rho}_K = \frac{1}{\omega^4 + \varepsilon^2} (\omega^2 \mathbf{w}_A + \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{w}_A).$$

Ovim izrazom određen je položaj trenutnog centra ubrzanja kod ravanskog kretanja prema pokretnom sistemu; prema nepokretnom će biti

$$(4) \quad \mathbf{r}_K = \mathbf{r}_A + \boldsymbol{\rho}_K.$$

Ako se za ravansko kretanje iskoriste oznake iz odeljka (1.11.1), koordinate trenutnog centra ubrzanja u odnosu na nepokretni koordinatni sistem će biti

$$(5) \quad \begin{aligned} x_K &= x_A + \frac{1}{\omega^4 + \varepsilon^2} (\omega^2 \ddot{x}_A - \ddot{\varphi} \ddot{y}_A), \\ y_K &= y_A + \frac{1}{\omega^4 + \varepsilon^2} (\omega^2 \ddot{y}_A + \ddot{\varphi} \ddot{x}_A), \end{aligned}$$

gde je $\ddot{\varphi} = \varepsilon$. U odnosu na pokretni sistem je

$$(6) \quad \begin{aligned} \xi_K &= \frac{1}{\omega^4 + \varepsilon^2} (\omega^2 w_{A\xi} - \ddot{\varphi} w_{A\eta}), \\ \eta_K &= \frac{1}{\omega^4 + \varepsilon^2} (\omega^2 w_{A\eta} + \ddot{\varphi} w_{A\xi}). \end{aligned}$$

Prema obrascu (3) može se položaj trenutnog centra ubrzanja K u odnosu na pol A odrediti grafički na ovaj način. Prvo se obrne vektor \mathbf{w}_A (sl. 52) oko pola A za ugao μ određen obrascem

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{|\boldsymbol{\varepsilon}|}{\omega^2}$$

i to u smeru obrtanja ravne figure kad je $\varepsilon \omega > 0$, a u suprotnom kad je $\varepsilon \omega < 0$, pa zatim prenese

$$(7) \quad \overline{AK} = \frac{|\mathbf{w}_A|}{\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}}$$

Ako se tačka K uzme za pol, onda u obrascu (1.12—16) za ubrzanje tačke M tela neće biti translatorskog ubrzanja već će postojati samo rotaciona i aksipetalna komponenta

$$(8) \quad \mathbf{w} = \boldsymbol{\varepsilon} \times \overrightarrow{KM} - \omega^2 \overrightarrow{KM}$$

Vektori $\boldsymbol{\varepsilon}$ i \overrightarrow{KM} su uzajamno upravni pa stoga vektori $\boldsymbol{\varepsilon}$, \overrightarrow{KM} i $\boldsymbol{\varepsilon} \times \overrightarrow{KM}$ grade desni pravougli triedar. Prema tome, za intenzitet ubrzanja neke tačke M ravni dobiva se iz (8)

$$(9) \quad |\mathbf{w}_M| = \overline{KM} \sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}$$

Uočimo sada neku tačku tela koja se u datom trenutku poklapa sa centrom rotacije C . U (1.11.2—20) određena je brzina kotrljanja rulete po bazi kao brzina pomeranja tačke C . Relacija (1.11.2—20) može se napisati u obliku

$$(10) \quad \mathbf{v}_K = \mathbf{v}_C = \mathbf{v}_A - \frac{1}{\omega^2} \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{v}_A + \frac{1}{\omega^2} \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{w}_A,$$

jer je za ravansko kretanje $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\varepsilon} = \ddot{\boldsymbol{\varphi}}$. Tačka tela koja se u nekom trenutku poklapa sa trenutnim centrom brzine ima u tom trenutku brzinu jednaku nuli, ali ubrzanje ne mora biti jednako nuli, jer je zbog ravanskog kretanja $\boldsymbol{\omega} \perp \boldsymbol{\rho}_C$. Prema (1.12—7) ubrzanje tačke C je

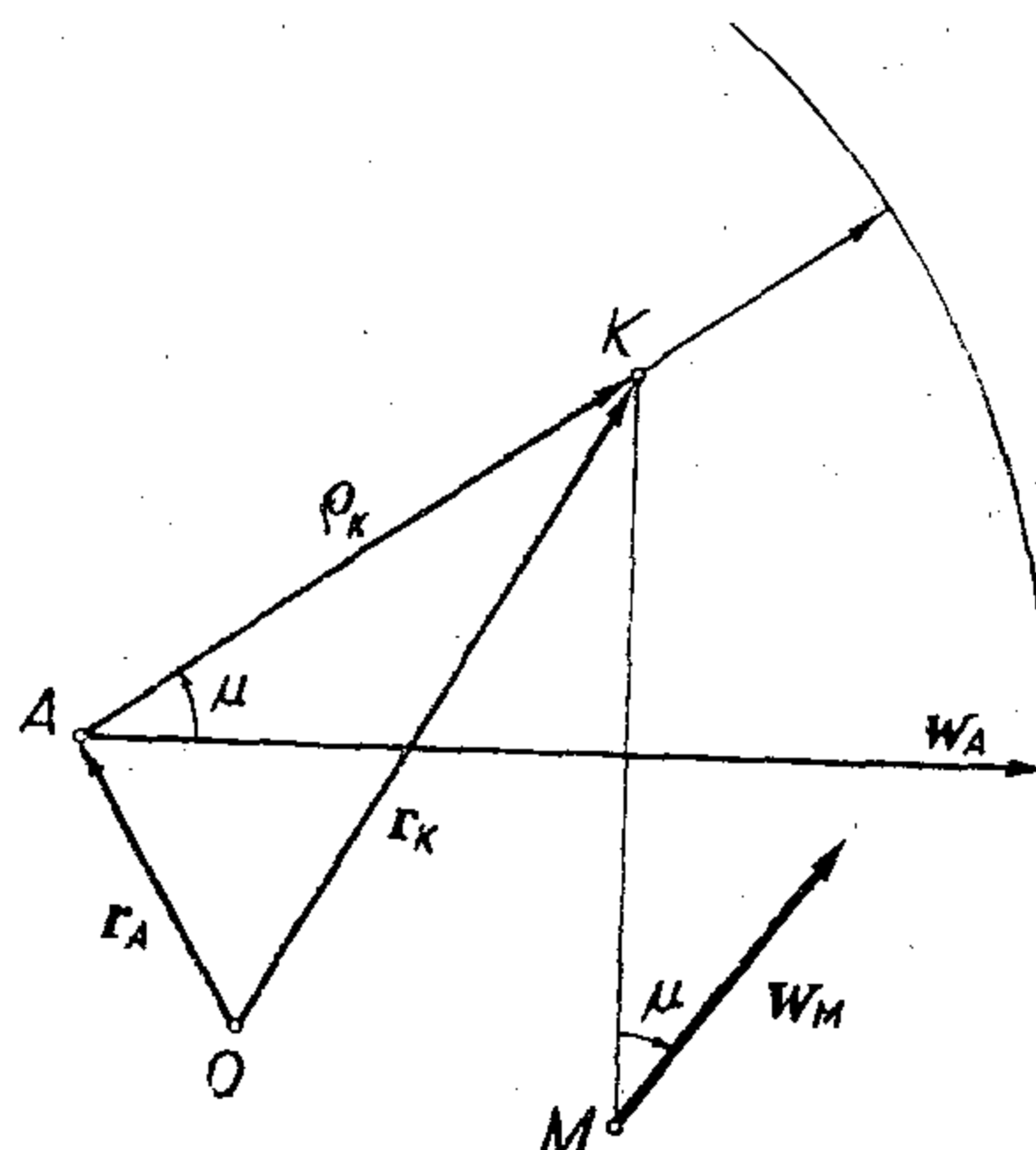
$$(11) \quad \mathbf{w}_C = \mathbf{w}_A + \boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{\rho}_C - \omega^2 \boldsymbol{\rho}_C = \mathbf{w}_A - \frac{\boldsymbol{\varepsilon}}{\omega} \mathbf{v}_A - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_A,$$

pri čemu treba uzeti u obzir da je položaj trenutnog centra rotacije određen obrascem (1.11.2—3) i da su vektori $\boldsymbol{\omega}$ i $\boldsymbol{\varepsilon}$ kolinearni i upravni na ravan kretanja (pa stoga i na vektore \mathbf{v}_A i \mathbf{w}_A).

Upoređenjem obrasca (10) sa desnom stranom obrasca (11) može se lako videti da je ubrzanje trenutnog centra rotacije određeno neposredno trenutnom ugaonom brzinom $\boldsymbol{\omega}$ i brzinom \mathbf{v}_k kotrljanja rulete po bazi

$$(12) \quad \mathbf{w}_C = \mathbf{v}_k \times \boldsymbol{\omega}.$$

Naime, ako se obrazac (10) pomnoži vektorski zdesna vektorom $\boldsymbol{\omega}$ dobiće se tačno izraz na desnoj strani obrasca (11), kad se uzme u obzir da je $\boldsymbol{\omega} \perp \mathbf{v}_A$, $\boldsymbol{\omega} \perp \mathbf{w}_A$ i $\boldsymbol{\omega} \parallel \boldsymbol{\varepsilon}$.



Slika 52

Vektori \mathbf{v}_k i $\boldsymbol{\omega}$ su uzajamno upravni pa je algebarska vrednost w_C tog ubrzanja

$$(13) \quad w_C = \omega v_k,$$

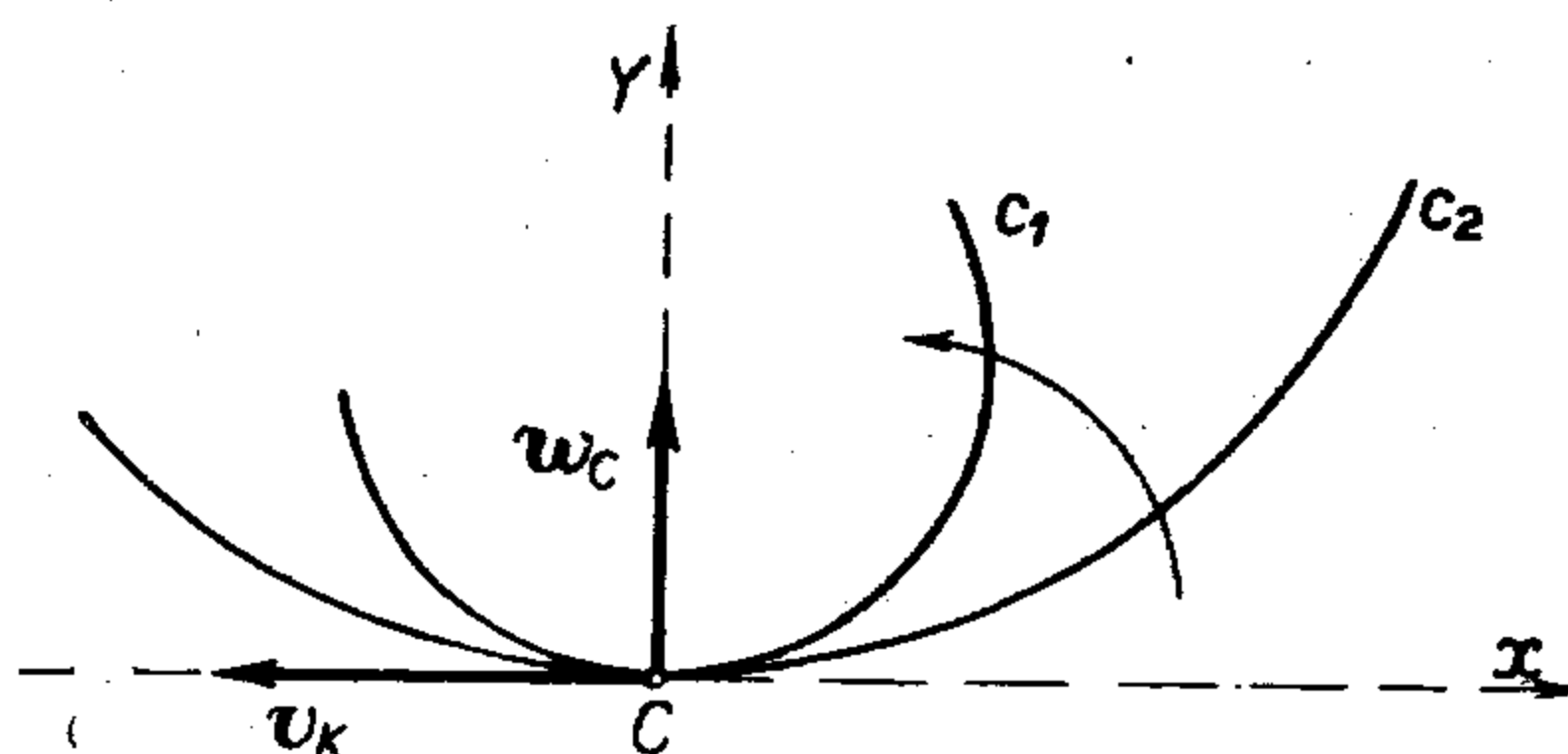
gde je v_k algebarska vrednost brzine kotrljanja. Ako se prema (1.11.2—23) brzina kotrljanja izrazi pomoću trenutne ugaone brzine i krivine baze i rulete, mesto (13) može se napisati

$$(14) \quad w_C = \omega^2 k,$$

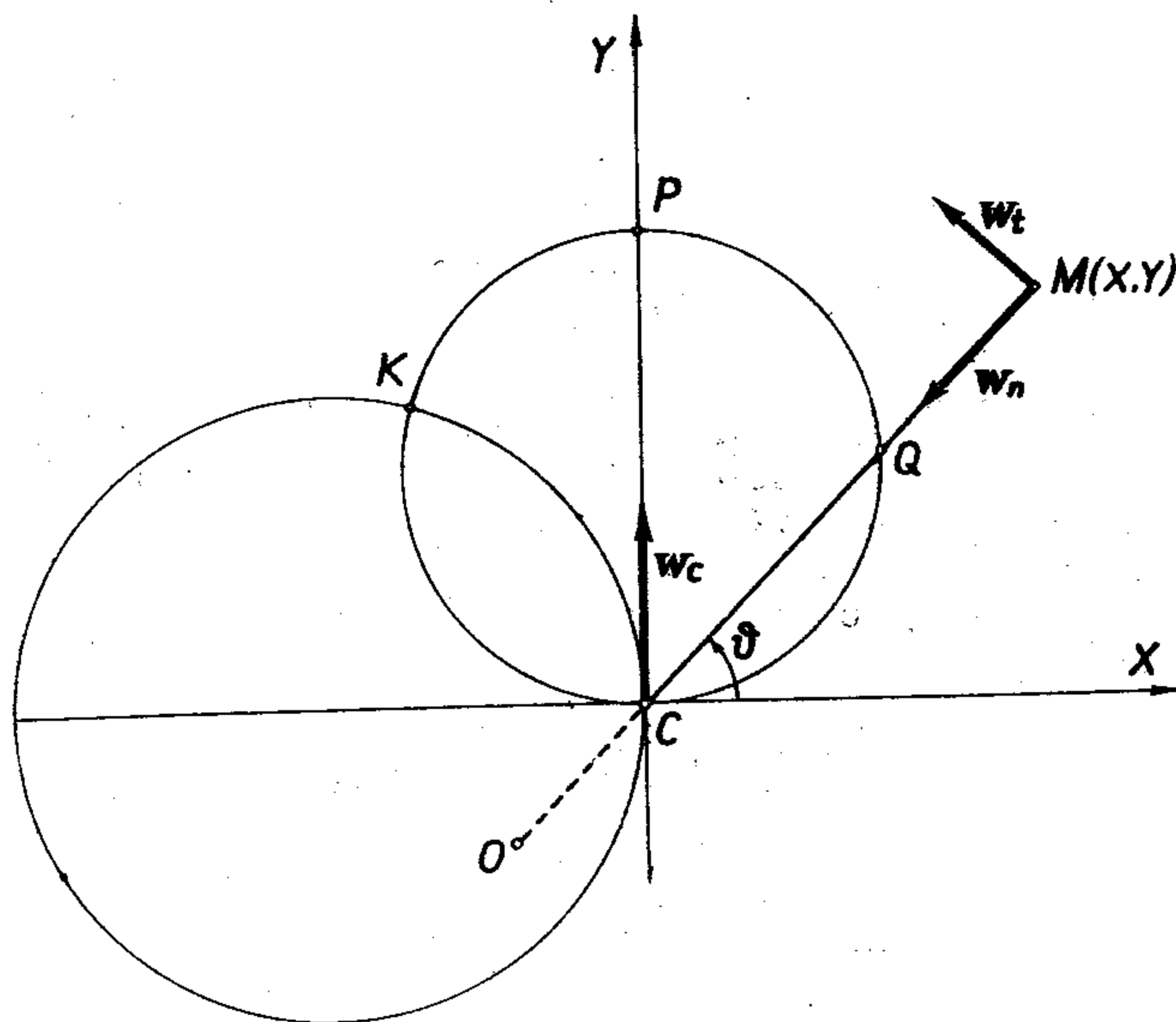
gde je

$$(15) \quad k = \frac{v_k}{\omega} = \frac{1}{K_b \pm K_r} = \frac{\rho_b \rho_r}{\rho_b \pm \rho_r}.$$

Ubrzanje w_C tačke C je prema (12) upravno na \mathbf{v}_k i obrazuje se \mathbf{v}_k i $\boldsymbol{\omega}$ desni triedar (sl. 53). Uzmimo sad kao sistem referencije u ravni sistem koordinata CXY ,



Slika 53



Slika 54

gde je C trenutni centar rotacije, CX ima pravac brzine kotrljanja, a CY pravac i smer vektora w_C . Položaj proizvoljne tačke M (sl. 54) u CXY ravni može se

odrediti pomoću polarnih koordinata $d = \overline{CM}$ i ugla $\vartheta = \sphericalangle XCM$. Usled obrtanja ravni CXY oko tačke C ugaonom brzinom ω i usled $d = \text{const.}$, $\vartheta = \text{konst.}$ za uočenu tačku M , brzina te tačke je $v = d \omega$. Rotaciono (tangento) i aksipetalno (normalno) ubrzanje tačke M samo od trenutne rotacije su

$$w_t' = \frac{dv}{dt} = d\varepsilon, \quad w_n' = \frac{v^2}{\rho} = d\omega^2,$$

jer je poluprečnik krivine putanje koju opisuje tačka M oko centra C : $\rho = d$. Kako, međutim, sam koordinatni sistem CXY ima u uočenom trenutku ubrzanje $w_C = \omega v_k$ u smeru Y -ose, biće algebarske vrednosti rotacionog (tangento) i aksipetalnog (normalnog) ubrzanja

$$(16) \quad \begin{aligned} w_t &= d\varepsilon + \omega v_k \cos \vartheta, \\ w_n &= d\omega^2 - \omega v_k \sin \vartheta = \omega^2 (d - k \sin \vartheta). \end{aligned}$$

Geometrijsko mesto onih tačaka ravne figure za koje je u datom trenutku normalno ubrzanje nula ($w_n = 0$), određeno je u polarnim koordinatama d, ϑ ($X = d \cos \vartheta, Y = d \sin \vartheta$) jednačinom

$$(17) \quad d = k \sin \vartheta,$$

a u odnosu na koordinatni sistem CXY jednačinom

$$(18) \quad X^2 + Y^2 = kY.$$

To je krug poluprečnika $k = \overline{CP}$, koji u C dodiruje zajedničku tangentu baze i rulete i zove se *krug prevoja*. Na njemu su sve tačke koje se u tom trenutku nalaze u prevojnim tačkama svojih putanja (izuzev eventualno samog centra trenutne rotacije C).

One pak tačke ravne figure za koje je u datom trenutku tangento ubrzanje jednako nuli ($w_t = 0$), tj

$$d = -\frac{\omega v_k}{\varepsilon} \cos \vartheta,$$

leže na krugu čiji je centar na X -osi i dodiruje Y -osu u tački C . Jednačina tog kruga u odnosu na sistem CXY glasi

$$(19) \quad X^2 + Y^2 = -\frac{\omega v_k}{\varepsilon} X.$$

Ovaj krug se zove *prelazni* ili *granični*. Na njemu su tačke koje u datom trenutku imaju ekstremnu vrednost brzine te on razdvaja tačke koje se kreću ubrzano od tačaka koje se kreću usporeno.

Trenutni centar ubrzanja nalazi se očigledno u tački K u kojoj se (van tačke C) krug prevoja i granični krug seku. Prema tome, prevojni krug je i geometrijsko mesto svih onih centara ubrzanja u datom trenutku za dato ω , kad se ε menja. Tačka P odgovara vrednosti $\varepsilon = 0$ trenutnog ugaonog ubrzanja.

Krug prevoja i granični krug zovu se i *Bresovi* (Bresse) *krugovi*, ali se prevojni krug naziva i *Lahirov* (de la Hire).

Pomoću drugog od obrazaca (16) može se izvesti jedan jednostavan obrazac za određivanje poluprečnika krivine putanje svake tačke ravne figure u datom trenutku. Neka je $R = \overline{OM}$ poluprečnik krivine putanje neke tačke M ravne figure; za elementarno pomeranje oko trenutnog centra obrtanja C poluprečnik

krivine nalazi se na pravoj CM (sl. 54). Prema obrascu (1.6.1—4) za normalno ubrzanje tačke M poluprečnik krivine putanje je

$$R = \frac{v^2}{w_n}$$

U uočenom trenutku brzine tačke M je $d\omega$, a ubrzanje w_n je određeno drugim obrascem (16), tako da je

$$(20) \quad R = \frac{d^2}{d - k \sin \vartheta}$$

Ako se sa p obeleži rastojanje centra krivine O od trenutnog centra rotacije, biće $R = p + d$, pa se obrazac (20) može napisati i u obliku

$$(p + d) k \sin \vartheta = pd,$$

odakle se dobiva *Ojler-Savarijev* (Savary) obrazac

$$(21) \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{d} = \frac{1}{k \sin \vartheta}$$

Iz obrasca (20) može se izvesti jedan obrazac za određivanje poluprečnika krivine R , kad se zna položaj trenutnog centra rotacije C i kada je dat krug prevoja. Za uočenu tačku tela je (sl. 54) $d = \overline{MC}$, a prema (17) je $k \sin \vartheta = \overline{QC}$, gde je Q tačka na krugu prevoja u kojoj taj krug seče prava MC . Kako je $d - k \sin \vartheta = \overline{MC} - \overline{QC} = \overline{MQ}$, iz (20) se dobiva

$$(22) \quad R = \frac{\overline{MC}^2}{\overline{MQ}}$$

Pri određivanju poluprečnika i centra krivine putanje tačke ravne figure potrebno je voditi računa o položaju tačke O prema tačkama C i M . R i d se smatraju kao pozitivne veličine. Kad je $p > 0$ centar krivine se nalazi na produženju duži MC preko C , a kad je $p < 0$, centar krivine je između tačaka M i C .

1.13. Apsolutno, relativno i prenosno kretanje

U kinematici tačke posmatrano je kretanje u odnosu na neki u prostoru nepokretan sistem. Takvo kretanje se naziva i *apsolutno*. Može se, međutim, kretanje posmatrati i u odnosu na neki koordinatni sistem koji ima sopstveno kretanje u odnosu na nepokretan prostor. Kretanje tačke prema koordinatnom sistemu koji se i sam kreće naziva se *relativno*. Posmatrana iz nepokretnog koordinatnog sistema u tom slučaju tačka ima dvojako kretanje: kreće se zajedno sa pokretnim koordinatnim sistemom kao tačka krutog tela vezanog za taj sistem i kreće se relativno prema pokretnom sistemu. Kretanje tačke u odnosu na nepokretni sistem pri kome ona ne menja svoj relativni položaj prema pokretnom koordinatnom sistemu naziva se *prenosno*.

Na primer, ako se za Sunce veže u prostoru nepokretan sistem koordinata, koordinatni sistem vezan za Zemlju je pokretan i ima sopstveno kretanje određeno kretanjem Zemlje. Kretanje neke tačke u odnosu na Zemlju je relativno, a kretanje koje ta tačka vrši zajedno sa Zemljom kao da je za nju kruto vezana jeste prenosno. Oba kretanja zajedno u odnosu na Sunce sačinjavaju apsolutno kretanje.

Prema tome, *kako se posmatra*, i kretanje tačke je apsolutno, relativno ili prenosno. Način posmatranja i izbor koordinatnog sistema zavisi od cilja posmatranja.

Apsolutno elementarno pomeranje $\Delta \mathbf{r}_a$ može se, dakle, smatrati kao rezultanta (zbir) prenosnog elementarnog pomeranja $\Delta \mathbf{r}_p$ i relativnog pomeranja $\Delta \mathbf{q}_r$, pri čemu je \mathbf{r} vektor položaja tačke prema nepokretnom polu O , a \mathbf{q} prema pokretnom polu A , koji je početak pokretnog koordinatnog sistema $A\xi\eta\zeta$. Prema tome je

$$(1) \quad \Delta \mathbf{r}_a = \Delta \mathbf{r}_p + \Delta \mathbf{q}_r.$$

Kod prenosnog kretanja se smatra da se tačka kreće zajedno sa koordinatnim sistemom kao tačka krutog tela, pa se za prenosno pomeranje $\Delta \mathbf{r}_p$ može iskoristiti obrazac (1.9.6—2) prema kome je

$$(2) \quad \Delta \mathbf{r}_p = \Delta \mathbf{r}_A + \Delta \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{q}.$$

Ako je neka tačka imala pomeranje $\Delta \mathbf{r}_a$ u odnosu na nepokretni pol O za vreme Δt deobom se Δt i kad $\Delta t \rightarrow 0$ iz obrasca (1) dobiva se da je

$$(3) \quad \mathbf{v}_a = \mathbf{v}_p + \mathbf{v}_r,$$

tj. *apsolutna brzina* \mathbf{v}_a *pokretne tačke jednaka je zbiru prenosne brzine* $\mathbf{v}_p = \frac{d\mathbf{r}_p}{dt}$

i relativne brzine $\mathbf{v}_r = \frac{d\mathbf{q}}{dt}$. Prenosna brzina je prema (2),

$$\mathbf{v}_p = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{q},$$

tako da je

$$(4) \quad \mathbf{v}_a = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{q} + \mathbf{v}_r.$$

U odnosu na nepokretni prostor vektor položaja \mathbf{q} neke tačke određen je razlikom vektora položaja \mathbf{r} te tačke i vektora položaja \mathbf{r}_A pokretnog pola u odnosu na nepokretni pol, tj.

$$\mathbf{q} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_A.$$

Apsolutna elementarna promena tog vektora biće

$$(5) \quad \Delta \mathbf{q} = \Delta \mathbf{r} - \Delta \mathbf{r}_A = \Delta \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{q} + \Delta \mathbf{q}_r.$$

Deobom se Δt ove jednačine i određivanjem granične vrednosti, kad $\Delta t \rightarrow 0$ dobiva se tzv. *apsolutni izvod* vektora \mathbf{q} (koji ne treba nipošto mešati sa apsolutnim izvodom u Bjankijevom smislu (1.6.2.1))

$$(6) \quad \dot{\mathbf{q}} = \frac{d\mathbf{q}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{q} + \overset{\circ}{\mathbf{q}}.$$

Ovde je $\overset{\circ}{\mathbf{q}} = \mathbf{v}_r$ relativna brzina, tj. brzina tačke u odnosu na pokretni koordinatni sistem, bez obzira da li se i kako taj sistem kreće prema nepokretnom prostoru. Vektor \mathbf{v}_r je, prema tome, u odnosu na pokretni koordinatni sistem $A\xi\eta\zeta$ određen obrascem

$$(7) \quad \mathbf{v}_r = \overset{\circ}{\mathbf{q}} = \xi \boldsymbol{\lambda} + \eta \boldsymbol{\mu} + \zeta \boldsymbol{\nu}.$$

Ako je $Oxyz$ nepokretni koordinatni sistem, projekcije relativne brzine na ose pokretnog i nepokretnog sistema biće

$$(8) \quad v_{r\xi} = \dot{\xi}, \quad v_{r\eta} = \dot{\eta}, \quad v_{r\zeta} = \dot{\zeta}; \quad \begin{aligned} v_{rx} &= a_{11} \dot{\xi} + a_{12} \dot{\eta} + a_{13} \dot{\zeta}, \\ v_{ry} &= a_{21} \dot{\xi} + a_{22} \dot{\eta} + a_{23} \dot{\zeta}, \\ v_{rz} &= a_{31} \dot{\xi} + a_{32} \dot{\eta} + a_{33} \dot{\zeta}. \end{aligned}$$

Uopšte, neka je \mathbf{V} neki vektor definisan u odnosu na pokretni koordinatni sistem $A\xi\eta\zeta$

$$(9) \quad \mathbf{V} = V_\xi \boldsymbol{\lambda} + V_\eta \boldsymbol{\mu} + V_\zeta \mathbf{v}.$$

Ako se sa $\frac{d_r}{dt} \mathbf{V} \equiv \overset{\odot}{\mathbf{V}}$ obeleži relativni izvod po vremenu toga vektora (u odnosu na pokretni sistem), a sa $\frac{d}{dt} \mathbf{V}$ apsolutni izvod (prema nepokretnom sistemu), apsolutna brzina promene vektora \mathbf{V} biće

$$(10) \quad \frac{d}{dt} \mathbf{V} = \dot{V}_\xi \boldsymbol{\lambda} + \dot{V}_\eta \boldsymbol{\mu} + \dot{V}_\zeta \mathbf{v} + V_\xi \dot{\boldsymbol{\lambda}} + V_\eta \dot{\boldsymbol{\mu}} + V_\zeta \dot{\mathbf{v}}.$$

Ovde je

$$(11) \quad \dot{V}_\xi \boldsymbol{\lambda} + \dot{V}_\eta \boldsymbol{\mu} + \dot{V}_\zeta \mathbf{v} \equiv \frac{d_r}{dt} \mathbf{V} = \overset{\odot}{\mathbf{V}}$$

relativna brzina promene vektora \mathbf{V} , jer leva strana ne zavisi od kretanja pokretnog sistema prema nepokretnom, već samo od relativne promene posmatranog vektora. Izvodi $\dot{\boldsymbol{\lambda}}$, $\dot{\boldsymbol{\mu}}$, $\dot{\mathbf{v}}$ određeni su obrascima (1.11.1—11), pa se može pisati

$$V_\xi \dot{\boldsymbol{\lambda}} + V_\eta \dot{\boldsymbol{\mu}} + V_\zeta \dot{\mathbf{v}} = (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\lambda}) V_\xi + (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\mu}) V_\eta + (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}) V_\zeta = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}.$$

Na osnovu ovoga relacija (10) za apsolutni izvod vektora \mathbf{V} po vremenu dobiva najzad oblik

$$(12) \quad \frac{d}{dt} \mathbf{V} = \frac{d_r}{dt} \mathbf{V} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V},$$

ili

$$(13) \quad \dot{\mathbf{V}} = \overset{\odot}{\mathbf{V}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}.$$

Apsolutno ubrzanje je apsolutni izvod po vremenu apsolutne brzine, određene obrascem (4),

$$(14) \quad \mathbf{w}_a = \frac{d \mathbf{v}_a}{dt} = \mathbf{w}_A + \boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\omega} \times \dot{\boldsymbol{\rho}} + \dot{\mathbf{v}}_r.$$

Izvodi $\dot{\boldsymbol{\rho}}$ i $\dot{\mathbf{v}}_r$ predstavljaju apsolutne izvode vektora definisanih u odnosu na pokretni sistem, koristeći za njih obrasce (6) i (13), može se za apsolutno ubrzanje napisati

$$(15) \quad \mathbf{w}_a = \mathbf{w}_A + \boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}) + 2 \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r + \mathbf{w}_r,$$

gde je

$$(16) \quad \mathbf{w}_r = \frac{d_r}{dt} \mathbf{v}_r = \overset{\odot}{\mathbf{v}}_r = \overset{\odot}{\boldsymbol{\rho}}$$

relativno ubrzanje.

Apsolutno ubrzanje ima, prema tome, tri komponente: *prenosnu*

$$(17) \quad \mathbf{w}_p = \mathbf{w}_A + \boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}),$$

koja zavisi isključivo od kretanja pokretnog sistema u odnosu na nepokretni, a ne i od relativnog kretanja, zatim *relativnu*, određenu obrascem (16)

$$\odot \\ \mathbf{w}_r = \boldsymbol{\rho}$$

koja zavisi isključivo od relativnog kretanja i najzad jednu komponentu koja istovremeno zavisi od ugaone brzine prenosnog kretanja i brzine relativnog kretanja,

$$(18) \quad \mathbf{w}_C = 2 \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r,$$

koja se zove *Koriolisovo* (Coriolis) *ubrzanje*. Za apsolutno ubrzanje može se najzad napisati

$$(19) \quad \mathbf{w}_a = \mathbf{w}_p + \mathbf{w}_r + \mathbf{w}_C.$$

Koriolisovo ubrzanje je uvek u ravni upravnoj na trenutnu osu rotacije, a takođe je upravno i na vektor relativne brzine. To ubrzanje ne postoji kad je:

a) $\boldsymbol{\omega} = 0$ i kretanje je translatorno; b) $\mathbf{v}_r = 0$ i u uočenom trenutku ili trajno nema relativne brzine; i c) kad su vektori $\boldsymbol{\omega}$ i \mathbf{v}_r kolinearni.

U slučaju ravanskog kretanja je $\boldsymbol{\omega}$ uvek upravno na ravni kretanja, pa je Koriolisovo ubrzanje po intenzitetu uvek jednako $2 |\boldsymbol{\omega}| |v_r|$, a vektor \mathbf{w}_C je u ravni kretanja tako usmeren da sa vektorima $\boldsymbol{\omega}$ i \mathbf{v}_r obrazuje desni triedar.

Može se posmatrati i relativno kretanje čitavog nekog krutog tela prema pokretnoj sredini $A\xi\eta\zeta$. Uzećemo da je sad sa telom nepromenljivo vezan koordinatni sistem $BXYZ$, i u stvari imamo tri sredine: nepokretnu u kojoj je utvrđen nepokretni sistem $Oxyz$, prenosno pokretanu sredinu sa sistemom referencije $A\xi\eta\zeta$ i, najzad, relativno pokretnu sredinu (telo) sa sistemom referencije $BXYZ$. Neka je \mathbf{r} vektor položaja u odnosu na pol O , $\boldsymbol{\rho}$ u odnosu na pol A i \mathbf{R} u odnosu na pol B . Pri kretanju tela vektor \mathbf{R} ma koje tačke tela neka se ne menja.

Položaj neke tačke M tela je prema prenosno pokretnoj sredini A određen obrascem

$$(20) \quad \boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\rho}_B + \mathbf{R},$$

a prema nepokretnoj sredini O obrascem

$$(21) \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_A + \boldsymbol{\rho} = \mathbf{r}_A + \boldsymbol{\rho}_B + \mathbf{R}.$$

Neka je $\mathbf{v}_A = \dot{\mathbf{r}}_A$ brzina pola A prema polu O , $\boldsymbol{\omega}_p$ ugaona brzina prenosno pokretne sredine A prema nepokretnoj, \mathbf{v}_{Br} relativna brzina pola B prema sredini A i $\boldsymbol{\omega}_r$ trenutna ugaona brzina tela prema sredini A .

Brzina neke tačke tela se sastoji iz relativne brzine \mathbf{v}_r prema sredini A

$$(22) \quad \mathbf{v}_r = \mathbf{v}_{Br} + \boldsymbol{\omega}_r \times \mathbf{R}$$

i prenosne brzine sredine A ,

$$(23) \quad \mathbf{v}_p = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega}_p \times \boldsymbol{\rho} = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega}_p \times \boldsymbol{\rho}_B + \boldsymbol{\omega}_p \times \mathbf{R},$$

tako da je apsolutna brzina tačke tela

$$(24) \quad \mathbf{v}_a = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega}_p \times \boldsymbol{\rho} + \mathbf{v}_{Br} + \boldsymbol{\omega}_r \times \mathbf{R},$$

odnosno

$$(25) \quad \mathbf{v}_a = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{Br} + \boldsymbol{\omega}_p \times \boldsymbol{\rho}_B + (\boldsymbol{\omega}_p + \boldsymbol{\omega}_r) \times \mathbf{R}.$$

Pri translatornom kretanju ($\boldsymbol{\omega}_p = \boldsymbol{\omega}_r = \mathbf{0}$) je

$$(26) \quad \mathbf{v}_a = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{Br}.$$

Kako pri translatornom kretanju sve tačke tela imaju jednake brzine, pa je dovoljno posmatrati samo kretanje jedne tačke tela, recimo pola B , može se za brzinu translatornog kretanja tela pisati

$$(27) \quad \mathbf{v}_{Ba} = \mathbf{v}_{Bp} + \mathbf{v}_{Br}.$$

Apsolutna trenutna ugaona brzina $\boldsymbol{\omega}_a$ tela je

$$(28) \quad \boldsymbol{\omega}_a = \boldsymbol{\omega}_p + \boldsymbol{\omega}_r.$$

Prema tome, obrazac (25) za apsolutnu brzinu neke tačke tela pri relativnom kretanju može da se napiše u obliku

$$(29) \quad \mathbf{v}_a = \mathbf{v}_{Ba} + \boldsymbol{\omega}_p \times \boldsymbol{\rho}_B + \boldsymbol{\omega}_a \times \mathbf{R},$$

iz koga se vidi da je brzina (apsolutna) određena vektorima apsolutne translatorne brzine \mathbf{v}_{Ba} , prenosne trenutne ugaone brzine $\boldsymbol{\omega}_p$, apsolutne trenutne ugaone brzine $\boldsymbol{\omega}_a$ i vektorima položaja $\boldsymbol{\rho}_B$ i \mathbf{R} neke tačke tela B prema prenosno pokretnom polu i tačke tela prema polu B .

Primeri i zadaci

1. Neka je L trajektorija neke pokretne tačke A , čije je kretanje duž L dato jednačinom $s = t$ (gde s označava dužinu luka krive L , merenog od neke utvrđene tačke). Naći koordinate ugaone brzine krutog tela koje se kreće tako da je tačka A početak pokretnog koordinatnog sistema vezanog za telo, osa $A\xi$ je tangenta na krivu L u pravcu kretanja, a osa $A\eta$ je glavna normala na krivu L .

Jedinični vektori osa pokretnog koordinatnog sistema su istovremeno jedinični vektori tangente, normale i binormale krive L i za njih Freneovi obrasci glase (κ — krivina i τ — torzija krive)

$$\frac{d\boldsymbol{\lambda}}{ds} = \kappa \boldsymbol{\mu}; \quad \frac{d\boldsymbol{\mu}}{dt} = -\kappa \boldsymbol{\lambda} - \tau \mathbf{v}; \quad \frac{d\mathbf{v}}{ds} = \tau \boldsymbol{\mu}.$$

Diferencijaljenjem jediničnih vektora $\boldsymbol{\lambda}$, $\boldsymbol{\mu}$ i \mathbf{v} dobiva se (1.11.1—11)

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\mu} r - \mathbf{v} q; \quad \dot{\boldsymbol{\mu}} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\mu} = \mathbf{v} p - \boldsymbol{\lambda} r; \quad \dot{\mathbf{v}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} = \boldsymbol{\lambda} q - \boldsymbol{\mu} p,$$

odakle se skalarnim množenjem lako dobivaju koordinate ugaone brzine p , q i r ,

$$p = \dot{\boldsymbol{\mu}} \cdot \mathbf{v}, \quad q = \dot{\mathbf{v}} \cdot \boldsymbol{\lambda}, \quad r = \dot{\boldsymbol{\lambda}} \cdot \boldsymbol{\mu},$$

tako da je vektor tražene ugaone brzine

$$\boldsymbol{\omega} = (\dot{\boldsymbol{\mu}} \cdot \mathbf{v}) \boldsymbol{\lambda} + (\dot{\mathbf{v}} \cdot \boldsymbol{\lambda}) \boldsymbol{\mu} + (\dot{\boldsymbol{\lambda}} \cdot \boldsymbol{\mu}) \mathbf{v}.$$

Ako se u ovaj izraz unesu vrednosti iz Freneovih obrazaca, a pošto je $ds = dt$, za vektor ugaone brzine (Darbuov [Darboux] vektor) dobiva se

$$\boldsymbol{\omega} = -\tau \boldsymbol{\lambda} + \kappa \mathbf{v}.$$

2. Pokazati da je geometrijsko mesto tačaka krutog tela, u kojima je intenzitet brzine u datom trenutku jednak datom konstantnom broju, kružni cilindar koji za osu ima trenutnu osu rotacije.

Neka bude

$$|\mathbf{v}| = |\mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}| = \text{const.} = v_0.$$

Potražimo sve vektore $\boldsymbol{\rho}$ koji zadovoljavaju gornji uslov. U tu svrhu pomnožimo vektorsku jednačinu

$$\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}$$

vektorski npr. sleva sa $\boldsymbol{\omega}$, pa ćemo dobiti

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_0 = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} (\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\rho}) - \omega^2 \boldsymbol{\rho}.$$

Stavimo da je $\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\rho}_C + \boldsymbol{\rho}^*$ gde je $\boldsymbol{\rho}_C = \frac{1}{\omega^2} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_A)$ tačka u trenutnom centru rotacije, pa zamenom u gornjoj jednačini dobivamo

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_0 = \boldsymbol{\omega} (\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\rho}^*) - \omega^2 \boldsymbol{\rho}^*,$$

odnosno

$$\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{v}_0 - \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}^*) = 0.$$

Kako je $\boldsymbol{\omega} \neq 0$, sledi da je $\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}^* = \mathbf{v}_0$, odnosno

$$|\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}^*| = v_0 = \text{const.},$$

a to je jednačina kružnog cilindra, čija se osa poklapa sa trenutnom osom rotacije, a poluprečnik mu je $\frac{v_0}{\omega}$.

3. Ako je trenutna osa rotacije krutog tela, koje se kreće oko nepomične tačke O , nepomična u samom telu, pokazati da će ona biti nepomična i u prostoru tj., da je onda kretanje obrtanje oko nepokretne ose.

Vektor trenutne ugaone brzine $\boldsymbol{\omega}$, koji određuje trenutnu osu rotacije, može se izraziti u obliku (1.11.1—25)

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi} \mathbf{v} + \dot{\psi} \mathbf{k} + \dot{\vartheta} \mathbf{N}.$$

Kako je po pretpostavci trenutna osa rotacije nepokretna u telu, može se uzeti da se poklapa sa osom $O\zeta$ ($A \equiv 0$) koordinatnog sistema nepromenljivo vezanog za telo. Tada je $\dot{\psi} = \dot{\vartheta} = 0$, tj.

$$\psi = \psi_0 = \text{const.}, \quad \vartheta = \vartheta_0 = \text{const.},$$

pa se može napisati

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi} \mathbf{v}.$$

•Međutim, pošto je

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= a_{13} \mathbf{i} + a_{23} \mathbf{j} + a_{33} \mathbf{k} \\ &= \sin \psi \sin \vartheta \mathbf{i} - \cos \psi \sin \vartheta \mathbf{j} + \cos \vartheta \mathbf{k}, \end{aligned}$$

vidi se da \mathbf{v} zavisi samo od uglova ψ i ϑ koji su konstantni. Dakle, trenutna osa rotacije, određena vektorom \mathbf{v} , nepromenljiva je u prostoru.

4. Neko kruto telo obrće se brzinom 50 obrta u sekundi oko prave $x = y = z$; naći brzinu ma koje tačke tela.

Intenzitet trenutne ugaone brzine u radijanima u sekundi iznosi

$$\omega = 2\pi \cdot 50 = 100\pi \text{ sec}^{-1}$$

Koeficijenti pravca ose rotacije su

$$\alpha = \beta = \gamma = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

tako da su koordinate vektora trenutne ugaone brzine u odnosu na nepokretni sistem

$$P = Q = R = \frac{100\pi}{\sqrt{3}}$$

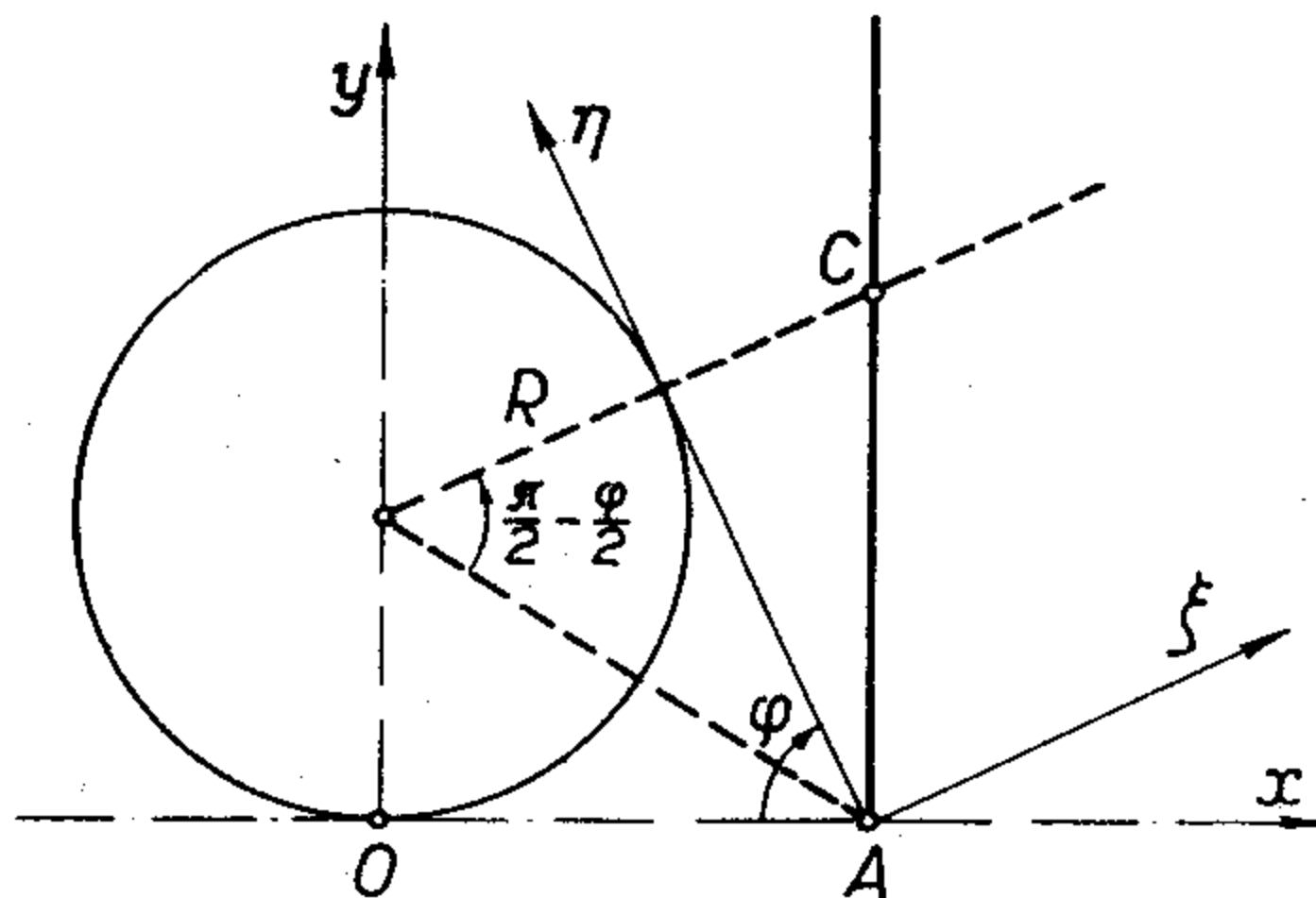
Brzina ma koje tačke M tela sa koordinatama x, y, z biće $\mathbf{v}_M = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_M$, odnosno

$$\dot{x}_M = Qz_M - Ry_M = \frac{100\pi}{\sqrt{3}}(z_M - y_M),$$

$$\dot{y}_M = Rx_M - Pz_M = \frac{100\pi}{\sqrt{3}}(x_M - z_M),$$

$$\dot{z}_M = Py_M - Qx_M = \frac{100\pi}{\sqrt{3}}(y_M - x_M).$$

5. Dati su krug i jedna tangenta kruga. Neka duž se tako kreće da stalno dodiruje krug, a jedan kraj te duži se stalno nalazi na tangenti. Dokazati da su pokretna i nepokretna centroida parabole.



Slika 55

Uzmimo datu tangentu za x -osu, a pravu upravnu na nju kroz centar kruga za y -osu. Brzina kraja duži koji se kreće po x -osi je kolinearna sa x -osom, a brzina tačke duži u kojoj ova dodiruje krug je u pravcu same duži. Trenutni centar rotacije se nalazi u preseku normala na vektore brzina, pa je (sl. 55)

$$x_C = s, \quad y_C = \frac{s}{\sin \varphi} = \frac{x_C}{\sin \varphi}$$

Međutim, imamo da je $\frac{R}{s} = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2} \right)$, odakle je

$$\frac{R^2}{s^2} \sin^2 \varphi - 2 \frac{R}{s} \sin \varphi = -\sin^2 \varphi,$$

pa eliminacijom ugla φ konačno za nepokretnu centroidu dobivamo

$$x_C^2 + R^2 = 2Ry_C.$$

Ako pravac duži uzmemo na η -osu ona je upravna na duž u tački A , pa će biti

$$\frac{\eta_C}{\xi_C} = \operatorname{tg} \varphi \quad \text{i} \quad \frac{R}{\eta_C} = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2} \right)$$

a kako je

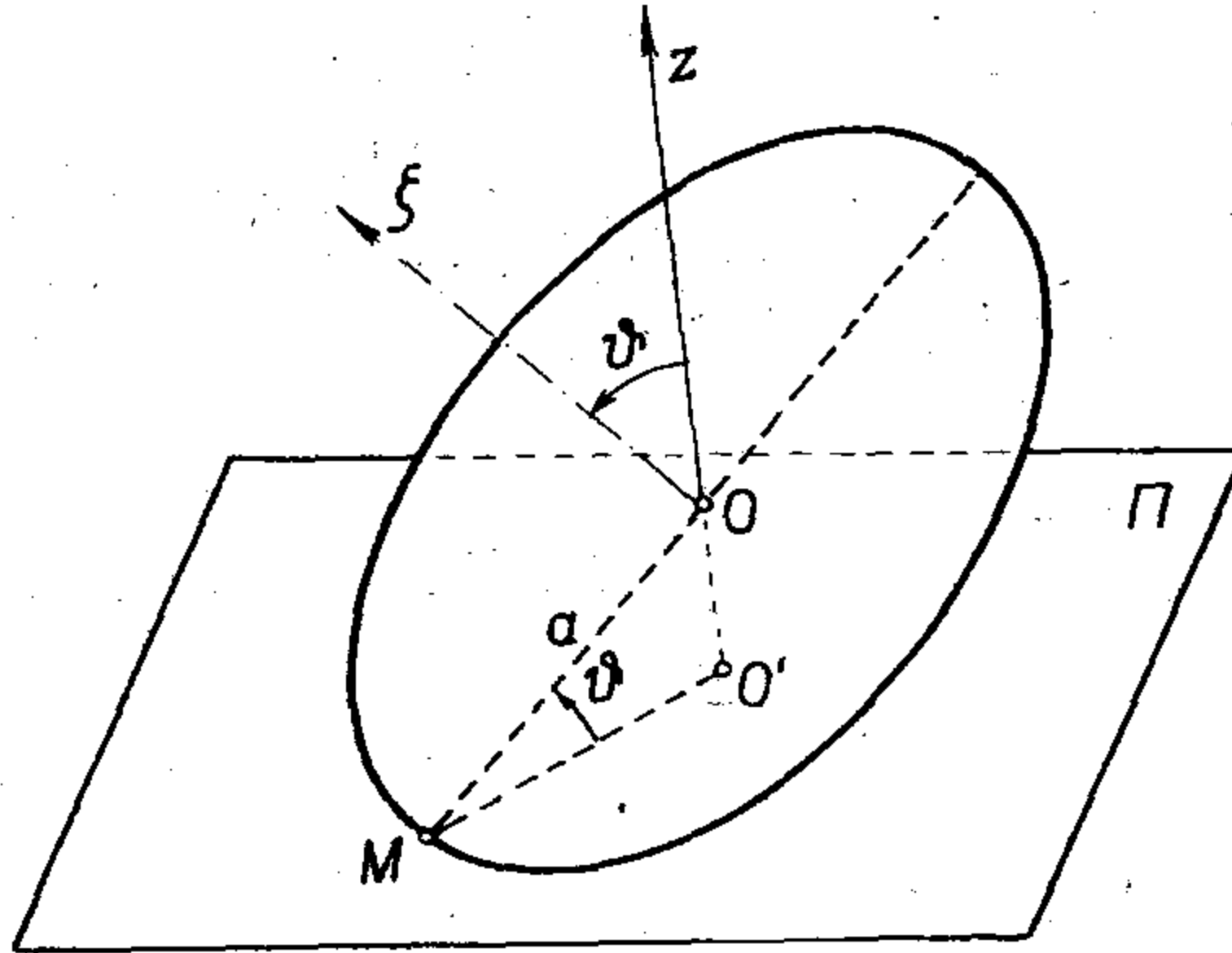
$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2 \operatorname{tg} \varphi / 2}{1 - \operatorname{tg}^2 \varphi / 2}$$

to eliminacijom parametra φ konačno za pokretnu centroidu dobivamo

$$\eta_C^2 = R(R - 2\xi_C).$$

6. Kružna ploča poluprečnika a i utvrđenog centra O oslanja se na nepokretnu ravan Π koju dodiruje u jednoj tački M . Ova ploča se kreće. Odrediti:

- nezavisne parametre koji određuju položaj tela;
- vektor trenutne ugaone brzine pomoću parametara određenih pod a), a u odnosu na pokretni i nepokretni koordinatni sistem;
- brzinu proizvoljne tačke tela pomoću istih parametara.



Slika 56.

U nepokretnoj tački O (sl. 56) možemo postaviti početak pokretnog i nepokretnog koordinatnog sistema. Jednačina ravni Π biće ($OO' = h$)

$$z = -h$$

- a) Prema slici je

$$a \sin \vartheta = h$$

pa je ugao ϑ nepromenljiv, menjaju se samo precesioni ugao ψ i ugao sopstvene rotacije φ . Kretanje ima dva stepena slobode.

- b) Vektor trenutne ugaone brzine je (1.11.1—25)

$$\omega = \dot{\psi} \mathbf{k} + \dot{\varphi} \mathbf{v}.$$

S obzirom na konstantnost ugla nutacije, projekcije ovog vektora na ose pokretnog i nepokretnog koordinatnog sistema će biti ($\mathbf{k} = \lambda \sin \varphi \sin \vartheta + \mu \cos \varphi \cos \vartheta + \nu \cos \vartheta$; $\mathbf{v} = \mathbf{i} \sin \psi \sin \vartheta - \mathbf{j} \cos \psi \sin \vartheta + \mathbf{k} \cos \vartheta$):

$$P = \dot{\varphi} \sin \psi \sin \vartheta; \quad Q = -\dot{\varphi} \cos \psi \sin \vartheta; \quad R = \dot{\varphi} \cos \vartheta + \dot{\psi},$$

$$p = \dot{\psi} \sin \varphi \sin \vartheta; \quad q = \dot{\psi} \cos \varphi \sin \vartheta; \quad r = \dot{\psi} \cos \vartheta + \dot{\varphi}.$$

c) Pošto je pol O nepokretan, brzina proizvoljne tačke tela je određena vektorskim izrazom

$$\mathbf{v} = \omega \times \rho,$$

gde je vektor $\mathbf{p} = \xi \boldsymbol{\lambda} + \eta \boldsymbol{\mu} + \zeta \mathbf{v}$, pa će brzina proizvoljne tačke tela, npr. u odnosu na pokretni sistem biti

$$v_{\xi} = q \zeta - r \eta = \zeta \dot{\psi} \cos \varphi \sin \vartheta - \eta (\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \vartheta);$$

$$v_{\eta} = r \xi - p \zeta = \xi (\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \vartheta) - \zeta \dot{\psi} \sin \varphi \sin \vartheta;$$

$$v_{\zeta} = p \eta - q \xi = \eta \dot{\psi} \sin \varphi \sin \vartheta - \xi \dot{\psi} \cos \varphi \sin \vartheta,$$

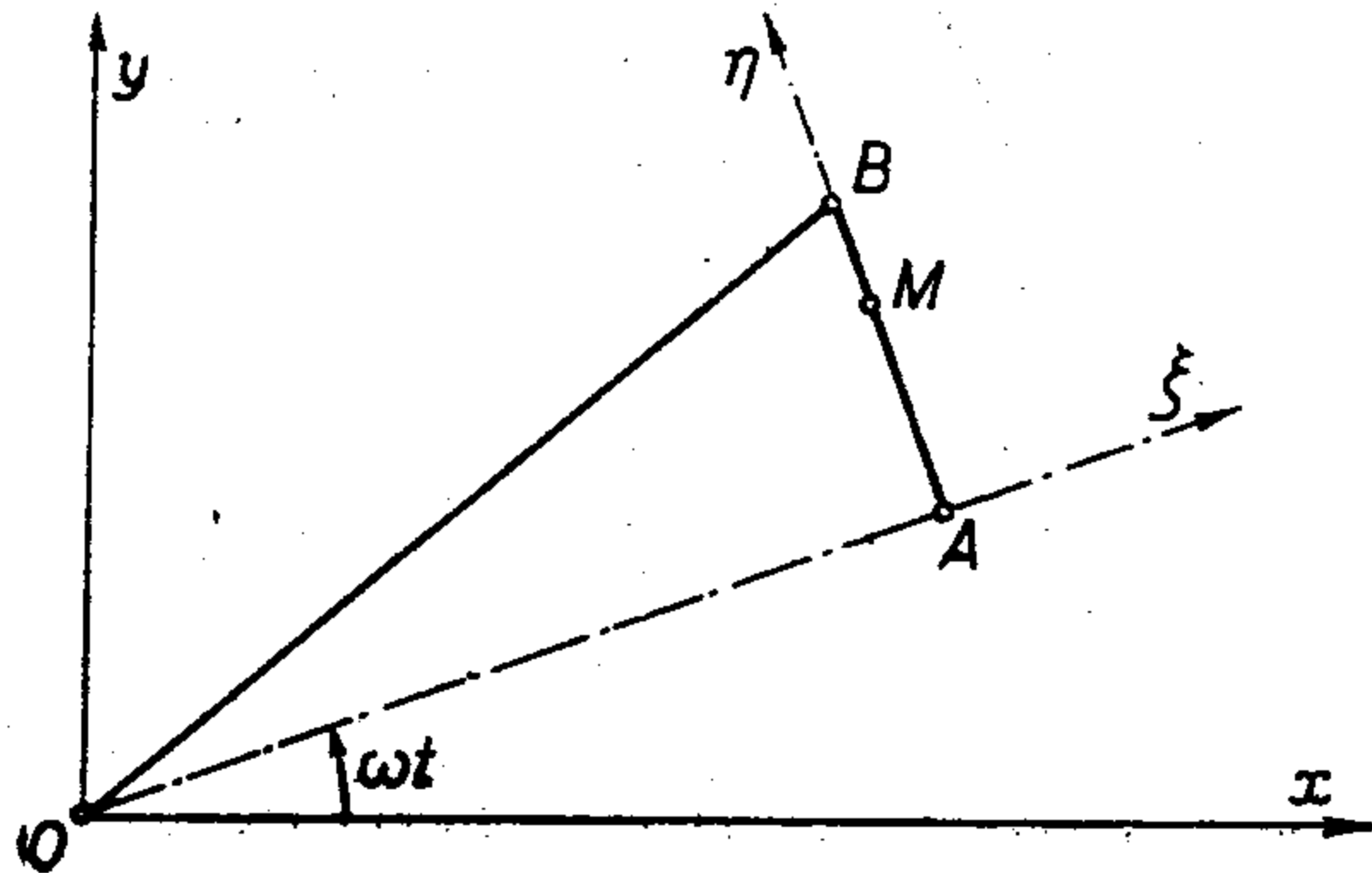
a u odnosu na nepokretni

$$\dot{x} = -z \dot{\varphi} \cos \psi \sin \vartheta - y (\dot{\varphi} \cos \vartheta + \dot{\psi});$$

$$\dot{y} = x (\dot{\varphi} \cos \vartheta + \dot{\psi}) - z \dot{\varphi} \sin \vartheta \sin \psi;$$

$$\dot{z} = y \dot{\varphi} \sin \psi \sin \vartheta + x \dot{\varphi} \cos \psi \sin \vartheta.$$

7. Pravougli trougao OAB obrće se stalnom ugaonom brzinom ω u svojoj ravni oko tačke O . U isto vreme tačka M se kreće stalnom relativnom brzinom duž katete AB i za vreme jednog obrta trougla ona pređe put AB . Odrediti veličinu i pravac apsolutne brzine i ubrzanja tačke M .



Slika 57

Neka je krak trougla $\overline{AB} = a$, krak $\overline{OA} = b$ (sl. 57). Položaj tačke M je prema polu O određen vektorom $\mathbf{r} = \mathbf{r}_A + \mathbf{p}$. Ako se trougao obrće oko O ugaonom brzinom ω , on će jedan obrt napraviti za vreme $\frac{2\pi}{\omega}$, a za to vreme tačka M pređe

put $AB = a$, pa je relativna brzina tačke M , $v_r = \frac{a \omega}{2\pi}$. Prema tome, položaj tačke M na duži AB u nekom trenutku t određen je vektorom

$$\mathbf{p} = \overrightarrow{AM} = \frac{a \omega}{2\pi} t \boldsymbol{\mu},$$

gde je $\boldsymbol{\mu}$ jedinični vektor u pravcu AB . Prema (1.1.3—4) apsolutna brzina tačke M je

$$\mathbf{v}_a = \mathbf{v}_A + \mathbf{p} \odot + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{p}.$$

Ako sa \mathbf{v} označimo jedinični vektor normale na ravan kretanja, ugaona brzina će biti $\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{v}$, a brzina pola A je određena sa

$$\mathbf{v}_A = \overline{OA} \cdot \omega \boldsymbol{\mu} = b \omega \boldsymbol{\mu}.$$

Kako relativna brzina tačke M iznosi $\overset{\odot}{\mathbf{v}} = \frac{a\omega}{2\pi} \boldsymbol{\mu}$, za apsolutnu brzinu tačke M se dobiva

$$\mathbf{v} = \frac{a\omega^2}{2\pi} \boldsymbol{\lambda} + \left(b\omega + \frac{a\omega}{2\pi} \right) \boldsymbol{\mu}.$$

Prema (1.13–15) apsolutno ubrzanje tačke M je

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}_A + \overset{\odot}{\boldsymbol{\rho}} + 2 \boldsymbol{\omega} \times \overset{\odot}{\boldsymbol{\rho}} + \boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}).$$

U našem slučaju je, međutim,

$$\mathbf{w}_A = -b\omega^2 \boldsymbol{\lambda}, \quad \overset{\odot}{\boldsymbol{\rho}} = \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\rho} = 0,$$

pa za apsolutno ubrzanje imamo izraz

$$\mathbf{w} = -\left(b + \frac{a}{\pi} \right) \omega^2 \boldsymbol{\lambda} - \frac{a\omega^2 t}{2\pi} \boldsymbol{\mu}.$$

8. Ravna ploča se kreće u svojoj ravni tako da se dve njene tačke, A i B , stalno nalaze na po jednoj od dve uzajamno upravne prave. Rastojanje \overline{AB} je a , a tačka A se kreće konstantnom brzinom $\mathbf{v}_A = \text{const}$. Naći geometrijsko mesto onih tačaka ploče čiji je intenzitet brzine jednak intenzitetu brzine tačke A .

U p u t s t v o: Uzajamno upravne prave po kojima se kreću tačke A i B uzeti za x - i y -osu, a tačku A za pokretni pol. Traženo geometrijsko mesto je krug poluprečnika $\frac{v_A}{\omega}$, kome je centar u tački $\left(\frac{v_A}{\omega}, y_A \right)$, ako se tačka A kreće duž y -ose.

9. Ravna ploča se kreće u svojoj ravni ugaonom brzinom ω . Pokazati da se brzina trenutnog centra rotacije (brzina kotrljanja \mathbf{v}_K) sastoji od brzine $\overline{CK} \frac{\dot{\omega}}{\omega}$ u pravcu K i brzine $\overline{CK}\omega$ u pravcu normalnom na CK , gde je C trenutni centar rotacije, a K trenutni centar ubrzanja.

10. Krug poluprečnika r kotrlja se bez klizanja po periferiji drugog nepokretnog kruga poluprečnika R u istoj ravni. Duž \overline{OA} koja spaja središte ova dva kruga kreće se jednoliko ubrzano ugaonim ubrzanjem ε oko središta O nepokretne ploče. Naći konačne jednačine kretanja pokretnog kruga, ako je za $t = 0$ ugaona brzina duži OA bila $\omega_0 = 0$.

U p u t s t v o: Uslov da je kotrljanje bez klizanja izražava se zahtevom da brzina dodirne tačke dva kruga bude jednaka nuli. Ako je φ ugao koji duž \overline{AB} gradi sa x -osom, koja prolazi kroz centar O nepokretnog kruga, a ψ ugao za koji se obrne pokretni krug, uslov da kotrljanje bude bez klizanja svodi se na

$$R\varphi = r(\psi - \varphi),$$

i tražene konačne jednačine kretanja glase

$$X_A = (R+r) \cos\left(\frac{\varepsilon t^2}{2}\right),$$

$$Y_A = (R+r) \sin\left(\frac{\varepsilon t^2}{2}\right),$$

$$\psi = \frac{1}{2} \frac{R+r}{r} \varepsilon t^2.$$

11. Kruto telo se kotrlja bez klizanja po ravni i u svakom trenutku njegova ugaona brzina ima projekcije ω_1 i ω_2 u pravcu linija krivine površi tela u dodirnoj tački sa ravni i ω_3 u pravcu normale. Naći projekcije ubrzanja dodirne tačke u istim pravcima.

U p u t s t v o: U pravcima linija krivine površi tela u dodirnoj tački sa ravni po kojoj se kotrlja, kretanje tela se može posmatrati kao nezavisna kotrljanja u pravcima linija krivine, čije su tangente u ravni. Ako su \mathbf{i} i \mathbf{j} jedinični vektori tangenata na linije krivine u tački dodira sa ravni, a \mathbf{k} u pravcu normale na ravan, ugaona brzina kotrljanja u pravcu \mathbf{i} biće $\omega_2\mathbf{j} + \omega_3\mathbf{k}$, a u pravcu \mathbf{j} je $\omega_1\mathbf{i} + \omega_3\mathbf{k}$. Ako se sa R_1 i R_2 obeleže poluprečnici glavnih krivina površi tela u tački dodira sa ravni, ubrzanje dodirne tačke je

$$\mathbf{W} = -R_2\omega_3\omega_1\mathbf{i} - R_1\omega_2\omega_3\mathbf{j} + (R_1\omega_2^2 + R_2\omega_1^2)\mathbf{k}.$$

12. Krug poluprečnika R obrće se oko svog nepokretnog središta O , a kotrlja se po nepomičnoj ravni, sa kojom obrazuje ugao $\Theta = \text{const}$. Ako je brzina precesije ploče oko vertikalne ose kroz O stalna i jednaka n , kolika mora biti brzina sopstvene rotacije kruga oko ose kroz O upravne na krug.

O d g o v o r: $\dot{\varphi} = -n \cos \Theta$.

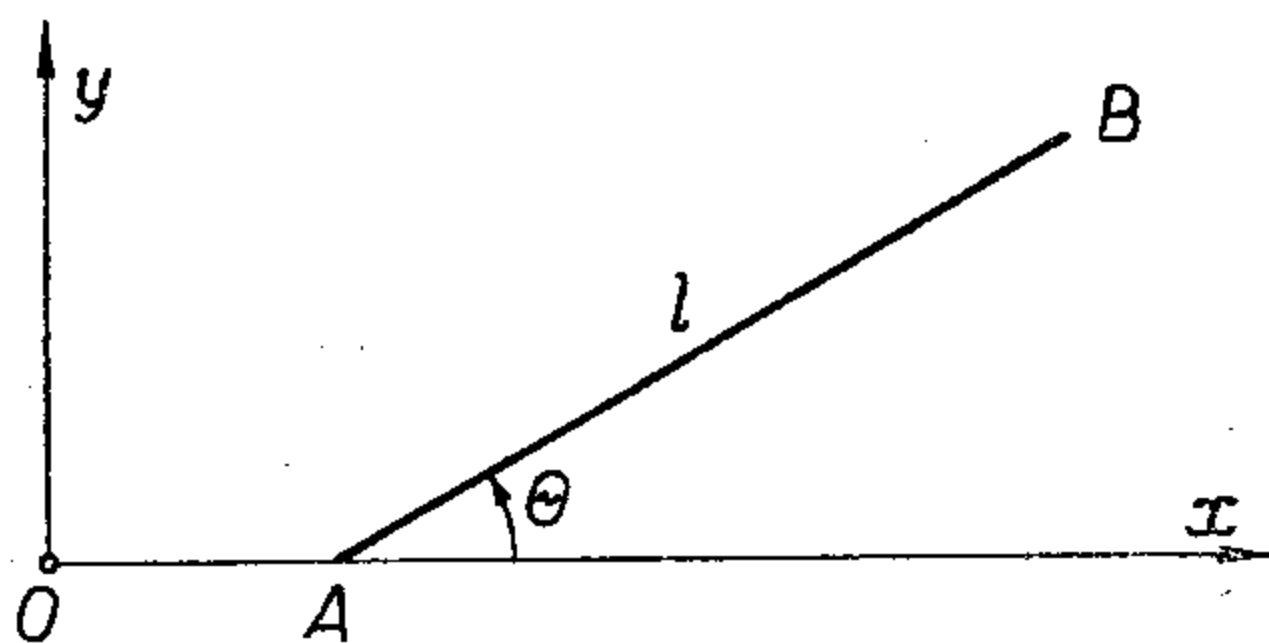
13. Naći konačne jednačine kretanja duži \overline{AB} dužine a čiji se kraj kreće stalnom brzinom \mathbf{v}_0 , a kraj B se u ravni određenoj brzinom \mathbf{v}_0 i početnim položajem duži \overline{AB} kreće brzinom stalnog intenziteta v_0 , pri čemu kretanje duži nije translatorno. Naći putanju tačke B , ako je u početnom trenutku duž \overline{AB} bila upravna na \mathbf{v}_0 .

O d g o v o r: Ako se pravac stalnog vektora \mathbf{v}_0 brzine tačke A uzme za x -osu, a nagib duži \overline{AB} prema x -osi obeleži sa φ , konačna jednačina kretanja duži biće

$$\text{tg } \frac{\varphi}{2} = \text{tg } \frac{\varphi_0}{2} e^{\frac{2v_0}{a} t},$$

a jednačina putanje tačke B je

$$x = \frac{a}{2} \text{Ar cos h } \frac{a}{y} - \sqrt{a^2 - y^2}.$$



Slika 58

14. Tačka A krutog tela, koje se kreće ravanski, kreće se stalnom brzinom \mathbf{v}_0 . Komponenta brzine tačke B ($AB=l$) u pravcu i smeru \mathbf{v}_0 je stalna i iznosi po intenzitetu $a > v_0$. U početnom trenutku je duž \overline{AB} upravna na pravac brzine tačke A . Naći konačne jednačine kretanja tog krutog tela. U kom intervalu vremena je takvo kretanje tela moguće?

O d g o v o r: Prema oznakama sa slike 58 konačne jednačine kretanja su

$$x_A = v_0 t, \quad y_A = 0,$$

$$\Theta = \text{arc cos } \frac{a - v_0}{l} t.$$

Kretanje je moguće u intervalu

$$0 \leq t < l/(a - v_0).$$

15. Kruto telo se kreće tako da je osa $A\zeta$ triedra $A\xi\eta\zeta$ kruto vezanog za telo stalno paralelna osi Oz u prostoru nepokretnog triedra $Oxyz$, a koordinate tačke A su

$$2x_A = 2y_A = z_A = L(\sin \Theta + \cos \Theta),$$

gde je $L = \text{const.}$, a Θ je ugao između x - i ξ -ose.

a) Pokazati da su putanje tačaka tela elipse, a pri tome neke tačke tela opisuju prave linije.

b) naći pokretni i nepokretni aksoid ovog kretanja.

Odgovor: Ako su $\mathbf{a} \left(\xi + \frac{L}{2}, \eta + \frac{L}{2}, L \right)$ i $\mathbf{b} \left(-\eta + \frac{L}{2}, \xi + \frac{L}{2}, L \right)$ vektori određeni u odnosu na nepokretni koordinatni sistem, položaj proizvoljne tačke tela određen je vektorom

$$\mathbf{r} = \mathbf{a} \cos \Theta + \mathbf{b} \sin \Theta,$$

a to je elipsa čiji je centar u tački $(0, 0, \zeta)$. Prave linije opisuju one tačke tela za koje je $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$, tj. $\xi = \eta = 0$.

Pokretni aksoid je kružni cilindar sa osom ζ kao generatrisom, poluprečnika $L/2$, a nepokretni aksoid je krug $x^2 + y^2 = L^2$.

16. Krug poluprečnika a kotrlja se bez klizanja po pravoj L , pri čemu njegov centar ima stalnu brzinu v_0 . Kraj A duži \overline{AB} dužine $l > 2r$ kreće se po pravoj L , dok se kraj B nalazi u stalnoj tački kružne linije. Ako je u početnom trenutku cela duž \overline{AB} bila na pravoj L , odrediti brzinu tačke A duži kao funkciju vremena.

Odgovor:

$$v_A = 2v_0 \sin^2 \frac{v_0 t}{2a} \left(1 + \frac{a \sin \frac{v_0 t}{a}}{\sqrt{l^2 - 4a^2 \sin^4 \frac{v_0 t}{2a}}} \right).$$

17. Ravan Oxy obrće se oko ose Oz brzinom ω . Ako su projekcije brzine neke tačke $M(x, y)$ te ravni na ose x i y date sa $\dot{x} = a/x$, $\dot{y} = b/y$, gde su a i b konstante, pokazati da kvadrat rastojanja tačke M od centra rotacije raste proporcionalno vremenu.

Odgovor: $\overline{OM}^2 = 2(a + b)t + \text{const.}$

18. Neko kruto telo, posmatrano u odnosu na nepokretni koordinatni sistem, kreće se tako da njegove tačke $A(0, 0, 0)$, $B(1, 1, 0)$ i $C(1, 1, 1)$ imaju u odnosu na taj isti koordinatni sistem brzine $\mathbf{v}_A = \{2, 1, -3\}$, $\mathbf{v}_B = \{0, 3, -3\}$, $\mathbf{v}_C = \{-1, 2, -1\}$.

Odrediti vektor trenutne ugaone brzine i translatornu brzinu toga tela.

Odgovor: $P = 1$, $Q = -1$, $R = 2$, trenutna osa rotacije obrazuje sa koordinatnim osama x , y i z uglove čiji su kosinusi $\frac{\sqrt{6}}{6}$, $-\frac{\sqrt{6}}{6}$, $\frac{\sqrt{6}}{3}$. Translatorska brzina tela je brzina pola A , a pravac translacije određen jediničnim vektorom

$$\frac{\mathbf{v}_A}{v_A} = \left(\frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{-3}{\sqrt{14}} \right).$$

19. Pravi ugao AMC kreće se u svojoj ravni tako da tačka A klizi po ordinantnoj osi, a krak MC za svo vreme kretanja prolazi kroz tačku B na osi x na ra-

stojanju a od koordinatnog početka O . Odrediti neopkretnu centroidu, ako je $\overline{AM} = \overline{OB}$.

O d g o v o r: $y^2 = a(2x - a)$.

20. Kruto telo se obrće oko nepomične tačke u prostoru tako da mu je za svo vreme trajanja precesiona brzina stalna i iznosi $\dot{\psi} = 5\pi \text{ sec}^{-1}$, projekcija precesione brzine na $\xi O \eta$ ravan je stalna i iznosi $4\pi \text{ sec}^{-1}$, a projekcija brzine sopstvene rotacije $\dot{\varphi}$ na precesionu z -osu iznosi stalno takođe $4\pi \text{ sec}^{-1}$. Ako se početak pokretnog koordinatnog sistema poklapa sa početkom nepokretnog, odrediti

- intenzitet ugaone brzine tela,
- Ojlerove uglove kao funkcije vremena (konačne jednačine kretanja),
- u odnosu na nepokretni sistem jednačinu putanje tačke M tela čije su koordinate prema pokretnom sistemu $(0, 0, a)$,

O d g o v o r: Iz uslova zadatka je: $\dot{\psi} = 5\pi \text{ sec}^{-1}$, $\dot{\psi} \sin \Theta = 4\pi \text{ sec}^{-1}$, $\dot{\varphi} \cos \Theta = 4\pi \text{ sec}^{-1}$, a odatle je neposredno $\sin \Theta = \frac{4\pi}{\dot{\psi}}$, odnosno $\sin \Theta = \frac{4}{5}$ i $\dot{\varphi} = \frac{20\pi}{3}$.

a) Pomoću obrasca (1.11.1 — 25) nalazi se $\omega = \sqrt{\frac{\pi}{3} \sqrt{985} \text{ sec}^{-1}}$.

b) $\psi = 5\pi t + \psi_0$; $\varphi = \frac{20\pi}{3} t + \varphi_0$; $\Theta = \Theta_0 = \arcsin \frac{4}{5}$.

c) Putanja tačke M je krug poluprečnika $R = 4a/5$, sa centrom na z -osi, a krug se nalazi u ravni $z = 3a/5$. Tačka M opisuje krug oko z -ose sa periodom $T = 2/5 \text{ sec}$.

21. Ravna figura vrši dva uzastopna konačna pomeranja u svojoj ravni. Ako je D'' prava koja spaja centre konačnih obrtanja i ako je D' prava koja je dovedena u položaj D'' polovinom prvog pomeranja (tj. obrtanjem za polovinu ugla), i ako je D''' položaj u koji se dovodi D'' polovinom drugog pomeranja, pokazati da je centar ukupnog pomeranja figure u preseku pravih D' i D''' .

U p u t s t v o: Umesto cele ravne figure dovoljno je posmatrati pomeranje jedne duži nepromenljivo vezane za figuru. Duž se može tako izabrati da u njenom produženju bude centar prvog obrtanja.

DINAMIKA

C. DINAMIKA MATERIJALNE TAČKE

2.1. Osnovni pojmovi i osnovni zakoni dinamike

Za proučavanje kretanja u kinematici se uvode dva osnovna pojma: *prostor* i *vreme*. Pomoću ta dva pojma može se opisati kretanje geometrijskih objekata na taj način što se promena njihovog položaja u prostoru i niz pojava koje su vezane za promenu položaja (brzina, ubrzanje, putanja, itd.) posmatra u toku vremena. Kinematika, međutim, ne objašnjava i ne može da objasni uzrok promene položaja konkretnih tela niti da poveže kretanje sa odgovarajućim uzrocima. Da bi i takva vrsta problema mogla da se obuhvati u mehanici, neophodno je pored prostora i vremena uvesti i treći osnovni pojam — *masu* koja kao i prostor i vreme karakterišu materijalni svet. Svakom prirodnom telu pripada masa (*sopstvena masa*) ali ne kao neki čist kvantitativni sadržaj materije u telu.

Oblast mehanike u kojoj se izučava kretanje ovakvih materijalnih tela naziva se *dinamika*. Osnovne veze između prostora geometrijskih objekata, vremena i mase uspostavljaju se pomoću osnovnih zakona. Racionalna mehanika ne uvodi samo neophodne osnovne pojmove već i pretpostavlja važenje (postulira) izvesnog broja osnovnih zakona i teži da iz njih razvije potpunu teoriju kretanja.

Izbor osnovnih zakona nije sasvim proizvoljan već mora ispunjavati određene uslove. Ti uslovi zavise pre svega od karaktera pojava koje se tumače, jer svaka teorija ima svoje granice važenja. Racionalna mehanika se odnosi prvenstveno na pojave u kojima su brzine male u poređenju sa brzinom svetlosti (približno 3×10^8 km/sec) i u kojima se ne vodi računa o mikrostrukturi tela čije se kretanje posmatra. To je tzv. *klasična mehanika*. Kad su brzine kretanja velike i ne mogu se zanemariti u poređenju sa brzinom svetlosti dolaze do izražaja tzv. *relativistički efekti*. Takve pojave tumači *relativistička mehanika* ili u širem smislu *teorija relativnosti*. Kod pojava pak vezanih za mikrostrukturu materije dolaze do izražaja one koje se makroskopski ne mogu primetiti, njih proučava atomska fizika i *kvantna mehanika*.

Osnovni zakoni ne smeju u okviru svoga važenja biti u suprotnosti sa iskustvom, treba da budu dovoljni za formulisanje potpune teorije kretanja i naravno ne smeju biti među sobom protivrečni. Savremena racionalna mehanika još ne raspolaže potpunim sistemom nezavisnih i neprotivrečnih aksioma (osnovnih zakona) već se služi tzv. *Njutnovim osnovnim zakonima dinamike* (otuda i ime *Njutnova dinamika*). Svoje osnovne zakone dinamike (axiomata sive leges motus) postavio je Njutn (Newton) 1687 godine u delu „Philosophiae naturalis principia mathematica“ polazeći od osnovnih pojmova prostora, vremena i mase.

Osnovni Njutnovi zakoni dinamike glase:

1. *Svako telo ostaje u stanju mira ili jednolikog pravolinijskog kretanja, dok pod dejstvom sile ne bude prinudeno da to svoje stanje promeni.*

2. Promena kretanja proporcionalna je sili koja deluje i zbiva se u pravcu sile.

3. Akciji odgovara uvek jednaka reakcija suprotnog smera ili dejstva dvaju tela jednog na drugo uvek su jednaka i suprotno usmerena.

Prvim zakonom se u mehaniku uvodi pojam *sile* i to kao uzroka promene u stanju kretanja tela, a takođe se promena stanja uvodi kao uslov za postojanje sile. Pod dejstvom sile telo prestaje da miruje ili da se kreće pravolinijski i jednoliko, što znači da dobiva ubrzanje, a promeni brzine suprotstavlja se *inercija* (lenjivost) tela. Stoga je ovaj prvi zakon poznat i pod imenom *zakona inercije*, a kretanje u odsustvu sile naziva se *kretanje po inerciji*.

Pod kretanjem u drugom zakonu podrazumeva se *količina kretanja* — proizvod mase m tela i njegove brzine v , tj. mv . Ovaj zakon određuje silu po pravcu, smeru i intenzitetu prema tome kakva je promena količine kretanja. Sem toga, komentarišući ovaj zakon Njutn je naveo da se sile sabiraju po pravilu paralelograma, čime je jasno sila definisana kao vektorska veličina. Taj zakon, nazvan *zakon o nezavisnosti dejstva sila* glasi:

Pri istovremenom dejstvu dveju sila telo opisuje dijagonalu paralelograma za isto ono vreme za koje opisuje pojedine stranice paralelograma pri dejstvu svake sile posebno.

U vektorskom obliku drugi Njutnov zakon glasi

$$(1) \quad \frac{d}{dt}(mv) = \mathbf{F},$$

gde je \mathbf{F} vektor sile i predstavlja rezultantu svih sila koje deluju na telo. Kad se pretpostavi da se masa ne menja za vreme kretanja, $m = \text{const.}$ i sem toga da je $m > 0$, kao što je i Njutn prećutno pretpostavio, drugi Njutnov zakon svodi se na oblik

$$(2) \quad m\mathbf{w} = \mathbf{F},$$

u kome predstavlja *osnovnu vektorsku jednačinu dinamike*.

Ovom relacijom je masa tela određena kao mera otpora tela prema promeni brzine (*inerciona masa*).

Treći Njutnov zakon ukazuje na *izvor sile*; izvor sile treba uvek tražiti u masama, dakle u materijalnom svetu.

Za teorijska ispitivanja i primenu matematičkih metoda stvarna tela su suviše složena i sama pojava opterećena mnogim sporednim uticajima. Radi toga se teži da se u svakoj pojavi uoče bitni elementi, pa se onda mesto konkretnog tela i konkretne pojave posmatra zamišljeno telo i pojava u kojoj su sadržani svi bitni elementi pojave koja se proučava — posmatra se tzv. *model* prirodne pojave.

Materijalna tačka predstavlja u dinamici jedan takav model. U svim onim slučajevima, kad pri kretanju jedna tačka može da se smatra kao zastupnik čitavog tela, ta geometrijska tačka kojoj se pripisuje celokupna masa tela uzima se kao materijalna tačka. To je npr. uvek slučaj kod translatornog kretanja tela. Osim toga u svim onim slučajevima, kad se uočava kretanje samo jedne tačke tela, tj. kad nas interesuje samo translacija tela, i ako mogu da postoje i kinematički elementi rotacije, govori se o materijalnoj tački. U tom smislu su planete materijalne tačke, ako se postavlja pitanje njihovog kretanja oko Sunca, a nisu materijalne tačke, kad se posmatra njihovo obrtanje oko osa. Pitanje prostorne veličine tela pri tome ne igra bitnu ulogu. Stoga pojmove *čestica* (partikula) i materijalna tačka ne treba smatrati identičnim. Tačno je samo to da se čestice u gornjem smislu lako mogu identifikovati sa materijalnim tačkama, ali ne uvek, jer se i kod elementarnih čestica ponekad mora voditi računa o obrtanju. U ovom smislu treba razumeti i formulaciju Njutnovih osnovnih zakona: telo — materijalna tačka.

2.2. Osnovne jedinice merenja. Mehanička sličnost

Relacija (2.1 — 2) omogućuje merenje mase. U klasičnoj mehanici masa je neprikosnovena osobina tela i ona se ne menja. Ako se ubrzanje i sila mogu meriti, masa je određena kao skalarni koeficijent proporcionalnosti kolinearnih vektora sile i ubrzanja. Jedinica mase je gram (g), a to je hiljaditi deo mase standardnog etalona koji se čuva u Sevru (Sèvres) kod Pariza.

Jedinica za merenje dužine *centimetar* (cm), jedinica za merenje vremena *sekunda* (sec) i jedinica mase — *gram* — obrazuju osnovni naučni sistem mernih jedinica. Taj sistem se naziva „centimetar-gram-sekunda-sistem“ ili CGS-sistem i u tom sistemu se mogu izraziti jedinice merenja svih ostalih mehaničkih veličina. U CGS-sistemu može *izvedena* jedinica neke mehaničke veličine da se izrazi uopšte u obliku

$$[Q] = \text{cm}^\alpha \text{g}^\beta \text{sec}^\gamma.$$

Ovaj izraz koji pokazuje kako se izvodi jedinica neke mehaničke veličine pomoću osnovnih jedinica zove se *dimenzija* uočene veličine pri čemu su α , β i γ *eksponenti dimenzija*. Tako je, npr., dimenzija jedinice za merenje brzine

$$[v] = \text{cm}^1 \text{g}^0 \text{sec}^{-1} = \text{cm sec}^{-1};$$

a dimenzija jedinice za merenje ubrzanja

$$[w] = \text{cm}^1 \text{g}^0 \text{sec}^{-2} = \text{cm sec}^{-2}.$$

Iz relacije (2.1 — 2) proističe da će dimenzija sile biti

$$[F] = \text{cm}^1 \text{g}^1 \text{sec}^{-2},$$

a jedinica za merenje sile je *din* (dyn), sila koja jedinici mase (gramu) saopštava ubrzanje od 1 cm u sekundi.

Mesto CGS-sistema mogu se uzeti ma koje druge jedinice pod uslovom da budu jednoznačno definisane i nezavisne među sobom. Dimenzije mehaničkih veličina su, međutim, nezavisne od izbora jedinica merenja i predstavljaju određene odnose među osnovnim veličinama — dužinom L , masom M i vremenom T . Stoga se dimenzije u opštem slučaju mogu obeležiti sa

$$[Q] = L^\alpha M^\beta T^\gamma,$$

i dimenzija sile će biti

$$[F] = LMT^{-2}.$$

Za merenje dužine, mase i vremena mogu se uzimati najpodesnije jedinice. Npr. koristi se *metar* (m) za dužinu, *kilogram* (kg) za masu, što zajedno sa sekundom obrazuje *osnovni praktični sistem mernih jedinica* (m-kg-sec) ili MKS-sistem. U takvom sistemu je npr. masa jednog grama određena simbolički sa

$$1 \text{ g} = \text{m}^0 \text{kg}^{-3} \text{sec}^0,$$

tj. osnovna jedinica za merenje mase u sistemu CGS-gram — sad je izvedena jedinica. Dimenzija sile od jednoga dina biće sad

$$1 \text{ dyn} = \text{m}^{-2} \text{kg}^{-3} \text{sec}^{-2}.$$

Jedinica sile u MKS-sistemu je *njutn* (newton, oznaka n), pri čemu je

$$1 \text{ njutn} = \text{m kg sec}^{-2} = 10^5 \text{ dyna}.$$

Zemlja privlači sva tela silom koja se naziva *teža* (*gravitaciona sila Zemlje*), koja je orijentisana ka centru Zemlje, pa svako telo, mase m , u polju Zemljine teže ima svoju *težinu* $P = mg$, pri čemu je g *ubrzanje Zemljine teže* (ubrzanje Zemljine

gravitacije). Ovde je masa određena kao mera uzajamnog dejstva (privlačenja-gravitacije) tela jednog na drugo (*gravitaciona masa*). Inerciona i gravitaciona masa tela jednake su. To ubrzanje zavisi od mesta na Zemljinoj površi i od visine iznad Zemlje, odnosno od udaljenosti od centra Zemlje. Za određivanje ubrzanja Zemljine teže na *ne* velikim visinama iznad Zemlje koristi se obrazac

$$g = (980,632 - 2,586 \cos 2\varphi + 0,003 \cos 4\varphi - 0,293 h) \text{ cm sec}^{-2},$$

gde je φ geografska širina mesta a h visina u *km* iznad morskog nivoa. Normirana vrednost g_n ubrzanja Zemljine teže iznosi

$$g_n = 980,665 \text{ cm sec}^{-2},$$

dok se u našim geografskim širinama a na površi Zemlje koristi vrednost

$$g = 981 \text{ cm sec}^{-2}.$$

Tehnička jedinica sile je *kilopond* (kp), što odgovara težini 1 dm³ čiste vode na +4°C, na geografskoj širini od 45° i nultnoj nadmorskoj visini.

Pri tome je

$$1 \text{ kp} = 9,80665 \text{ n},$$

pa težina jednog kilograma mase nije tačno jednaka jednom kilopondu, tj. jedan kilogram mase nije tačno jednak masi jednog kubnog decimetra čiste vode na +4°C. Međutim, *normalna težina* mase 1 kg jednaka je kilopondu, pri čemu se pod normalnom težinom tela razume težina tela pomnožena količnikom g_n/g normalnog ubrzanja i stvarnog ubrzanja Zemljine teže na određenom mestu.

U tehnici se često mesto mase kao osnovni pojam uvodi sila, pa se masa uvodi kao izvedeni pojam, koji se definiše. Tada se kao *osnovni tehnički sistem mernih jedinica* koristi metar-kilopond-sekunda (MKPS). U ovom sistemu će dimenzija mase biti određena izrazom $\text{m}^{-1} \text{kp}^1 \text{sec}^2$.

Važnu ulogu u dinamici igraju *analogije* i *sličnosti* među pojavama. Osnovu za analogije među pojavama čini *isti oblik* matematičkih izraza koji služi za opisivanje dve razne pojave i koji se inače odnose na razne veličine. Tako se rezultati postignuti pri proučavanju jedne određene pojave mogu iskoristiti pri proučavanju druge analogne pojave, često i kod pojava koje su fizički sasvim različite kao npr. mehaničke i električne itd.

Geometrijska sličnost je određena srazmernošću geometrijskih dimenzija uočenih objekata. *Koeficijent te proporcionalnosti* λ je *razmera sličnosti*.

Ako se radi o neke dve kinematičke pojave, posmatrane na dva razna mesta u odnosu na razne ili isti koordinatni sistem, tada su one *kinematički slične*, kada u svakom intervalu vremena (\bar{t}_0, \bar{t}) prve pojave i (t_0, t) druge pojave koji zadovoljavaju uslov

$$t - t_0 = \tau(\bar{t} - \bar{t}_0)$$

oba sistema, čije kretanje posmatramo, ostaju geometrijski slični. U odnosnim momentima biće onda koeficijent proporcionalnosti — razmera sličnosti brzina $\lambda\tau^{-1}$, a ubrzanje $\lambda\tau^{-2}$ itd.

Za *dinamičku sličnost* pojava se kaže da postoji, kad u prethodnom smislu postoji kinematička sličnost pojava i kad za mase m_i i \bar{m}_i odnosnih materijalnih tačaka ta dva sistema važi relacija

$$m_i = \mu \bar{m}_i,$$

gde je μ koeficijent proporcionalnosti masa — razmera sličnosti masa. U tom slučaju će koeficijent proporcionalnosti sila φ — razmera sličnosti sila biti određena obrascem $\varphi = \lambda\mu\tau^{-2}$ itd.

2.3. Diferencijalne jednačine kretanja materijalne tačke

Osnovna vektorska diferencijalna jednačina dinamike (2.1 — 2) je potpuno opšta i obuhvata sve slučajeve kretanja materijalne tačke koje proučava klasična mehanika. Sila \mathbf{F} može u opštem slučaju zavisiti od vektora položaja \mathbf{r} tačke, brzine \mathbf{v} i vremena t , tj.

$$(1) \quad \mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \quad \text{ili} \quad \mathbf{F} = \mathbf{F}(x, y, z; \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}; t).$$

Međutim, sila ne mora biti zavisna od svih tih veličina, već samo od neke od njih ili od kombinacija od po dve od njih. Npr. ona može zavisiti samo od vremena t , samo od položaja (tj. od vektora položaja \mathbf{r}), samo od brzine \mathbf{v} , ili samo od položaja i brzine itd.

Skalarne diferencijalne jednačine kretanja, dobivaju se projiciranjem vektorske jednačine (2.1 — 2) na tri nezavisna nekomplanarna pravca, tj. na ose nekog koordinatnog sistema.

a) U Dekartovim pravouglim koordinatama biće koordinate ubrzanja tačke (1.6 — 3)

$$(1) \quad \mathbf{w} = \{\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}\}.$$

Ako se koordinate sile u ovom koordinatnom sistemu označe sa

$$(2) \quad \mathbf{F} = \{X, Y, Z\}$$

skalarnim množenjem vektorske jednačine (2.1 — 2) jediničnim vektorima \mathbf{i} , \mathbf{j} i \mathbf{k} dobiće se tri skalarne diferencijalne jednačine kretanja

$$(3) \quad \begin{aligned} m\ddot{x} &= X, \\ m\ddot{y} &= Y, \\ m\ddot{z} &= Z. \end{aligned}$$

b) Projekcije ubrzanja tačke na ose generalisanih koordinata q^i određene su obrascima (1.6.2 — 3)

$$(4) \quad w_{(i)} = \mathbf{w} \cdot \mathbf{t}_i = \frac{1}{A_i} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial q^i} \right). \quad (i=1, 2, 3)$$

Ako se prema (1.4.1 — 2) stavi $A_i \cdot \mathbf{t}_i = \mathbf{g}_i = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^i}$, gde su \mathbf{g}_i osnovni vektori za sistem generalisanih koordinata q^i , pa se osnovna vektorska jednačina (2.1 — 2) pomnoži skalarno vektorom \mathbf{g}_i , dobiće se

$$(5) \quad m \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial q^i} \right) = \mathbf{F} \cdot \mathbf{g}_i.$$

Skalarni proizvodi

$$(6) \quad Q_i = \mathbf{F} \cdot \mathbf{g}_i = A_i \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{t}_i \quad (i=1, 2, 3)$$

određuju koordinate *generalisane sile*. Naziv „generalisane“ potiče otuda što dimenzije koordinata Q_i ne moraju biti LMT^{-2} , već zavise od prirode generalisanih koordinata q^i .

U dinamici se mesto kvadrata brzine $v^2 = 2\mathcal{B}$ (1.4 — 3) posmatra izraz

$$(7) \quad T = m\mathcal{B} = \frac{1}{2} mv^2.$$

S obzirom na (6) i (7) jednačine (5) se mogu napisati u obliku

$$(8) \quad \frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial T}{\partial q^i} = Q_i, \quad (i=1, 2, 3)$$

u kome se nazivaju *Lagranževe* (Lagrange) *jednačine* kretanja materijalne tačke.

Iz (8) se mogu izvesti diferencijalne jednačine kretanja tačke ma za koji sistem generalisanih koordinata.

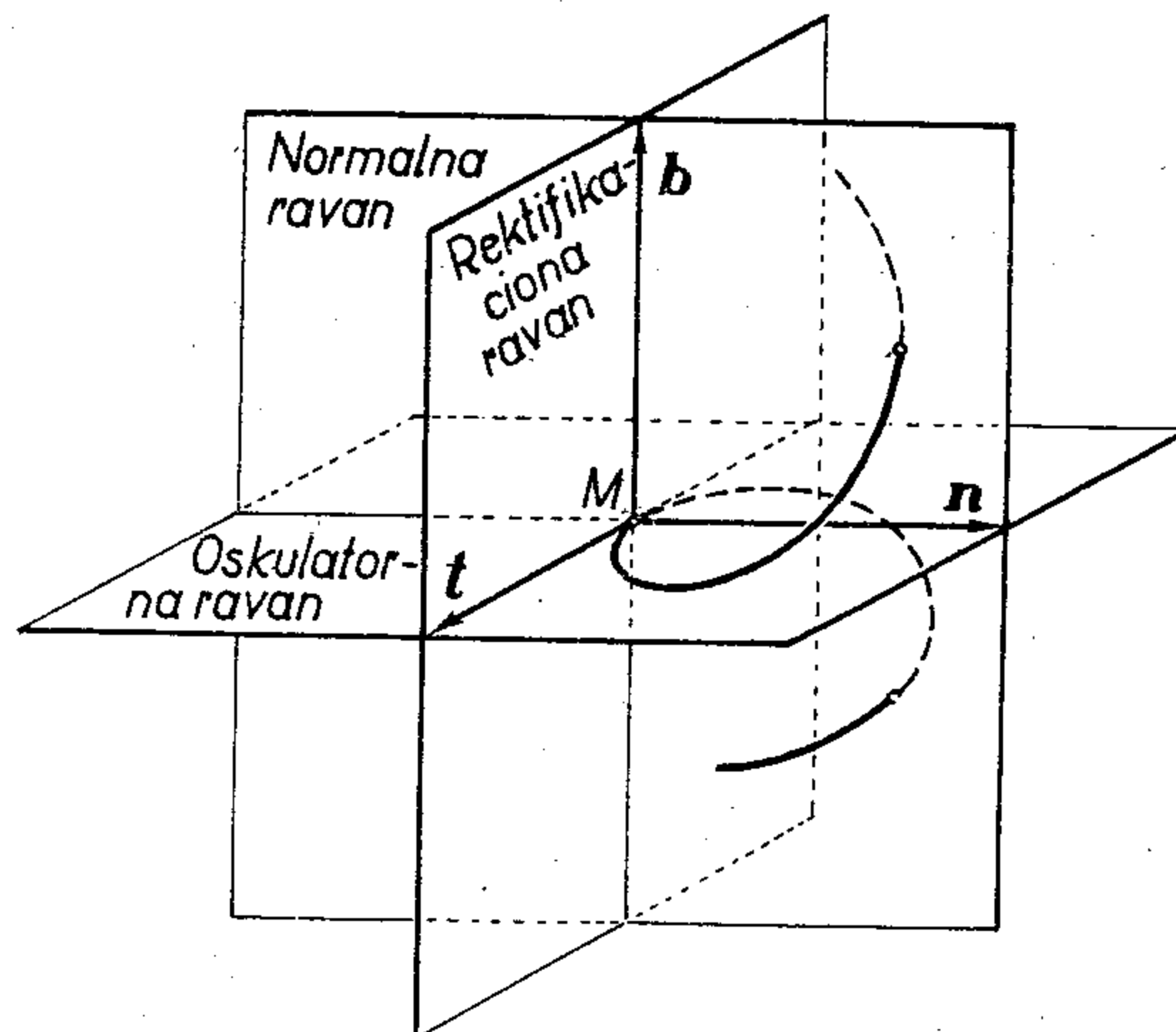
U cilindarskom koordinatnom sistemu biće prema (1.6.2 — 4 str.)

$$(9) \quad \begin{aligned} m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2) &= F_\rho; \\ m \frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\varphi}) &= F_\varphi; \\ m\ddot{z} &= F_z; \end{aligned}$$

a u sfernom

$$(10) \quad \begin{aligned} m(\ddot{r} - r\cos^2\varphi\dot{\vartheta}^2 - r\dot{\varphi}^2) &= F_r; \\ \frac{m}{r\cos\varphi} \frac{d}{dt}(r^2\cos^2\varphi\dot{\vartheta}^2) &= F_\vartheta; \\ m \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dt}(r^2\dot{\vartheta}) + r\sin\varphi\cos\varphi\dot{\vartheta}^2 \right] &= F_\varphi. \end{aligned}$$

c) *Prirodne jednačine* kretanja tačke dobivaju se projiciranjem osnovne vektorske jednačine na ose *prirodnog triedra*, koji određuju tangenta, glavna normala



Slika 59

i binormala krive linije. Jedinični vektori tangente **t**, glavne normale **n** i binormale **b** se orijentišu tako da grade desni triedar. Prema (1.6.1 — 2) ubrzanje ima projekcije samo u pravcu tangente i glavne normale i celokupno ubrzanje se nalazi u oskulatornoj ravni i stalno je upravno na binormalu.

Skalarnim množenjem osnovne vektorske jednačine (2.1 — 2) jediničnim vektorima \mathbf{t} , \mathbf{n} , \mathbf{b} dobivaju se tri skalarne prirodne jednačine kretanja (vidi 1.6.1 — 2)

$$(11) \quad \begin{aligned} m \frac{dv}{dt} &= F_t = \mathbf{F} \cdot \mathbf{t}; \\ m \frac{v^2}{R} &= F_n = \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}; \\ 0 &= F_b = \mathbf{F} \cdot \mathbf{b}. \end{aligned}$$

Navedeni razni oblici diferencijalnih jednačina kretanja materijalne tačke ekvivalentni su među sobom i izbor jednog ili drugog od njih zavisi od njihove podesnosti za rešavanje datog problema. Npr. ako je poznato da se materijalna tačka kreće po krugu poluprečnika R , tada se iz prirodnih jednačina odmah dobiva za silu (1.6.1 — 7)

$$(12) \quad \begin{aligned} F_t &= mR\varepsilon; \quad F_n = \frac{mv^2}{R} = mR\omega^2; \\ F &= mR\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}, \end{aligned}$$

gde je F orijentisano ka centru kruga i zove se *centripetalna sila*.

U slučaju ravanskog kretanja, pored mogućnosti da se ravan kretanja uzme za ravan xOy i čitav problem kretanja materijalne tačke svede na samo dve od jednačina (3), mogu se u ravni kretanja uvesti polarne koordinate pa se sila razlaže na radijalnu i transverzalnu komponentu. Tada će s obzirom na (1.6.3 — 2,3) biti

$$(13) \quad \begin{aligned} F_\rho &= m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\vartheta}^2) \\ F_\nu &= m(2\dot{\rho}\dot{\vartheta} + \rho\ddot{\vartheta}). \end{aligned}$$

2.3.1. Kovarijantne i kontravarijantne jednačine kretanja materijalne tačke

Koordinate ubrzanja $w_i = \mathbf{w} \cdot \mathbf{g}_i$ predstavljaju prema (1.6.2.1 — 7) kovarijantne koordinate ubrzanja te se prema tome jednačine

$$(1) \quad mw_i = \mathbf{F} \cdot \mathbf{g}_i = Q_i$$

nazivaju i *kovarijantne jednačine kretanja*, a generalisane koordinate Q_i sile su *kovarijantne koordinate sile*. Prema definiciji osnovnih vektora \mathbf{g}_i biće kovarijantne koordinate sile vezane za koordinate sile u Dekartovim pravouglim koordinatama obrascima

$$(2) \quad Q_i = \mathbf{F} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^i} = X \frac{\partial x}{\partial q^i} + Y \frac{\partial y}{\partial q^i} + Z \frac{\partial z}{\partial q^i}$$

Ako se stavi $X \equiv X_1$, $Y \equiv X_2$, $Z \equiv X_3$ i $x \equiv x^1$, $y \equiv x^2$, $z \equiv x^3$, obrazac (2) se može napisati još i u obliku (koristi se konvencija za sabiranje)

$$(3) \quad Q_i = X_l \frac{\partial x^l}{\partial q^i}$$

Upoređenjem relacije (1) sa Lagranževim jednačinama (2.3 — 8) vidi se da su Lagranževe jednačine kretanja upravo kovarijantne jednačine.

Koristeći izraz (1.6.2.5 — 15) za apsolutni izvod kovarijantnog vektora po vremenu, Lagranževe jednačine se mogu napisati i u obliku koji važi ma za kakav sistem generalisanih koordinata, a koji je uopštenje drugog Njutnovog osnovnog zakona

$$(4) \quad \frac{D}{Dt}(mv_i) = Q_i$$

ili u razvijenom obliku

$$(5) \quad m \left(\frac{dv_i}{dt} - \left\{ \begin{matrix} l \\ k i \end{matrix} \right\} v_l v^k \right) = Q_i, \quad (v^k \equiv \dot{q}^k).$$

Prema definiciji (1.6.2.1 — 9) Kristofelovih simbola druge vrste i osobini metričkog tenzora da diže i spušta indekse (1.4.1.1 — 3, 4, 5) mogu se Lagranževe jednačine napisati u obliku

$$(6) \quad m \left[\frac{d}{dt} (g_{ij} v^j) - [ki, l] \dot{q}^k \dot{q}^l \right] = Q_i.$$

Pored kovarijantnih diferencijalnih jednačina kretanja mogu se napisati i odnosne kontravarijantne jednačine, koje se dobivaju iz osnovne vektorske jednačine kretanja skalarnim množenjem kontravarijantnim osnovnim vektorom \mathbf{g}^l , definisanim u (1.6.2.1),

$$\mathbf{g}^l = g^{il} \mathbf{g}_i.$$

Prema (1.6.2.1 — 10) je $\mathbf{w} \cdot \mathbf{g}^l = w^l$. Ako se sad stavi

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{g}^l = Q^l$$

biće

$$(7) \quad Q^l = g^{il} \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{F} = g^{il} Q_i.$$

Veličine Q^l predstavljaju *kontravarijantne koordinate sile*, a obrazac (7) određuje vezu između dve vrste koordinata sile (i ovde metrički tenzor „diže“ i „spušta“ indekse). Slično tome, ako se (7) pomnoži sa g_{lj} i izvrši sabiranje po indeksu l , prema (1.2.1 — 14) dobiće se

$$(8) \quad Q^l g_{jl} = Q_j,$$

jer je

$$Q^l g_{lj} = g^{ll} g_{lj} Q_i = \delta_j^i Q_i.$$

Skalarnim množenjem osnovne vektorske jednačine (1.2 — 2) kontravarijantnim osnovnim vektorom \mathbf{g}^l dobiva se sada

$$mw^l = Q^l$$

odnosno, prema (1.6.2.1 — 10)

$$(9) \quad m \left(\frac{d\dot{q}^l}{dt} + \left\{ \begin{matrix} l \\ j k \end{matrix} \right\} \dot{q}^j \dot{q}^k \right) = Q^l.$$

I u kontravarijantnom obliku jednačine kretanja zadržavaju smisao drugog Njutnovog osnovnog zakona, jer se prema (1.6.2.1 — 15) jednačine (9) mogu napisati pomoću apsolutnog izvoda u obliku

$$(10) \quad \frac{D}{Dt}(mv^l) = Q^l.$$

Da su Lagranževe jednačine (2.3 — 8) zaista kovarijantne može se proveriti neposredno računom. Kako je za generalisane koordinate

$$2T = 2m \mathcal{B} = mg_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j,$$

i kako metrički tenzor zavisi eksplicitno samo od generalisanih koordinata (vidi 1.2.1 — 6), parcijalnim diferencijaljenjem se dobiva

$$(11) \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} = mg_{ij} \dot{q}^j,$$

$$(12) \quad \frac{\partial T}{\partial q^i} = \frac{1}{2} m \frac{\partial g_{kl}}{\partial q^i} \dot{q}^k \dot{q}^l.$$

Obrazac (12) neće promeniti vrednost ako mu istovremeno dodamo

$$\frac{\partial g_{ki}}{\partial q^l} \dot{q}^k \dot{q}^l$$

i oduzmemo

$$\frac{\partial g_{li}}{\partial q^k} \dot{q}^k \dot{q}^l,$$

jer se sabiranje vrši po indeksima k i l tako da je vrednost ova dva zbira jednaka, tj.

$$\frac{\partial g_{ki}}{\partial q^l} \dot{q}^k \dot{q}^l = \frac{\partial g_{li}}{\partial q^k} \dot{q}^k \dot{q}^l.$$

Stoga se za (12) može napisati

$$\frac{\partial T}{\partial q^i} = \frac{m}{2} \left(\frac{\partial g_{kl}}{\partial q^i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial q^l} - \frac{\partial g_{li}}{\partial q^k} \right) \dot{q}^k \dot{q}^l.$$

Medutim je, prema (1.6.2.1 — 5),

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{kl}}{\partial q^i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial q^l} - \frac{\partial g_{li}}{\partial q^k} \right) = [li, k],$$

tako da je

$$\frac{\partial T}{\partial q^i} = m [li, k] \dot{q}^k \dot{q}^l$$

i Lagranževe jednačine kretanja se mogu definitivno izraziti u obliku

$$m \left\{ \frac{d}{dt} (g_{ij} \dot{q}^j) - [li, k] \dot{q}^k \dot{q}^l \right\} = Q_i.$$

2.4. Osnovni problemi dinamike materijalne tačke

Polazeći od osnovne vektorske jednačine dinamike (2.1 — 2) materijalne tačke mogu se postaviti dva osnovna problema:

a) *Određivanje sile* kada je data konačna jednačina kretanja u vektorskom obliku, ili konačne jednačine kretanja u nekom od skalarnih oblika. Zadaci ove

vrste predstavljaju tzv. *direktne zadatke* i rešavaju se diferencijaljenjem po vremenu konačnih jednačina kretanja dva puta. Na taj način se dobiva vektor ubrzanja ili njegove projekcije na koordinatne ose, odakle je lako naći traženu silu.

P r i m e r:

Naći silu pri čijem se dejstvu neka materijalna tačka kreće pravom linijom po zakonu

$$(1) \quad x = x_0 \cos t + v_0 \sin t + ct^2.$$

Za nalaženje sile potrebno je odrediti ubrzanje i eliminisati konstante x_0 i v_0 koje su određene početnim uslovima, jer te konstante nisu karakteristične za silu već samo za određeno kretanje.

Diferencijaljenjem relacije (1) dva puta po vremenu dobiva se

$$\ddot{x} = -x_0 \cos t - v_0 \sin t + 2c,$$

tako da je, prema (2.1-2)

$$X = m\ddot{x} = -m(x_0 \cos t + v_0 \sin t) + 2mc.$$

Iz (1) se dobiva

$$x_0 \cos t + v_0 \sin t = x - ct^2,$$

pa je sila

$$X = m[c(t^2 + 2) - x].$$

V e ž b e

1. Pokazati da, ako se neka materijalna tačka mase m kreće pravolinijski duž x -ose po zakonu

$$x = a \cos t + b \sin t$$

(a i b su konstante), na nju dejstvuje sila

$$X = -mx.$$

2. Ako je konačna jednačina kretanja neke materijalne tačke, koja se kreće duž x -ose,

$$x^2 = -\frac{\mu}{x_0^2} t^2 + (x_0 + v_0 t)^2,$$

pokazati da na nju dejstvuje sila $X = -m\mu/x^3$.

b) Određivanje kretanja tačke kad je data sila. Pod određivanjem kretanja podrazumeva se nalaženje konačnih jednačina kretanja. Ovakvi zadaci su u načelu teži, jer se njihovo rešavanje svodi na integraciju vektorske diferencijalne jednačine drugog reda

$$(2) \quad m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t),$$

ili sistem skalarnih diferencijalnih jednačina drugog reda, npr. u Dekartovim pravouglim koordinatama

$$(3) \quad \begin{aligned} m\ddot{x} &= X(x, y, z; \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}; t); \\ m\ddot{y} &= Y(x, y, z; \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}; t); \\ m\ddot{z} &= Z(x, y, z; \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}; t). \end{aligned}$$

Opšte rešenje jednačine (2) daće vektor položaja \mathbf{r} kao funkciju vremena i dve integracione konstante koje su vektori, recimo \mathbf{A} i \mathbf{B} , tj.

$$(4) \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}(t, \mathbf{A}, \mathbf{B}).$$

Opšte rešenje sistema (3) daće Dekartove pravougule koordinate x , y , i z kao funkcije vremena i šest integracionih konstanti C_1, C_2, \dots, C_6 u obliku

$$(5) \quad \begin{aligned} x &= x(t; C_1, C_2, \dots, C_6), \\ y &= y(t; C_1, C_2, \dots, C_6), \\ z &= z(t; C_1, C_2, \dots, C_6). \end{aligned}$$

Prema tome, diferencijalne jednačine kretanja određuju sva moguća kretanja pod dejstvom uočene sile. Variranjem konstanta integracije dobiće se sve moguće trajektorije kao višeparametarska porodica krivih linija. Ovaj *inverzni zadatak* dinamike materijalne tačke, dakle, nije potpuno određen. Za potpuno određivanje zadatka potrebni su uslovi iz kojih se mogu odrediti konstante integracije. Takve uslove predstavljaju *početni uslovi* kretanja, tj. položaj \mathbf{r}_0 i brzina \mathbf{v}_0 tačke u nekom određenom trenutku t_0 koji se naziva *početni trenutak*. Za početni trenutak uzima se uvek takav trenutak za koji su položaj i brzina tačke poznati.

Ako su poznate skalarne koordinate početnog položaja i početne brzine, npr. u odnosu na Dekartov pravougli sistem osa, tj.,

$$(5a) \quad \mathbf{r}_0 = \{x_0, y_0, z_0\}; \quad \mathbf{v}_0 = \{\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0\},$$

tada se neodređene konstante C_1, C_2, \dots, C_6 u prethodnom dinamičkom problemu određuju na ovaj način.

Zamenom datih početnih uslova u jednačine (5) dobivaju se tri skalarne jednačine

$$(6) \quad \begin{aligned} x_0 &= x(t_0; C_1, \dots, C_6); \\ y_0 &= y(t_0; C_1, \dots, C_6); \\ z_0 &= z(t_0; C_1, \dots, C_6). \end{aligned}$$

Diferencijacijom jednačina (5) po vremenu i unošenjem u njih početnih uslova dobivaju se još tri skalarne jednačine

$$(7) \quad \begin{aligned} \dot{x}_0 &= \dot{x}(t_0; C_1, \dots, C_6); \\ \dot{y}_0 &= \dot{y}(t_0; C_1, \dots, C_6); \\ \dot{z}_0 &= \dot{z}(t_0; C_1, \dots, C_6). \end{aligned}$$

Jednačina (6) i (7) ima ukupno (6), dakle tačno onoliko koliko ima i neodređenih konstanta integracije, pa se za neko određeno kretanje te konstante mogu odrediti, a time u potpunosti i putanja tačke, što onda predstavlja *partikularni integral* diferencijalne jednačine kretanja, za razliku od *opšteg integrala* (5) sa neodređenim konstantama.

Ako se pri rešavanju vektorske diferencijalne jednačine (2), ili skalarnih diferencijalnih jednačina (3) nađu integrali koji će određivati brzinu kao funkciju položaja, vremena i svega tri integracione konstante,

$$(8) \quad \dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}}(\mathbf{r}, t, C_1, C_2, C_3),$$

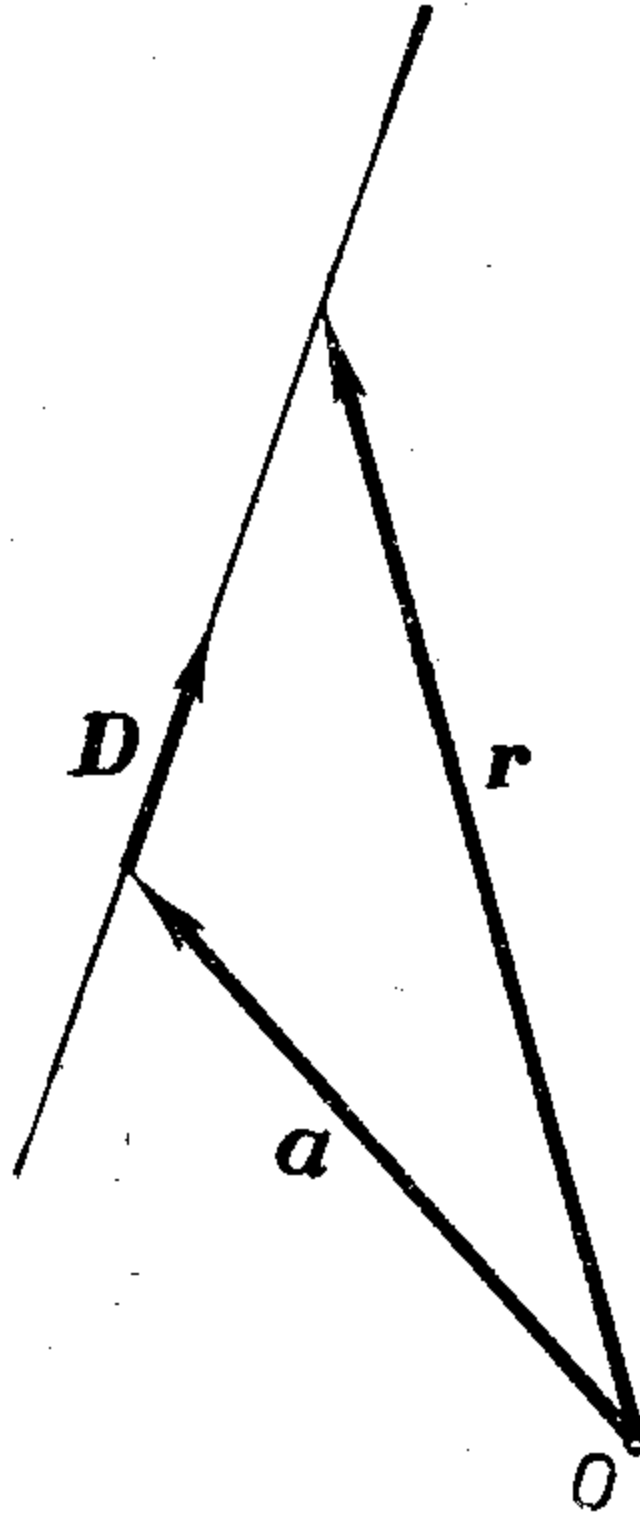
odnosno

$$(9) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= \dot{x}(x, y, z; t; C_1, C_2, C_3); \\ \dot{y} &= \dot{y}(x, y, z; t; C_1, C_2, C_3); \\ \dot{z} &= \dot{z}(x, y, z; t; C_1, C_2, C_3), \end{aligned}$$

oni se nazivaju *prvi integrali* diferencijalne jednačine kretanja, odn. diferencijalnih jednačina kretanja.

2.5. Pravolinijsko kretanje materijalne tačke

Kad se neka materijalna tačka prilikom kretanja stalno nalazi na istoj pravoj liniji, kaže se da je njeno kretanje *pravolinijsko*. Ako je \mathbf{a} vektor položaja neke tačke na pravoj po kojoj se uočena materijalna tačka kreće, a \mathbf{D} jedinični vektor kolinearan sa tom pravom – trajektorijom, vektor položaja \mathbf{r} tačke m biće određen vektorskom jednačinom (sl. 60)



Slika 60

$$(1) \quad \mathbf{r} - \mathbf{a} = f(t) \mathbf{D},$$

gde je $f(t)$ neki parametar koji zavisi od vremena. Vektori \mathbf{a} i \mathbf{D} su konstantni. Diferenciranjem po vremenu jednačine (1) dobiće se

$$(2) \quad \dot{\mathbf{r}} = \dot{f}(t) \mathbf{D}$$

tako da je sila pri kojoj se tačka kreće

$$(3) \quad \mathbf{F} = m \mu \mathbf{D}. \quad (\mu \equiv \dot{f}(t)).$$

Iz prve relacije (2) može se zaključiti da je brzina pri pravolinijskom kretanju stalnog pravca, a iz (3) i da je sila stalnog pravca. Međutim, za početnu brzinu se iz (2) može zaključiti da je i ona istog pravca,

$$\dot{\mathbf{r}}_0 = \dot{f}(t_0) \mathbf{D}.$$

Otuda proističe: *Neka materijalna tačka će se kretati pravolinijski, ako sila \mathbf{F} u toku kretanja ima stalan pravac i to onaj koji ima početna brzina tačke. Ako je početna brzina nula, a sila ima stalan pravac, kretanje je takođe pravolinijsko.*

Ako se pri pravolinijskom kretanju materijalne tačke uzme Dekartov pravougli koordinatni sistem čija se x -osa poklapa sa trajektorijom tačke, stalni pravac \mathbf{D} u relacijama (1), (2) i (3) će biti jedinični vektor \mathbf{i} ose x , pa će postojati samo jedna skalarna jednačina kretanja

$$(4) \quad m\ddot{x} = X.$$

Koordinata X sile je u opštem slučaju funkcija položaja tačke na pravoj, brzine tačke i vremena

$$(5) \quad X = X(x, \dot{x}, t).$$

Pošto je trajektorija poznata, integracijom jednačine (4) dobiće se konačna jednačina kretanja u obliku

$$(6) \quad x = x(t; C_1, C_2)$$

koja sadrži svega dve integracione konstante C_1 i C_2 . Ove dve konstante se određuju iz početnih uslova, tj. iz podataka da se u nekom trenutku t_0 tačka nalazila u položaju x_0 i imala brzinu \dot{x}_0 .

2.5.1. Pravolinijsko kretanje materijalne tačke pod dejstvom sile koja zavisi samo od vremena ili je konstantna

Ako je masa uočene materijalne tačke jednaka m , a sila zavisi samo od vremena, pa se može napisati $X = mf(t)$, diferencijalna jednačina kretanja je oblika

$$(1) \quad \ddot{x} = f(t),$$

tako da se problem integracije svodi na kvadrature. Prvi integral problema biće

$$(2) \quad \dot{x} = \int f(t) dt + C_1,$$

što, kad se stavi

$$(3) \quad \int f(t) dt = \varphi(t),$$

daje

$$(4) \quad \dot{x} = \varphi(t) + C_1,$$

pa se još jednom kvadraturom dobiva

$$(5) \quad x = \int \varphi(t) dt + C_1 t + C_2.$$

Konstante C_1 i C_2 određuju se iz početnih uslova. Ako je u trenutku t_0 tačka na mestu $x_0 \neq 0$ i ima brzinu $\dot{x}_0 \neq 0$, zamenom u (4) dobiva se

$$\dot{x}_0 = \varphi(t_0) + C_1$$

odakle je $C_1 = \dot{x}_0 - \varphi(t_0)$. Unošenjem ove vrednosti za C_1 u (4) dobiva se

$$\dot{x} = \dot{x}_0 + \varphi(t) - \varphi(t_0).$$

Iz (3) se, međutim, vidi da je razlika $\varphi(t) - \varphi(t_0)$ upravo vrednost određenog integrala

$$\varphi(t) - \varphi(t_0) = \int_{t_0}^t f(t) dt,$$

jer je $\varphi(t)$ primitivna funkcija funkcije $f(t)$. Prema tome, prvi integral (2) može se napisati u obliku

$$(6) \quad \dot{x} = \dot{x}_0 + \int_{t_0}^t f(t) dt.$$

Kvadraturom se iz ovog integrala dobiva

$$(7) \quad x = \dot{x}_0 t + \int \left[\int_{t_0}^t f(t) dt \right] dt + C_2,$$

a zamenom početnih uslova

$$x_0 = \dot{x}_0 t_0 + \left\{ \int \left[\int_{t_0}^t f(t) dt \right] dt \right\}_{t=t_0} + C_2,$$

tako da je

$$C_2 = x_0 - \dot{x}_0 t_0 - \left\{ \int \left[\int_{t_0}^t f(t) dt \right] dt \right\}_{t=t_0}.$$

Konačna jednačina kretanja (7) dobiva najzad oblik

$$(8) \quad x = x_0 + \dot{x}_0(t - t_0) + \int_{t_0}^t \left[\int_{t_0}^t f(t) dt \right] dt.$$

Prema tome, mesto izračunavanja vrednosti integracionih konstanata mogu se neposredno u kvadraturama uvoditi početni uslovi kao granice integracije, što je u suštini ekvivalentno. Iz jednačine kretanja (1) prvi integral bi se mogao neposredno pisati

$$\int_{x_0}^{\dot{x}} d\dot{x} = \dot{x} - \dot{x}_0 = \int_{t_0}^t f(t) dt,$$

pa je konačna jednačina

$$\int_{x_0}^x dx = x - x_0 = \int_{t_0}^t \dot{x}_0 dt + \int_{t_0}^t [f(t) dt] dt.$$

Posebno je važno kretanje kad sila ima konstantnu vrednost, jer je to slučaj *slobodnog pada* i *vertikalnog hica*, pravolinijskog kretanja u polju sile Zemljine teže, kad se zanemari otpor vazduha. Ako se x -osa usmeri ka središtu Zemlje (vertikalno naniže), sila teže, težina tela mase m , je u posmatranim razmerama konstantna, i ima koordinate

$$(9) \quad X = mg, \quad Y = 0, \quad Z = 0.$$

Diferencijalna jednačina kretanja se svodi na

$$(10) \quad \ddot{x} = g.$$

Ako su početni uslovi t_0 , x_0 i \dot{x}_0 , prvi integral kretanja se dobiva neposredno integracijom

$$(11) \quad \dot{x} = \dot{x}_0 + gt,$$

tako da je konačna jednačina kretanja

$$(12) \quad x = x_0 + \dot{x}_0(t - t_0) + \frac{1}{2} g (t^2 - t_0^2).$$

Prema vrednosti početne brzine razlikuju se tri slučaja:

- a) *slobodni pad*, kad je $\dot{x}_0 = 0$,
- b) *vertikalni hitac naviše*, kad je početna brzina usmerena vertikalno naviše, $\dot{x}_0 < 0$; i
- c) *vertikalni hitac naniže*, kad je početna brzina usmerena vertikalno naniže $\dot{x}_0 > 0$.

Ako se sa v_0 obeleži apsolutna vrednost početne brzine i za t_0 uzme trenutak $t = 0$, hicu naniže odgovara $+v_0$, a hicu naviše $-v_0$, pa se za brzinu pri vertikalnom hicu lako dobiva iz (11)

$$(13) \quad \dot{x} = \pm v_0 + gt,$$

tako da konačna jednačina kretanja glasi

$$(14) \quad x = x_0 \pm v_0 t + \frac{1}{2} gt^2.$$

Pri slobodnom padu (kada je kretanje teške tačke bez početne brzine) biće

$$(15) \quad \dot{x} = gt, \quad x = x_0 + \frac{1}{2}gt^2.$$

Ako se još uzme $x_0 = 0$, tj. koordinatni početak postavi u početni položaj tačke, dobiće se za vertikalni hitac

$$x = \pm v_0 t + \frac{1}{2}gt^2,$$

a za slobodni pad

$$x = \frac{1}{2}gt^2.$$

2.5.2. Pravolinijsko kretanje pod dejstvom sile koja zavisi samo od rastojanja

U slučaju kad sila zavisi samo od rastojanja, odnosno od položaja tačke na pravoj (to je tzv. *položajna* ili *poziciona* sila), tj. kad je $X = mf(x)$, diferencijalna jednačina kretanja

$$(1) \quad \ddot{x} = f(x)$$

može se rešiti pomoću dve uzastopne kvadrature kao i u slučaju sila koje zavise samo od vremena.

Prvi integral jednačine (1) može da se izračuna ako levu i desnu stranu pomnožimo sa $2 \dot{x} dt = 2 dx$, jer je tada

$$2 \dot{x} \ddot{x} dt = \frac{d}{dt} (\dot{x}^2) dt = d\dot{x}^2,$$

pa se diferencijalna jednačina (1) može napisati u obliku

$$(2) \quad d\dot{x}^2 = 2f(x) dx.$$

Ako su početni uslovi t_0 , x_0 i \dot{x}_0 , iz (2) će se dobiti

$$\int_{x_0}^x d\dot{x}^2 = \dot{x}^2 - \dot{x}_0^2 = 2 \int_{x_0}^x f(x) dx,$$

pa je

$$(3) \quad \dot{x}^2 = \dot{x}_0^2 + 2 \int_{x_0}^x f(x) dx.$$

Ako se stavi

$$\Phi(x) = \dot{x}_0^2 + 2 \int_{x_0}^x f(x) dx,$$

onda se diferencijalna jednačina (3) može rešiti razdvajanjem promenljivih

$$(4) \quad \frac{dx}{\pm \sqrt{\Phi(x)}} = dt.$$

Ovde se znak određuje iz prirode zadatka, prema tome da li je brzina usmerena u pozitivnom smeru x -ose ili u suprotnom.

Druga kvadratura daje vreme kao funkciju položaja i početnih uslova

$$(5) \quad t - t_0 = \int_{x_0}^x \frac{dx}{\pm \sqrt{\Phi(x)}} = \varphi(x, x_0, \dot{x}_0).$$

Konačna jednačina kretanja (koja za pravolinijsko kretanje duž x -ose predstavlja istovremeno i zakon kretanja) dobiva se iz (5) inverzijom

$$(6) \quad x = x(t - t_0, x_0, \dot{x}_0),$$

pri čemu u relaciji (5) gornja granica integrala predstavlja nezavisno promenljivu veličinu, tj. funkcija φ je funkcija gornje granice integrala.

Među silama koje zavise samo od rastojanja važnu ulogu igraju sile proporcionalne rastojanju.

2.5.2.1. Pravolinijsko kretanje pod dejstvom sile proporcionalne rastojanju

Kad na neku materijalnu tačku koja se pravolinijski kreće dejstvuje sila proporcionalna rastojanju

$$(1) \quad X = mKx,$$

gde je K neka realna konstanta različita od nule, diferencijalna jednačina kretanja je

$$(2) \quad \ddot{x} - Kx = 0.$$

Iz matematike je poznato da se ovakva (homogena linearna) diferencijalna jednačina može zadovoljiti, ako se stavi

$$(3) \quad x = e^{\lambda t}.$$

Međutim, unošenjem ove vrednosti za x u (2) dobiće se

$$(4) \quad e^{\lambda t} (\lambda^2 - K) = 0,$$

a kako je $e^{\lambda t} \neq 0$, to postoje dve vrednosti eksponenta λ za koje će diferencijalna jednačina (2) biti zadovoljena, i to

$$(5) \quad \lambda_1 = +\sqrt{K}, \quad \lambda_2 = -\sqrt{K}.$$

Prema tome da li je $K < 0$ ili $K > 0$ može se staviti $K = -k^2$ ili $K = k^2$, gde je k neka realna konstanta, pa je za $K < 0$

$$(6) \quad \lambda_1 = ik, \quad \lambda_2 = -ik, \quad (i = \sqrt{-1}),$$

a za $K > 0$

$$(7) \quad \lambda_1 = k, \quad \lambda_2 = -k.$$

Opšti integral jednačine (2) biće

$$(8) \quad x = A_1 e^{\sqrt{K}t} + A_2 e^{-\sqrt{K}t}$$

Ako je $K < 0$ ovaj se integral svodi na

$$(9) \quad x = A_1 e^{ikt} + A_2 e^{-ikt},$$

a ako je $K > 0$ biće

$$(10) \quad x = A_1 e^{kt} + A_2 e^{-kt}.$$

Za početne uslove $t_0 = 0$, $x_0 \neq 0$, $\dot{x}_0 \neq 0$ dobivaju se iz (8) dve jednačine za određivanje integracionih konstanti A_1 i A_2 ,

$$(11) \quad \begin{aligned} x_0 &= A_1 + A_2, \\ \dot{x}_0 &= \sqrt{K}(A_1 - A_2), \end{aligned}$$

tako da je

$$(12) \quad A_1 = \frac{1}{2} \left(x_0 + \frac{\dot{x}_0}{\sqrt{K}} \right), \quad A_2 = \frac{1}{2} \left(x_0 - \frac{\dot{x}_0}{\sqrt{K}} \right).$$

Za $K = -k^2 < 0$ integral (9) može da se napiše u obliku trigonometrijske funkcije, jer je

$$\begin{aligned} e^{ikt} &= \cos kt + i \sin kt, \\ e^{-ikt} &= \cos kt - i \sin kt, \end{aligned}$$

tako da se (9) svodi na

$$(13) \quad x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt,$$

gde je

$$C_1 = A_1 + A_2, \quad C_2 = i(A_1 - A_2).$$

Slično tome, za $K = k^2 > 0$, zbog

$$\begin{aligned} e^{kt} &= \operatorname{ch} kt + \operatorname{sh} kt, \\ e^{-kt} &= \operatorname{ch} kt - \operatorname{sh} kt, \end{aligned}$$

integral (10) može se izraziti pomoću hiperboličnih funkcija,

$$(14) \quad x = D_1 \operatorname{ch} kt + D_2 \operatorname{sh} kt,$$

gde je

$$D_1 = A_1 + A_2, \quad D_2 = A_1 - A_2.$$

S obzirom na vrednosti konstanta A_1 i A_2 određenih obrascima (12) lako se nalazi

$$(15) \quad C_1 = D_1 = x_0, \quad C_2 = D_2 = \frac{\dot{x}_0}{k},$$

tako da za $K = -k^2$ imamo rešenje

$$(16) \quad x = x_0 \cos kt + \frac{\dot{x}_0}{k} \sin kt,$$

a za $K = k^2$

$$(17) \quad x = x_0 \operatorname{ch} kt + \frac{\dot{x}_0}{k} \operatorname{sh} kt.$$

Integral (16) može da se izrazi i u obliku

$$(18) \quad x = A \sin(kt + \alpha),$$

gde je $C_1 = A \sin \alpha$, $C_2 = A \cos \alpha$, tako da je

$$(19) \quad A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} = \frac{1}{k} \sqrt{k^2 x_0^2 + \dot{x}_0^2},$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{C_1}{C_2} = \frac{kx}{\dot{x}_0}.$$

Sila $X = -mk^2x$ uvek deluje prema tački $x = 0$ u kojoj se nalazi centar sile, tako da je to *privlačna sila* proporcionalna rastojanju i naziva se još *elastična sila*. Ovaj naziv potiče otuda što je upravo takvog karaktera sila kojom elastična opruga učvršćena na jednom kraju deluje prilikom izduženja na neku materijalnu tačku pričvršćenu na drugom kraju. Ako je jedan kraj neke opruge učvršćen, a drugi kraj nerastegnute opruge se uzme za tačku $x = 0$, pri izduženju x opruga deluje na tačku m silom $X = -k^2x$. Veličina mk^2 naziva se *krutost* opruge i predstavlja silu koja izaziva izduženje opruge za jedinicu dužine. Krutost opruge je konstanta koja zavisi od osobina same opruge i ima dimenziju sila/dužina, tj. MT^{-2} .

Konačna jednačina kretanja (18) materijalne tačke na koju deluje elastična sila određuje, prema odeljku (1.3.1), harmonijsku oscilaciju amplitude A , početne faze α i perioda $T = 2\pi/k$ (odnosno učestanosti $\omega = \frac{k}{2\pi}$). Tačka $x = 0$ u kojoj se m nalazi u trenutku $\tau = -\frac{\alpha}{k} + \frac{\pi n}{k}$, $n = 1, 2, 3, \dots$ naziva se *centar oscilacija*.

Diferencijalna jednačina kretanja (2) u ovome slučaju oblika

$$(20) \quad \ddot{x} + k^2x = 0$$

je diferencijalna jednačina harmonijskih oscilacija.

Sila $X = mk^2x$ je uvek usmerena od tačke $x = 0$ i naziva se *odbojna sila*.

Opštiji slučaj od sile proporcionalne rastojanju jeste kad je sila linearna funkcija rastojanja

$$(21) \quad X = mKx + C,$$

gde je $C = mQ$ neka realna konstanta. Partikularni integral diferencijalne jednačine kretanja

$$(22) \quad x - Kx = Q,$$

je

$$(23) \quad x = -\frac{Q}{K},$$

pa je opšte rešenje

$$x = A_1 e^{\sqrt{K}t} + A_2 e^{-\sqrt{K}t} - \frac{Q}{K}$$

Međutim, uvek je moguće tako izabrati koordinatni sistem da se rešenje svede na oblik (8). Ako se uvede smena (translacija u pravcu x -ose)

$$(25) \quad \bar{x} = x + \frac{Q}{K},$$

gde je \bar{x} nova x -osa, biće

$$\ddot{\bar{x}} = \ddot{x}$$

i diferencijalna jednačina kretanja postaje

$$(26) \quad \ddot{\bar{x}} - K\bar{x} = 0.$$

Time je, ali u odnosu na novu koordinatu \bar{x} , diferencijalna jednačina kretanja dobivena u obliku koji je imala u prethodnom slučaju kada je bilo $Q = 0$. U slučaju elastične sile ($K = -k^2$), integral jednačine (26) će biti

$$(27) \quad \bar{x} = \bar{A} \sin(kt + \bar{\alpha}),$$

ili u odnosu na stare koordinate,

$$(28) \quad x = \bar{A} \sin(kt + \bar{\alpha}) + \frac{Q}{k^2}.$$

Prema tome, kretanje je i posle dodavanja ma koje konstantne sile elastičnoj sili ostalo oscilatorno sa istim periodom, ali su se promenili amplituda i početna faza. Ako se jednačina (28) napiše u obliku

$$(29)$$

$$x = \bar{C}_1 \cos kt + \bar{C}_2 \sin kt + \frac{Q}{k^2},$$

za početne uslove, $t_0, x_0 \neq 0$, $\dot{x}_0 \neq 0$, biće

$$x_0 = \bar{C}_1 - \frac{Q}{k^2}, \quad \dot{x}_0 = \bar{C}_2 k,$$

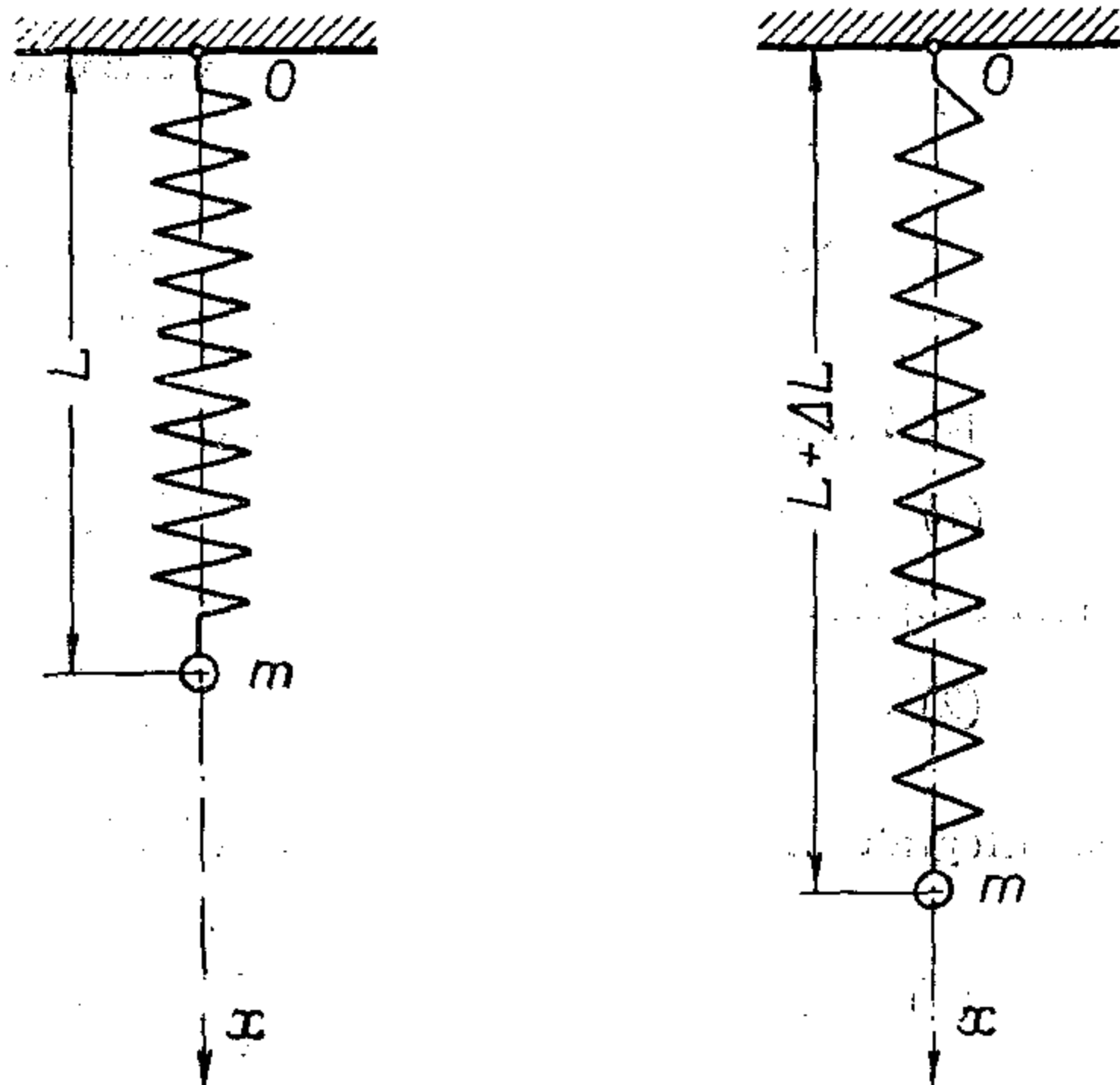
tako da je odgovarajući partikularni integral

$$(30) \quad x = \left(x_0 - \frac{Q}{k^2}\right) \cos kt + \frac{\dot{x}_0}{k} \sin kt + \frac{Q}{k^2}.$$

Centar oscilovanja se sad nalazi u tački $x = Q/k^2$, a to je tačka u kojoj su sile $-mk^2x$ i mQ u ravnoteži, tj. $-mk^2x + mQ = 0$.

P r i m e r : Teška tačka mase m pričvršćena je za donji kraj elastične opruge krutosti $c = mk^2$ čiji je gornji kraj nepomičan, a osa opruge je vertikalna. U neopterećenom stanju opruga je dužine L . Ako je u početnom trenutku $t_0 = 0$ opruga izdužena za ΔL i tačka m puštena bez početne brzine, odrediti konačnu jednačinu kretanja.

Ako se x -osa izabere tako (sl. 61) da se poklapa sa osom opruge, a početak $x = 0$ sa nepokretnim krajem opruge i ako se osa orijentiše vertikalno naniže,



Slika 61.

kad se tačka m nalazi na mestu x izduženje opruge je $x-L$, pa je elastična sila

$$X = -mk^2(x-L).$$

Diferencijalna jednačina kretanja je

$$\ddot{x} = -k^2(x-L),$$

pa je prema (29) zakon kretanja

$$x = \bar{C}_1 \cos kt + \bar{C}_2 \sin kt + L.$$

S obzirom na početne uslove biće $x_0 = L + \Delta L$ i $\dot{x}_0 = 0$, pa je

$$L + \Delta L = \bar{C}_1 + L, \quad 0 = \bar{C}_2 k,$$

a otuda je

$$\bar{C}_1 = \Delta L, \quad \bar{C}_2 = 0$$

i

$$x = \Delta L \cos kt + L.$$

Ovaj rezultat je mogao da se napiše i neposredno iz obrasca (30). Ako se za tačku $x=0$ izabere donji kraj neistegnute opruge ($\bar{x} = x-L$) konačna jednačina kretanja će biti

$$\bar{x} = \Delta L \cos kt.$$

2.5.3. Pravolinijsko kretanje pod dejstvom sile koja zavisi samo od brzine

Kad sila zavisi samo od brzine,

$$(1) \quad X = mf(\dot{x}),$$

diferencijalna jednačina kretanja

$$(2) \quad \ddot{x} = f(\dot{x})$$

se integrirali razdvajanjem promenljivih, jer je $\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt}$. Iz (2) se tada dobiva

$$(3) \quad \frac{d\dot{x}}{f(\dot{x})} = dt.$$

Za početne uslove, t_0 , $x_0 \neq 0$ i $\dot{x}_0 \neq 0$, integracija jednačine (3) daje

$$(4) \quad t - t_0 = \int_{\dot{x}_0}^{\dot{x}} \frac{d\dot{x}}{f(\dot{x})} = \varphi(\dot{x}).$$

Da bi se ovaj problem rešio do kraja potrebno je prvo izvršiti inverziju relacije (4), tj. naći brzinu tačke kao funkciju vremena.

$$(5) \quad \dot{x} = \psi(t - t_0),$$

pa zatim izvršiti još jednu kvadraturu

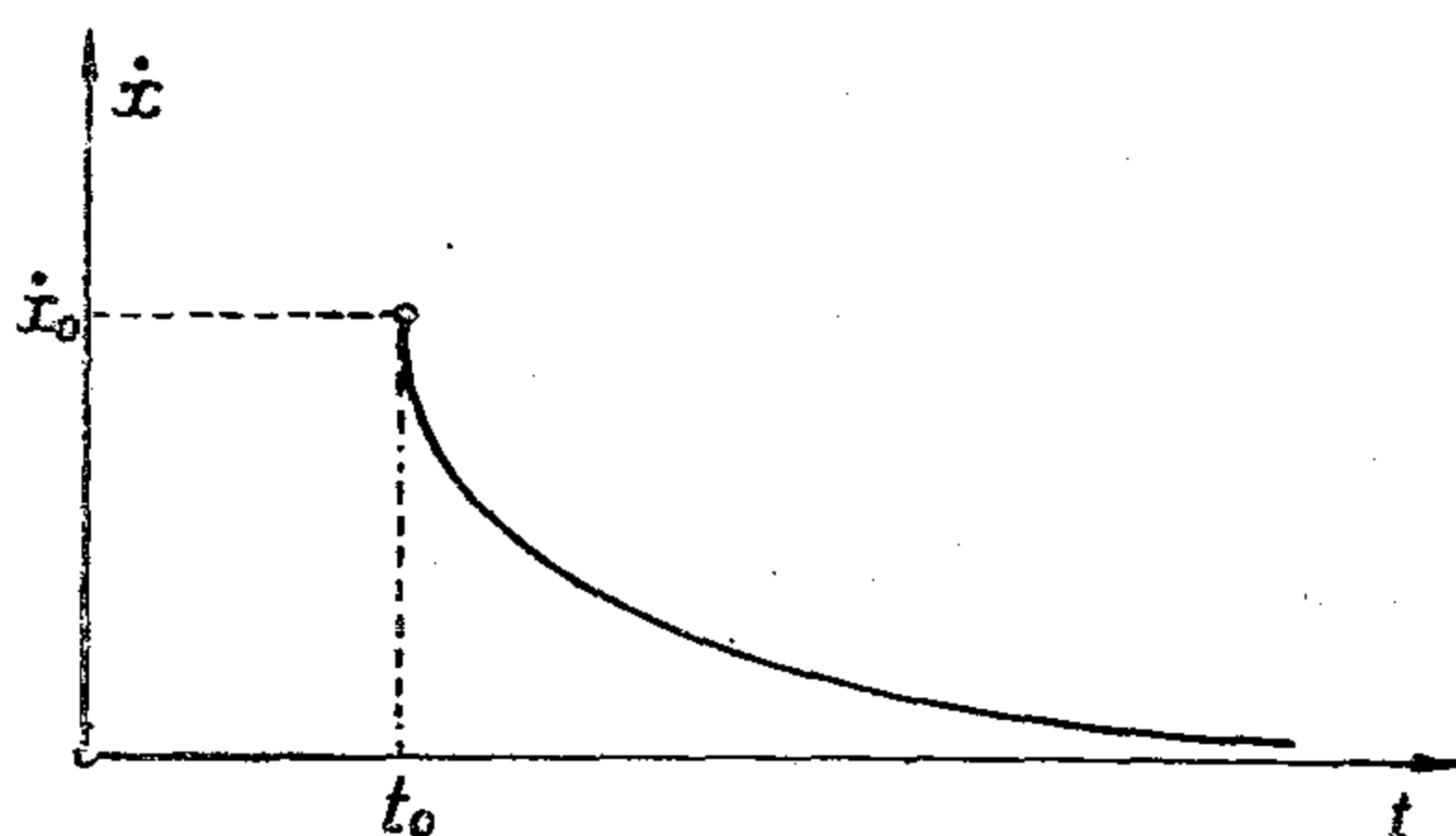
$$(6) \quad x - x_0 = \int_{t_0}^t \psi(t - t_0) dt.$$

Diferencijalna jednačina (2) se može pomnožiti sa $\dot{x} dt = dx$, pa kad se razdvoje promenljive u obliku

$$\frac{\dot{x} dx}{f(\dot{x})} = dx,$$

nastaviti rešavanje. Ovim putem može u izvesnim slučajevima da bude lakše rešiti jednačinu (2) ali se ovaj zadatak ne može u svakom slučaju rešiti samo pomoću elementarnih funkcija.

Sile zavisne od brzine su tzv. *otporne sile*. Npr. kad se materijalna tačka kreće kroz otpornu sredinu (vazduh, voda itd.) sila kojom se sredina opire kretanju



Slika 62

uvek je usmerena suprotno od pravca kretanja materijalne tačke i zavisna je od brzine. Većoj brzini suprotstavlja se veći otpor sredine. Za male brzine sila $f(\dot{x})$ se aproksimira linearnom funkcijom

$$(7) \quad f(\dot{x}) = -2l\dot{x}, \quad (l > 0)$$

a za veće brzine (npr. kretanje projektila kroz vazduh) kvadratnom

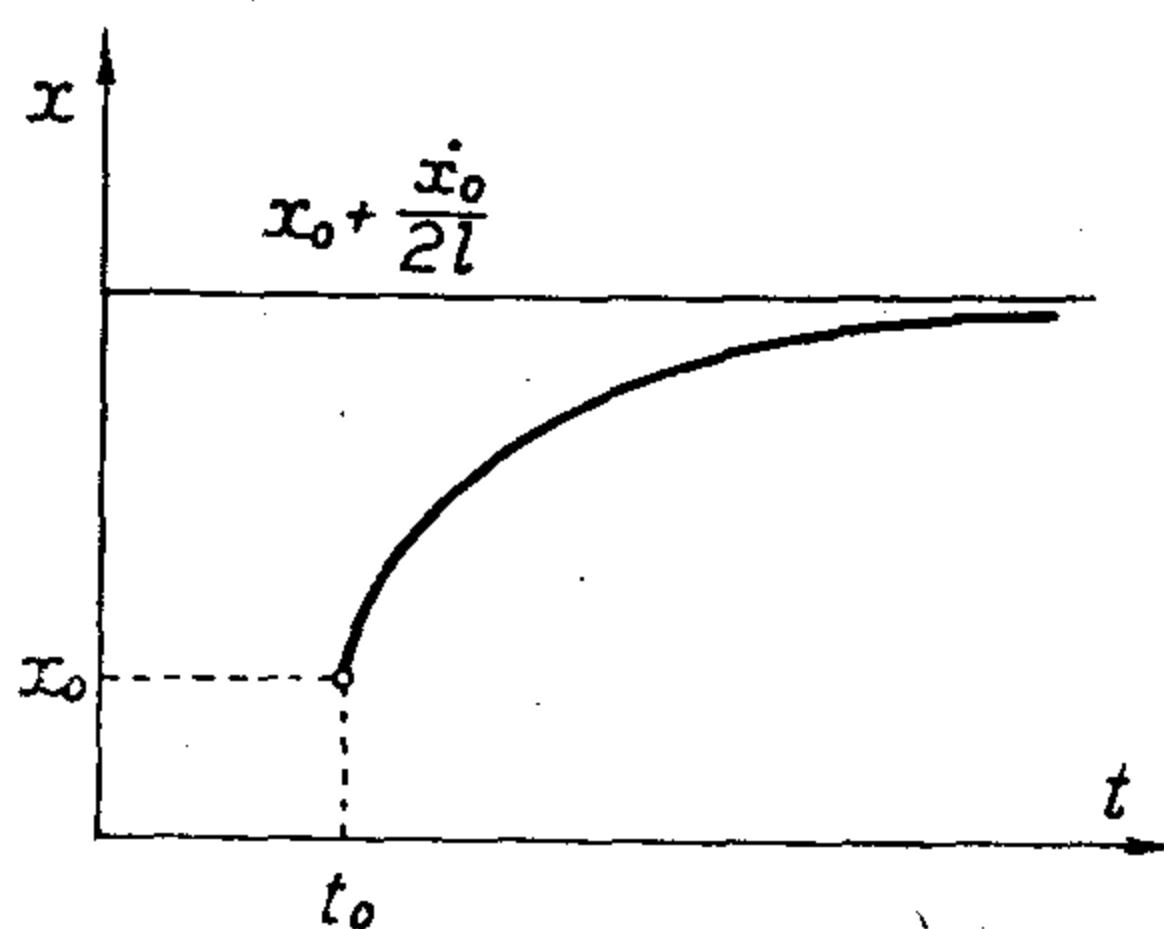
$$(8) \quad f(\dot{x}) = -2l\dot{x}^2.$$

Kad se neka materijalna tačka kreće bez dejstva aktivne sile u otpornoj sredini, u prvom slučaju diferencijalna jednačina kretanja će biti linearna homogena

$$\ddot{x} + 2l\dot{x} = 0.$$

Prema (3) ova se jednačina može napisati u obliku

$$\frac{d\dot{x}}{\dot{x}} = -2l dt,$$



Slika 63

pa je prema (8) njen prvi integral

$$(9) \quad \dot{x} = \dot{x}_0 e^{-2l(t-t_0)}.$$

Odavde se vidi da pri ovakvom kretanju brzina opada po eksponencijalnom zakonu i asimptotski teži nuli (sl. 62). To opadanje brzine zavisi od *koeficijenta otpora* l .

Konačna jednačina kretanja dobiva se iz (9) neposredno kvadraturom

$$x - x_0 = \dot{x}_0 \int_{t_0}^t e^{-2l(t-t_0)} dt,$$

tako da je najzad

$$(10) \quad x = x_0 + \frac{\dot{x}_0}{2l} (1 - e^{-2l(t-t_0)}).$$

Kad t neograničeno raste tačka se asimptotski približuje svom graničnom položaju (sl. 63)

$$x = x_0 + \frac{\dot{x}_0}{2l}.$$

Pri većim brzinama za silu otpora se uzima izraz (8) tako da je diferencijalna jednačina kretanja

$$(11) \quad \ddot{x} + 2l\dot{x}^2 = 0.$$

Prema (3) kvadraturom se iz relacije

$$(12) \quad \frac{d\dot{x}}{\dot{x}^2} = -2l dt$$

dobiva prvi integral

$$\frac{1}{\dot{x}_0} - \frac{1}{\dot{x}} = -2l(t-t_0).$$

Ako se za početni trenutak izabere $t_0 = 0$ iz gornjeg integrala će se inverzijom dobiti

$$(13) \quad \dot{x} = \frac{\dot{x}_0}{1 + 2l\dot{x}_0 t}.$$

Još jedna kvadratura dovodi do konačne jednačine kretanja

$$(14) \quad x = x_0 + \frac{1}{2l} \ln(1 + 2l\dot{x}_0 t).$$

2.5.4. Pravolinijsko kretanje pod dejstvom elastične i otporne sile proporcionalne brzini

Elastična sila nastaje u oprugama i drugim telima usled protivljenja materijala promeni veličine i oblika. Sile kojima se materijal suprotstavlja tim promenama su znatno složenije od onih koje su u odeljku (2.5.2.1) nazvane elastičnim. U opštem slučaju neko elastično telo će se suprotstavljati izduženju u pravcu x -ose

silom koja zavisi od izduženja. Ako posmatramo neku materijalnu tačku mase m na koju dejstvuju takve sile i ako je x izduženje u pravcu x -ose, sila će biti

$$(1) \quad X = -mf(x).$$

Razvijajući ovaj izraz u Meklorinov (Maclaurin) red u okolini tačke $x = 0$, koja odgovara položaju tačke m pri nerastegnutoj opruzi

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{1}{2!} x^2 f''(0) + \dots,$$

gde crta označava izvod po x , za dovoljno male vrednosti x može se zadržati na linearnoj aproksimaciji. Sem toga, nerastegnuta opruga ne deluje na tačku m nikakvom silom, $f(0) = 0$, pa je sila približno određena izrazom

$$(2) \quad X = -mf'(0)x.$$

Oдавде se vidi da je krutost opruge određena nagibom tangente na krivu $mf(x)$ u tački $x = 0$, tj. $k^2 = f'(0)$.

Pri malim izduženjima pri kojima se elastična sila može posmatrati u obliku (2) brzine tačke m takođe ostaju male pa se i otpori sredine u kojoj se tačka kreće mogu posmatrati kao linearne funkcije brzine (2.5.3 — 7).

Ako na neku materijalnu tačku m koja se nalazi u otpornoj sredini dejstvuje elastična sila, diferencijalna jednačina kretanja je, prema odeljcima (2.5.2) i (2.5.3),

$$(3) \quad \ddot{x} + 2l\dot{x} + kx = 0.$$

Ovo je homogena linearna diferencijalna jednačina drugog reda sa konstantnim koeficijentima i integral se traži u obliku $x = e^{\lambda t}$. Unošenjem ovog izraza u (3) dobiva se kvadratna karakteristična jednačina za određivanje parametra λ

$$(4) \quad \lambda^2 + 2l\lambda + k^2 = 0.$$

Tih parametara ima dva tako da je

$$(5) \quad \lambda_{1,2} = -l \pm D, \quad D^2 \equiv l^2 - k^2.$$

Prema tome, integral jednačine (3) je

$$(6) \quad x = e^{-lt} (A_1 e^{Dt} + A_2 e^{-Dt}).$$

Za početne uslove, $t_0 = 0$, $x_0 \neq 0$ i $\dot{x}_0 \neq 0$, integracione konstante A_1 i A_2 imaju vrednosti

$$(7) \quad A_1 = \frac{-\lambda_2 x_0 + \dot{x}_0}{\lambda_1 - \lambda_2} = \frac{(l+D)x_0 + \dot{x}_0}{2D},$$

$$A_2 = \frac{\lambda_1 x_0 - \dot{x}_0}{\lambda_1 - \lambda_2} = \frac{(-l+D)x_0 - \dot{x}_0}{2D}.$$

Prema vrednosti diskriminante D^2 postoje tri vrste kretanja.

1) Kad je diskriminanta manja do nule može se staviti

$$D^2 = -\omega^2, \quad (\omega^2 > 0)$$

pa je konačna jednačina kretanja

$$x = e^{-lt} (A_1 e^{i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t}).$$

Tada se s obzirom na (2.5.2.1 – 13 i 18) može napisati

$$x = e^{-lt} (C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t),$$

odnosno

$$(8) \quad x = b e^{-lt} \sin(\omega t + \beta),$$

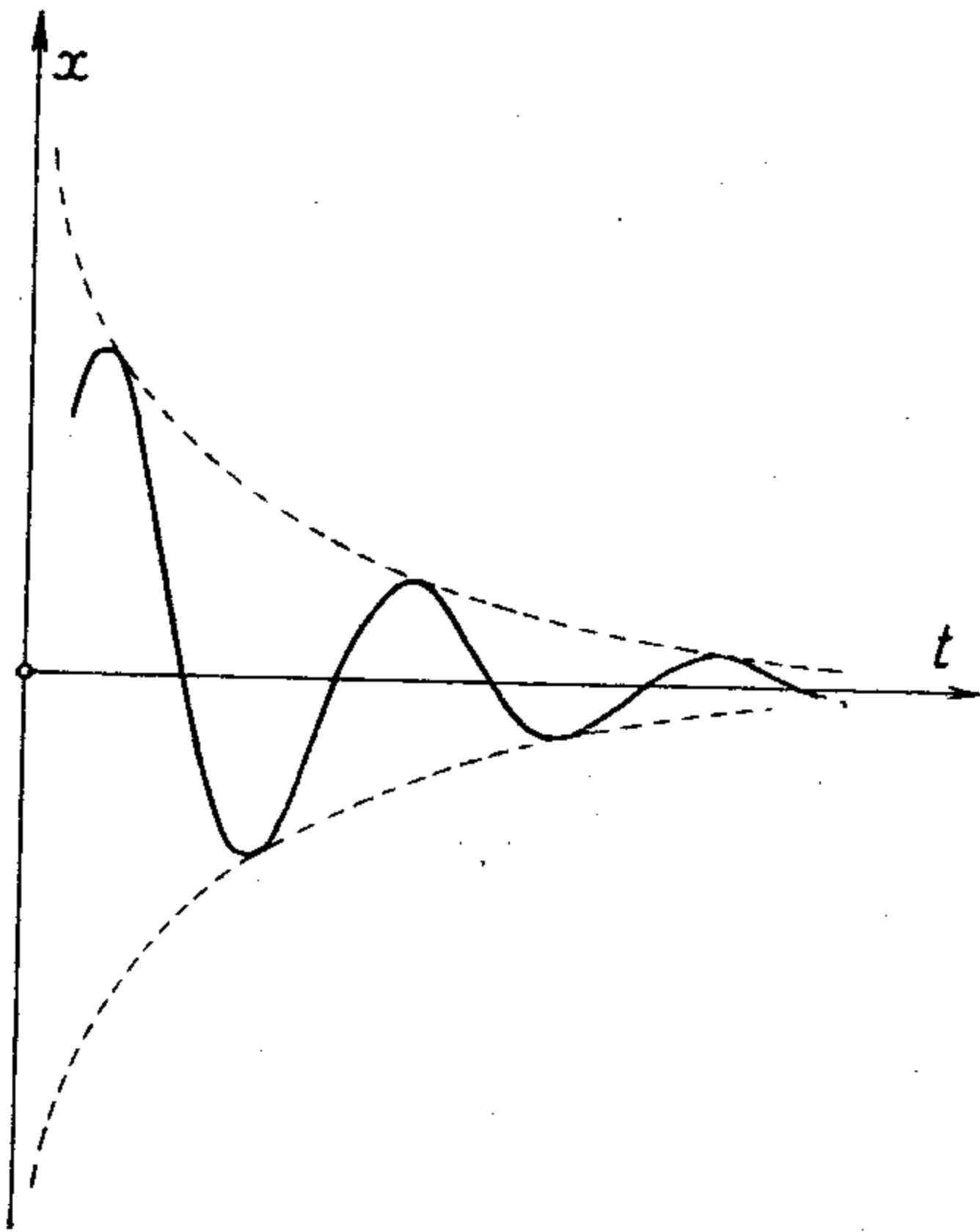
gde je

$$(9) \quad C_1 = A_1 + A_2 = x_0; \quad C_2 = i(A_1 - A_2) = \frac{l x_0 + \dot{x}_0}{\omega};$$

$$b^2 = C_1^2 + C_2^2 = x_0^2 + \frac{(l x_0 + \dot{x}_0)^2}{\omega^2}; \quad \text{tg } \beta = \frac{C_2}{C_1} = \frac{\omega x_0}{l x_0 + \dot{x}_0}.$$

Kretanje tačke u ovom slučaju je amortizovana harmonijska oscilacija (1.3.2—3).

Ovo kretanje je *kvaziperiodno*, jer $\frac{2\pi}{\omega}$ ovde prikazuje samo interval vremena između dva prolaza materijalne tačke kroz neku tačku u istom smeru, pri čemu odgovarajuće udaljenje pokretne tačke od tačke $x = 0$ stalno opada.



Slika 64

Brzina tačke pri amortizovanim harmonijskim oscilacijama je

$$\dot{x} = b [-l \sin(\omega t + \beta) + \omega \cos(\omega t + \beta)] e^{-lt}$$

pa je brzina tačke nula u trenucima određenim jednačinom

$$\text{tg}(\omega t + \beta) = \frac{\omega}{l}.$$

Pri ovom kretanju amplitude se smanjuju (sl. 64), a mera opadanja amplitude je određena logaritamskim dekrementom (1.3.2—4)

$$\lambda = \frac{l\pi}{\omega}.$$

2) Kada je diskriminanta pozitivna, $D^2 = p^2 > 0$, rešenje diferencijalne jednačine kretanja (3) je

$$(10) \quad x = e^{-lt} (A_1 e^{pt} + A_2 e^{-pt})$$

pri čemu su integracione konstante određene u (7). U ovom slučaju se radi o *čistoj amortizaciji* (prigušenju), jer otporna sila nadmaša elastičnu.

Ako se (10) napiše u obliku

$$x = A_1 e^{(p-l)t} + A_2 e^{-(p+l)t},$$

zbog $p = \sqrt{l^2 - k^2} > 0$ je $p - l = \sqrt{l^2 - k^2} - l < 0$, pa x opada i teži asimptotski nuli. Ako su konstante A_1 i A_2 istog znaka i $x_0 \neq 0$ kriva $x = x(t)$ neće nikada proći kroz vrednost $x = 0$. Ako su konstante A_1 i A_2 različitog znaka, kriva $x = x(t)$ proći će kroz $x = 0$ samo jednom, i to u trenutku određenom jednačinom

$$A_1 e^{pt} + A_2 e^{-pt} = 0,$$

tj.

$$t = \frac{1}{2p} \ln \left(- \frac{A_2}{A_1} \right).$$

Ako su konstante A_1 i A_2 istog znaka, ne postoji realna nula gornje jednačine.

3) Treći slučaj kretanja nastupa za $D = 0$, tj. za $l = k$. U tom slučaju se koreni karakteristične jednačine (4) poklapaju, $\lambda_1 = \lambda_2 = -l$ i integral diferencijalne jednačine (3) je

$$(11) \quad x = (A + Bt) e^{-lt},$$

gde je

$$A = x_0, \quad B = \dot{x}_0 + l x_0.$$

Ovo kretanje je granični slučaj prelaza amortizovanih harmonijskih oscilacija u čistu amortizaciju i zove se *kritička amortizacija*. Tačka m može da se udaljava od izvora sile do trenutka t_1 kada je $\dot{x} = 0$.

$$t_1 = \frac{B - Al}{Bl} = \frac{\dot{x}_0}{l^2 x_0 + l \dot{x}_0};$$

u tom trenutku tačka se zaustavlja i počinje da se asimptotski vraća ka položaju $x = 0$.

2.5.5. Pravolinijsko kretanje teške tačke u otpornoj sredini

U odeljku (2.5.1) prikazano je pravolinijsko kretanja (slobodni pad i vertikalni hitac) teške tačke, tj. materijalne tačke u polju Zemljine teže. Ako se tačka pri tome kreće u otpornoj sredini, na nju će pored sile Zemljine teže delovati i otporna sila $-2ml\dot{x}$ ($l > 0$) orijentisana suprotno od smera brzine. Diferencijalna jednačina takvog kretanja je (x -osa je orijentisana vertikalno naniže)

$$(1) \quad m\ddot{x} = mg - 2ml\dot{x},$$

odnosno

$$(2) \quad \ddot{x} + 2l\dot{x} = g.$$

Ovo je linearna diferencijalna jednačina drugog reda sa konstantnim koeficijentima; ako se napiše u obliku

$$\frac{d\dot{x}}{dt} + 2l\dot{x} = g$$

prvi integral se dobiva kvadraturom ($t_0 = 0$)

$$\int_{x_0}^{\dot{x}} \frac{dx}{g - 2lx} = t,$$

pa će biti

$$(3) \quad t = \frac{1}{2l} \ln \frac{g - 2l\dot{x}_0}{g - 2l\dot{x}}.$$

Oдавде se inverzijom dobiva brzina kao funkcija vremena

$$(4) \quad \dot{x} = \frac{1}{2l} [g - (g - 2l\dot{x}_0) e^{-2lt}].$$

Druga kvadratura daje konačnu jednačinu kretanja,

$$(5) \quad x = x_0 + \frac{g}{2l} t + \frac{1}{2l} \left(\frac{g}{2l} - \dot{x}_0 \right) (e^{-2lt} - 1).$$

Za vertikalni hitac naviše početni uslovi su $t_0 = 0$, $\dot{x}_0 = -v_0 < 0$, $x_0 = 0$, pa je brzina

$$(6) \quad \dot{x} = \frac{1}{2l} [g - (g + 2lv_0) (e^{-2lt})]$$

i konačna jednačina kretanja

$$(7) \quad x = \frac{g}{2l} t + \frac{1}{2l} \left(\frac{g}{2l} + v_0 \right) (e^{-2lt} - 1).$$

Tačka će se zaustaviti ($\dot{x} = 0$) u trenutku

$$(8) \quad t_1 = \frac{1}{2l} \ln \left(\frac{g + 2lv_0}{g} \right),$$

kad se nalazi na visini

$$(9) \quad x = \frac{g}{4l^2} \ln \left(\frac{g + 2lv_0}{g} \right) - \frac{v_0}{g} \left(\frac{g}{2l} + v_0 \right).$$

Ako se u trenutku $t_0 = 0$ tačka nalazi na visini $x_0 < 0$ nad Zemljinom površi i bačena je vertikalno naniže početnom brzinom $\dot{x}_0 > 0$ (vertikalni hitac naniže), brzina i zakon puta su određeni obrascima (4) i (5).

Pri vertikalnom hucu naniže i naviše sa otpornom silom proporcionalnom kvadratu brzine mora se voditi računa o orijentaciji x -ose kako bi u diferencijalnoj jednačini kretanja otporna sila imala korektno izabrani znak. Za kretanje tačke naniže je otporna sila $-2lm\dot{x}^2$, a za kretanje naviše je $+2lm\dot{x}^2$, jer je x -osa u dosadašnjim izlaganjima orijentisana naniže. Pri suprotnoj orijentaciji x -ose biće i znaci u izrazu za otpornu silu obrnuti.

Diferencijalna jednačina za kretanje teške tačke naniže biće sad

$$(10) \quad \ddot{x} + 2l\dot{x}^2 = g.$$

Razdvajanjem promenljivih dobiće se prvi integral pomoću kvadrature

$$\int_{\dot{x}_0}^{\dot{x}} \frac{d\dot{x}}{g - 2l\dot{x}^2} = t,$$

tj.

$$(11) \quad t = \frac{1}{\sqrt{2gl}} \int_{\dot{x}_0}^{\dot{x}} \left(\frac{1}{\sqrt{g} + \sqrt{2l}\dot{x}} + \frac{1}{\sqrt{g} - \sqrt{2l}\dot{x}} \right) d\dot{x} = \\ = \frac{1}{2\sqrt{2gl}} \ln \frac{(\sqrt{g} + \dot{x}\sqrt{2l})(\sqrt{g} - \dot{x}_0\sqrt{2l})}{(\sqrt{g} - \dot{x}\sqrt{2l})(\sqrt{g} + \dot{x}_0\sqrt{2l})}.$$

Inverzijom se dobiva za brzinu obrazac

$$(12) \quad \dot{x} = \sqrt{\frac{g}{2l}} \frac{(\sqrt{g} + \dot{x}_0\sqrt{2l}) e^{-2t\sqrt{2gl}} - (\sqrt{g} - \dot{x}_0\sqrt{2l})}{(\sqrt{g} + \dot{x}_0\sqrt{2l}) e^{2t\sqrt{2gl}} + (\sqrt{g} - \dot{x}_0\sqrt{2l})},$$

koji se može napisati i pomoću hiperboličkih funkcija

$$(13) \quad \dot{x} = \sqrt{\frac{g}{2l}} \frac{\sqrt{g} \operatorname{sh}(t\sqrt{2gl}) + \sqrt{2l}\dot{x}_0 \operatorname{ch}(t\sqrt{2gl})}{\sqrt{g} \operatorname{ch}(t\sqrt{2gl}) + \sqrt{2l}\dot{x}_0 \operatorname{sh}(t\sqrt{2gl})}.$$

Ovaj izraz može neposredno da se integriše, pa je zakon puta

$$(14) \quad x = x_0 + \frac{1}{2l} \ln \left[\operatorname{ch}(t\sqrt{2gl}) + \dot{x}_0 \sqrt{\frac{2l}{g}} \operatorname{sh}(t\sqrt{2gl}) \right].$$

Pri kretanju teške tačke naviše diferencijalna jednačina kretanja je

$$(15) \quad \ddot{x} = g + 2l\dot{x}^2,$$

tako da je

$$(16) \quad t = \int_{\dot{x}_0}^{\dot{x}} \frac{d\dot{x}}{g + 2l\dot{x}^2} = \frac{1}{\sqrt{2gl}} \left[\operatorname{arc\,tg} \left(\dot{x} \sqrt{\frac{2l}{g}} \right) - \operatorname{arc\,tg} \left(\dot{x}_0 \sqrt{\frac{2l}{g}} \right) \right],$$

i

$$(17) \quad \dot{x} = \frac{g \sin(t\sqrt{2gl}) + \dot{x}_0 \sqrt{2gl} \cos(t\sqrt{2gl})}{\sqrt{2gl} \cos(t\sqrt{2gl}) - 2l\dot{x}_0 \sin(t\sqrt{2gl})}.$$

Odavde se neposredno integracijom dobiva

$$(18) \quad x = x_0 - \frac{1}{2l} \ln \left[\cos(t\sqrt{2gl}) - \sqrt{\frac{2l}{g}} \dot{x}_0 \sin(t\sqrt{2gl}) \right].$$

Tačka će da se kreće naviše do trenutka τ kad se zaustavlja, ($\dot{x} = 0$),

$$(19) \quad \tau = \frac{1}{\sqrt{2gl}} \operatorname{arc\,tg} \left(-\dot{x}_0 \sqrt{\frac{2l}{g}} \right).$$

Posle tog trenutka tačka slobodno pada. Kad se u (13) i (14) stavi $\dot{x}_0 = 0$, a $x_0 = -h$ je visina do koje je tačka pri kretanju naviše dospela dobiće se

$$(20) \quad \dot{x} = \sqrt{\frac{g}{2l}} \operatorname{tgh}(t\sqrt{2gl}).$$

Pri tome se vreme t meri od trenutka τ .

2.5.6. Prinudne oscilacije

Na materijalnu tačku koja se kreće pod dejstvom elastične sile mogu da dejstvuju i neke druge dopunske sile. Ako su te dopunske sile periodne, pod njihovim dejstvom tačka će izvoditi i *prinudne oscilacije*. Dopunska periodna sila može u opštem slučaju biti oblika

$$X = mf(t).$$

Razvijanjem periodne funkcije $f(t)$ u Furijeov (Fourier) red

$$(1) \quad f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega t),$$

dopunska sila se posmatra kao rezultanta komponentnih periodnih sila $ma_n \cos(n\omega t)$ i $mb_n \sin(n\omega t)$.

Sila $ma \sin(\omega t)$ ili $ma \cos(\omega t)$, što je u stvari isto jer između ove dve periodne sile postoji samo fazna razlika, naziva se prosta *prinudna sila*. Kad na neku materijalnu tačku m na koju dejstvuje elastična sila $-mk^2 x$ dejstvuje i prosta prinudna sila, diferencijalna jednačina kretanja biće

$$(2) \quad \ddot{x} + k^2 x = a \sin \omega t.$$

Integral ove jednačine je oblika

$$(3) \quad x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt + N \sin \omega t.$$

Konstante C_1 i C_2 se određuju iz početnih uslova, a konstanta N iz uslova da (3) identički zadovoljava diferencijalnu jednačinu (2). Iz tog zahteva proističe da N mora imati vrednost

$$(4) \quad N = \frac{a}{k^2 - \omega^2}.$$

Ako se onda iskoriste početni uslovi, $t_0 = 0$, $x_0 \neq 0$ i $\dot{x}_0 \neq 0$, za određivanje integracionih konstanti, dobiće se

$$C_1 = x_0, \quad C_2 = \frac{1}{k} \left(\dot{x}_0 - \frac{a\omega}{k^2 - \omega^2} \right),$$

tako da konačna jednačina kretanja najzad glasi

$$(5) \quad x = \frac{a}{k^2 - \omega^2} \sin \omega t + x_0 \cos kt + \frac{1}{k} \left(\dot{x}_0 - \frac{a\omega}{k^2 - \omega^2} \right) \sin kt,$$

što se može napisati u obliku

$$(6) \quad x = N \sin \omega t + A \sin (kt + \alpha).$$

Ovde je N određeno obrascem (4) a

$$(7) \quad A^2 = x_0^2 + \frac{1}{k^2} \left(x_0 - \frac{a\omega}{a^2 - \omega^2} \right)^2,$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{k x_0 (k^2 - \omega^2)}{x_0 (k^2 - \omega^2) - a\omega}.$$

Ako se u obrascu (6) stavi $\omega t = (k + \delta) t$, gde je $\delta \equiv \omega - k$, ovaj postaje

$$x = (N \cos \delta t + A \cos \alpha) \sin kt + (N \sin \delta t + A \sin \alpha) \cos kt.$$

Podesnom smenom konstanti N i A ,

$$N \cos \delta t + A \cos \alpha = R \cos \varphi,$$

$$N \sin \delta t + A \sin \alpha = R \sin \varphi,$$

konačna jednačina kretanja može da se napiše u veoma jednostavnom obliku

$$(8) \quad x = R \sin (kt + \varphi),$$

gde je

$$(9) \quad R^2 = N^2 + A^2 + 2NA \cos (\delta t - \alpha),$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{N \sin \delta t + A \sin \alpha}{N \cos \delta t + A \cos \alpha}.$$

Oдавде se vidi da amplituda R ove oscilacije nije konstanta već se periodno menja između $(N + A)$ i $-(N + A)$, a po intenzitetu između $|N + A|$ i $|N - A|$. Period T promene amplitude je period funkcije $\cos (\delta t - \alpha)$, tj.

$$(10) \quad T = \frac{2\pi}{\delta} = \frac{2\pi}{\omega - k}.$$

Ako se sa $T_1 = \frac{2\pi}{k}$ označi period *sopstvene oscilacije*, tj. oscilacije posmatrane

tačke kad nema prinudne sile, a sa $T_2 = \frac{2\pi}{\omega}$ period *prinudne oscilacije* (one koju izaziva dopunska periodna sila), period potpune oscilacije iznosi

$$(11) \quad T = \frac{T_1 T_2}{T_1 - T_2}.$$

Period između najveće i najmanje amplitude prinudnih oscilacija naziva se *period lebdenja* (period pojačavanja i slabljenja oscilacija).

Ovakvo kretanje materijalne tačke zove se *prosta prinudna oscilacija*. U slučaju dopunske sile oblika $ma \cos (\omega t)$ imamo opet prostu prinudnu oscilaciju samo će faza biti pomešana u odnosu na ovde proučenu. Prinudna dopunska sila se naziva i *poremećajna (perturbaciona) sila*.

Izuzetno je važan slučaj kad su sopstvena i prinudna oscilacija istih perioda i frekvencija, tj. kad je $\omega = k$. Tada jednačina kretanja postaje

$$(12) \quad \ddot{x} + k^2 x = a \sin kt$$

Na ovaj slučaj ne može neposredno da se primeni rešenje (5) jer zbog $\omega = k$ ne postoji tamo dobiveno partikularno rešenje. Međutim, u rešenju (5) može da se posmatra granični slučaj kada $\omega \rightarrow k$. Ako se u (5) pregrupišu članovi

$$(13) \quad x = \frac{a}{k} \left(\frac{k \sin \omega t - \omega \sin kt}{k^2 - \omega^2} \right) + x_0 \cos kt + \frac{\dot{x}_0}{k} \sin kt,$$

pa se pusti da $\omega \rightarrow k$, izraz u zagradi postaje neodređen. Granična vrednost se može naći primenom tzv. Lopitalove (L'Hospital) teoreme,

$$\lim_{\omega \rightarrow k} \frac{k \sin \omega t - \omega \sin kt}{k^2 - \omega^2} = \frac{1}{2k} \sin kt - \frac{t}{2} \cos kt,$$

tako da se unošenjem ove vrednosti u (13) dobiva konačna jednačina kretanja u obliku

$$(14) \quad x = \frac{1}{k} \left(\frac{a}{2k} + \dot{x}_0 \right) \sin kt + \left(x_0 - \frac{a}{2k} t \right) \cos kt.$$

Ako se još stavi

$$\frac{1}{k} \left(\frac{a}{2k} + \dot{x}_0 \right) = Q \cos \alpha,$$

$$x_0 - \frac{a}{2k} t = Q \sin \alpha,$$

obrazac (14) postaje

$$(15) \quad x = Q \sin (kt + \alpha),$$

dok je

$$(16) \quad Q^2 = \frac{1}{k^2} \left(\frac{a}{2k} + \dot{x}_0 \right)^2 + \left(x_0 - \frac{a}{2k} t \right)^2,$$

$$\operatorname{tg} \alpha = k \frac{2k x_0 - at}{2k x_0 + a}.$$

Iz prvog obrasca (16) se vidi da nema naizmeničnog pojačavanja i slabljenja amplitude, već amplituda neograničeno raste sa vremenom. Ova se pojava naziva *rezonancija* i igra u tehnici važnu ulogu. Kad u nekoj konstrukciji ili mehanizmu nastupi rezonancija može doći do razaranja, jer materijal ne može da izdrži oscilacije neograničeno velikih amplituda.

2.5.7. Prosta prinudna oscilacija sa elastičnom i otpornom silom

U opštem slučaju na materijalnu tačku m koja se kreće pod dejstvom elastične sile u otpornoj sredini može delovati i neka prinudna periodna sila. Tada je diferencijalna jednačina kretanja oblika

$$(1) \quad \ddot{x} + 2l\dot{x} + k^2 x = a \cos \omega t.$$

Opšti integral ove jednačine je zbir integrala odgovarajuće homogene diferencijalne jednačine (u odsustvu prinudne sile) i jednog partikularnog integrala nehomogene jednačine. Integral homogene jednačine je određen obrascem (2.5.4—6), a partikularni integral će biti oblika $M \cos \omega t + N \sin \omega t$, tako da je opšti integral

$$(2) \quad x = e^{-lt} (A_1 e^{Dt} + A_2 e^{-Dt}) + N \sin \omega t + M \cos \omega t.$$

Veličina D^2 je ovde diskriminanta karakteristične jednačine $\lambda^2 + 2l\lambda + k^2 = 0$

$$(3) \quad D^2 = l^2 - k^2.$$

Konstante M i N se određuju iz uslova da izraz $M \cos \omega t + N \sin \omega t$ zaista identički zadovoljava diferencijalnu jednačinu (1), odakle proističe

$$(4) \quad M = \frac{a(k^2 - \omega^2)}{P}, \quad N = \frac{2al\omega}{P},$$

$$P \equiv (k^2 - \omega^2)^2 + 4l^2\omega^2.$$

Kao i u slučaju slobodnih oscilacija (vidi odeljak 2.5.4) i u ovde posmatranom slučaju postoje tri vrste kretanja.

1) $l^2 - k^2 = -p^2 < 0$. Tada je (2.5.2)

$$A_1 e^{ipt} + A_2 e^{-ipt} = C_1 \cos pt + C_2 \sin pt,$$

pri čemu su konstante A i C vezane relacijama

$$C_1 = A_1 + A_2, \quad C_2 = i(A_1 - A_2),$$

pa se konačna jednačina kretanja svodi na oblik

$$(5) \quad x = \frac{a}{P} [(k^2 - \omega^2) \cos \omega t + 2l\omega \sin \omega t] + e^{-lt} (C_1 \cos pt + C_2 \sin pt).$$

Za početne uslove, $t_0 = 0$, $x_0 \neq 0$, $\dot{x}_0 \neq 0$, integracione konstante imaju vrednosti

$$(6) \quad C_1 = x_0 - M,$$

$$C_2 = \frac{\dot{x}_0 + l x_0}{p} - \frac{lM + \omega N}{p},$$

gde su M i N dati obrascima (4), pa se (5) može napisati u obliku

$$(7) \quad x = M \cos \omega t + N \sin \omega t + e^{-lt} \left(x_0 \cos pt + \frac{\dot{x}_0 + l x_0}{p} \sin pt \right) -$$

$$- e^{lt} \left(M \cos pt + \frac{lM + \omega N}{p} \sin pt \right).$$

Ako se mesto konstante M i N uvedu konstante A i ε pomoću relacija

$$(8) \quad M = A \sin \varepsilon, \quad N = A \cos \varepsilon,$$

bice

$$(9) \quad A = \sqrt{M^2 + N^2} = \frac{a}{\sqrt{P}}, \quad \sin \varepsilon = \frac{k^2 - \omega^2}{\sqrt{P}}, \quad \cos \varepsilon = \frac{2l\omega}{\sqrt{P}}.$$

Sad se konačna jednačina kretanja svodi na oblik

$$(10) \quad x = e^{-lt} \left(x_0 \cos pt + \frac{\dot{x}_0 + l x_0}{p} \sin pt \right) - \frac{a}{\sqrt{P}} e^{-lt} \left(\sin \varepsilon \cos pt + \frac{l \sin \varepsilon + \omega \cos \varepsilon}{p} \sin pt \right) + \frac{a}{\sqrt{P}} \sin (\omega t + \varepsilon).$$

Prva dva člana u jednačini kretanja (10) predstavljaju amortizovane oscilacije od kojih onaj deo u prvom članu zavisi od početnog položaja i brzine, dok drugi deo zavisi od prinudne sile preko ε . Treći član je čista harmonijska oscilacija izazvana prinudnom silom, čija je faza $\omega t + \varepsilon$, koja je pomerena prema fazi prinudne sile za ε , a period je ostao isti.

Kad bi prinudna sila bila stalno jednaka a ($\omega = 0$) i dejstvovala statički, tada bi s obzirom na (9) bilo

$$(11) \quad A_0 = \frac{a}{k^2}, \quad \sin \varepsilon_0 = 1, \quad \cos \varepsilon_0 = 0,$$

tj. $\varepsilon_0 = \frac{\pi}{2}$. Izraz A_0 zove se *statičko odstupanje (devijacija)* materijalne tačke, izazvano stalnom silom a .

Razmera

$$(12) \quad \frac{A}{A_0} = \lambda = \frac{k^2}{\sqrt{P}}$$

amplitude A prinudne oscilacije prema statičkom odstupanju A_0 zove se *koeficijent dinamičnosti prinude*. Ako se uvedu simboli

$$(13) \quad z = \frac{\omega}{k}, \quad \delta = \frac{l}{k}$$

koeficijent dinamičnosti prinude može se izraziti u obliku

$$(14) \quad \lambda = [(1 - z^2)^2 + 4 \delta^2 z^2]^{-1/2}.$$

Ovaj koeficijent dostiže najveću vrednost pri $\delta = \text{const.}$ kad je

$$(15) \quad z = \sqrt{1 - 2 \delta^2}.$$

Ako je $\delta < \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,707$, dakle ako je $l \leq 0,707 k$ najveća vrednost λ_m koeficijenta dinamičnosti iznosi

$$(16) \quad \lambda_m = \frac{1}{2\delta\sqrt{1 - \delta^2}}.$$

Posebno su važni slučajevi kada se frekvencija prinudne sile poklapa sa frekvencijom elastičnih oscilacija ($\omega = k$) ili sa frekvencijom amortizovanih oscilacija ($\omega = p$).

U slučaju $k=\omega$ je, prema (13), $z = 1$ pa je vrednost koeficijenta dinamičnosti

$$\lambda_r = \frac{1}{2\delta}$$

i to je slučaj *rezonancije* (vidi odeljak 2.5.6). Tada je $P = 4l^2\omega^2$ i $\varepsilon = 0$, pa jednačina kretanja (10) dobiva oblik

$$x = e^{-lt} \left[x_0 \cos pt + \frac{2l(x_0 + l\dot{x}_0) - a}{2lp} \sin pt \right] + \frac{a}{2l\omega} \sin \omega t.$$

Posle dužeg vremena tačka će se kretati asimptotski po zakonu

$$x \sim \frac{a}{2l\omega} \sin \omega t.$$

U slučaju $\omega=p$ frekvencija prinudnih oscilacija se poklapa sa frekvencijom amortizovanih oscilacija. Prema (13) je tada

$$z = \sqrt{1 - \delta^2}$$

i koeficijent dinamičnosti λ^* ima vrednost

$$\lambda^* = \frac{1}{2\delta\sqrt{1 - \frac{3}{4}\delta^2}}$$

Ovaj se slučaj zove *nepravna rezonancija*. Za male otpore u poređenju sa elastičnom silom, tj. kad je $\delta = l/k$ mala veličina, nema velike razlike između najveće vrednosti λ_m koeficijenta dinamičnosti i njegovih vrednosti λ_r u slučaju *prave rezonancije* i λ^* za *nepravu rezonanciju*.

Pomeranje ε faze prinudnih oscilacija može se odrediti iz jednačine (9) ili iz jednačine

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{1 - z^2}{2\delta z},$$

koja se izvodi iz (9) i (13).

2) Za $l^2 > k^2$ ($l^2 - k^2 = p^2 > 0$) kretanje materijalne tačke biće aperiodno. Integral diferencijalne jednačine kretanja je u tom slučaju

$$(17) \quad x = M \cos \omega t + N \sin \omega t + e^{-lt} (A_1 e^{pt} + A_2 e^{-pt}),$$

odnosno

$$(18) \quad x = M \cos \omega t + N \sin \omega t + e^{-lt} (C_1 \operatorname{ch} pt + C_2 \operatorname{sh} pt).$$

Kako je $p-l = \sqrt{l^2 - k^2} - l < 0$, kad vreme raste, izraz

$$A_1 e^{(p-l)t} + A_2 e^{-(p+l)t}$$

asimptotski teži nuli i za velike vrednosti t može se pisati

$$(19) \quad x \sim M \cos \omega t + N \sin \omega t = A \sin(\omega t + \varepsilon).$$

Dakle, kretanje materijalne tačke biće aperiodno i posle dužeg vremena kretanje j asimptotski harmonijska oscilacija koja ima period jednak periodu prinudne oscilacije, a faza je pomerena za ε . Koeficijenti M i N , odnosno A i ε određeni su obrascima (4) i (9) i ne zavise od početnih uslova već samo od prinudne sile. Konstante A_1 i A_2 , odnosno C_1 i C_2 aperiodnog kretanja zavise od početnih uslova.

Ako je u početnom trenutku $t_0 = 0$, $x_0 \neq 0$, $\dot{x}_0 \neq 0$, biće

$$(20) \quad \begin{aligned} C_1 &= A_1 + A_2 = x_0 - M \\ C_2 &= A_1 - A_2 = \dot{x}_0 + lx_0 - lM - \omega N. \end{aligned}$$

3) U slučaju $k = l$ konačna jednačina kretanja je

$$x = A \sin(\omega t + \varepsilon) + (A_1 + A_2 t) e^{-lt}.$$

Konstante A i ε određene su obrascima (9), a A_1 i A_2 početnim uslovima,

$$(21) \quad A_1 = x_0, \quad A_2 = \dot{x}_0 + l x_0.$$

2.6. Krivolinijsko kretanje materijalne tačke

Ako nisu ispunjeni uslovi iz odeljka (2.5) da trajektorija materijalne tačke bude prava linija, trajektorija će biti neka ravanska ili prostorna kriva linija.

Da bi kretanje materijalne tačke bilo ravansko moraju biti zadovoljeni izvesni uslovi. Ako je npr. ravan kretanja xOy , za vreme kretanja je stalno $z = 0$; otuda proističe da ne postoji ubrzanje tačke u pravcu z -ose pa u tom pravcu ne deluje ni sila, tj. $Z = 0$. Prema tome prvi uslov da kretanje bude ravansko jeste da je polje sile stalno u jednoj nepromenljivoj ravni. Ovaj uslov je potreban ali nije i dovoljan. Iz diferencijalnih jednačina kretanja u Dekartovim pravouglim koordinatama (2.3), ako je navedeni prvi uslov zadovoljen,

$$(1) \quad \begin{aligned} m \ddot{x} &= X, \\ m \ddot{y} &= Y, \\ m \ddot{z} &= 0, \end{aligned}$$

proističe prvi integral za koordinatu z

$$(2) \quad \dot{z} = \dot{z}_0$$

i kretanje neće biti ravansko (u xOy ravni) jer je $z = z_0 t + z_0$. Međutim, ako je $\dot{z}_0 = 0$ početna brzina se cela nalazi u istoj ravni u kojoj i sila, kretanje će biti ravansko pa drugi uslov za ravansko kretanje glasi da ravan u kojoj je sila sadrži početnu brzinu.

Kombinujući ova dva uslova može se reći: *Kretanje materijalne tačke biće ravansko ako je polje sile stalno u jednoj ravni, i to u ma kojoj od onih ravni koje sadrže početnu brzinu.*

2.6.1. Kosi hitac u bezvazdušnom prostoru

Kretanje teške tačke čija početna brzina obrazuje neki ugao sa horizontom zove se *kosi hitac*. Pri tome se pod horizontom u datoj tački na Zemljinoj površi podrazumeva ravan upravna na pravac vektora \mathbf{g} — ubrzanja Zemljine teže. Pri

proučavanju kosog hica ne vodimo računa o krivini Zemljine površi a sem toga za sada zanemarujemo i rotaciju Zemlje.

Ako se Dekartov pravougli koordinatni sistem $Oxyz$ izabere tako da se početak O poklapa sa početnim položajem tačke, ravan zOx da se poklapa sa horizontalnom ravni i y -osa da bude orijentisana naviše (sl.65), diferencijalne jednačine kretanja će biti

$$(1) \quad \ddot{x} = 0, \quad \ddot{y} = -g, \quad \ddot{z} = 0.$$

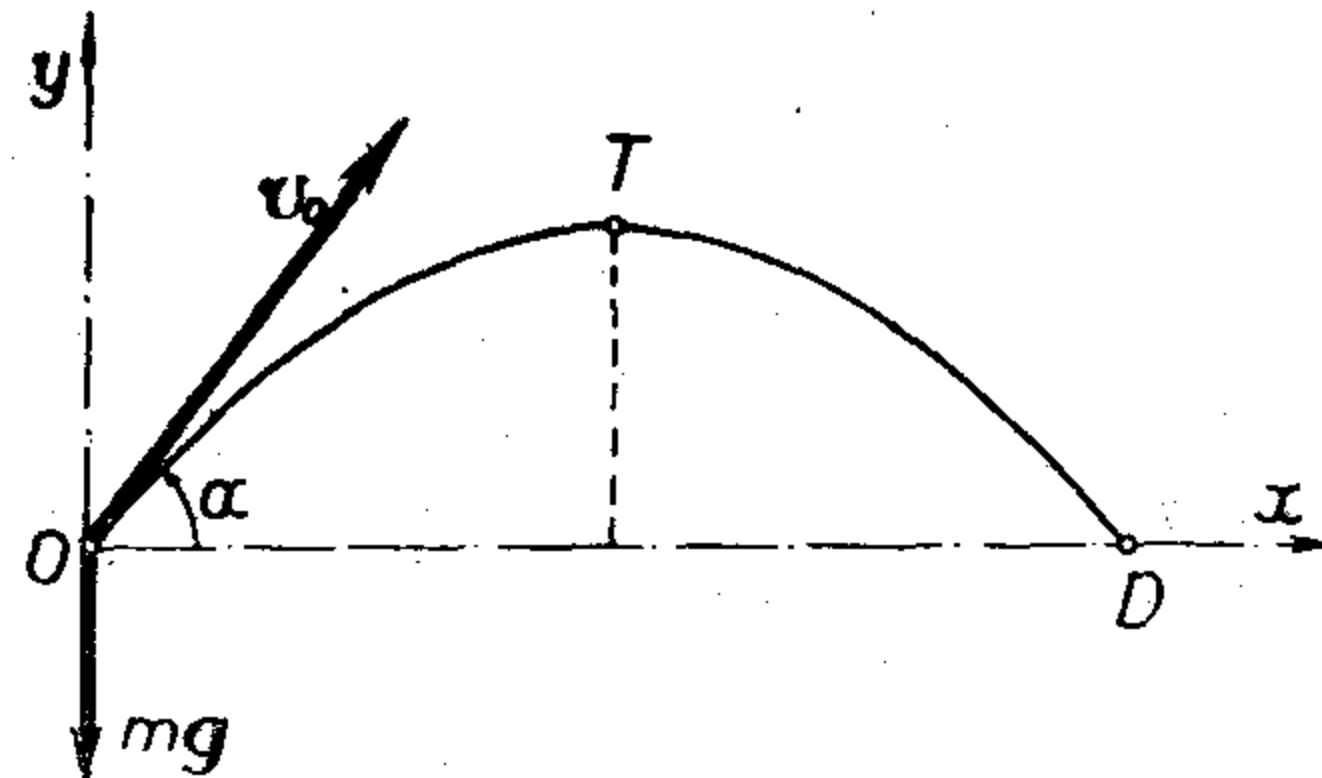
Početna brzina v_0 se sigurno nalazi u vertikalnoj ravni, u kojoj se nalazi i sila $\mathbf{F} = m\mathbf{g} = -mg\mathbf{j}$, pa je kretanje ravansko. Ako se xOy ravan izabere tako da je određena početnom brzinom i vektorom ubrzanja Zemljine teže, biće

$$(2) \quad \begin{aligned} v_{0x} &= v_0 \cos \alpha, \\ v_{0y} &= v_0 \sin \alpha, \quad v_{0z} = 0 \end{aligned}$$

i tačka se kreće u ravni xOy .

Prvi integrali diferencijalnih jednačina kretanja su

$$(3) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= v_0 \cos \alpha, \\ \dot{y} &= v_0 \sin \alpha - gt, \end{aligned}$$



Slika 65

pa konačne jednačine kretanja za $t_0 = 0$ (jer je $x_0 = y_0 = 0$) glase

$$(4) \quad x = v_0 t \cos \alpha, \quad y = v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2} gt^2.$$

Eliminacijom vremena iz jednačina (4) dobiva se jednačina trajektorije tačke u eksplicitnom obliku

$$(5) \quad y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{1}{2} \frac{gx^2}{v_0^2 \cos^2 \alpha}.$$

To je parabola čija je osa simetrije vertikalna i paralelna y -osi. Tačka dostiže na svojoj putanji najviši položaj na mestu gde parabola ima maksimum, tj. u njenom temenu T . Kako je u maksimumu

$$y' = \operatorname{tg} \alpha - gx/v_0^2 \cos^2 \alpha = 0,$$

koordinate temena će biti

$$(6) \quad x_T = \frac{v_0^2}{2g} \sin 2\alpha, \quad y_T = \frac{v_0^2}{2g} \sin^2 \alpha.$$

Tačka D u kojoj materijalna tačka ponovo dospeva na horizontalnu ravan jeste tačka u kojoj parabola seče x -osu ($x_D \neq 0, y_D = 0$), a apscisa x_D te tačke određuje *najveći domet* pri kosom hicu. Iz jednačine (5) parabole lako se nalazi da je najveći domet određen obrascem

$$(7) \quad x_D = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha.$$

Najveći domet zavisi od početne brzine v_0 i *elevacionog ugla* α pod kojim treba izbaciti kosi hitac (npr. artiljerijski projektil). Za datu početnu brzinu domet će biti najveći pri $\sin 2\alpha = 1$, tj. kada je elevacioni ugao $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

Da bi kosi hitac prošao kroz određeni cilj, tačku $M(\xi, \eta)$, pri datoj početnoj brzini potrebno je iz jednačine (5), kad se u nju unese ξ i η mesto x i y , tj. iz jednačine

$$(8) \quad \eta = \xi \operatorname{tg} \alpha - \frac{1}{2} \frac{g \xi^2}{v_0^2 \cos^2 \alpha}$$

odrediti elevacioni ugao α . Smenom $\frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha$ i rešavanjem tako dobivene kvadratne jednačine po nepoznatom tangensu elevacionog ugla dobiva se obrazac

$$(9) \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{v_0^2}{g\xi} \pm \frac{1}{g\xi} \sqrt{-2g v_0^2 \left(\eta + \frac{g\xi^2}{2v_0^2} - \frac{v_0^2}{2g} \right)}$$

Pogađanje zadanog cilja M je uopšte moguće pri datoj početnoj brzini samo ako koordinate cilja zadovoljavaju uslov

$$(10) \quad D \equiv \eta + \frac{g\xi^2}{2v_0^2} - \frac{v_0^2}{2g} \leq 0.$$

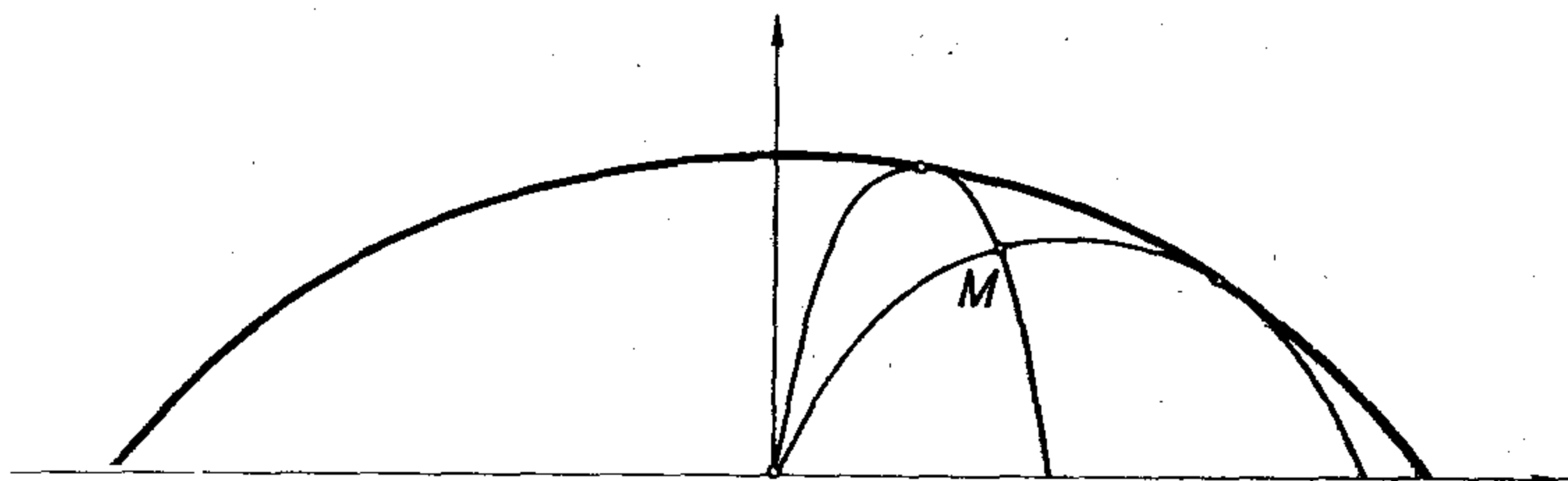
Ovaj uslov istovremeno omogućuje da se odredi početna brzina potrebna za pogađanje određenog cilja. Rešavanjem kvadratne jednačine $D(v_0^2) = 0$ koja odgovara uslovu (10) nalazi se da je $D \leq 0$ za

$$(11) \quad v_0^2 \leq g(\eta - \sqrt{\xi^2 + \eta^2})$$

i

$$(12) \quad v_0^2 \geq g(\eta + \sqrt{\xi^2 + \eta^2}).$$

Kako je $\eta - \sqrt{\xi^2 + \eta^2} < 0$, početna brzina, koja odgovara rešenju (11), je nemoguća pa za pogađanje cilja $M(\xi, \eta)$ početna brzina projektila mora zadovoljiti uslov (12).



Slika 66

Kvadratna jednačina $D(v_0^2) = 0$ određuje *parabolu sigurnosti* (sl. 66) i samo one tačke koje zadovoljavaju uslov (10) su dostupne pri datoj početnoj brzini. Za tačke M koje se nalaze na samoj paraboli sigurnosti postoji samo jedan elevacioni ugao, dok za ostale tačke postoje dva ugla, jedan veći i jedan manji od $\frac{\pi}{4}$.

Parabola sigurnosti je obvojnica svih mogućih trajektorija za dostizanje pojedinih ciljeva.

2.6.2. Kosi hitac u otpornoj sredini. Balistička linija

Proučavanje kretanja teške tačke u nekoj otpornoj sredini (npr. vazduhu) je osnovni zadatak *spoljne balistike*. Otpor sredine je sila koja deluje u pravcu kretanja tačke a suprotno je orijentisana od smera kretanja, tj. od smera brzine. Veličina otporne sile zavisi od brzine tačke, pa se u opštem slučaju za neku tačku mase m za otpornu silu može pisati

$$(1) \quad -mkf(v) \frac{\mathbf{v}}{v} \quad (k = \text{const.} > 0).$$

Vektorska diferencijalna jednačina kretanja biće

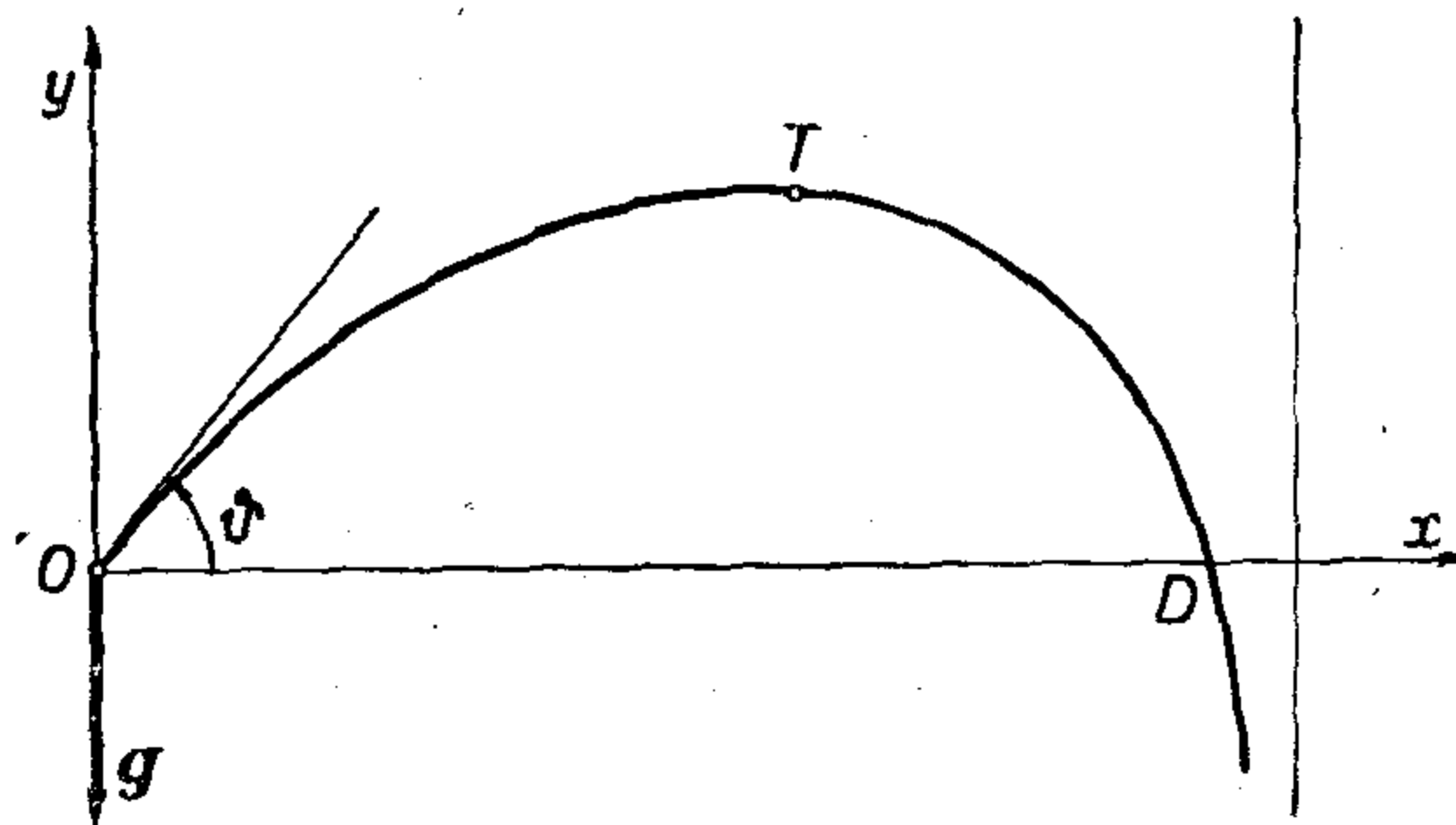
$$(2) \quad \mathbf{w} = \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{g} - kf(v) \frac{\mathbf{v}}{v}.$$

I u ovom slučaju, to se može pokazati, ako se obrtanje Zemlje oko svoje ose ne uzme u obzir, kretanje će biti u jednoj vertikalnoj ravni. Vektorska jednačina (2) može se stoga projicirati na ose prirodnog koordinatnog sistema — na pravac tangente i glavne normale ravanske trajektorije, čime se dobivaju dve skalarne diferencijalne jednačine ravanskog kretanja (2.3—11)

$$(3) \quad \frac{dv}{dt} = -kf(v) - g \sin \vartheta,$$

$$\frac{v^2}{\rho} = g \cos \vartheta,$$

gde je ρ poluprečnik krivine trajektorije, a ϑ ugao koji tangenta trajektorije obrazuje sa horizontom (sl. 67).



Slika 67

Kako se za element luka može napisati $ds = \rho d\vartheta$, biće (znak minus je stavljen jer ugao ϑ opada kad vreme raste)

$$\frac{1}{\rho} = - \frac{1}{v} \frac{d\vartheta}{dt},$$

pa se iz druge jednačine (3) izvodi

$$(4) \quad dt = - \frac{v}{g \cos \vartheta} d\vartheta.$$

Projiciranjem vektorske jednačine (2) na horizontalnu x -osu u ravni kretanja dobiva se

$$\frac{dv_x}{dt} = -kf(v) \frac{v_x}{v},$$

a kako je $v_x = v \cos \vartheta$ biće

$$(5) \quad \frac{d(v \cos \vartheta)}{dt} = -kf(v) \cos \vartheta.$$

Pomoću relacije (4) može se u (5) eliminisati vreme, tako da se dobiva tzv. *prvi oblik glavne balističke jednačine*,

$$(6) \quad \frac{d(v \cos \vartheta)}{d\vartheta} = \frac{kv}{g} f(v).$$

Integracijom ove jednačine dobiva se veza između veličine brzine i njenog nagiba prema horizontu

$$(7) \quad v = v(\vartheta),$$

a to je u stvari jednačina hodografa brzine u polarnim koordinatama za ovo kretanje. Unošenjem ove vrednosti za v u (4) dobiva se

$$(8) \quad t = -\frac{1}{g} \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} \frac{v(\vartheta)}{\cos \vartheta} d\vartheta = \varphi(\vartheta),$$

ako je u trenutku $t_0 = 0$ vrednost ugla ϑ jednaka ϑ_0 . Inverzijom funkcije $\varphi(\vartheta)$ nalazi se

$$(9) \quad \vartheta = \vartheta(t).$$

U Dekartovim pravouglim koordinatama je

$$(10) \quad \begin{aligned} dx &= \dot{x} dt = v \cos \vartheta dt, \\ dy &= \dot{y} dt = v \sin \vartheta dt, \end{aligned}$$

pa se eliminacijom vremena pomoću obrasca (4) dobivaju dve diferencijalne jednačine

$$(11) \quad dx = -\frac{1}{g} v^2 d\vartheta, \quad dy = -\frac{1}{g} v^2 \operatorname{tg} \vartheta d\vartheta,$$

koje se rešavaju kvadraturama,

$$(12) \quad x = -\frac{1}{g} \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} v^2 d\vartheta = x(\vartheta), \quad y = -\frac{1}{g} \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} v^2 \operatorname{tg} \vartheta d\vartheta = y(\vartheta).$$

Ovo su jednačine krive linije trajektorije uočene tačke, koja se zove *balistička linija* (sl. 67).

Kosi hitac u otpornoj sredini ima, i u najopštijem slučaju otporne sile date nekom funkcijom $f(v)$ brzine, čitav niz karakterističnih osobina (A. Bilimović, Racionalna mehanika I-Mehanika tačke, str. 134—135) od kojih ćemo ovde navesti samo neke:

1. Horizontalna komponenta brzine opada.
2. Oštar ugao ϑ koji tangenta trajektorije (i vektor brzine) obrazuje sa x -osom u početku kretanja manji je od ugla na kraju kretanja (u horizontu).
3. Daljina dometa od mesta izbacivanja (lansiranja) do mesta pada na horizont manja je od daljine dometa u bezvazdušnom prostoru

$$(13) \quad x_D < \frac{v_0^2}{g} \sin 2 \vartheta.$$

4. Produženje trajektorije ispod horizonta (sl. 67) ima vertikalnu asimptotu. Pri približavanju toj asimptoti brzina tačke teži vrednosti v_1 koja zadovoljava jednačinu

$$(14) \quad k f(v_1) = g.$$

Udaljenje asimptote od početnog položaja, koji se nalazi u koordinatnom početku (upravo jednačina te vertikalne asimptote) je

$$(15) \quad x = \frac{1}{g} \int_{\pi/2}^{\vartheta_0} v^2 d\vartheta.$$

5. Najmanja vrednost brzine nalazi se na delu putanje spuštanja projektila.
6. Brzina pada na horizont manja je od brzine izbacivanja.

U opštem slučaju ma za koju funkciju $f(v)$ diferencijalne jednačine kretanja ne mogu da se reše tačno pa se za njihovo rešavanje koriste približne metode i numeričko rešavanje. Na kvadrature se rešavanje ovih jednačina svodi samo u nekim slučajevima. Međutim, problem o kretanju kosog hica u otpornoj sredini može se približnim metodama relativno lako rešiti uvek kad je $f(v) = a + bv^n$, gde su a i b konstante a n ceo broj.

Slučaj $f(v) = kv^2$ ($k = \text{const.}$) dopušta vrlo dobru približnost pri određivanju kretanja sa subakustičnim brzinama manjim od $0,8 c$ (c brzina zvuka) npr. za određivanje kretanja bombi izbačenih iz aviona. U tom slučaju diferencijalna jednačina (6) izgleda

$$\frac{d(v \cos \vartheta)}{d\vartheta} = \frac{k}{g} v^3$$

i može se rešiti sa dovoljnom tačnošću naročito za male uglove izbacivanja (npr. $\vartheta \leq 15^\circ$). Tada se za jednačinu približne trajektorije (Лойцянский — Лурье: Курс теоретической механики, т. II изд. IV, стр. 48—49) dobiva

$$(16) \quad y = x \operatorname{tg} \vartheta_0 - \frac{g}{4 k^2 v_0^2} (e^{2\lambda} - 2\lambda - 1),$$

gde je

$$\lambda = \frac{kx}{\cos \vartheta} \text{ itd.}$$

Primeri i zadaci

1. Materijalna tačka se kreće oscilatorno po pravoj liniji u otpornoj sredini pod dejstvom sile proporcionalne rastojanju od nepokretnog centra O . Sila otpora sredine je proporcionalna brzini tačke. U početnom trenutku ($t_0 = 0$) je $x_0 = 0$, $\dot{x}_0 = 1 \text{ m/sec}$. Poznat je period oscilacije $T = 2 \text{ sec}$. i logaritamski dekrement $\lambda = 1/2$. Naći zakon kretanja.

Diferencijalna jednačina kretanja je (2.5.4—3)

$$\ddot{x} + 2l\dot{x} + kx = 0$$

a njen integral prema (2.5.4—8) biće

$$x = Ae^{-lt} \sin(pt + \beta).$$

Iz početnih uslova se nalazi

$$\beta = 0, \quad A = \frac{\dot{x}_0}{p} = \frac{1}{\pi} \text{ m} = \frac{100}{\pi} \text{ cm},$$

jer se iz obrasca (1.3.2—4) za frekvenciju dobiva

$$p = \frac{2\pi}{T} = \pi \text{ sec}^{-1}.$$

Prema (1.3.2—4 i 5) logaritamski dekrement određuje odnose amplituda pri amortizovanoj oscilaciji,

$$\lambda = \frac{1}{2} = \frac{l\pi}{p},$$

tako da je

$$l = \frac{1}{2} \text{ sec}^{-1},$$

pa zakon puta glasi (x u metrima)

$$x = \frac{1}{\pi} e^{-t/2} \sin \pi t.$$

2. Materijalna tačka M mase m kreće se po pravoj liniji pod dejstvom privlačne sile iz centra C na pravoj čiji je intenzitet na jediničnom rastojanju od C jednak mk^2 ($k = \text{const.}$). Sam centar vrši harmonijsku oscilaciju na datoj pravoj oko stalne tačke O sa amplitudom a i periodom T . Odrediti kretanje posmatrane materijalne tačke u odnosu na O i proučiti ga ako je sila privlačenja proporcionalna rastojanju.

Neka je prava po kojoj se kreću tačke C i M osa x . Kretanja tačke C prema tački O — početku — dato je izrazom

$$\overline{OC} = a \sin\left(\frac{2\pi}{T} t\right),$$

gde se može staviti $\frac{2\pi}{T} = \omega$. Ako se sa X obeleži sila koja dejstvuje na tačku M , onda je

$$X = -mk^2(x - a \sin \omega t),$$

tako da se diferencijalna jednačina kretanja može napisati u obliku

$$\ddot{x} + k^2x = a k^2 \sin \omega t.$$

Integral ove jednačine biće

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt + A \sin \omega t.$$

Za konstantu A se nalazi

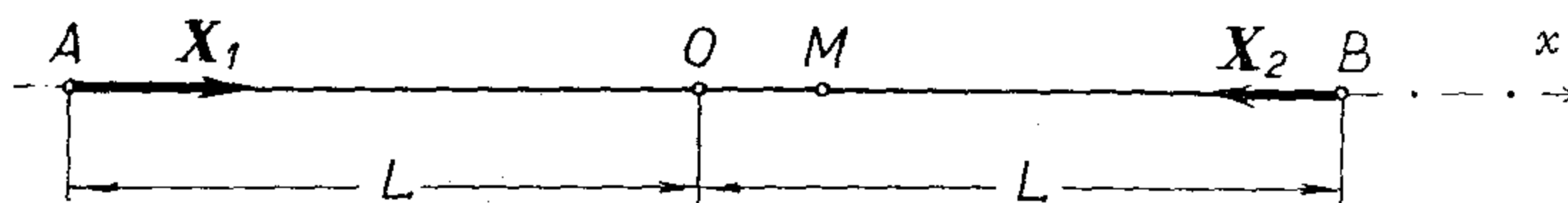
$$A = \frac{k^2 a}{k^2 - \omega^2} = \frac{k^2 a}{k^2 - 4\pi^2/T^2},$$

tako da se po određivanju konstanta integracije C_1 i C_2 pomoću početnih uslova $t_0 = 0$, $x_0 = 0$, $\dot{x}_0 \neq 0$ dobiva konačna jednačina kretanja u obliku

$$x = x_0 \cos kt + \left(\frac{\dot{x}_0}{k} + \frac{ka\omega}{k^2 - \omega^2} \right) \sin kt + \frac{k^2 a}{k^2 - \omega^2} \sin \omega t.$$

Kretanje tačke M se sastoji od dva periodna kretanja, jednog sa periodom $T = \frac{2\pi}{\omega}$ i drugog sa periodom $\frac{2\pi}{k}$.

3. Tačka M mase m kreće se po pravoj liniji pod dejstvom dveju odbojnih sila proporcionalnih masi tačke i obrnuto proporcionalnih kvadratu odstojanja



Slika 68

od nepokretnih centara A i B sila, a sa istim koeficijentom proporcionalnosti $\mu > 0$. Ako su centri sila udaljeni jedan od drugog $2L$, a tačka M se kreće po pravoj koja prolazi kroz ta dva centra i polazi bez početne brzine sa mesta koje je za kL ($k < 1$) udaljeno od sredine duži $2L$, pokazati da je kretanje oscilatorno i odrediti period.

Ako se za x -osu uzme prava po kojoj se tačka M kreće, početak postavi na sredini između odbojnih centara (sl. 68) biće sile koje dejstvuju na tačku M

$$X_1 = \frac{m\mu}{(L+x)^2}, \quad X_2 = -\frac{m\mu}{(L-x)^2},$$

a njihova rezultanta

$$X = X_1 + X_2 = -4m\mu L \frac{x}{(L^2 - x^2)^2}.$$

Diferencijalna jednačina kretanja je

$$\ddot{x} = -4\mu L \frac{x}{(L^2 - x^2)^2}.$$

Množenjem ove jednačine sa $2\dot{x} dt = 2 dx$ dobiće se

$$d\dot{x}^2 = -4\mu L \frac{dx^2}{(L^2 - x^2)^2},$$

odakle se, s obzirom na početne uslove $x_0 = kL$, $\dot{x}_0 = 0$ dobiva prvi integral

$$\dot{x}^2 = \frac{4\mu}{L} \frac{L^2 k^2 - x^2}{(1 - k^2)(L^2 - x^2)}.$$

Za dalju integraciju u ovoj relaciji je potrebno rastaviti promenljive,

$$dt = \frac{1}{2} \sqrt{L(1-k^2)/\mu} \left(\frac{L^2 - x^2}{L^2 k^2 - x^2} \right)^{1/2} dx.$$

Smenom $x = Lk \sin \theta$ dobiva se

$$t = \int_0^t dt = \frac{1}{2} \sqrt{L^3(1-k^2)/\mu} \int_{\pi/2}^{\theta} (1 - k^2 \sin^2 \theta)^{1/2} d\theta$$

ili

$$t = P \cdot I(\theta) - \int_0^{\pi/2} (1 - k^2 \sin^2 \theta)^{1/2} d\theta.$$

Ovde je uvedena oznaka P za koeficijent

$$P = \frac{1}{2} \sqrt{L^3(1-k^2)/\mu}$$

a

$$I(\theta) = \int_0^{\theta} (1 - k^2 \sin^2 \theta)^{1/2} d\theta$$

predstavlja eliptički integral druge vrste i određuje $I(\theta)$ kao funkciju gornje granice integrala. Promenljiva θ se dobiva inverzijom ovog integrala i nije elementarna funkcija, ali se u teoriji eliptičkih funkcija dokazuje da je tako definisana funkcija $\theta = \theta(t)$ periodna i da je njen realni period

$$T = 4PI\left(\frac{\pi}{2}\right),$$

odn.

$$T = 2 \sqrt{L^3(1-k^2)/\mu} \int_0^{\pi/2} (1 - k^2 \sin^2 \theta)^{1/2} d\theta.$$

4. Odrediti pravolinijsko kretanje materijalne tačke privlačene od jednog centra silom koja je obrnuto proporcionalna kubu odstojanja.

Rešenje :

$$x^2 = \left(\dot{x}_0^2 - \frac{\mu}{x_0^2} \right) t^2 + (x_0 t + x_0)^2.$$

5. Teška materijalna tačka mase m bačena je početnom brzinom v_0 pod uglom α prema horizontu. Otpor vazduha je proporcionalan brzini tačke. Naći trajektoriju tačke i graničnu vrednost njene brzine. Pokazati da putanja ima vertikalnu asimptotu.

Vektorska diferencijalna jednačina kretanja tačke je

$$m \ddot{\mathbf{r}} = m \mathbf{g} - mk^2 \dot{\mathbf{r}},$$

a ako se Dekartove pravouglove koordinate tako izaberu da početak O bude u početnom položaju tačke, x -osa horizontalna i y -osa vertikalna, a ravan $z = 0$ ravan kretanja, skalarne diferencijalne jednačine kretanja će biti

$$\ddot{x} + k\dot{x} = 0, \quad \ddot{y} + k\dot{y} = -g.$$

Početni uslovi su

$$t_0 = 0, \quad x_0 = y_0 = 0, \quad \dot{x}_0 = v_0 \cos \alpha, \quad \dot{y}_0 = v_0 \sin \alpha.$$

Integrali skalarnih jednačina kretanja su

$$x = \frac{v_0 \cos \alpha}{k} (1 - e^{-k^2 t}), \quad y = \frac{g + k^2 v_0 \sin \alpha}{k^4} (1 - e^{-k^2 t}) - \frac{g}{k^2} t.$$

Kad vreme neograničeno raste, $t \rightarrow \infty$, dobiva se vertikalna asimptota

$$x = \frac{v_0 \cos \alpha}{k^2}.$$

Koordinate brzine tačke su

$$\dot{x} = v_0 \cos \alpha e^{-k^2 t}, \quad \dot{y} = -\frac{g}{k^2} + \frac{g + k^2 v_0 \sin \alpha}{k^2} e^{-k^2 t},$$

pa će, kada vreme raste, biti

$$\dot{x} \rightarrow 0, \quad \dot{y} \rightarrow -\frac{g}{k^2}$$

i veličina brzine teži granici

$$|v| \rightarrow \frac{g}{k^2}.$$

6. Teška tačka jedinične mase kreće se po krivoj liniji u vertikalnoj ravni. (sl. 69). Ako je s dužina luka te krive merenog od preseka krive sa ordinatnom osom (orijentisanom naviše), $s = k \ln y$. Kretanju se suprotstavlja sila otpora intenziteta $Av^2/2$, gde je $A = \text{const.} > 0$ a v brzina tačke. U početnom trenutku se tačka nalazila u položaju $y_0 = b$ i saopštena joj je početna brzina veličine c . Naći: a) brzinu tačke $v = v(y)$; b) položaj u kome brzina dostiže maksimum i c) brzinu koju tačka ima u trenutku kad putanja seče ordinatnu osu?

a) Pošto je sila otpora uvek u pravcu tangente na putanju, najpogodnije je posmatrati prirodne jednačine kretanja. U odnosu na tangentu prirodna jednačina kretanja je

$$\frac{dv}{dt} = -g \cos \varphi + \frac{A}{2} v^2,$$

gde je φ ugao definisan sa

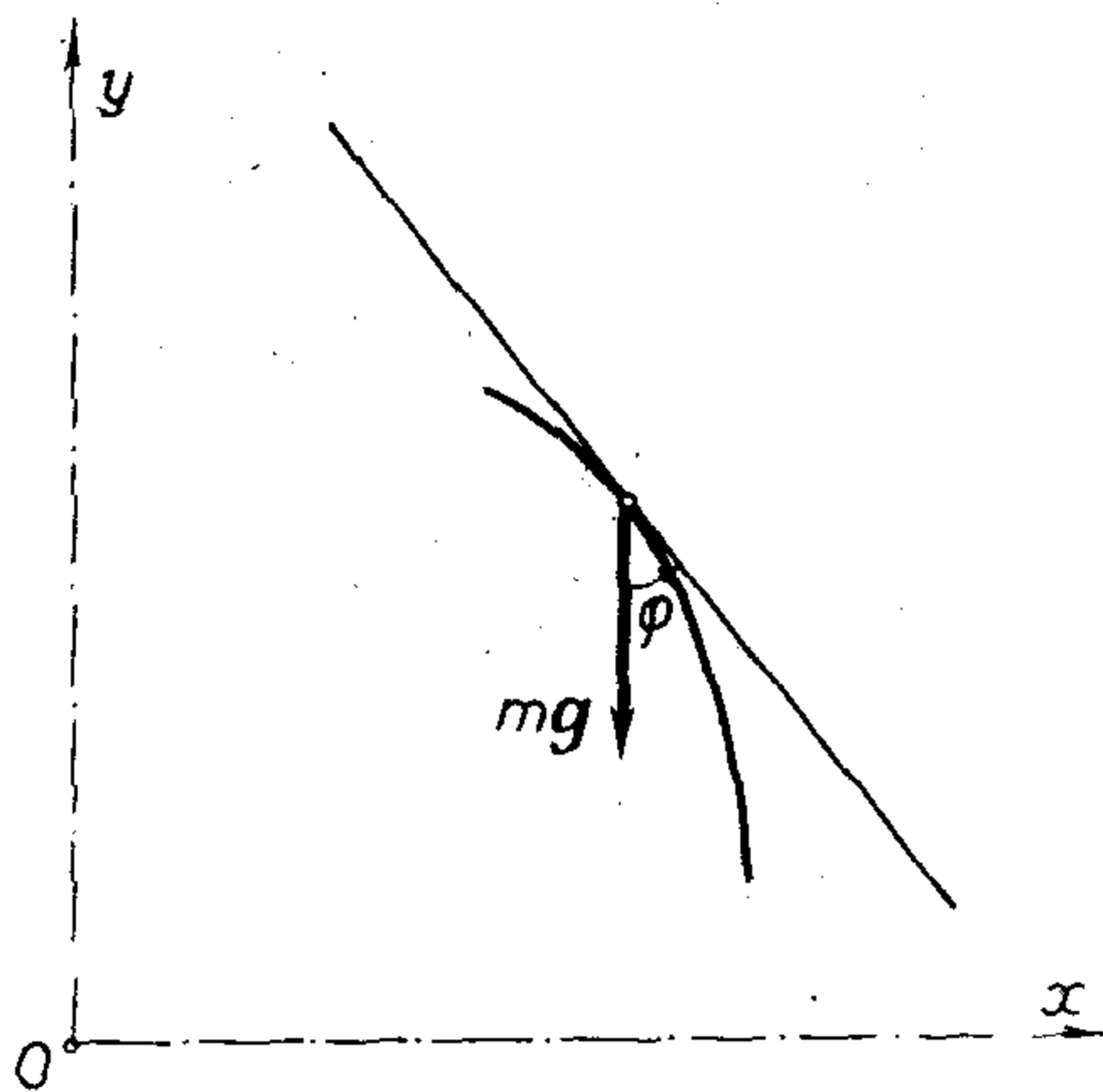
$$\cos \varphi = \frac{dy}{ds} = \frac{d}{ds} (e^{s/k}) = \frac{y}{k},$$

tako da se jednačina kretanja svodi na

$$\frac{dv}{dt} = -g \frac{y}{k} + \frac{A}{2} v^2.$$

Međutim je

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds} v = \frac{1}{2} \frac{y}{k} \frac{dv^2}{dy},$$



Slika 69

što zamenom u diferencijalnoj jednačini daje

$$\frac{dv^2}{dy} - \frac{Ak}{y} v^2 = -2g.$$

Ovo je linearna jednačina po kvadratu brzine. Ako se stavi $Ak = \lambda$, integral homogene jednačine koja odgovara gornjoj diferencijalnoj jednačini biće

$$v^2 = Cy^\lambda.$$

Da bi to bilo i rešenje nehomogene jednačine mora biti

$$C = -2g \frac{y^{1-\lambda}}{1-\lambda} + D \quad (D = \text{const.})$$

pa je opšte rešenje

$$v^2 = y^\lambda \left(D + 2g \frac{y^{1-\lambda}}{\lambda-1} \right).$$

Zamenom početnih vrednosti dobiva se

$$v^2 = y^\lambda \left[\frac{2g}{\lambda-1} (y^{1-\lambda} - b^{1-\lambda}) + C^2 b^{-\lambda} \right].$$

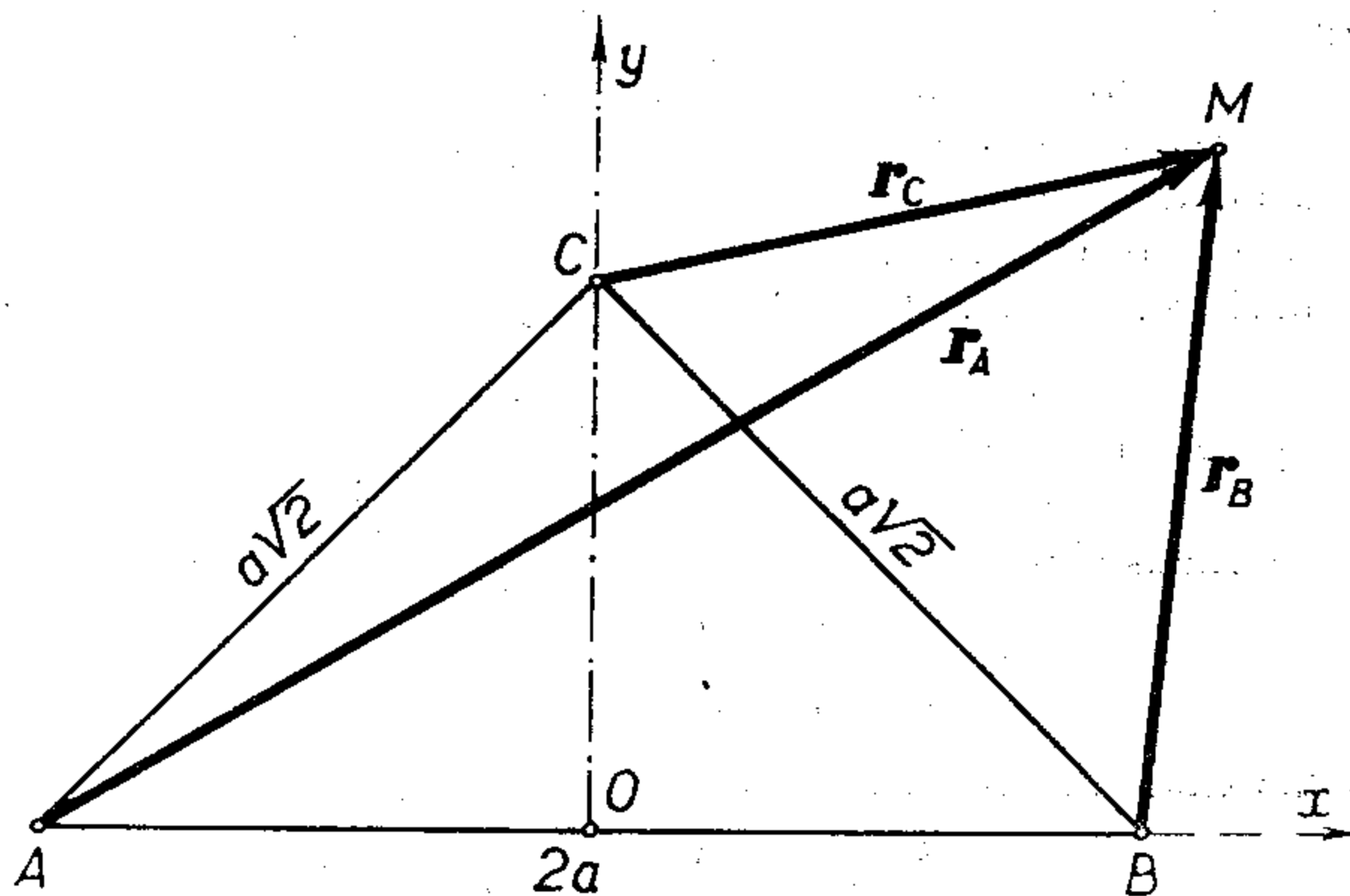
b) Iz uslova za ekstremum brzine u obliku $\frac{dv^2}{dy} = 0$ neposredno se dobiva da je brzina u ekstremumu kad je tačka u položaju određenom sa

$$y = \left\{ \frac{2gb^\lambda}{[2gb - c^2(\lambda-1)]\lambda} \right\}^{\frac{1}{\lambda-1}}.$$

c) Tačka će se naći na y -osi kad je $s = 0$, odnosno $y = 1$, što zamenom u izrazu za brzinu daje

$$v^2 = \frac{2g}{\lambda-1} (1 - b^{1-\lambda}) + c^2 b^{-\lambda}.$$

7. U temenu B jednakokrakog trougla ABC , čija je osnovica $AB = 2a$, a krak $AC = BC = a\sqrt{2}$, nalazi se u početnom trenutku $t_0 = 0$ u miru materijal-



Slika 70

na tačka M mase $m = 1$. Ovu tačku privlače sva tri temena trougla silama proporcionalnim rastojanju odgovarajućeg temena od M , ali sa istim koeficijentom pro-

porcionalnosti k^2 . Odrediti: a) koordinate brzine tačke u zavisnosti od položaja, b) konačne jednačine kretanja tačke i c) trajektoriju.

Neka su vektori položaja tačke M u odnosu na temena trougla

$$\vec{AM} = \mathbf{r}_A, \quad \vec{BM} = \mathbf{r}_B, \quad \vec{CM} = \mathbf{r}_C.$$

Rezultanta svih sila koje deluju na tačku je

$$\mathbf{F} = -k^2(\mathbf{r}_A + \mathbf{r}_B + \mathbf{r}_C).$$

Za sistem koordinata na slici 70 sila je

$$\mathbf{F} = -k^2(3\mathbf{r} - a\mathbf{j}).$$

Diferencijalne jednačine kretanja su

$$\ddot{x} + 3k^2x = 0, \quad \ddot{y} + 3k^2y = ak^2.$$

a) Prvi integrali diferencijalnih jednačina kretanja daju traženu vezu između brzine i položaja

$$\dot{x} = -k\sqrt{3(a^2 - x^2)}, \quad \dot{y} = k\sqrt{2ay - 3y^2}.$$

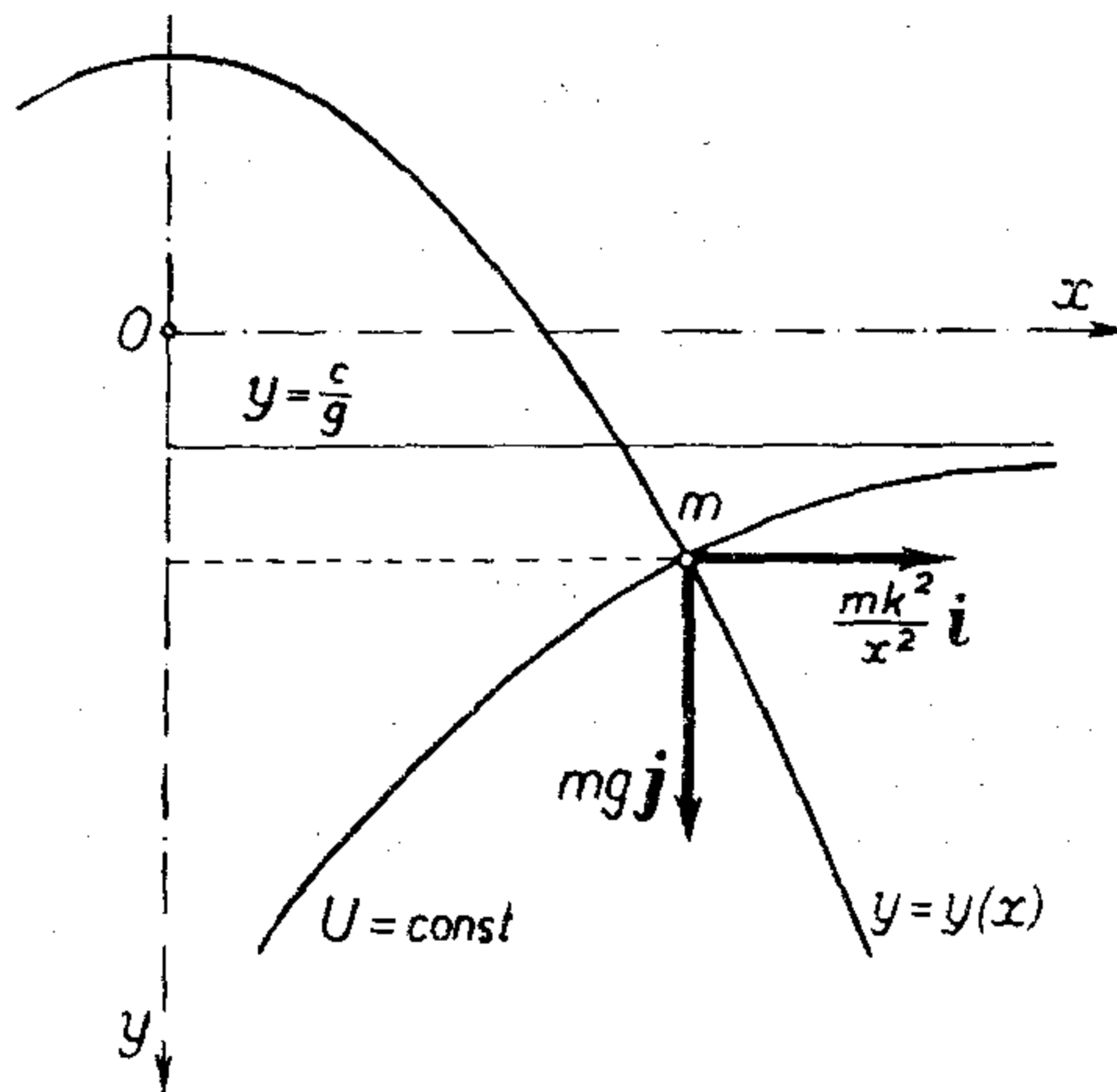
b) Integraljenjem diferencijalnih jednačina kretanja se dobivaju konačne jednačine

$$x = a \cos(kt\sqrt{3}), \quad y = \frac{1}{3}a[1 - \cos(kt\sqrt{3})].$$

c) Eliminacijom vremena iz konačnih jednačina kretanja dobiće se jednačina trajektorije

$$x + 3y = a.$$

8. Na tešku tačku mase m deluje horizontalna odbojna sila obrnuto proporcionalna kubu odstojanja tačke od date vertikalne ose Oy , orijentisane naniže.



Slika 71

Tačka se u početnom trenutku nalazila u miru na rastojanju a od te ose (sl. 71). Odrediti jednačinu trajektorije.

Rezultanta sila koje deluju na tačku, ako se za x -osu izabere horizontalna osa usmerena u pravcu dejstva sile biće

$$\mathbf{F} = m \frac{k^2}{x^3} \mathbf{i} + mg \mathbf{j}.$$

Diferencijalne jednačine kretanja tačke glase

$$\ddot{x} = \frac{k^2}{x^3}, \quad \ddot{y} = g$$

tako da su konačne jednačine

$$x^2 = a^2 + \frac{k^2}{a^2} t^2, \quad y = \frac{1}{2} g t^2.$$

Eliminacijom vremena dobiće se jednačina trajektorije

$$y = \frac{g a^2}{2 k^2} x^2 - \frac{1}{2} \frac{g a^4}{k^2}.$$

9. Teška tačka slobodno pada, polazeći iz stanja mira u sredini čiji je otpor proporcionalan kvadratu brzine (faktor proporcionalnosti je k^2). Naći brzinu tačke kao funkciju pređenog puta, brzinu tačke kao funkciju vremena i konačne jednačine kretanja.

R e š e n j e : Brzina tačke kao funkcija pređenog puta je

$$\dot{x} = \left[\frac{g}{k^2} (1 - e^{-2kx}) \right]^{1/2},$$

odakle proističe da brzina nikada ne može biti veća od

$$\frac{1}{k} \sqrt{g}.$$

Brzina kao funkcija vremena određena je obrascem

$$\dot{x} = \frac{\sqrt{g}}{k} \frac{e^{2kt\sqrt{g}} - 1}{e^{2kt\sqrt{g}} + 1},$$

a konačna jednačina kretanja je

$$x = \frac{1}{k^2} \ln \operatorname{ch}(kt\sqrt{g}).$$

10. O elastičnu oprugu, koja je jednim krajem učvršćena, obešen je teret težine $P = 100$ g. Odrediti period T i amplitudu A oscilacija tereta, ako se opruga pri opterećenju od 20 g izduži za 1 cm i ako je u trenutku vešanja teret P bio u miru.

R e š e n j e :

$$x = \frac{g}{k^2} (1 - \cos kt), \quad A = 5 \text{ cm}, \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{5}{2g}} \text{ sec.}$$

11. Materijalna tačka jedinične mase kreće se pravolinijski pod dejstvom sile privlačenja ka nepokretnom centru O . Sila je proporcionalna rastojanju tačke

od centra, pri čemu je koeficijent proporcionalnosti 25. Otporna sila je proporcionalna brzini tačke sa koeficijentom proporcionalnosti 6. Naći zakon kretanja tačke ako je u početnom trenutku rastojanje tačke od centra bilo 8, a početna brzina $v_0 = 0$.

R e š e n j e :
$$x = 2 e^{-3t} (4 \cos 4 t + 3 \sin 4 t).$$

12. Na materijalnu tačku jedinične mase dejstvuje sila proporcionalna rastojanju tačke od x -ose koja za $y = 1$ saopštava tački ubrzanje c^2/a^2 . U početnom trenutku, $t_0 = 0$, je $x_0 = 0$, $y_0 = a$, $\dot{x}_0 = c$, $\dot{y}_0 = 0$. Odrediti: a) konačne jednačine kretanja tačke, b) koordinate brzine u zavisnosti od položaja, c) koordinate brzine u zavisnosti od vremena i d) oblik krive linije trajektorije.

R e š e n j e :

a)
$$x = ct, \quad y = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{c}{a} t} + e^{-\frac{c}{a} t} \right);$$

b)
$$\dot{x} = c, \quad \dot{y} = \frac{c}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}} \right);$$

c)
$$\dot{x} = c, \quad \dot{y} = \frac{c}{2} \left(e^{\frac{ct}{a}} - e^{-\frac{ct}{a}} \right);$$

d)
$$y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}.$$

13. Teška tačka jedinične mase kreće se u ravni pod dejstvom sile

$$X = -16x, \quad Y = -4y.$$

U početnom trenutku tačka se nalazila na x -osi na rastojanju 1 od početka i saopštena joj je početna brzina veličine 2 u pravcu y -ose. Odrediti konačne jednačine kretanja i trajektoriju.

R e š e n j e :

$$x = \cos 4t, \quad y = \sin 2t; \quad 2y^2 + x - 1 = 0.$$

14. Materijalnu tačku koja se kreće u ravni privlači nepokretni centar O silom proporcionalnom rastojanju, $F = k^2mr$, gde je k stalni koeficijent a r rastojanje tačke od O . U početnom trenutku je $r_0 = a$, a brzina v_0 obrazuje sa pravcem OM_0 (M_0 je početni položaj tačke) ugao α . Odrediti kretanje uzimajući pravu OM_0 za x -osu.

R e š e n j e:

$$x = a \cos kt + \frac{v_0}{k} \cos \alpha \sin kt, \quad y = \frac{v_0}{k} \sin \alpha \sin kt;$$

$$x^2 - 2a \operatorname{ctg} \alpha xy + \left(\frac{a^2 k^2}{v_0^2 \sin^2 \alpha} + \operatorname{ctg}^2 \alpha \right) y^2 - a^2 = 0.$$

15. Materijalnu tačku privlači proporcionalno rastojanju centar C koji se kreće jednoliko po krugu poluprečnika R sa centrom u O . U početku se tačka nalazila u miru u tački O . Odrediti konačne jednačine kretanja.

Rešenje:

$$x = \frac{R}{k^2 - \omega^2} (\cos \omega t - \cos kt),$$

$$y = \frac{kR}{k^2 - \omega^2} (k \sin \omega t - \omega \sin kt).$$

2.7. Osnovne teoreme dinamike materijalne tačke

U dosadanjim izlaganjima i primerima osnovni problem dinamike — određivanje kretanja iz diferencijalnih jednačina — rešavan je polazeći od samih diferencijalnih jednačina. Problemi u kojima se direktnim integraljenjem diferencijalnih jednačina mogu dobiti rešenja su malobrojni i predstavljaju specijalne slučajeve, pa se u opštem slučaju moraju koristiti metode za nalaženje približnih rešenja. Same mehaničke osobine kretanja, međutim, poseduju izvesne pravilnosti koje se mogu formulisati u vidu *opštih teorema* ili *zakona*. Ti zakoni omogućuju da se izvesne osobine kretanja u specijalnim slučajevima sagledaju i odrede neposredno, bez integracije, a pod određenim uslovima se iz njih mogu neposredno izvesti i neki prvi integrali diferencijalnih jednačina kretanja, čime se problem određivanja kretanja često znatno uporšćava.

2.7.1. Teorema količine kretanja. Integrali količine kretanja

Proizvod mase m materijalne tačke i i njene brzine \mathbf{v} , tj.

$$(1) \quad \mathbf{K} = m\mathbf{v}$$

zove se *količina kretanja* materijalne tačke i već je pomenuta u osnovnim zakonima mehanike (2.1). Kad se masa tačke ne menja, diferenciranjem relacije (1) po vremenu dobiva se

$$(2) \quad \dot{\mathbf{K}} = m\mathbf{w},$$

a prema osnovnoj vektorskoj jednačini kretanja (2.1—2) biće

$$(3) \quad \dot{\mathbf{K}} = \mathbf{F},$$

tj. *izvod količine kretanja po vremenu jednak je sili koja deluje na tačku*. Ovo tvrđenje predstavlja *teoremu količine kretanja*.

Relacija (3) može se napisati i pomoću diferencijala

$$(4) \quad d\mathbf{K} = \mathbf{F} dt,$$

gde je $\mathbf{F} dt$ *elementarni impuls* sile \mathbf{F} . Integracijom jednačine (4) u nekom intervalu t_0 do t dobiva se konačni priraštaj količine kretanja materijalne tačke u posmatranom intervalu

$$(5) \quad \mathbf{K} - \mathbf{K}_0 = \int_{t_0}^t \mathbf{F} dt = \mathbf{J}.$$

Ovde je \mathbf{J} *konačni impuls sile* \mathbf{F} , a \mathbf{K} i \mathbf{K}_0 su vrednosti količine kretanja u trenucima t i t_0 . Impuls i količina kretanja imaju istu dimenziju MLT^{-1} .

Jednačina (5) predstavlja zakon o konačnom priraštaju količine kretanja: *Priraštaj količine kretanja u nekom intervalu vremena jednak je impulsu sile u tom intervalu.*

U Dekartovim pravouglim koordinatama zakon o konačnom priraštaju količine kretanja može se izraziti pomoću tri skalarne jednačine dobivene projekcijanjem vektorske jednačine (5) na koordinatne ose

$$(6) \quad \begin{aligned} m\dot{x} - m\dot{x}_0 &= J_x = \int_{t_0}^t X dt, \\ m\dot{y} - m\dot{y}_0 &= J_y = \int_{t_0}^t Y dt, \\ m\dot{z} - m\dot{z}_0 &= J_z = \int_{t_0}^t Z dt. \end{aligned}$$

Kad je sila \mathbf{F} upravna na neki stalni pravac određen jediničnim vektorom \mathbf{a} , skalarnim množenjem vektorske jednačine (3) vektorom \mathbf{a} dobiva se

$$\dot{\mathbf{K}} \cdot \mathbf{a} = 0$$

odnosno, pošto je \mathbf{a} stalan vektor

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{K} \cdot \mathbf{a}) = 0,$$

odakle proističe

$$(7) \quad \mathbf{K} \cdot \mathbf{a} = C = \text{const.}$$

Relacija (7) predstavlja jedan prvi integral diferencijalnih jednačina kretanja, a C je konstanta integracije. Integral (7) se naziva *integral količine kretanja za dati pravac a*.

U opštem slučaju može biti više pravaca upravnih na silu i za svaki od tih pravaca postoji tada po jedan integral količine kretanja. Međutim, može postojati najviše tri međusobno nezavisna integrala, jer se svaki vektor može rastaviti u komponente u pravcu tri data nekomplanarna vektora. Neka tri nekomplanarna vektora za koje postoje integrali količine kretanja budu \mathbf{a}_1 , \mathbf{a}_2 i \mathbf{a}_3 , tako da su odgovarajući integrali

$$(8) \quad \mathbf{K} \cdot \mathbf{a}_i = C_i, \quad (i = 1, 2, 3)$$

Ako je \mathbf{a}_4 neki vektor za koji je takođe $\mathbf{F} \cdot \mathbf{a}_4 = 0$, onda je

$$(9) \quad \mathbf{K} \cdot \mathbf{a}_4 = C_4.$$

Kako se uvek vektor \mathbf{a}_4 može izraziti u obliku

$$(10) \quad \mathbf{a}_4 = \sum_{i=1}^3 \alpha_i \mathbf{a}_i,$$

gde su α_i neki konstantni skalarni množiocci (Andelić, Teorija vektora, III. izdanje, str. 24) biće

$$(11) \quad \mathbf{K} \cdot \mathbf{a}_4 = \sum_{i=1}^3 \alpha_i \mathbf{K} \cdot \mathbf{a}_i = \sum_{i=1}^3 \alpha_i C_i$$

i integral (9) je linearna kombinacija prva tri nezavisna integrala. U slučaju ravanskog kretanja mogu postojati najviše dva linearno nezavisna integrala količine kretanja (treći integral, u odnosu na pravac upravan na ravan kretanja, trivijalan je).

Kad postoje tri nezavisna integrala količine kretanja, na materijalnu tačku ne djeluje nikakva sila jer je sila, čije su projekcije na tri nekomplanarne ose jednake nuli, i sama jednaka nuli. Tada je

$$(11a) \quad \mathbf{K} = m \mathbf{v} = \mathbf{C} = \text{const.}$$

U slučaju postojanja nekog integrala količine kretanja zgodno je uvek tako izabrati koordinatni sistem da se jedna ili više osa Dekartovog pravouglog sistema poklopi sa pravcima za koje ti integrali postoje. Npr. ako postoji integral za pravac određen jediničnim vektorom \mathbf{a} , može se x -osa izabrati tako da bude $\mathbf{a} = \mathbf{i}$ i $\mathbf{F} \cdot \mathbf{i} = 0$ pa je odnosni prvi integral

$$(12) \quad K_x = m \dot{x} = C_1.$$

Kad postoje tri integrala uvek se može napisati

$$(13) \quad K_x = m \dot{x} = C_1, \quad K_y = m \dot{y} = C_2, \quad K_z = m \dot{z} = C_3.$$

Pomoću integrala količine kretanja, kad ovi postoje, može se odrediti jedna ili više koordinata vektora brzine bez ikakve integracije.

U slučaju (11a), kad na materijalnu tačku ne djeluju spoljašnje sile, količina kretanja ostaje u toku kretanja nepromenjena, nezavisno od dejstva unutrašnjih sila. To znači, ako bi u tom slučaju došlo do razletanja pojedinih delova tela, koje se kretalo kao materijalna tačka, npr. usled neke eksplozije, ukupna količina kretanja svih delova neće biti promenjena — ona ostaje očuvana, jednaka prvobitnoj količini kretanja. Ova činjenica je poznata kao *zakon o održanju količine kretanja*.

2.7.2. Teorema kinetičkog momenta. Integrali kinetičkog momenta

Kinetički moment ili *moment količine kretanja* \mathbf{M}^o u odnosu na neki nepokretni pol O je vektor određen vektorskim proizvodom vektora položaja posmatrane materijalne tačke u odnosu na pol O i količine kretanja tačke

$$(1) \quad \mathbf{M}^o = \mathbf{r} \times \mathbf{K} = \mathbf{r} \times m \mathbf{v}.$$

Kinetički moment u odnosu na osu \mathbf{u} je skalar — skalarni proizvod kinetičkog momenta u odnosu na pol i jediničnog vektora \mathbf{u} kroz pol u pravcu uočene ose

$$(2) \quad M_u^o = \mathbf{M}^o \cdot \mathbf{u} = (\mathbf{r} \times \mathbf{K}) \cdot \mathbf{u}.$$

Projiciranjem na Dekartove pravouglo koordinatne ose dobivaju se Dekartove koordinate kinetičkog momenta \mathbf{M}^o

$$(3) \quad \begin{aligned} M_x^o &= \mathbf{M}^o \cdot \mathbf{i} = m(y\dot{z} - z\dot{y}), \\ M_y^o &= \mathbf{M}^o \cdot \mathbf{j} = m(z\dot{x} - x\dot{z}), \\ M_z^o &= \mathbf{M}^o \cdot \mathbf{k} = m(x\dot{y} - y\dot{x}). \end{aligned}$$

Skalari M_x^o , M_y^o i M_z^o su upravo kinetički momenti u odnosu na ose x , y i z .

Diferencijaljenjem po vremenu vektorske relacije (1) dobiće se

$$(4) \quad \dot{\mathbf{M}}^o = \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{K} + \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{K}}$$

a kako je $\dot{\mathbf{r}}$ kolinearno sa $\mathbf{K} = m \mathbf{v}$, to je

$$\dot{\mathbf{M}}^o = \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{K}}.$$

Prema teoremi količine kretanja (2.8.1—3) je $\dot{\mathbf{K}} = \mathbf{F}$, pa se (4) može napisati

$$(5) \quad \dot{\mathbf{M}}^o = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{L}^o$$

gde je $\mathbf{L}^o = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ moment sile odnosno rezultante sile koje dejstvuju na uočenu materijalnu tačku u odnosu na pol O .

Obrazac (5) predstavlja *teoremu kinetičkog momenta*: Izvod po vremenu kinetičkog momenta u odnosu na neki pol jednak je momentu sile koja dejstvuje na tačku u odnosu na isti pol.

Koristeći obrazac (1.5—6) relacija (5) se može napisati i u obliku koji sadrži sektorsku brzinu

$$(6) \quad 2 m \dot{\mathbf{S}} = \mathbf{L}^o.$$

Projiciranjem izvoda kinetičkog momenta po vremenu na ose Dekartovog pravouglog sistema dobiva se

$$(7) \quad \dot{M}_x^o = m(y\ddot{z} - z\ddot{y}); \quad \dot{M}_y^o = m(z\ddot{x} - x\ddot{z}); \quad \dot{M}_z^o = m(x\ddot{y} - y\ddot{x}),$$

a projiciranjem momenta sile

$$(8) \quad L_x^o = yZ - zY, \quad L_y^o = zX - xZ, \quad L_z^o = xY - yX.$$

Prema tome, vektorski izraz (5) za zakon (teoremu) kinetičkog momenta svodi se na tri skalarne relacije

$$(9) \quad \begin{aligned} \dot{M}_x^o &= yZ - zY = L_x^o, \\ \dot{M}_y^o &= zX - xZ = L_y^o, \\ \dot{M}_z^o &= xY - yX = L_z^o. \end{aligned}$$

Kad se nedvosmisleno zna u odnosu na koji pol se određuju momenti može oznaka pola da se izostavi.

Ako postoji neki stalni pravac određen vektorom \mathbf{a} takav da je moment sile u odnosu na osu određenu tim vektorom jednak nuli, tj. da je $\mathbf{L} \cdot \mathbf{a} = 0$, iz teoreme kinetičkog momenta neposredno proističe jedan prvi integral. Skalarnim množenjem vektorske relacije (5) vektorom \mathbf{a} u tom se slučaju dobiva

$$(10) \quad \dot{\mathbf{M}} \cdot \mathbf{a} = \frac{d}{dt} (\mathbf{M} \cdot \mathbf{a}) = 0,$$

pa je

$$(10a) \quad \mathbf{M} \cdot \mathbf{a} = \Gamma = \text{const.},$$

gde je Γ proizvoljna skalarna konstanta integracije. Relacija (10) predstavlja *integral kinetičkog momenta za dati pravac \mathbf{a}* . Kako je $M_a = \mathbf{M} \cdot \mathbf{a}$ kinetički moment za osu \mathbf{a} , to integral kinetičkog momenta za neku osu kazuje da je za tu osu kinetički moment konstantan.

Ako je kinetički moment, recimo, za x -osu stalan, tj. ako je koordinata momenta sile L_x jednaka nuli, odgovarajući integral kinetičkog momenta je

$$(11) \quad M_x = m(\dot{y}z - y\dot{z}) = \Gamma_x.$$

Međutim je, prema (6) i (1.5—8)

$$\dot{y}z - y\dot{z} = 2 S_x$$

pa se integral (11) može napisati u obliku

$$(12) \quad S_x = \frac{1}{2m} \Gamma_x,$$

a to kazuje da je tada projekcija vektora sektorske brzine na x -osu konstantna, odnosno, da projekcija vektora položaja pokretne tačke na ravan Oyz opisuje za jednaka vremena jednake površine. Stoga se integral oblika (12) zove *integral površine* datog dinamičkog problema.

Kad postoji integral kinetičkog momenta za neki pravac \mathbf{a} , vektori \mathbf{a} , \mathbf{r} i \mathbf{F} su komplanarni. Ako postoje dva takva integrala, recimo za pravce \mathbf{a}_1 i \mathbf{a}_2 koji prolaze kroz pol O , onda proističe da sila \mathbf{F} u tački \mathbf{r} istovremeno leži u ravni određenoj vektorima \mathbf{a}_1 i \mathbf{r} i vektorima \mathbf{a}_2 i \mathbf{r} . Ako se te dve ravni ne poklapaju vektor \mathbf{F} se nalazi u preseku te dve ravni, tj. kolinearan je sa vektorom položaja \mathbf{r} i prolazi kroz pol O . Kako je vektorski proizvod dva kolinearna vektora jednak nuli to je i moment sile u odnosu na pol O jednak nuli, odnosno moment sile u odnosu na ma koju osu kroz O je jednak nuli. Međutim, ako su vektori \mathbf{a}_1 , \mathbf{a}_2 i \mathbf{F} u istoj ravni, moment sile je upravan na tu ravan ali nije nula pa stoga ne postoji i treći pravac nekomplanaran sa prva dva za koji bi postojao integral kinetičkog momenta. U tom slučaju je i vektor položaja stalno u ravni određenoj vektorima \mathbf{a}_1 i \mathbf{a}_2 .

Na osnovu izloženog može se sada formulisati i naredna teorema o broju integrala kinetičkog momenta:

Ako postoje dva integrala kinetičkog momenta, onda postoji i treći, ili se uočena materijalna tačka kreće stalno u ravni određenoj datim osama u odnosu na koje postoje navedena dva integrala.

Kad postoje tri skalarna integrala kinetičkog momenta, moment sile je nula i iz teoreme kinetičkog momenta sledi vektorski integral

$$(13) \quad \mathbf{M} = \mathbf{r} \times m \mathbf{v} = \mathbf{\Gamma},$$

gde je $\mathbf{\Gamma}$ konstantan vektor koji se određuje iz početnih uslova,

$$(14) \quad \mathbf{\Gamma} = m(\mathbf{r}_0 \times \mathbf{v}_0).$$

Ako postoji za neko kretanje vektorski integral (13), zbog konstantnosti vektora $\mathbf{\Gamma}$ moraju i vektori \mathbf{r} i \mathbf{v} stalno da se nalaze u jednoj nepromenljivoj ravni, te je kretanje ravansko.

Pri ravanskom kretanju (recimo u Oxy ravni) je stalno $z = 0$, pa prema teoremi kinetičkog momenta može da se izvede jedna skalarna jednačina

$$(15) \quad m \frac{d}{dt} (x\dot{y} - y\dot{x}) = xY - yX = L_z,$$

ili (1.5—9) u polarnim koordinatama ρ i φ

$$(16) \quad 2m\dot{S}_z = \rho^2 \dot{\varphi} = L_z.$$

Integral površine koji odgovara z -osi može prema tome da se napiše u obliku

$$(16a) \quad \rho^2 \dot{\theta} = A.$$

Kad jednovremeno postoji i vektorski integral kinetičkog momenta i vektorski integral količine kretanja, između ova dva integrala postoji jednostavna veza. Naime,

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{M} = m \mathbf{v} \cdot (\mathbf{r} \times m \mathbf{v}) \equiv 0$$

pa je otuda

$$(17) \quad \mathbf{C} \cdot \mathbf{\Gamma} = C_x \Gamma_x + C_y \Gamma_y + C_z \Gamma_z = 0.$$

Do sada je posmatran moment količine kretanja u odnosu na neki nepokretni pol. Za pokretni pol A može se takođe formulirati teorema kinetičkog momenta. Neka je $\overrightarrow{OM} = \mathbf{r}$ a $\overrightarrow{AM} = \mathbf{q}$ vektor položaja pokretne tačke u odnosu na pol A i $\overrightarrow{OA} = \mathbf{r}_A$ vektor položaja pokretnog pola u odnosu na nepokretni. Prema definiciji momenta vektora može se napisati

$$(18) \quad \mathbf{M}^A = \mathbf{q} \times \mathbf{K}.$$

Kako je $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM}$, tj. $\mathbf{r} = \mathbf{r}_A + \mathbf{q}$, biće

$$(19) \quad \mathbf{M}^O = \mathbf{r}_A \times \mathbf{K} + \mathbf{M}^A.$$

Diferencijacijom ove relacije po vremenu dobiće se

$$(20) \quad \dot{\mathbf{M}}^O = \dot{\mathbf{r}}_A \times \mathbf{K} + \mathbf{r}_A \times \dot{\mathbf{K}} + \dot{\mathbf{M}}^A.$$

Moment sile u odnosu na nepokretni pol O je

$$(21) \quad \mathbf{L}^O = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{r}_A \times \mathbf{F} + \mathbf{q} \times \mathbf{F}.$$

Uvođenjem oznake

$$\mathbf{q} \times \mathbf{F} = \mathbf{L}^A$$

za moment sile u odnosu na pokretni pol A , iz (21) se dobiva da je

$$(22) \quad \mathbf{L}^O - \mathbf{r}_A \times \mathbf{F} = \mathbf{L}^A.$$

Relacija (20) može onda, da se napiše u obliku

$$\dot{\mathbf{M}}^A = \dot{\mathbf{M}}^O - \dot{\mathbf{r}}_A \times \mathbf{K} - \mathbf{r}_A \times \dot{\mathbf{K}}$$

i najzad kad se brzina pokretnog pola prema nepokretnom obeleži $\dot{\mathbf{r}}_A = \mathbf{v}_A$ i uzme u obzir teorema količine kretanja (5)

$$(23) \quad \dot{\mathbf{M}}^A = \mathbf{L}^A - \mathbf{v}_A \times \mathbf{K}.$$

Ova relacija predstavlja *teoremu kinetičkog momenta za pokretni pol*.

Neka je \mathbf{u} jedinični vektor neke promenljive ose. Skalarnim množenjem izvoda vektora \mathbf{M} po vremenu dobiće se projekcija tog izvoda na promenljiv pravac. Za taj skalarni proizvod postoji identičnost

$$(24) \quad \dot{\mathbf{M}}^O \cdot \mathbf{u} = \frac{d}{dt} (\mathbf{M}^O \cdot \mathbf{u}) - \mathbf{M}^O \cdot \dot{\mathbf{u}},$$

a vektor $\dot{\mathbf{u}}$ predstavlja *brzinu skretanja ose* \mathbf{u} . Za kinetički moment u odnosu na nepokretni pol O važi onda prema (5) i (24)

$$(25) \quad \frac{d}{dt} (\mathbf{M}^O \cdot \mathbf{u}) - \mathbf{M}^O \cdot \dot{\mathbf{u}} = \mathbf{L}^O \cdot \mathbf{u},$$

pa za pokretni pol A prema (23) imamo

$$(26) \quad \frac{d}{dt} (\mathbf{M}^A \cdot \mathbf{u}) - \mathbf{M}^A \cdot \dot{\mathbf{u}} = \mathbf{L}^A \cdot \mathbf{u} - (\mathbf{v}_A \times \mathbf{K}) \cdot \mathbf{u}.$$

2.7.3. Rad sile. Potencijal. Konzervativne sile

Pri pomeranju $d\mathbf{r}$ materijalne tačke pod uticajem sile \mathbf{F} skalarni proizvod

$$(1) \quad dA = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

predstavlja *rad sile* \mathbf{F} na *elementarnom pomeranju*, ili kratko *elementarni rad sile*. Elementarni rad sile u opštem slučaju nije totalni diferencijal, jer sila \mathbf{F} može zavistiti od položaja \mathbf{r} , brzine $\dot{\mathbf{r}}$ i vremena t . Uvek se, međutim, može pisati $d\mathbf{r} = \mathbf{t} ds$ gde je \mathbf{t} jedinični vektor tangente trajektorije, a ds lučni element trajektorije, tako da je

$$(2) \quad dA = F_t \cdot ds, \quad F_t \equiv \mathbf{F} \cdot \mathbf{t}.$$

Dimenzija rada je [sila \times put], tj.

$$(3) \quad [A] = ML^2 T^{-2}.$$

Za jedinicu se u CGS sistemu mera uzima *erg*,

$$(4) \quad 1 \text{ erg} = \text{cm}^2 \text{ g sec}^{-2} = \text{dyn cm}.$$

Ova je jedinica za praktične tehničke potrebe mala pa se u praktičnom sistemu MKS uzima metarnjutn (mn) koji se naziva *džul* (joule),

$$(5) \quad 1 \text{ joule} = 10^7 \text{ erg}.$$

U tehničkom sistemu jedinica MKPS se za jedinicu rada uzima *metarkilopond* (mkp),

$$(6) \quad 1 \text{ mkp} = 9,81 \text{ joule} = 9,81 \times 10^7 \text{ cm}^2 \text{ g sec}^{-2}.$$

U Dekartovom pravouglom koordinatnom sistemu rad sile dat je izrazom

$$(7) \quad dA = X dx + Y dy + Z dz.$$

Prema (1.2.1—7) i (1.11 i 12) je

$$d\mathbf{r} = \sum_{i=1}^3 A_i dq^i \mathbf{t}_i,$$

tako da je u generalisanim koordinatama

$$dA = \sum_{i=1}^3 A_i (\mathbf{F} \cdot \mathbf{t}_i) dq^i.$$

U (2.3—6) već je uvedena oznaka

$$(8) \quad Q_i = A_i (\mathbf{F} \cdot \mathbf{t}_i)$$

za *generalisanu silu*. Prema tome, za elementarni rad u generalisanim koordinatama se može napisati

$$(9) \quad dA = Q_i dq^i.$$

Pojedinačne generalisane koordinate Q_i sile ne moraju imati dimenziju sile ali proizvod koordinate sile Q_i i odgovarajuće koordinate dq^i elementarnog pomeranja mora imati dimenziju rada.

Kada se tačka kreće duž neke krive linije L od položaja M_0 do nekog položaja M na krivoj, sila \mathbf{F} će izvršiti ukupan rad na tom putu

$$(10) \quad A = \int_{M_0}^M \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

Prema tome, rad sile je određen krivolinijskim integralom i zavisi od puta. Kad su poznate konačne jednačine kretanja, recimo u generalisanim koordinatama $q^i = q^i(t)$, ($i = 1, 2, 3$) i posmatra se kretanje od trenutka t_0 do nekog trenutka t , rad je određen izrazom

$$(11) \quad A = \int_{t_0}^t Q_i \dot{q}^i dt,$$

koji se u Dekartovim pravouglim koordinatama $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ svodi na

$$(12) \quad A = \int_{t_0}^t (X \dot{x} + Y \dot{y} + Z \dot{z}) dt,$$

pri čemu su u prvom slučaju Q_i , a u drugom X, Y, Z funkcije od vremena t .

Sila u opštem slučaju zavisi od položaja, brzine i vremena. Međutim, ako zavisi *samo od položaja*, deo prostora u kome se posmatra sila je *polje sile* i u tom slučaju je $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r})$, ili u skalarnom obliku

$$(13) \quad Q_i = Q_i(q^1, q^2, q^3),$$

odn., u Dekartovim koordinatama

$$(14) \quad X = X(x, y, z), \quad Y = Y(x, y, z), \quad Z = Z(x, y, z).$$

Da rad neke sile ne zavisi od puta već samo od krajnjih tačaka M_0 i M na putanji potrebno je i dovoljno da ta sila zavisi samo od položaja i da elementarni rad bude totalni diferencijal neke skalarne funkcije $U(\mathbf{r})$, tj. da bude

$$(15) \quad \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \frac{\partial U}{\partial q^i} dq^i,$$

što u Dekartovim koordinatama glasi

$$(16) \quad \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz.$$

Izraz sa desne strane jednačine (16) može se napisati u obliku

$$\text{grad } U \cdot d\mathbf{r}$$

pa je

$$(17) \quad \mathbf{F} = \text{grad } U.$$

Prema tome rad neće zavisiti od puta već samo od početnog i krajnjeg položaja pokretne tačke, ako je sila gradijent neke skalarne funkcije samo od položaja. Ta skalarne funkcija se zove *funkcija sile* a skalar sa suprotnim znakom $V = -U$ je *potencijal sile* ili *potencijalna energija*. Sila koja ima takvu funkciju sile naziva se *konzervativna sila*.

Uslov da neka sila ima potencijal proističe iz identičnosti koja važi za proizvoljnu skalarnu funkciju U

$$\text{rot grad } U = \mathbf{0},$$

pa se može reći da je neka sila konzervativna ako zavisi samo od položaja i ako je

$$(18) \quad \text{rot } \mathbf{F} = \mathbf{0}.$$

Uslov (18) u stvari predstavlja vektorski oblik uslova da linearni diferencijalni izraz

$$X dx + Y dy + Z dz$$

bude totalni diferencijal, tj. da koeficijenti uz diferencijale zaista predstavljaju parcijalne izvode neke skalarne funkcije U . U razvijenom obliku uslov (18) glasi u Dekartovim koordinatama

$$(19) \quad \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z} = 0,$$

tako da je

$$(20) \quad X = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial U}{\partial z}.$$

Da pod navedenim uslovima rad sile ne zavisi od puta već samo od početnog i krajnjeg položaja vidi se iz (10) i (16), jer je

$$(21) \quad \int_{M_0}^M \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{M_0}^M \text{grad } U \cdot d\mathbf{r} = \int_{M_0}^M dU = U(\mathbf{r}) - U_0(\mathbf{r}_0).$$

Ako funkcija sile U zavisi ne samo od položaja već eksplicitno i od vremena, $U = U(\mathbf{r}, t)$, polje sile ima *stacionarnu promenu* od tačke do tačke pri stalnoj vrednosti t i *lokalnu promenu* u istoj tački kada se vreme menja. Sila koja ima takvu funkciju sile zove se *potencijalna sila*, ali ona *ne mora biti konzervativna*.

Kad je data sila koja zadovoljava uslove (19), funkcija sile se određuje integraljenjem sistema parcijalnih jednačina (20). Iz prve od tih jednačina je

$$(22) \quad U = \int X dx + \varphi_1(y, z),$$

gde je φ_1 proizvoljna funkcija samo promenljivih y i z . Za određivanje te funkcije diferencijali se relacija (22) po y pa se dobiveni izraz zameni u drugoj jednačini (20) čime se dobiva jednačina

$$Y = \frac{\partial}{\partial y} \int X dx + \frac{\partial \varphi_1}{\partial y},$$

odakle je

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = Y - \frac{\partial}{\partial y} \int X dx$$

$$(23) \quad \varphi_1 = \int Y dy + \int \left(\frac{\partial}{\partial y} \int X dx \right) dy + \varphi_2(z),$$

gde je sada φ_2 proizvoljna funkcija od z . Sad se u (22) φ_1 može zameniti izrazom (23) pa je

$$(24) \quad U = \int X dx + \int Y dy - \int \left(\frac{\partial}{\partial y} \int X dx \right) dy + \varphi_2(z).$$

Za određivanje funkcije φ_2 diferencijacijom (24) po z i zamenom u trećoj jednačini (20) dobiva se

$$Z = \frac{\partial}{\partial z} \left(\int X dx + \int Y dy \right) - \frac{\partial}{\partial z} \int \left(\frac{\partial}{\partial y} \int X dx \right) dy + \frac{\partial \varphi_2}{\partial z},$$

odakle je

$$\begin{aligned} \varphi_2 = & \int Z dz - \int \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\int X dx + \int Y dy \right) \right] dz + \\ & + \int \left[\frac{\partial}{\partial z} \int \left(\frac{\partial}{\partial y} \int X dx \right) dy \right] dz + \text{const.} \end{aligned}$$

Unošenjem ove vrednosti za φ_2 u (24) definitivno se dobiva obrazac

$$(25) \quad \begin{aligned} U = & \int X dx + \int \left(Y - \frac{\partial}{\partial y} \int X dx \right) dy + \\ & + \int \left\{ Z - \frac{\partial}{\partial z} \left[\int X dx + \int Y dy + \int \left(\frac{\partial}{\partial y} \int X dx \right) dy \right] \right\} dz + \text{const.} \end{aligned}$$

Jednačinom

$$(26) \quad U(x, y, z) = \text{const.}$$

je u prostoru za razne vrednosti konstante određena porodica površi. Za određenu vrednost konstante dobiva se određena površ u čijim tačkama funkcija sile, odnosno potencijal ima svuda istu vrednost. Takava površ se naziva *ekvipotencijalna ili nivoska površ*. Sila $\mathbf{F} = \text{grad } U$ je uvek normalna na ekvipotencijalnoj površi i naperena je na onu stranu kuda funkcija sile raste ili potencijal opada.

2.7.3.1. Efekt rada (snaga)

Rad sile u jedinici vremena predstavlja *efekt rada* ili *snagu*. Prema (2.8.3—1) to je

$$(1) \quad E = \frac{dA}{dt} = \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v},$$

dakle, *efekt rada* je izvod rada po vremenu ili skalarni proizvod sile i brzine kretanja materijalne tačke.

Dimenzija efekta (snage) je $[E] = ML^2 T^{-3}$. U CGS-sistemu je jedinica snage erg/sec, a u MKS-sistemu to je *vat* (watt—W),

$$(2) \quad 1 \text{ W} = \text{joule/sec} = 10^7 \text{ erg/sec},$$

a veća jedinica je *kilovat* (kW) ($1 \text{ kW} = 10^3 \text{ W}$).

U tehničkom sistemu osnovna jedinica je mkp/sec, ali se najviše koristi praktična tehnička jedinica *konjska snaga* (KS),

$$(3) \quad 1 \text{ KS} = 75 \text{ mkp/sec} = 736 \text{ W} = 0,736 \text{ kW}.$$

U drugim zemljama sa metarskim sistemom mera snaga se takode meri konjskim snagama, ali su druge oznake: u Francuskoj CV (*cheval-vapeur*), u Nemačkoj PS (*Pferdestärke*), u SSSR *л. с.* (*лошадиная сила*) i sve te jedinice imaju istu vrednost kao KS. Međutim, u anglosaksonskim zemljama je naziv analogan, HP (*horse-power*), definicija je ista ali u odnosu na anglosaksonski sistem mera stopa (ft) za dužinu i funta (lb) za masu, $1 \text{ ft} = 30,4797 \text{ cm}$, $1 \text{ lb} = 453,5927 \text{ g}$ i njihova jedinica snage se ne poklapa po vrednosti sasvim sa KS, već je

$$(4) \quad 1 \text{ HP} = 550 \text{ ft. lb/sec} = 1,0133 \text{ KS} = 746 \text{ W}.$$

2.7.3.2. Kinetička energija. Teorema kinetičke energije i integral energije

Za kretanje materijalne tačke pored količine kretanja i kinetičkog momenta — koji su vektorske veličine usko je vezana i jedna skalarna veličina koja takode zavisi od brzine i mase. To je *kinetička energija* ili *živa sila* materijalne tačke. Ako je m masa tačke i \mathbf{v} njena brzina, kinetička energija je definisana izrazom

$$(1) \quad T = \frac{1}{2} m (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) = \frac{1}{2} m v^2,$$

koji je još ranije (2.3—7) bio formalno uveden.

Diferencijaljenjem relacije (1) dobiva se diferencijal kinetičke energije, odnosno njen priraštaj uslovljen promenom brzine

$$(2) \quad dT = m \mathbf{v} \cdot d\mathbf{v} = m v dv.$$

Kako je

$$(3) \quad d\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} dt = \mathbf{w} dt$$

a sem toga $m\mathbf{w} = \mathbf{F}$, gde je \mathbf{F} sila koja dejstvuje na posmatranu tačku, obrazac (2) se svodi na

$$(4) \quad dT = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} dt.$$

Kako je $\mathbf{v} dt = d\mathbf{r}$, biće najzad

$$(5) \quad dT = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

Skalarni proizvod sa desne strane znaka jednakosti u ovoj relaciji je prema (2.8.3—1) elementarni rad sile na pomeranju $d\mathbf{r}$ pa je

$$(6) \quad dT = dA.$$

Obrazac (6) predstavlja *teoremu kinetičke energije*: *Priraštaj kinetičke energije pri elementarnom pomeranju jednak je elementarnom radu sile koja dejstvuje na istom pomeranju.*

Diferencijal kinetičke energije u (6) jeste pravi diferencijal pa se integracijom iz (6) dobiva izraz za konačan priraštaj kinetičke energije i teorema kinetičke energije u konačnom obliku.

$$(7) \quad T - T_0 = \int_{M_0}^M dA = A.$$

Ovde je $T - T_0$ konačna promena (priraštaj) kinetičke energije na putu od trenutka t_0 , kada je brzina tačke v_0 , do trenutka t kada je brzina v , a A je ukupan rad sile na tom putu. Teorema kinetičke energije sada glasi: *Konačna promena kinetičke energije na nekom putu jednaka je ukupnom radu koji izvrši sila na tom putu.*

Iz obrazaca (6) i (7) se vidi da kinetička energija i rad imaju jednake dimenzije pa se stoga i mere istim jedinicama.

Teorema o konačnom priraštaju kinetičke energije može da se izrazi i u obliku koji sadrži impuls sile. Prema zakonu o konačnom priraštaju količine kretanja (2.8.1—5) je

$$m \mathbf{v} - m \mathbf{v}_0 = \mathbf{J}.$$

Kad se ova relacija pomnoži skalarno vektorima \mathbf{v} i \mathbf{v}_0 i rezultati saberu, dobiva se

$$mv^2 - mv_0^2 = \mathbf{J} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{v}_0),$$

što se može napisati posle deobe sa 2 i u obliku

$$(8) \quad T - T_0 = \mathbf{J} \cdot \frac{\mathbf{v} + \mathbf{v}_0}{2}$$

u kome predstavlja *Kelvinovu teoremu*: *Promena kinetičke energije u nekom konačnom intervalu jednaka je skalarnom proizvodu impulsa sile i poluzbira početne i krajnje brzine u tom intervalu.*

Kad se materijalna tačka kreće u polju konzervativne sile iz teoreme kinetičke energije u obliku (7) neposredno proističe jedan prvi integral. U tom slučaju je $dA = \text{grad } U \cdot d\mathbf{r} = dU$ (2.7.3—17) pa se (7) svodi na

$$(9) \quad T - T_0 = U - U_0,$$

gde je U funkcija sile u položaju M a U_0 u položaju M_0 u kome kinetička energija ima vrednost T_0 .

Veličina $T - U = T + V$ tj. zbir kinetičke i potencijalne energije predstavlja *ukupnu (totalnu) mehaničku energiju*, pa iz (7) proističe da je

$$(10) \quad T - U = T_0 - U_0 = h = \text{const.},$$

ili

$$T + V = h$$

tj. *pri kretanju tačke u polju konzervativne sile ukupna energija je konstantna*. Relacija (10) predstavlja *zakon o održanju (konzervaciji) mehaničke energije* i naziva se i *integral energije*. Kretanje sa nepromenljivom ukupnom energijom naziva se *izoenergetsko*.

Kinetička i potencijalna energija i rad istih su dimenzija i mere se istim jedinicama. U polju konzervativne sile celokupan rad sile na nekom putu pretvara se u potencijalnu energiju jer je

$$\int_{M_0}^M dA = \int_{M_0}^M dU = U - U_0 = -(V - V_0)$$

i pri takvom kretanju nema gubitka energije (disipacije energije, rasipanja energije). Za takvo kretanje se još kaže da je *konzervativno*.

U praksi se za merenje energije najčešće koriste jedinice izvedene iz jedinica za merenje efekta rada. Prema (2.7.3.1—2) džul kao jedinica za rad može da se izrazi preko vata kao jedinice za efekt.

$$1 \text{ joule} = \text{W} \cdot \text{sec} = 10^7 \text{ erg},$$

odakle se izvodi jedinica za energiju *kilovatčas* (kWh)

$$(11) \quad 1 \text{ kWh} = 10^3 \text{ joule} \cdot 3600 \text{ sec} = 3,6 \times 10^6 \text{ joule} \cdot \text{sec}.$$

2.8. Kretanje materijalne tačke promenljive mase

Pod *tačkom promenljive mase* razume se materijalna tačka čija se masa u toku kretanja menja, ali ne isčezava, i to ne u relativističkom smislu već u smislu prostog *pripajanja* ili *odvajanja* nekih delova mase u toku kretanja (kao npr. pri isticanju gasova iz rakete). U ovom slučaju uvek se radi o telu konačnih dimenzija kod koga se kinematički elementi rotacije mogu u poređenju sa kinematičkim elementima translacije zanemariti. Osim toga naredna razmatranja važe samo u onim slučajevima, kad se *pomeranje centra inercije tela u samom telu usled promene mase može zanemariti*, jer se ta tačka uzima kao zastupnik tela.

Za kretanja takve materijalne tačke, kad je dat zakon $m = m(t)$ promene mase u toku vremena, važi *jednačina Meščerskog* koja u vektorskom obliku glasi

$$(1) \quad m \frac{d\vec{v}}{dt} = m \vec{w} = \mathbf{F} + \mathbf{F}_r,$$

gde je m masa materijalne tačke u *datom* trenutku vremena, \vec{w} njeno ubrzanje (tačnije ubrzanje centra inercije npr. rakete), \mathbf{F} spoljašnja aktivna sila i \mathbf{F}_r tzv. *reaktivna sila*, određena obrascem

$$(2) \quad \mathbf{F}_r = (\mathbf{u} - \mathbf{v}) \frac{dm}{dt} = \mathbf{c} \frac{dm}{dt},$$

gde je \vec{v} apsolutna brzina uočene tačke (prema sistemu $Oxyz$) — mase koja ostaje sa tačkom, a \mathbf{u} je apsolutna brzina čestice — mase koja se odvajava ($dm < 0$) ili pripaja ($dm > 0$) a $\mathbf{c} = \mathbf{u} - \mathbf{v}$ je relativna brzina čestice prema telu od koga se odvajava ili kome se pripaja. $\left(\frac{dm}{dt}\right)$ se zove *brzina rashoda mase*, naravno ako se radi o odvajanju mase. Ako je u odnosu na nepokretni sistem koordinata $Oxyz$ dato $\mathbf{u} = \{u_1, u_2, u_3\}$, $\mathbf{v} = \{v_1, v_2, v_3\}$ biće skalarne jednačine ovog kretanja

$$(3) \quad \begin{aligned} m\ddot{x} &= X + (u_1 - v_1) \frac{dm}{dt}, \\ m\ddot{y} &= Y + (u_2 - v_2) \frac{dm}{dt}, \\ m\ddot{z} &= Z + (u_3 - v_3) \frac{dm}{dt}. \end{aligned}$$

Za $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ iz (1) i (2) se dobiva

$$(4) \quad m \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \mathbf{v} \frac{dm}{dt} = \frac{d(m\mathbf{v})}{dt} = \mathbf{F}$$

a to je u stvari drugi Njutnov zakon u svojoj osnovnoj formulaciji, gde se ne čine pretpostavke o konstantnosti mase.

Za $\mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{0}$ (relativna brzina čestica jednaka nuli) dobiva se obična osnovna jednačina dinamike materijalne tačke

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F},$$

tj. tada nema reaktivne sile.

Veličinu brzine v , koju će tačka promenljive mase (raketa) dostići, kad polazi sa starta u miru (početna brzina $v_0 = 0$), ako je u početku kretanja imala masu m_0 , a u uočenom trenutku masu m , određuje *obrazac Cjolkovskog* koji glasi

$$(5) \quad v = c \ln \frac{m_0}{m},$$

gde je c algebarska vrednost relativne brzine čestica koje otpadaju. Sličan obrazac se može izvesti i za slučaj pripajanja čestica.

Da bismo dokazali tačnost zakona (2) i (5) uočićemo telo čija se masa menja čisto mehanički (raketu) kao izolovani sistem (bez uticaja spoljašnjih sila). Neka masa tog tela bude u trenutku t jednaka m i neka se telo kreće kao izolovani sistem konstantnom brzinom \mathbf{v} . Posmatrajmo kretanje ovog tela u odnosu na nepokretni (apsolutni) koordinatni sistem $Oxyz$, npr. kad je reč o raketi, u odnosu na Zemlju kao sistem referencije. Neka za vreme Δt telo odbaci od sebe masu Δm ($\Delta m < 0$) stalnom brzinom \mathbf{u} (prema sistemu $Oxyz$), onda će se i ^{brzina} preostalog tela kretati nekom promenjenom brzinom $\mathbf{v} + \Delta \mathbf{v}$ tako da na osnovu zakona o održanju količine kretanja bude

$$(6) \quad (m + \Delta m)(\mathbf{v} + \Delta \mathbf{v}) - \mathbf{u} \Delta m = m \mathbf{v},$$

gde smo u drugom članu stavili $-\mathbf{u} \Delta m$ zbog pretpostavke $\Delta m < 0$. Iz relacije (6) se dobiva

$$m \Delta \mathbf{v} = (\mathbf{u} - \mathbf{v}) \Delta m,$$

kad se $\Delta m \Delta \mathbf{v}$ kao mala veličina višeg reda u odnosu na ostale članove u izrazu zanemari. Posle deobe sa Δt i prelaza na granične vrednosti, dobiće se

$$(7) \quad m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}_r = \mathbf{c} \frac{dm}{dt},$$

gde je \mathbf{F}_r ona sila (reaktivna) koja nastaje zbog izbacivanja mase i suprotna je smeru izbacivanja mlaza. Pri tome je jasno, ako se rashod mase dm/dt koji je u gornjim razmatranjima negativan uvede u račun samo svojom apsolutnom vrednošću, što je često običaj, tada obrazac (7) treba da glasi

$$(8) \quad m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}_r = -\mathbf{c} \frac{dm}{dt}.$$

U opštem slučaju može brzina \mathbf{u} izbacivanja mlaza (isticanja gasova) imati proizvoljan pravac, ali po pravilu ona je direktno suprotna brzini kretanja rakete \mathbf{v} , pa se onda u tom slučaju projiciranjem jednačine (8) na zajednički pravac brzine \mathbf{v} i \mathbf{u} dobiva

$$(9) \quad m \frac{dv}{dt} = -c \frac{dm}{dt},$$

odn.

$$m dv = -c dm.$$

Odavde je, međutim

$$dv = -c \frac{dm}{m},$$

pa se onda integracijom izvodi

$$v = -c \ln m + C_1.$$

Najzad, kad se integraciona konstanta C_1 odredi iz početnih uslova koje smo maločas naveli, tj. $v_0 = 0$ a masa na startu m_0 , dobiva se obrazac (5), što smo i hteli da pokažemo.

2.8.1. Vertikalni hitac naviše tačke promenljive mase u bezvazдушnom prostoru

Uočimo raketu kao materijalnu tačku promenljive mase izbačenu vertikalno naviše početnom brzinom v_0 u homogenom polju Zemljine teže (tj. aktivni deo leta nije mnogo udaljen od Zemlje, pa se g može smatrati konstantnim). Neka zakon promene mase bude $m = m_0 f(t)$, gde je m_0 masa na startu. Uzmimo x -osu vertikalno orijentisanu naviše a početne uslove $t_0 = 0$, $x_0 = y_0 = 0$; $\dot{x}_0 = v_0$, $y_0 = 0$, tada se projiciranjem jednačine (2.8—1) na ovu x -osu dobiva posle deobe sa m i uzimanja u obzir zakona promene mase jednačina

$$(1) \quad \ddot{x} = -g - c \frac{d[\ln f(t)]}{dt}$$

Ako se još pretpostavi da je $c = \text{const.}$ (zadatak Cjolkovskog), dobiće se za brzinu rakete posle t sekunada

$$(2) \quad v = v_0 - gt + c \ln \frac{m_0}{m}$$

Prema tome, brzina rakete izbačene vertikalno naviše u bezvazдушnom prostoru jednaka je zbiru brzine lansiranja i brzine reaktivnog pogona umanjenom za brzinu slobodnog padanja.

Za pređeni put pri navedenim uslovima dobiva se

$$(3) \quad x = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 - c \int_0^t \ln f(t) dt.$$

U posebnom slučaju $f(t) = e^{-\alpha t}$, dobićemo

$$(4) \quad v = v_0 + (\alpha c - g) t$$

$$x = v_0 t + \frac{1}{2} (\alpha c - g) t^2.$$

Najveću visinu H , pri predhodnom zakonu promene mase, raketa dostiže, kad je $v = 0$, tj. u trenutku

$$\tau = \frac{v_0}{g - \alpha c}.$$

To onda daje, kad se u toku celog leta odvija proces sagorevanja,

$$(5) \quad H = \frac{v_0^2}{2(g - \alpha c)}.$$

Do ovog slučaja (zastoja i naknadnog slobodnog pada) dolazi samo, kad se pretpostavi da masa tačke može da opada do nule, kad je $g - \alpha c > 0$, odnosno kad je $\alpha c < g$ — reaktivno ubrzanje manje od ubrzanja Zemljine teže. Tada se

tačka kreće jednoliko usporeno do zaustavljanja. Naprotiv, ako je $\alpha c > g$ — reaktivno ubrzanje veće od ubrzanja Zemljine teže tačka se kreće jednoliko ubrzano i neće se zaustaviti.

Međutim, masa rakete se ne može istrošiti do nule već samo do neke vrednosti m_1 koja predstavlja masu samog raketnog kontejnera (raketnog omotača) pa je potrošna masa (zaliha goriva) $m = m_0 - m_1$. U tom slučaju vreme sagorevanja t_1 i parametar α koji karakteriše specifični rashod mase zavise jedno od drugog, jer ako se stavi $m_1 = m_0 e^{-\alpha t_1}$, biće

$$(6) \quad \alpha t_1 = \ln \frac{m_0}{m_1} = \mu = \text{const.}$$

odakle

$$t_1 = \frac{\mu}{\alpha}.$$

Visina podizanja sastoji se u tom slučaju od dva dela: dela x_1 koji odgovara visini koju raketa dostiže u toku aktivnog leta za vreme t_1 i dela puta x_2 koji postiže tačka stalne mase $m_1 = m_0 - m$ (kontejner i kabina) kao vertikalni hitac izbačen brzinom v_1 postignutom do kraja aktivnog leta. Dakle

$$(7) \quad H = x_1 + x_2 = v_0 t + \frac{1}{2} (\alpha c - g) t_1^2 + \frac{v_1^2}{2g},$$

gde je

$$(8) \quad v_1 = v_0 + (\alpha c - g) t_1.$$

Ako se eliminiše t_1 na osnovu obrasca (6) dobiće se

$$(9) \quad H = \frac{v_0 \mu}{\alpha} + (\alpha c - g) \frac{\mu^2}{2 \alpha^2} + \frac{[v_0 + (\alpha c - g) \frac{\mu}{\alpha}]^2}{2g},$$

tj. visina koja se dostiže funkcija je specifičnog rashoda mase α .

Odavde se može lako izvesti da će se maksimalna visina H_m pri datom m_0 i m_1 dobiti u homogenom polju Zemljine teže, kad se mogu zanemariti otporne sile, ako se što je moguće brže sagori data zaliha goriva. Granična vrednost koja se može dostići za slučaj trenutnog sagorevanja ($t_1 \rightarrow 0$, $\alpha \rightarrow \infty$) jeste (jednokratni eksplozivni udar)

$$(10) \quad H_m = \frac{(v_0 + \mu c)^2}{2g}.$$

Drugo pitanje koje je od praktičnog značaja za astronautiku je u tome da se put x_1 aktivnog leta tako odredi da ubrzanje bude što manje i sam taj put što duži (izbacivanje kabine sa čovekom).

Kako je (9) put aktivnog leta

$$x_1 = \frac{v_0 \mu}{\alpha} + \frac{1}{2} (\alpha c - g) \frac{\mu^2}{\alpha^2},$$

prethodni zahtev biće zadovoljen, kad je

$$(11) \quad \alpha = \frac{2 \mu g}{2 v_0 + \mu c}.$$

Tada je na kraju aktivnog dela leta

$$(12) \quad x_1 = \frac{2v_0 + \mu c}{8g}, \quad v_1 = \frac{1}{2} \mu c.$$

i celokupna visina koja se tada postiže iznosi

$$(13) \quad H = \frac{(2v_0 + \mu c)^2}{8g} + \frac{\mu^2 c^2}{8g}.$$

Za $v_0 = 0$ dobiva se

$$(14) \quad \alpha = \frac{2g}{c}, \quad H = \frac{\mu^2 c^2}{4g}$$

pa se upoređivanjem sa (10) vidi da se trenutnim izbacivanjem cele zalihe goriva dostiže tačno dvaput veća visina pri $v_0 = 0$ nego pri laganom sagorevanju, kad se želi što duži aktivni deo puta.

Primeri i zadaci

1. Materijalnu tačku M mase m privlači nepokretni centar O silom proporcionalnom rastojanju OM . Koji prvi integrali se za ovaj problem mogu neposredno napisati?

Ako se stavi $\overrightarrow{OM} = \mathbf{r}$ sila je

$$\mathbf{F} = -mk^2 \mathbf{r},$$

gde je $k^2 > 0$ neki konstantni faktor proporcionalnosti. Sila \mathbf{F} ima funkciju sile, jer je elementarni rad totalni diferencijal

$$dA = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -mk^2 \mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = mk^2 r dr = dU.$$

pa je

$$U = -\frac{1}{2} mk^2 r^2.$$

Prema tome kretanje je konzervativno i postoji integral energije

$$\frac{m}{2} (v^2 + k^2 r^2) = \text{const.} = \frac{m}{2} (v_0^2 + k^2 r_0^2).$$

Pošto sila \mathbf{F} prolazi kroz centar O u odnosu na tu tačku kao pol moment sile je jednak nuli pa je kinetički moment za tu tačku konstantan, tj. postoji vektorski integral kinetičkog momenta

$$\mathbf{r} \times m \mathbf{v} = \mathbf{\Gamma} = \mathbf{r}_0 \times m \mathbf{v}_0.$$

Tačka se kreće u ravni određenoj početnim položajam i početnom brzinom. Integrali količine kretanja ne postoje (sem trivijalnog za pravac normalan na ravan kretanja), jer sila stalno menja pravac u ravni.

2. Teška tačka je obešena o nerastegljiv konac dužine $l = \text{const.}$, čiji je drugi kraj pričvršćen u nepomičnoj tački O . Ako konac u trenutku t_0 obrazuje

sa vertikalom ugao α i tačka je puštena bez početne brzine da se kreće tako da je konac stalno zategnut, do koje će se najveće visine tačka popeti na svome putu i kolika je brzina tačke u njenom najnižem položaju? Tačka se pri tome kreće stalno u istoj ravni.

Sila je mg a elementarni rad $dA = m \mathbf{g} \cdot d\mathbf{r}$ sila vrši samo pri pomeranju kolinearnom sa pravcem sile. Ukupno pomeranje je u polarnim koordinatama $l d\varphi \mathbf{t}$, gde je \mathbf{t} jedinični vektor tangente na putanju tačke. Vertikalna komponenta pomeranja je (sl. 72).

$$l d\varphi \mathbf{t} \cdot \mathbf{i} = l d\varphi \cos\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) = -l \sin \varphi d\varphi.$$

Elementarni rad sile je pravi diferencijal

$$dA = -mgl \sin \varphi d\varphi,$$

pa je funkcija sile

$$U = mgl \cos \varphi.$$

Integral energije biće

$$\frac{mv^2}{2} - mgl \cos \varphi = \frac{mv_0^2}{2} - mgl \cos \alpha.$$

U trenutku zaustavljanja tačka dostiže svoj najviši položaj. Za $v = 0$ i s obzirom na početne uslove $v_0 = 0$ i $\varphi = \alpha$ tačka će se zaustaviti u položaju $\varphi = \alpha$, tj. dostići će istu visinu sa koje je i puštena.

U najnižem položaju je $\varphi = 0$ te je

$$v^2 = 2gl(1 - \cos \alpha).$$

3. Teškoj materijalnoj tački koja se kreće uz pravu nagnutu pod uglom α prema horizontu (sl. 73) saopštena je početna brzina v_0 u pravcu kretanja. Ako se kretanju tačke suprotstavlja stalna sila otpora $R = \text{const.}$, odrediti je tako da se tačka zaustavi: a) posle pređe put S i b) posle vremena t od početka kretanja.

Ukupna sila koja deluje na tačku u pravcu kretanja je

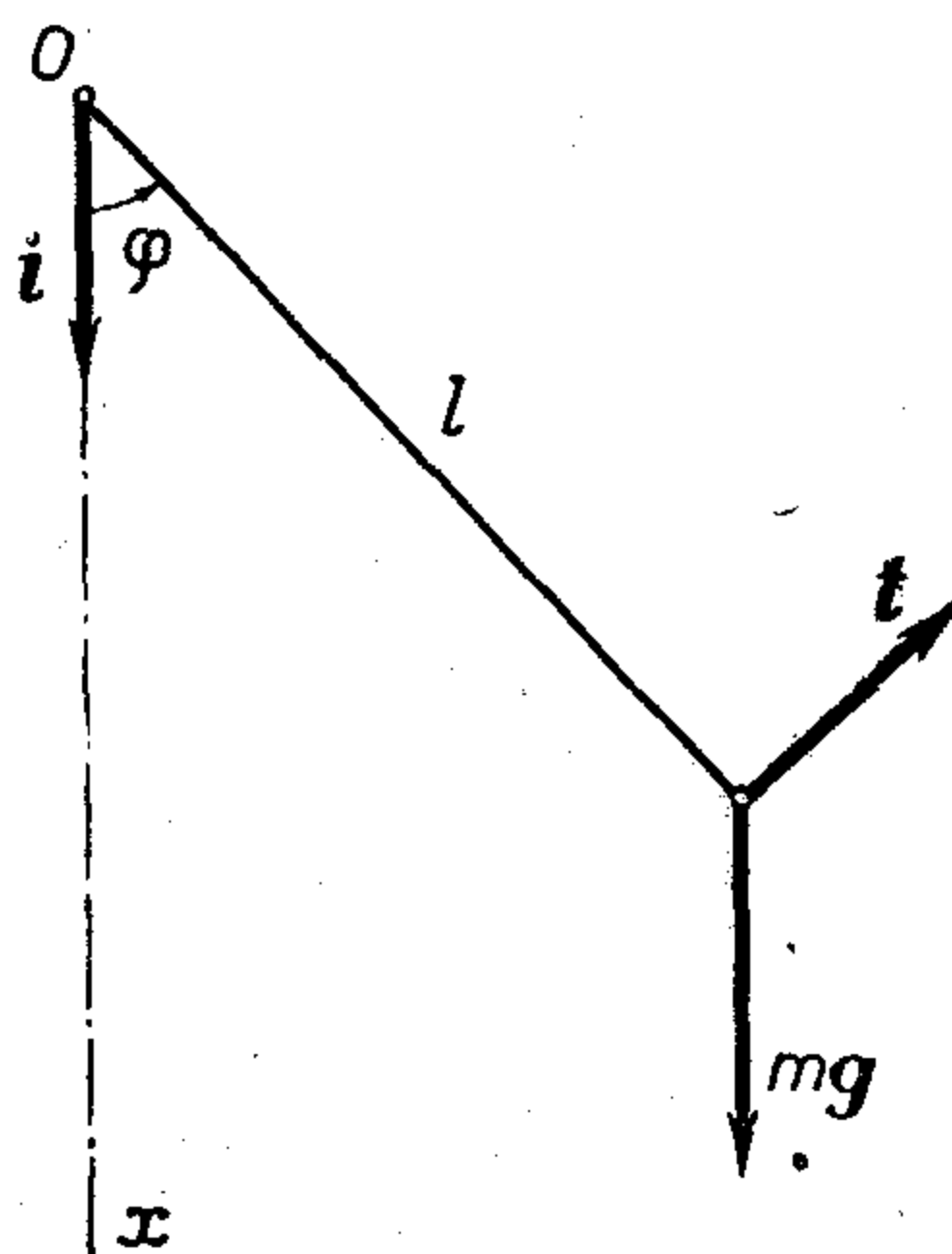
$$F = -R - mg \sin \alpha.$$

Sila je konstantna i funkcija sile je

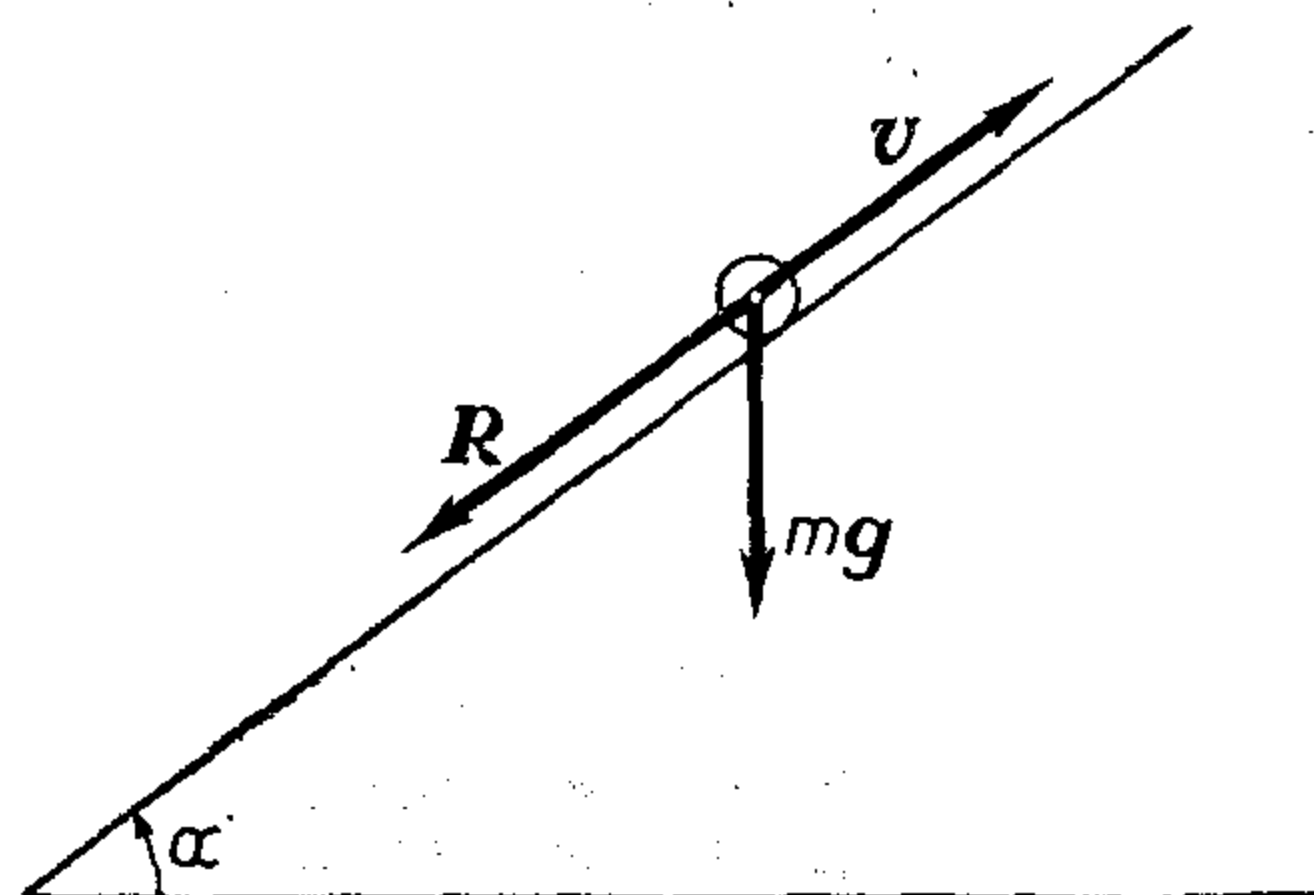
$$U = -(R + mg \sin \alpha) s.$$

a) Iz teoreme o konačnom priraštaju kinetičke energije (s obzirom na početne uslove) imamo

$$\frac{m}{2}(v^2 - v_0^2) = -(R + mg \sin \alpha) s.$$



Slika 72



Slika 73

Tačka će se zaustaviti kad je $s = S$ i $v = 0$, a tada je

$$R = m \left(\frac{v_0^2}{2S} - g \sin \alpha \right).$$

b) Prema teoremi količine kretanja je

$$m\dot{v} = F,$$

odn. $m dv = F dt$. Zbog konstantnosti sile je (teorema o konačnom priraštaju količine kretanja)

$$m(v - v_0) = J = F \cdot t.$$

Tačka će se zaustaviti u nekom trenutku t , ako je

$$R = m \left(\frac{v_0}{t} - g \sin \alpha \right).$$

4. Tačka se kreće u ravni pod uticajem sile čije su koordinate X i Y u odnosu na Dekartov pravougli koordinatni sistem

$$X = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad Y = \frac{\partial U}{\partial x},$$

gde je U funkcija od x i y . Dokazati da diferencijalne jednačine kretanja imaju prvi integral

$$m \frac{dx}{dt} \frac{dy}{dt} = U + \text{const.}$$

Diferencijalne jednačine kretanja su

$$m\ddot{x} = -\frac{\partial U}{\partial y}, \quad m\ddot{y} = -\frac{\partial U}{\partial x}.$$

Ako se prva jednačina pomnoži sa dy a druga sa dx i sabere, dobiće se

$$m(\ddot{x} dy + \ddot{y} dx) = -\frac{\partial U}{\partial x} dx - \frac{\partial U}{\partial y} dy.$$

Kako je $dy = \dot{y} dt$ i $dx = \dot{x} dt$, biće

$$m(\ddot{x} \dot{y} dt + \ddot{y} \dot{x} dt) = -dU$$

odakle se integracijom dobiva

$$m\dot{x}\dot{y} = U + \text{const.},$$

što je i trebalo dokazati.

5. Na tačku M mase $m = 1$ dejstvuje konzervativna sila čija je funkcija sile $U = e^{x+y}$. Odrediti kretanje tačke M kad se zna da tačka M prolazi kroz koordinatni početak O brzinom intenziteta $\sqrt{2}$.

Datoj funkciji sile i početnim uslovima odgovara integral energije

$$(1) \quad \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 2e^{x+y}.$$

Sila je

$$\mathbf{F} = \text{grad } U = e^{x+y}(\mathbf{i} + \mathbf{j})$$

pa su diferencijalne jednačine kretanja

$$\ddot{x} = e^{x+y}, \quad \ddot{y} = e^{x+y}.$$

Iz ovih jednačina može da se eliminiše sila

$$\ddot{x} - \ddot{y} = 0,$$

odakle proističe još jedan prvi integral

$$(2) \quad \dot{x} - \dot{y} = C_1 = \dot{x}_0 - \dot{y}_0.$$

Kombinujući ovaj integral sa integralom energije dobiće se

$$(3) \quad \dot{x} + \dot{y} = (4 e^{x+y} - C_1^2)^{1/2}.$$

Smenom

$$x + y = p, \quad x - y = q$$

diferencijalne jednačine (2) i (3) postaju

$$\dot{q} = C_1, \quad \dot{p} = \sqrt{4 e^p - C_1^2}.$$

Integrali su

$$q = C_1 t + C_2,$$

$$\frac{2}{C_1} e^{p/2} + \left[\left(\frac{2}{C_1} e^{p/2} \right)^2 - 1 \right]^{1/2} = \operatorname{tg} \left(\frac{C_1}{4} t \right).$$

Eliminacijom vremena i povratkom na stare promenljive x i y dobiva se jednačina trajektorije,

$$\frac{2}{C_1} e^{\frac{x+y}{2}} + \left(\frac{4}{C_1^2} e^{x+y} - 1 \right)^{1/2} = \operatorname{tg} \left(\frac{x-y-C_2}{4} \right).$$

6. Sila ima potencijal $V = -kr$, gde je r rastojanje od izvora sile. Pokazati da je ta sila $\mathbf{F} = k \mathbf{r}/r$.

7. Naći ukupnu energiju materijalne tačke koja se kreće po eliptičnoj putanji sa poluosama a i b oko centra koji privlači tu tačku silom proporcionalnom rastojanju i nalazi se u centru elipse.

$$\text{Rešenje: } T - U = mk^2 (a^2 + b^2).$$

8. U ravni jednakokrakog pravouglog trougla čija je hipotenuza $2a$ nalazi se materijalna tačka na koju iz tri trouglova temena dejstvuju sile privlačenja proporcionalne rastojanju od odnosnog temena sa jednakim koeficijentima proporcionalnosti. Ako je posmatrana materijalna tačka u početnom trenutku bila u miru u temenu B , odrediti putanju i veličinu brzine tačke.

Rešenje:

$$x = \frac{a\sqrt{2}}{3} [1 + 2 \cos(k\sqrt{3}t)]; \quad y = \frac{a\sqrt{2}}{3} [1 - \cos(k\sqrt{3}t)];$$

$$v = \frac{\sqrt{20}}{3} ak \sin(k\sqrt{3}t).$$

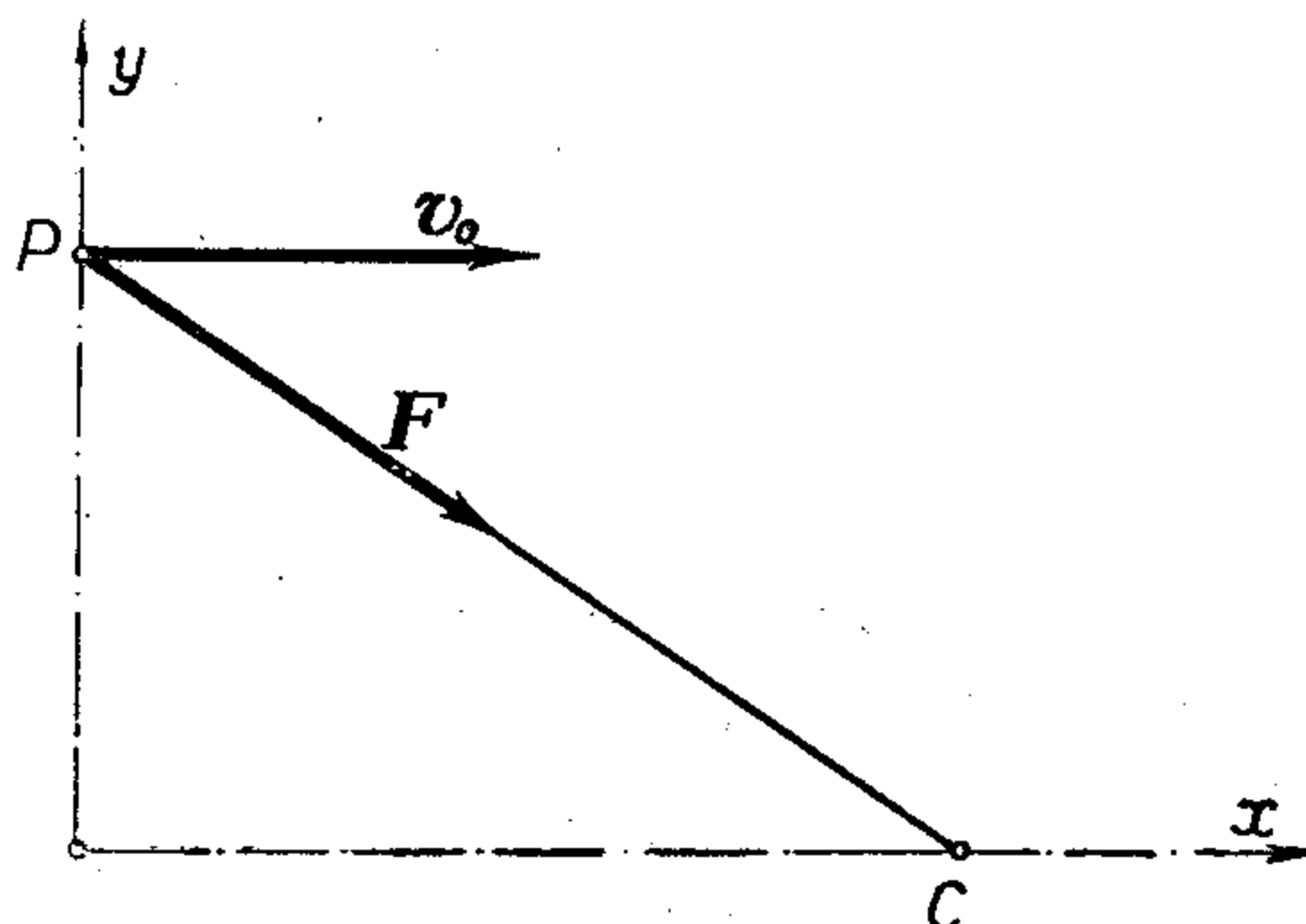
9. Materijalnu tačku privlači silom proporcionalnom rastojanju neki centar C koji se sam kreće pravolinijski i jednoliko. U početnom trenutku tačka se nala-

zila u nekom položaju P van prave koju opisuje centar sile i saopštena joj je početna brzina v_0 orijentisana kao i brzina V samog centra. Odrediti kretanje. (sl.74).

Rešenje :

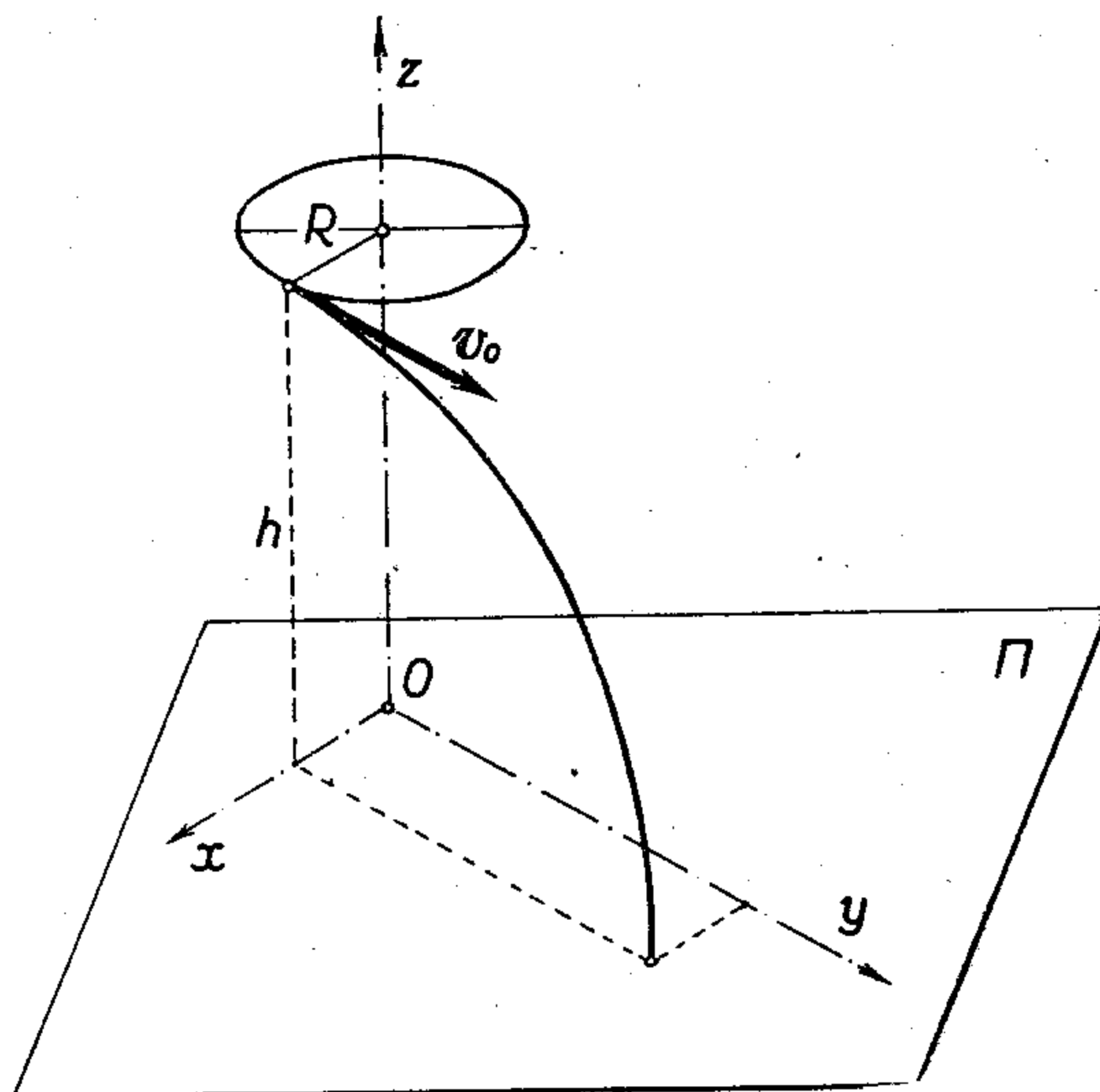
$$x = -C \cos \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t \right) + (v_0 - V) \sqrt{\frac{m}{k}} \sin \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t \right) + Vt + C;$$

$$y = y_0 \cos \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t \right).$$



Slika 74

10. Teška materijalna tačka težine p kreće se jednoliko po horizontalnom krugu poluprečnika R ugaonom brzinom ω . Na kraju polukruga tačka napušta



Slika 75

krug i slobodno pada na horizontalnu ravan koja se nalazi na rastojanju h ispod ravni kruga. Odrediti položaj tačke, gde će ova pasti na horizontalnu ravan i kinetičku energiju u trenutku pada.

R e š e n j e : Ako se koordinatni sistem izabere kao na slici 75 brzina v_0 kojom tačka napušta krug je

$$\dot{x}_0 = 0, \dot{y}_0 = v_0 = R \omega.$$

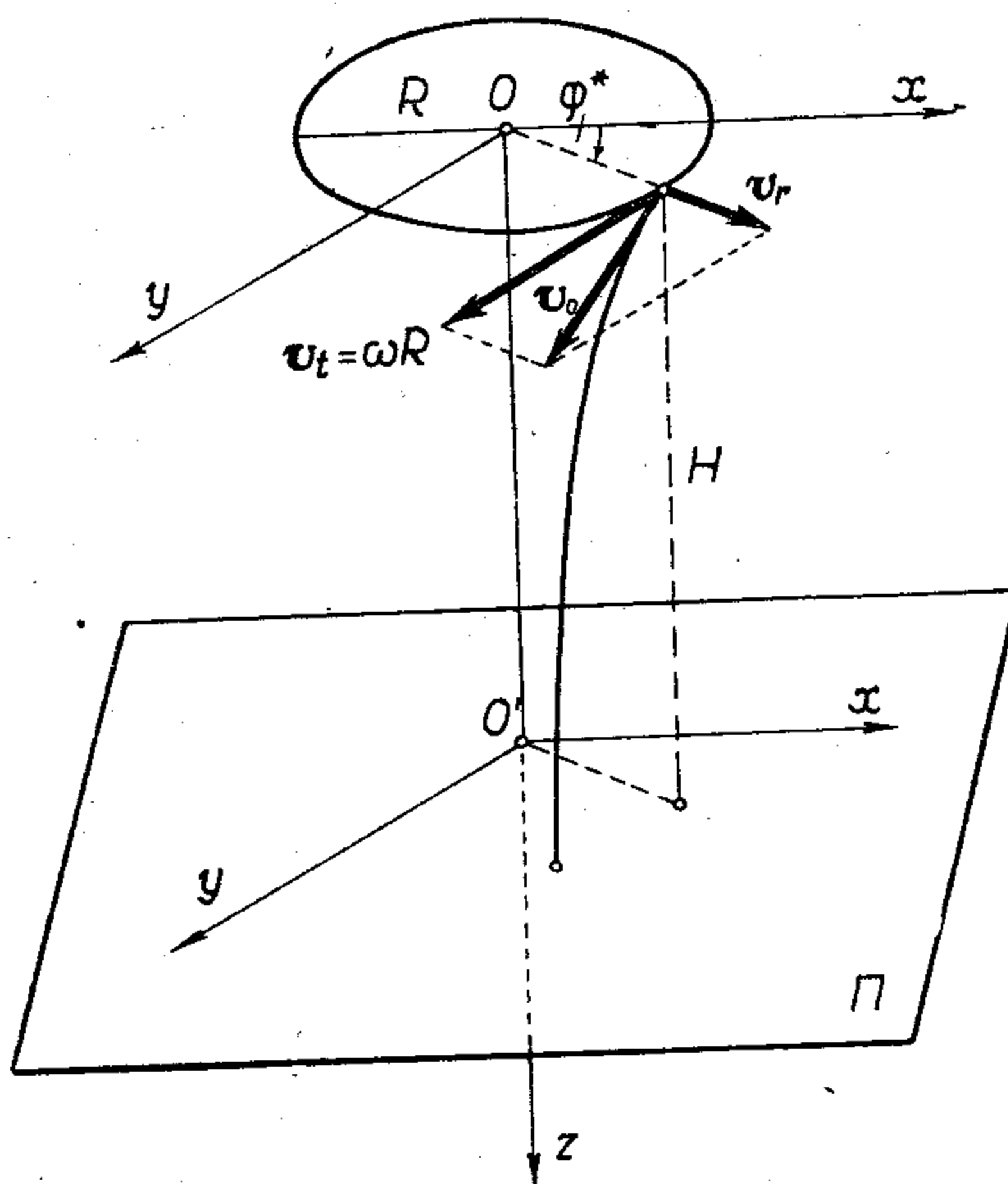
Položaj mesta, gde će tačka pasti, je određen koordinatama

$$(R, R \omega \sqrt{2h/g}, 0).$$

Kinetička energija u trenutku pada je

$$T = \frac{\rho R^2 \omega^2}{2g} + \rho h.$$

11. Na visini H iznad horizontalne ravni nalazi se jedan horizontalni kružni disk poluprečnika R koji se obrće oko svoje vertikalne ose stalnom ugaonom brzinom ω (sl. 76). Materijalna tačka se kreće iz centra diska konstantnom radijalnom brzinom v_r ; kad dođe do kraja diska napušta ga i dalje se kreće kao slobodna



Slika 76

teška tačka. Odrediti trajektoriju tačke i mesto gde će pasti na horizontalnu ravan.

R e š e n j e : Ako se izabere Dekartov pravougli koordinatni sistem tako da mu početak bude u središtu diska, ravan Oxy paralelna horizontalnoj ravni i z -osa

usmerena naniže, koordinate tačke na rubu diska odakle posmatrana materijalna tačka napušta disk su

$$\varphi_* = \frac{\omega R}{v_r}, \quad x_0 = R \cos \varphi_*, \quad y_0 = R \sin \varphi_*, \quad z_0 = 0.$$

Kretanje u pravcu z -ose je određeno jednačinom

$$z = \frac{1}{2} g t^2.$$

Tačka pada na disk u trenutku

$$t = \sqrt{\frac{2H}{g}}.$$

Konačne jednačine kretanja u odnosu na Oxy ravan su

$$x = x_0 + x_0 t;$$

$$y = y_0 + y_0 t,$$

a koordinate tačke pada na horizontalnu ravan su

$$x = R \cos \left(\frac{\omega R}{v_r} \right) + \sqrt{\frac{2H}{g}} \left[v_r \cos \left(\frac{\omega R}{v_r} \right) - R \omega \sin \left(\frac{\omega R}{v_r} \right) \right],$$

$$y = R \sin \left(\frac{\omega R}{v_r} \right) + \sqrt{\frac{2H}{g}} \left[v_r \sin \left(\frac{\omega R}{v_r} \right) + R \omega \cos \left(\frac{\omega R}{v_r} \right) \right].$$

2.9. Centralne sile. Njutnova sila gravitacije

Sila \mathbf{F} se zove *centralna* ako njena osnova (napadna linija) stalno prolazi kroz određenu tačku prostora. Ova tačka je *centar sile*. Na ovaj način je za svaki položaj tačke (izuzev za sam centar) utvrđen pravac dejstva sile, a intenzitet i orijentacija mogu biti proizvoljni. Centralna sila orijentisana ka centru je *privlačna* (*atraktivna*), a orijentisana od centra je *odbojna* (*repulzivna*). Posebno važnu kategoriju centralnih sila čine one čiji intenzitet zavisi samo od rastojanja od centra.

Izabere li se centar O sile za pol tako da je \mathbf{r} vektor položaja materijalne tačke M u odnosu na O , centralna sila koja zavisi samo od rastojanja određena je u opštem slučaju obrascem

$$(1) \quad \mathbf{F} = f(r) \mathbf{r}_0 = f(r) \frac{\mathbf{r}}{r},$$

gde je $r = |\mathbf{r}|$ a $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}/r$ jedinični vektor vektora položaja orijentisan obavezno od pola ka tački M . Funkcija položaja $f(r)$ je *zakon dejstva sile* i predstavlja algebarsku vrednost sile. Ako je $\mathbf{F}(r) = + |f(r)| \mathbf{r}_0$, sila je odbojna, a ako je $\mathbf{F}(r) = - |f(r)| \mathbf{r}_0$, sila je privlačna.

Koordinate centralne sile $\mathbf{F}(r)$ u Dekartovim pravouglim koordinatama dobivaju se projiciranjem vektorske relacije (1),

$$(2) \quad X = f(r) \frac{x}{r}, \quad Y = f(r) \frac{y}{r}, \quad Z = f(r) \frac{z}{r},$$

gde je

$$r = |\mathbf{r}| = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}.$$

Najčešći i najvažniji slučaj centralne sile je *Njutnova sila univerzalne gravitacije*. To je sila kojom se dve mase m i m_1 uzajamno privlače. Ako je m masa pokretne tačke a m_1 masa u centru, zakon dejstva sile je

$$(3) \quad f(r) = -k^2 \frac{mm_1}{r^2}.$$

Veličina k^2 je *univerzalna konstanta gravitacije* i iznosi

$$(4) \quad k^2 = 6,67 \times 10^{-8} \text{ cm}^3 \text{ g}^{-1} \text{ sek}^{-2}.$$

Sila Zemljine teže je takođe centralna privlačna sila iste prirode kao (3) usmerena ka centru Zemlje. Ako se u središtu Zemlje izabere pol O i ako se uzme u obzir Zemljin poluprečnik, koji približno iznosi $R = 6,37 \times 10^8$ cm, sila kojom Zemlja privlači neku tačku koja se nalazi na visini x iznad njene površi je po veličini

$$(5) \quad F = k^2 \frac{mm_1}{(R+x)^2},$$

gde je sad m_1 masa Zemlje. Na površi Zemlje je $x = 0$ a $F = mg$ i masa Zemlje može da se izračuna iz obrasca

$$R^2g = k^2m_1.$$

Prema tome ubrzanje g Zemljine teže na površi Zemlje određeno je obrascem

$$(6) \quad g = \frac{k^2 m_1}{R^2}.$$

Kad postoji više centara O_i , recimo n ($i = 1, 2, 3, \dots, n$) koji su izvori centralnih sila sa zakonima dejstva $f_i(r_i)$, a $\mathbf{r}_i = \overrightarrow{O_iM}$, na tačku M će delovati rezultanta svih sila

$$(7) \quad \mathbf{F} = \sum_{i=1}^n \frac{f_i(r_i)}{r_i} \mathbf{r}_i.$$

Centralne sile koje zavise samo od rastojanja su uvek konzervativne. Zaista iz izraza za elementarni rad imamo u slučaju samo jedne centralne sile

$$(8) \quad dA = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \frac{f(r)}{r} \mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = f(r) dr,$$

odakle proističe da postoji funkcija sile

$$(9) \quad U = \int f(r) dr.$$

Funkcija sile je određena samo do na proizvoljnu konstantu integracije. Vrednost konstante određuje se dogovorom i time se istovremeno određuje osnovni nivo funkcije sile. U slučaju Njutnove gravitacione sile i sa promenjenim znakom (dakle $-U$) to je *potencijal gravitacionog polja*.

I u slučaju više centralnih sila polje je konzervativno, jer je

$$(10) \quad dA = \sum_{i=1}^n \frac{f_i(r_i)}{r_i} \mathbf{r}_i \cdot d\mathbf{r} = \sum_{i=1}^n f_i(r_i) dr_i$$

totalni diferencijal pa je funkcija sile

$$(11) \quad U = \sum_{i=1}^n \int f_i(r_i) dr_i.$$

Kako je centralna sila, koja zavisi samo od rastojanja uvek konzervativna, za kretanje tačke u polju takve sile važi zakon održanja mehaničke energije, tj. postoji integral energije.

Pri dejstvu centralne sile iz samo jednog centra napadna linija sile prolazi kroz centar i njen moment u odnosu na tu tačku jednak je nuli, jer je

$$(12) \quad \mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = [f(r)/r] (\mathbf{r} \times \mathbf{r}) = \mathbf{0}.$$

Prema tome postoji vektorski integral kinetičkog momenta

$$(13) \quad \mathbf{M} = \mathbf{r} \times m \mathbf{v} = \mathbf{\Gamma} = \mathbf{r}_0 \times m \mathbf{v}_0$$

i kretanje je ravansko. Vektori \mathbf{r} i \mathbf{v} su uvek u istoj ravni određenoj početnim položajem \mathbf{r}_0 i početnom brzinom \mathbf{v}_0 . Ta ravan sadrži i početak vektora \mathbf{r} , tj. centar sile.

Uvek se može izabrati cilindarski koordinatni sistem tako da osnovna (polarna) ravan tog sistema bude ravan kretanja, a to može biti Oxy ravan Dekartovog koordinatnog sistema. Ravan kretanja je $z = 0$ i cilindarske koordinate se svode na ravanske polarne. Vektorski integral (13) se tada svodi na jedan skalarni

$$(14) \quad m(x\dot{y} - y\dot{x}) = \Gamma,$$

ili

$$(15) \quad m\rho^2\dot{\theta} = \Gamma.$$

Pošto se pri posmatranom kretanju vektor položaja nalazi stalno u istoj ravni proističe na osnovu (14) odnosno (15) da je pri centralnom kretanju sektorska brzina kretanja tačke konstantna.

Iz napred izloženog se vidi da za materijalnu tačku u polju centralne sile, koja zavisi samo od rastojanja, uvek postoji integral energije, a ako deluje sila iz samo jednog centra onda i integral površine.

2.9.1. Određivanje kretanja u polju centralne sile. Bineov obrazac

U polju jedne centralne sile, kad je dat početni položaj i početna brzina, kretanje se može odrediti na dva načina.

Prvi način se sastoji u korišćenju prvih integrala i to integrala energije

$$(1) \quad 2T = mv^2 = 2U + 2h$$

i integrala površine

$$(2) \quad m(\mathbf{r} \times \mathbf{v}) = \mathbf{\Gamma}.$$

Ova dva integrala se za polarne koordinate u ravni kretanja svode na

$$(3) \quad \begin{aligned} m(\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\theta}^2) &= 2U + 2h, \\ m\rho^2 \dot{\theta} &= \Gamma = mA. \end{aligned}$$

Konstanta A je određena početnim uslovima; iz (2.9—13) sledi

$$(4) \quad A = \rho_0^2 \dot{\theta}_0 = \rho_0 v_0 \sin(\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0).$$

Iz druge jednačine (3) je

$$(5) \quad \dot{\theta} = \frac{A}{\rho^2},$$

pa se onda prva jednačina (3) svodi na

$$(6) \quad m\dot{\rho}^2 = 2U - \frac{mA^2}{\rho^2} + 2h.$$

Iz diferencijalne jednačine (6) može se eliminisati vreme na taj način što se polarni poteg ρ posmatra kao funkcija vremena preko ugla θ , $\rho = \rho[\theta(t)]$. Tada je

$$(7) \quad \dot{\rho} = \frac{d\rho}{d\theta} \dot{\theta} = \frac{A}{\rho^2} \frac{d\rho}{d\theta},$$

a ako je funkcija sile U zavisna samo od ρ , diferencijalna jednačina (6) se svodi na

$$(8) \quad \left(\frac{d\rho}{d\theta} \right)^2 = \Phi(\rho),$$

gde je

$$(9) \quad \Phi(\rho) = \frac{1}{mA^2} (2U + 2h)\rho^4 - \rho^2.$$

Integraljenjem diferencijalne jednačine (8) dobiva se jednačina trajektorije

$$(10) \quad \rho = \rho(\theta)$$

u polarnim koordinatama.

Konačne jednačine kretanja se dobivaju kad se integral (10) zameni u (5),

$$(11) \quad \frac{d\theta}{dt} = \frac{A}{\rho^2(\theta)},$$

tako da se prvo dobiva $\theta = \theta(t)$ a zatim zameni u (10) što daje $\rho = \rho(t)$.

Drugi način se češće koristi, jer se svodi na diferencijalnu jednačinu koja je linearna i sa konstantnim koeficijentima, pa je i njena integracija relativno jednostavna. Ovaj način se sastoji u korišćenju jednog posebnog obrasca koji se izvodi iz Lagranževih jednačina kretanja. Za polarne koordinate je naime

$$(12) \quad 2T = m(\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\theta}^2),$$

a generalisane koordinate sile se dobivaju iz izraza za elementarni rad,

$$dA = f(\rho) d\rho + 0 \cdot d\theta,$$

odakle je

$$(13) \quad Q_\rho = f(\rho), \quad Q_\theta = 0.$$

Lagranževe jednačine (2.3—8) za polarne koordinate, prema tome, biće

$$(14) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\rho}} - \frac{\partial T}{\partial \rho} = m(\ddot{\rho} - \rho \dot{\theta}^2) = f(\rho),$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial T}{\partial \theta} = m \frac{d}{dt} (\rho^2 \dot{\theta}) = 0.$$

Pri tome je očigledno integral druge jednačine (14) upravo integral površine $\rho^2 \dot{\theta} = A$.

Pomoću integrala površine iz prve jednačine (14) eliminiše se θ pa se dobiva

$$(15) \quad \ddot{\rho} - \frac{A^2}{\rho^3} = \frac{f(\rho)}{m}.$$

Smenom $\rho = \frac{1}{u}$ biće $\dot{\theta} = Au^2$ i

$$(16) \quad \dot{\rho} = -\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\theta} \dot{\theta} = -A \frac{du}{d\theta}; \quad \ddot{\rho} = -A^2 u^2 \frac{d^2 u}{d\theta^2}.$$

Povratkom na staru promenljivu ρ relacija (15) će postati

$$(17) \quad \frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{\rho} \right) + \frac{1}{\rho} = -\frac{\rho^2 f(\rho)}{m A^2}.$$

Jednačina (17), u kojoj je nepoznata funkcija $\frac{1}{\rho}$ a nezavisno promenljiva θ , je poznata pod imenom *Bineov* (Binet) *obrazac* i služi za određivanje trajektorije materijalne tačke koja se kreće u polju centralne sile, odnosno za određivanje sile kad je poznata trajektorija.

Pomoću Bineovog obrasca se dobiva jednačina trajektorije $\rho = \rho(\theta)$ u polarnim koordinatama, a odatle se onda kao i na prvi način izvode konačne jednačine kretanja.

Nije teško pokazati da isti oblik obrasca važi i u slučaju kad centralna sila zavisi i od polarnog ugla θ , tj. kad je $f = f(\rho, \theta)$.

2.9.1.1. Kretanje materijalne tačke u polju Njutnove sile gravitacije. Prvi i drugi Keplerov zakon

U polju Njutnove sile gravitacije (2.9—3) vektorska diferencijalna jednačina kretanja materijalne tačke nezavisno od njene mase glasi

$$(1a) \quad \ddot{\mathbf{r}} = -\frac{k^2 m_1}{r^3} \mathbf{r},$$

kad je m_1 masa tela u centru privlačenja.

Bineov obrazac za Njutnovu centralnu silu daje diferencijalnu jednačinu

$$(1) \quad \frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{\rho} \right) + \frac{1}{\rho} = \frac{1}{p},$$

kad se stavi

$$(2) \quad \frac{k^2 m_1}{A^2} = \frac{1}{p}.$$

Ova linearna diferencijalna jednačina drugog reda sa nepoznatom funkcijom $\frac{1}{\rho}$ i nezavisno promenljivom θ ima očigledno partikularni integral $\frac{1}{p}$, a opšti integral njenog homogenog dela se može napisati u obliku $n \cos(\theta + \alpha)$, gde su n i α proizvoljne integracione konstante. Prema tome opšte rešenje diferencijalne jednačine (1) biće

$$(3) \quad \frac{1}{\rho} = \frac{1}{p} + n \cos(\theta + \alpha).$$

Ako su u trenutku $t_0 = 0$ početni uslovi ρ_0 , $\dot{\rho}_0$, θ_0 i $\dot{\theta}_0$ za određivanje integracionih konstanta služe jednačine

$$(4) \quad \begin{aligned} \frac{1}{\rho_0} &= \frac{1}{p} + n \cos(\theta_0 + \alpha), \\ \frac{1}{\rho_0^2} \dot{\rho}_0 &= n \sin(\theta_0 + \alpha) \dot{\theta}_0, \end{aligned}$$

od kojih se prva dobiva unošenjem početnih vrednosti ρ_0 i θ_0 mesto ρ i θ u jednačinu (3) a druga unošenjem ρ_0 , $\dot{\rho}_0$, θ_0 i $\dot{\theta}_0$ u izvod jednačine (3). U drugoj od jednačina (4) može $\dot{\theta}_0$ da se zameni sa ρ_0 pomoću konstante A sektorske brzine, jer je prema (2.9.1—3) u slučaju centralne sile samo iz jednog centra $\dot{\theta}_0 = A/\rho_0^2$, tako da za određivanje konstanta n i α imamo jednačine

$$(5) \quad \begin{aligned} n \cos(\theta_0 + \alpha) &= \frac{1}{\rho_0} - \frac{1}{p}, \\ n \sin(\theta_0 + \alpha) &= \frac{\dot{\rho}_0}{A}. \end{aligned}$$

Određivanjem kvadrata i sabiranjem tih dveju jednačina dobiva se

$$(6) \quad n^2 = \left(\frac{1}{\rho_0} - \frac{1}{p} \right)^2 + \frac{\dot{\rho}_0^2}{A^2},$$

a deobom druge od tih jednačina prvom

$$(7) \quad \operatorname{tg}(\theta_0 + \alpha) = \frac{p \dot{\rho}_0 \rho_0}{A(p - \rho_0)},$$

odn. s obzirom na (2)

$$(8) \quad \operatorname{tg}(\theta_0 + \alpha) = \frac{A \dot{\rho}_0 \rho_0}{A^2 - k^2 m_1 \rho_0}.$$

Funkcija sile za Njutnovu silu je

$$(9) \quad U = -k^2 m m_1 \int \frac{d\rho}{\rho^2} = \frac{2 k^2 m m_1}{\rho},$$

pa zakon o održanju mehaničke energije (integral energije) može da se napiše u obliku

$$(10) \quad mv^2 = \frac{2k^2 mm_1}{\rho} + 2h,$$

pri čemu je

$$(11) \quad 2h = m \left(v_0^2 - \frac{2k^2 m_1}{\rho_0} \right).$$

U polarnim koordinatama biće

$$v_0^2 = \dot{\rho}_0^2 + \rho_0^2 \dot{\theta}_0^2 = \dot{\rho}_0^2 + \frac{A^2}{\rho_0^2},$$

pa kad se iz te relacije i (6) eliminiše ρ_0 i $\dot{\rho}_0$ dobiva se

$$(12) \quad n^2 = \frac{1}{p^2} \left(1 + \frac{2hA^2}{k^4 mm_1^2} \right).$$

Ako se uvede još oznaka

$$(13) \quad e = \sqrt{1 + \frac{2hA^2}{k^4 mm_1^2}},$$

dobiva se

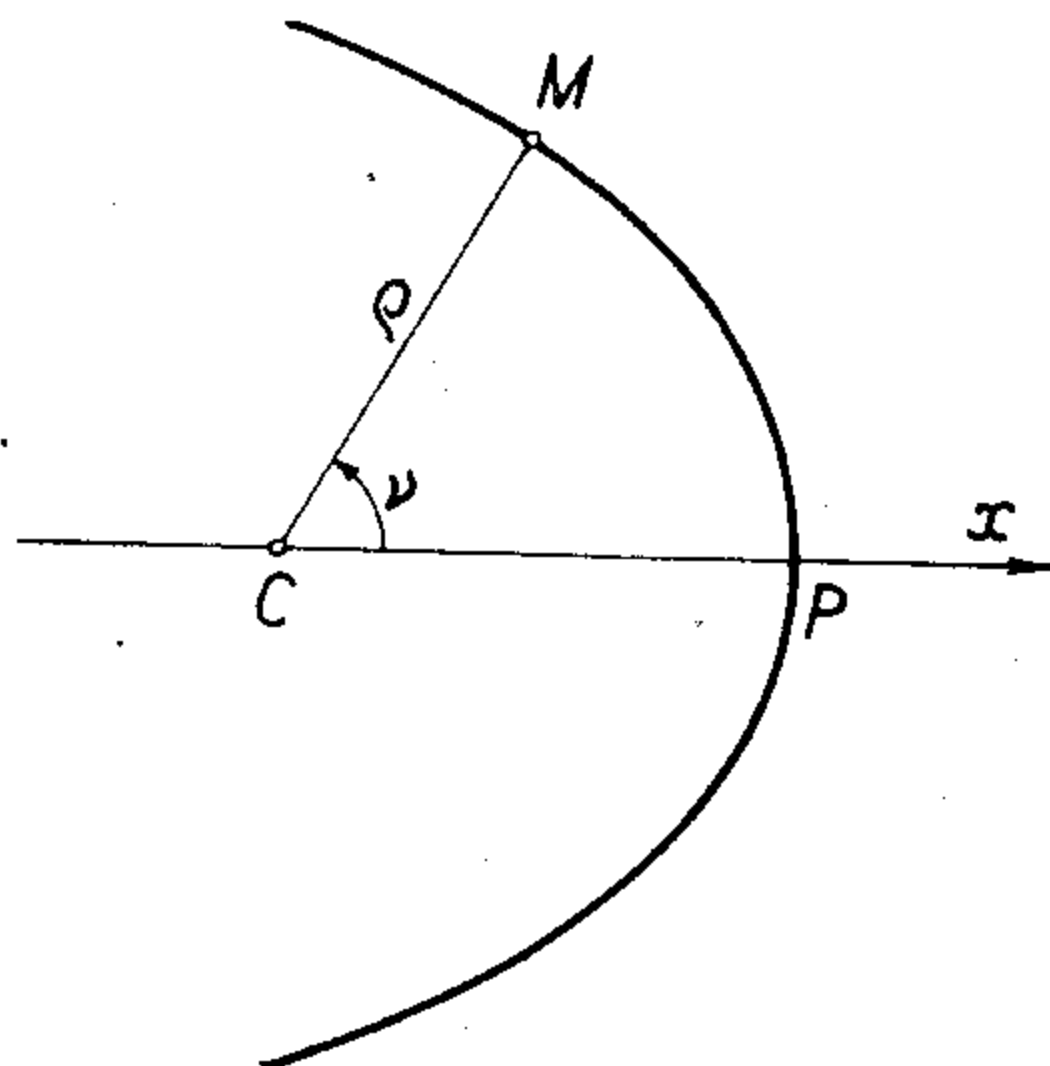
$$(14) \quad n = \frac{e}{p},$$

a pogodnim izborom početne faze uvek se može pred korenom uzeti pozitivan znak.

Najzad kad se uvede još ugao

$$(15) \quad \nu = \theta + \alpha,$$

jednačina trajektorije (3) može se napisati u uobičajenom obliku



Slika 77

$$(16) \quad \rho = \frac{p}{1 + e \cos \nu}.$$

Ovo je jednačina konusnog preseka u polarnim koordinatama, čiji je fokus u centru privlačenja, ρ je poteg a ν ugao između fokusne ose simetrije orijentisane prema najbližoj tački P konusnog preseka (perihelu) i potega, tzv. *prava anomalija*. Veličina e je *ekscentričnost* konusnog preseka (sl. 77).

Iz (13) se vidi da će putanja biti *elipsa* ($e < 1$) kad je $h < 0$, *parabola* ($e = 1$) za $h = 0$ i najzad *hiperbola* ($e > 1$) za $h > 0$.

Ovakvo kretanje materijalne tačke zove se *keplerovsko* i tako se približno

kreću planete i druga nebeska tela, kad se može pretpostaviti da na njih deluje samo jedan *nepokretni* centar privlačenja. (Sunce za planete, planete za svoje prirodne i veštačke satelite itd.)

Ovu činjenicu da su putanje planeta oko Sunca elipse otkrio je Kepler 1609 godine i ona je poznata od tada kao *prvi Keplerov zakon*, koji glasi: *Planete opisuju elipse u čijoj se jednoj žiži nalazi Sunce.*

Drugi Keplerov zakon (ili *zakon jednakih površina*) sa svoje strane ističe činjenicu da je sektorska brzina i pri kretanju planeta oko Sunca konstantna. On glasi: *Potezi planeta opisuju za jednaka vremena jednake površine.*

Krug takođe spada u konusne preseke ($e = 0$). Da bi kretanje bilo kružno potrebno je prema (13) i (11) da veličina početne brzine ima vrednost određenu relacijom

$$(17) \quad \left(v_0^2 - \frac{2k^2 m_1}{\rho_0} \right) A^2 + k^4 m_1^2 = 0.$$

Kako je $A = \rho_0^2 \dot{\theta}_0 = \rho_0 v_0$, relacija (17) se svodi na bikvadratnu jednačinu po brzini

$$v_0^4 - \frac{2k^2 m_1}{\rho_0} v_0^2 + \frac{k^4 m_1^2}{\rho_0^2} = 0,$$

koja ima samo jedno rešenje za kvadrat brzine

$$(18) \quad v_0^2 = \frac{k^2 m_1}{\rho_0}.$$

Kako je $\frac{v_0^2}{\rho_0}$ centripetalno ubrzanje u početnom trenutku a $\frac{k^2 m_1}{\rho_0^2}$ ubrzanje koje proističe od Njutnove sile gravitacije iz (18) se vidi da je u početnom trenutku

$$(19) \quad \frac{v_0^2}{\rho_0} = \frac{k^2 m_1}{\rho_0^2},$$

tj. da bi trajektorija bila krug mora centripetalno ubrzanje u početnom trenutku da bude jednako ubrzanju izazvanom Njutnovom silom. Zamenom $v_0 = \rho_0 \dot{\theta}_0$ dobiva se za ovakvo kretanja algebarska vrednost početnog ugaonog ubrzanja

$$(20) \quad \dot{\theta}_0 = \pm \sqrt{\frac{k^2 m_1}{\rho_0^3}}.$$

Početna brzina kružne putanje je time potpuno određena, jer kako početna brzina mora biti tangetna na putanji, radijalna brzina u ovom slučaju mora biti jednaka nuli ($\dot{\rho}_0 = 0$).

2.9.1.2. Kosmičke brzine projektila. Vreme obilaženja. Treći Keplerov zakon

U slučaju Zemljine teže biće na površi Zemlje i u prostoru ne suviše daleko od nje prema (2.9—6) ($m_1 = \text{masa Zemlje}$)

$$(1) \quad \frac{k^2 m_1}{R^2} = g,$$

tako da će pri kružnoj putanji oko Zemlje blizu nje s obzirom na (2.9.1.1—20) biti

$$(2) \quad \dot{\theta} = \pm \sqrt{\frac{g}{R}}.$$

Algebarska vrednost početne brzine v_0 biće onda određena obrascem

$$(3) \quad v_0 = R \dot{\theta} = \pm \sqrt{Rg},$$

što na površi Zemlje za $g = 981 \text{ cm/sek}^2$ daje po intenzitetu

$$(4) \quad v_{01} \approx 7,91 \text{ km/sec} \approx 28\,000 \text{ km/h},$$

a to je tzv. *prva kosmička* ili *kružna brzina projektila*, potrebna da bi izbačeno telo obilazilo oko Zemlje kao veštački satelit po kružnoj putanji, kad nema otpora pri kretanju ili se on može zanemariti.

Ubrzanje Zemljine teže (kao i svake druge gravitacione sile) opada prema Njutnovom zakonu sa kvadratom rastojanja od Zemljinog centra. Tako, ako je g ubrzanje Zemljine teže na površi Zemlje, biće ubrzanje γ na proizvoljnom rastojanju x od centra Zemlje određeno obrascem

$$(5) \quad \frac{\gamma}{g} = \frac{R^2}{x^2} \quad \left(\gamma = \frac{R^2 g}{x^2} \right).$$

Kružna brzina satelita Zemlje na rastojanju x od centra Zemlje biće prema (3) određena obrascem

$$(6) \quad v_{01} = \sqrt{\gamma x}.$$

Tablica I — Ubrzanje γ Zemljine teže i brzina v_{01} kruženja na raznim visinama H iznad Zemlje

H/km	$\gamma/\text{cm sek}^{-2}$	$v_{01}/\text{km sec}^{-1}$
0	981,0	7,91
100	948,9	7,84
200	920,1	7,78
300	894,7	7,73
400	867,9	7,67
500	841,9	7,61
1000	732,1	7,35
2000	568,2	6,90
5000	308,0	5,92
10000	148,4	4,93
100000	3,5	1,94

Pitanje određivanja početne brzine v_0 izbacivanja potrebne da se projektil mase m odbaci sa površi Zemlje (u bezvazdušnom prostoru) do određene visine H (na rastojanju x od centra Zemlje $H = x - R$) iznad Zemlje, može se rešiti primenom teoreme kinetičke energije u integralnom obliku (2.7.3.2—7). Ako se brzina izbacivanja projektila obeleži sa v_0 (početna brzina) a brzina na visini H neka bude $v = 0$ biće

$$T - T_0 = -\frac{m v_0^2}{2}.$$

Sa druge strane, ako se zamisli x -osa, povučena iz centra Zemlje kao početka, orijentisana naviše (od Zemlje), tada će promenljiva sila teže (kao privlačna) biti

samo $X = -m\gamma = -R^2 g \frac{m}{x^2}$ ($Y = Z = 0$) i njen elementarni rad na pomeranju dx određen izrazom

$$X dx = -R^2 g m \frac{dx}{x^2}$$

Najzad se zakon kinetičke energije za konačno pomeranje od R do x može napisati u obliku (pošto se skрати sa m)

$$\frac{v_0^2}{2} = R^2 g \int_R^x \frac{dx}{x^2}$$

Odavde se odmah dobiva

$$(7) \quad v_0^2 = 2 R^2 g \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{x} \right) = \frac{2 g H R}{H + R}$$

Za $x \rightarrow \infty$ dobiva se brzina oslobodavanja od Zemljine teže, karakteristična brzina projektila izbačenog sa Zemlje ili druga kosmička brzina

$$(8) \quad v_{02} = \sqrt{2 R g} = v_{01} \sqrt{2} \approx 11,19 \frac{\text{km}}{\text{sec}} \approx 40\,000 \frac{\text{km}}{\text{sec}},$$

kad se uzme u obzir (3).

Ova se brzina naziva i *parabolična*, jer ovoj brzini odgovara konstanta energije $h = 0$ i parabolična putanja. Naime, u našem slučaju biće početni poteg $\rho_0 = R$, pa se izraz (2.9.1.1—11) može s obzirom na (1) napisati u obliku

$$(9) \quad 2h = m(v_0^2 - 2gR).$$

Ovaj pak izraz biće očigledno jednak nuli za brzinu oslobodavanja.

Prethodni obrazac može čak da se upotrebi i za određivanje brzine oslobodavanja, kad se pođe od očigledne činjenice da se projektil može „osloboditi“ od Zemljine teže i otići u beskonačnost tek po paraboličnoj putanji, a po eliptičnoj ne može.

Iz obrasca (8) se vidi da je razmera brzine oslobodavanja i brzine kruženja stalna i jednaka $\sqrt{2}$.

Iz obrasca (9) s obzirom na klasifikaciju konusnih preseka izvedenu u 2.9.1.1 prema vrednosti konstante energije h vidi se da razmak

$$(10) \quad gR < v_0^2 < 2gR$$

početnih brzina lansiranja sa površi Zemlje određuje tzv. *eliptične brzine* ($h < 0$) kretanja, između graničnih brzina kružne i parabolične, i projektil se kreće po elipsi oko Zemlje. Pri tome za

$$(11) \quad v_0^2 < gR,$$

tj. brzine izbacivanja manje od kružne brzine, projektil pada natrag na Zemlju. Za

$$(12) \quad v_0^2 > 2gR \quad (h > 0)$$

dobivaju se *hiperbolične brzine* i projektil se kreće po hiperboli. Projektil izbačen hiperboličnom brzinom oslobodava se od Zemljine teže i odlazi u prostor.

Kad se izbacivanje izvodi sa proizvoljnog nivoa na rastojanju x od centra Zemlje kome odgovara γ kao ubrzanje teže tada su eliptične brzine u intervalu

$$(13) \quad \gamma x < v_0^2 < 2 \gamma x,$$

pri čemu je kružna brzina jednaka $\sqrt{\gamma x}$, parabolična jednaka $\sqrt{2 \gamma x}$, telo izbačeno početnom brzinom $v_0^2 < \gamma x$ pada prema Zemlji, a ono izbačeno brzinom $v_0^2 > 2 \gamma x$ odlazi u prostor hiperboličnom putanjom u odnosu na Zemlju.

Najzad za određivanje brzine oslobodavanja od Sunčeve gravitacije pri izbacivanju projektila sa Zemlje (*treća kosmička brzina*) treba uzeti u obzir: *a*) da je srednja brzina kruženja Zemlje oko Sunca $v_{kz} = 29,8$ km/sec; *b*) da je stoga brzina oslobodavanja od Sunčeve gravitacije na nivou Zemljine putanje (kad nema poremećaja od strane Zemljinog privlačenja) $\sqrt{2}$ puta veća od brzine kruženja i da iznosi $v_{pz} = 42,14$ km/sec.

Ako se uoči kretanje projektila i sistem Sunce, Zemlja i kosmički projektil smatra kao tri tela, tada je potrebno razgraničiti oblasti u kojima je pretežna privlačna sila Zemlje (a Sunčeva gravitacija samo poremećajna sila) od one gde je pretežna sila Sunca (a Zemlja samo poremećajno telo). Obrazac koji određuje poluprečnik ρ tzv. *sfere dejstva* (*gravisfere*) Zemljine gravitacije u ovom slučaju glasi (vidi Tisserand, *Traité de mécanique céleste*, t. IV, p. 198)

$$(14) \quad \rho = r \sqrt[5]{\left(\frac{m_1}{M}\right)^2},$$

gde je r rastojanje Zemlja - Sunce, m_1 masa Zemlje, a $M \approx 333\,000 m_1$ masa Sunca. Veličina ovog poluprečnika sfere dejstva Zemlje oko sebe iznosi približno

$$(15) \quad \rho = 917\,000 \text{ km.}$$

Prema tome, kad se projektil izbaci *u smeru kretanja* Zemlje oko Sunca (ali izvan sfere dejstva Zemlje), biće relativno prema Zemlji za oslobodavanje od gravitacije Sunca potrebna samo dopunska brzina od

$$(16) \quad v_{os} = v_{pz} - v_{kz} = 42,14 - 29,8 = 12,34 \frac{\text{km}}{\text{sec}}.$$

Brzina $v_{os} = 12,34$ km/sec je najmanja brzina koju projektil treba da ima u trenutku kad izađe iz sfere dejstva Zemlje, dakle, na rastojanju 917 000 km od Zemlje, pošto u granicama sfere dejstva Zemlje brzina oslobodavanja od Sunčeve gravitacije nije 42,14 km/sec već bi morala biti veća.

Da bismo pak odredili kolika se početna brzina v_{03} mora saopštiti projektilu sa same Zemljine površi, odnosno nedaleko od nje (npr. sa visine od 100 km nad Zemljom), poćićemo od integrala energije, koji važi i za problem tri tela, tj. od

$$(17) \quad v^2 = \frac{2 k^2 m_1}{\rho} + h.$$

Za granični položaj $\rho = 917\,000$ km na sferi dejstva iz ove jednačine se dobiva

$$(18) \quad h = v_{os}^2 - 2 \gamma \rho,$$

gde je

$$(18a) \quad \gamma = \frac{k^2 m_1}{\rho^2} = \frac{k^2 m_1}{R^2} \cdot \frac{R^2}{\rho^2} = g \frac{R^2}{\rho^2}.$$

Za date vrednosti veličina g , R i ρ dobiva se onda

$$(19) \quad 2\gamma\rho = 2g \frac{R^2}{\rho} \approx 0,876.$$

Tražena brzina v_{03} oslobodavanja pri izbacivanju sa površi Zemlje biće s obzirom na (17).

$$(20) \quad v_{03}^2 = \frac{2k^2 m_1}{R} + h = 2gR + h = v_{oz}^2 + h$$

pa kad se unese vrednost konstante integracije iz (18) i uzme u obzir (18a) može se napisati

$$(21) \quad v_{03}^2 = v_{oz}^2 + v_{os}^2 - 2g \frac{R^2}{\rho}.$$

Pošto se unesu sve date vrednosti dobiva se za brzinu oslobodavanja sa površi Zemlje

$$(22) \quad v_{03} = 16,62 \frac{\text{km}}{\text{sec}}.$$

Međutim, očigledno je, za date vrednosti, veličina $2g \frac{R^2}{\rho} = 0,876$ mala u poređenju sa v_{os}^2 pa se može zanemariti, jer se i inače čine razna zaokrugljivanja tako da se može pisati sa dovoljnom tačnošću kao obrazac za određivanje približne vrednosti brzine oslobodavanja od Sunčeve gravitacije ali pri izbacivanju sa Zemljine površi poznati obrazac

$$(23) \quad v_{03}^2 = v_{oz}^2 + v_{os}^2,$$

što onda daje

$$(24) \quad v_{03} = 16,66 \frac{\text{km}}{\text{sec}}.$$

Naravno pri ovakvom računu ne može se drugi decimal u broju koji određuje treću kosmičku brzinu v_{03} smatrati kao potpuno tačan.

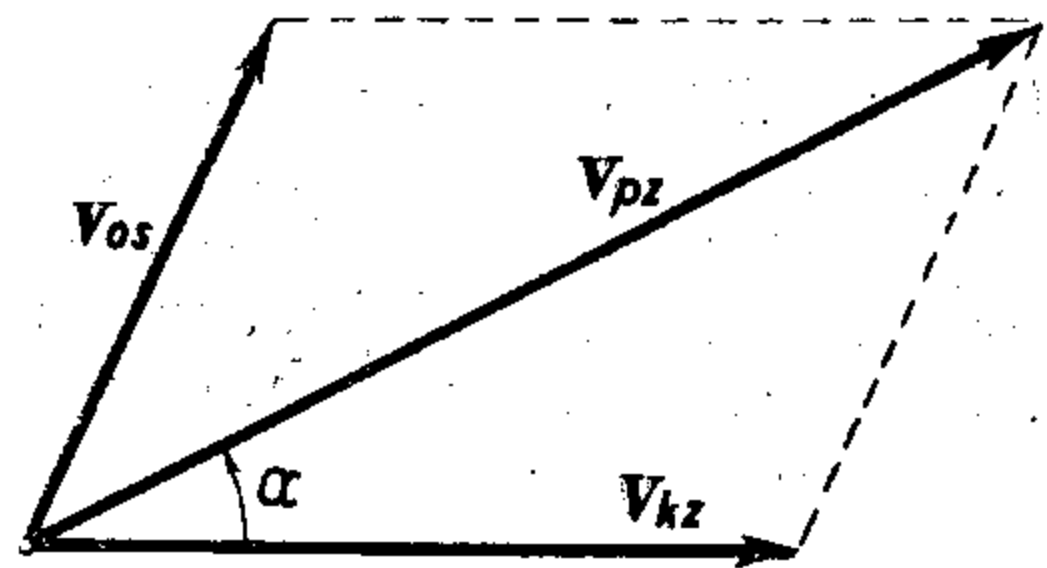
U opštem slučaju parabolična brzina v_{pz} oslobodjenja od gravitacije Sunca na nivou Zemlje kao apsolutna brzina rezultanta je brzine v_{kz} kruženja Zemlje oko Sunca kao prenosne brzine i brzine v_{os} oslobodjenja od Sunca sa Zemlje u pokretu kao relativne brzine i određena je, kad se izbacivanje izvodi izvan sfere dejstva Zemlje, vektorskom relacijom (sl. 78)

$$(25) \quad \mathbf{v}_{kz} + \mathbf{v}_{os} = \mathbf{v}_{pz},$$

odakle se dobiva ($v_{pz} = v_{kz} \sqrt{2}$)

$$(26) \quad v_{os} = v_{kz} \sqrt{3 - 2\sqrt{2} \cos \alpha},$$

ako se projektil izbaci pod uglom α prema brzini kruženja Zemlje oko Sunca. Prema tome, vrednost $v_{os} = 12,34 \text{ km/sec}$ za veličinu relativne brzine osloboda-



Slika 78

vanja od Sunca sa Zemlje u pokretu je najmanja moguća, jer se u slučaju $\alpha = 0$ iz (26) izvodi

$$(v_{os})_{\min} = (\sqrt{2} - 1) v_{kz} \approx 0,414 v_{kz} \approx 12,34 \text{ km/sec},$$

inače ta brzina mora biti veća.

Klasifikacija putanja projektila izbačenih sa Zemlje izvršena je na strani 192, međutim, mogu se lako postaviti obrasci za klasifikaciju putanja projektila izbačenih u odnosu na proizvoljni centar. Tako, kad se izraz za integral energije (2.9.1.1—10) podeli masom m projektila i stavi ($m_1 =$ masa Zemlje)

$$(27) \quad k^2 m_1 = \lambda, \quad a = -\frac{k^2 m m_1}{2h} = -\frac{m \lambda}{2h},$$

on se onda može napisati u obliku

$$(28) \quad v^2 = \lambda \left(\frac{2}{\rho} - \frac{1}{a} \right).$$

U ovako izraženom integralu energije veličina a predstavlja tzv. srednje rastojanje pokretne materijalne tačke (projektila) od privlačnog centra (pola) uopšte, odnosno, veliku poluosu konusnog preseka po kome se projektil kreće. ρ će predstavljati rastojanje projektila od ma kog centra privlačenja, kad se u izraz za λ unese masa onog tela čije se privlačenje posmatra.

I zaista s obzirom da je putanja projektila konusni presek određen jednačinom (2.9.1.1—16) biće najmanje rastojanje ρ_{\min} od centra privlačenja ($v = 0$)

$$\rho_{\min} = \frac{p}{1+e}.$$

Pri tome se ona tačka na putanji koja je najbliža centru privlačenja zove *pericentar* (*perigeum*, kad j reč o Zemji kao privlačenom telu, a *perihel*, ako se radi o Suncu). Najveći poteg ρ_{\max} putanje ($v = \pi$), biće

$$\rho_{\max} = \frac{p}{1-e},$$

pa je srednje rastojanje

$$(29) \quad a = \frac{1}{2} (\rho_{\min} + \rho_{\max}) = \frac{p}{1-e^2}.$$

Najudaljenija tačka putanje od centra privlačenja zove se u opštem slučaju *apocentar* (*apogeum* za Zemlju, a *afel* za Sunce).

Međutim, ako se iz obrasca (2.9.1.1—13) za određivanje ekscentričnosti e putanje izračuna $2h$ i unese u izraz (14) za a dobiće se s obzirom (2.9.1.1—2) vrednost sa desne strane u obrascu (29) što je i trebalo dokazati.

Iz obrasca (28) vidi se odmah da će za sve brzine

$$(30) \quad v^2 < \frac{2\lambda}{\rho}$$

biti

$$0 < a < \infty,$$

i trajektorije elipse (uključujući tu i krug). Za brzine koje zadovoljavaju uslov

$$(31) \quad v^2 = \frac{2\lambda}{\rho},$$

biće

$$a = \infty$$

i trajektorija je parabola. Najzad za

$$(32) \quad v^2 > \frac{2\lambda}{\rho}$$

biće

$$0 > a > -\infty$$

i trajektorija je hiperbola.

Za određivanje vremena T obilaženja (revolucije) planeta oko Sunca i satelita (prirodnih i veštačkih) oko planeta ili uopšte oko nekih centralnih tela postupaju se ovako. Iz kvadrata brzine u polarnim koordinatama

$$v^2 = \dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\theta}^2$$

može se lako napisati

$$(33) \quad dt = \frac{d\rho}{\sqrt{v^2 - \rho^2 \dot{\theta}^2}}$$

Ako se u ovu diferencijalnu jednačinu iz obrasca (28) unese izraz za v^2 , dobiće se

$$(34) \quad dt = \frac{d\rho}{\sqrt{\frac{2\lambda}{\rho} - \frac{\lambda}{a} - \rho^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2}}$$

Međutim, kako je s obzirom na (2.9.1—5)

$$(35) \quad \rho^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{A^2}{\rho^2}$$

a s obzirom na (2.9.1.1—1), (26) i (29) imamo

$$A^2 = \lambda p = \lambda a (1 - e^2),$$

biće najzad

$$\rho \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{\lambda a (1 - e^2)}{\rho^2}$$

Kad se ovo unese u (34), dobiće se posle kraćeg računa diferencijalna jednačina za određivanje vremena u slučaju eliptičnog kretanja i to u funkciji položaja u obliku

$$(36) \quad dt = \sqrt{\frac{a}{\lambda}} \frac{\rho d\rho}{\sqrt{2a\rho - \rho^2 - a^2(1 - e^2)}}$$

Neka se još vreme računa od pericentralnog položaja, tj. za $t = 0$ je pericentralni poteg $\rho = a(1 - e)$, onda posle integracije od 0 do t dobiva se naredno rešenje gornje diferencijalne jednačine

$$t = a^{3/2} \lambda^{-1/2} \left[\arccos \frac{1 - \frac{\rho}{a}}{e} - e \sqrt{1 - \left(\frac{1 - \frac{\rho}{a}}{e}\right)^2} \right]$$

Kad se u ovom izrazu stavi

$$(37) \quad \cos \tau = \frac{1 - \frac{\rho}{a}}{e},$$

što daje

$$\sqrt{1 - \left(\frac{1 - \frac{\rho}{a}}{e}\right)^2} = \sin \tau,$$

za vreme t potrebno da materijalna tačka (projektil, telo) pređe određeni put od pericentra na putanji dobiva se obrazac

$$(38) \quad t = a^{3/2} \lambda^{-1/2} (\tau - e \sin \tau).$$

Ugao τ se naziva *ekscentrična anomalija* putanje a sam prethodni obrazac je tzv. *modifikovana Keplerova jednačina*.

Tako se vreme potrebno da bi telo izvršilo polurevoluciju i došlo u apocentar gde je apocentralni poteg $\rho = a(1+e)$ i ekscentrična anomalija $\tau = \pi$ ($\sin \tau = 0$) izračunava po obrascu

$$\frac{1}{2} T = a^{3/2} \lambda^{-1/2} \pi,$$

tj. vreme T obilaženja (potpune revolucije) iznosi

$$(39) \quad T = 2 a^{3/2} \lambda^{-1/2} \pi$$

odnosno

$$(40) \quad T^2 = \frac{4 \pi^2}{\lambda} a^3,$$

a ovo je matematički izraz *trećeg Keplerovog zakona*, i to u obliku, kad je *centralno telo ili nepokretno ili je njegova masa mnogo puta veća od mase posmatranog satelita*. Za dva tela kao Mesec čija je masa m i Zemlja čija je masa $m_1 = 81,45 m$ postoji poboljšani izraz trećeg Keplerovog zakona o kome će kasnije biti reči.

Treći Keplerov zakon (40) se izražava obično u obliku

$$(41) \quad T_1^2 : T_2^2 = a_1^3 : a_2^3,$$

koji se lako dobiva iz (40) i koji kaže: *Kvadrati vremena obilaženja (planeta oko Sunca, satelita oko planeta) odnose se kao kubovi velikih poluosa njihovih elipsnih putanja (srednjih rastojanja pokretnog tela od centralnog tela)*.

U ovom zakonu leži mogućnost lakog određivanja vremena obilaženja veštačkih satelita po elipsnim putanjama oko Zemlje. Radi toga treba odrediti vreme jednolikog kruženja (obilaženja po krugu) poluprečnika a i to će biti i vreme obilaženja satelita po elipsi velike poluose a oko Zemlje na osnovu trećeg Keplerovog zakona.

Tablica II — Vreme obilaženja satelita (siderička revolucija) T oko Zemlje pri jednolikom kruženju na visini H iznad Zemlje

H/km	T/min
0	84,4
100	86,5
200	88,6
300	90,5
400	92,6
500	94,7
1000	105,1
2000	127,2
5000	201,3
10000	347,9
100000	5742,0

U slučaju parabolične putanje ($a = \infty$) diferencijalna jednačina (34) se svodi na

$$(42) \quad dt = \frac{d\rho}{\sqrt{\frac{2\lambda}{\rho} - \rho^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2}}$$

i kad se uzme u obzir (35) može se napisati

$$(43) \quad dt = \frac{\rho d\rho}{\sqrt{2\lambda\rho - A^2}}$$

Za početni položaj u temenu parabole $\rho = p/2$ u trenutku $t = 0$, dobiće se odavde posle integracije levo od 0 do t a desno od $p/2$ do ρ obrazac

$$(44) \quad t = \frac{\sqrt{2\lambda\rho - A^2}}{3\lambda^2} (\lambda\rho + A^2)$$

ili, pošto je $A^2 = \lambda p$,

$$(45) \quad t = \frac{1}{3}(\rho + p) \sqrt{\frac{2\rho - p}{\lambda}}$$

za određivanje vremena t koje protekne dok projektil pređe put od pericentra do nekog položaja određenog potegom ρ .

Sa druge strane pošto je za parabolu $e = 1$, iz jednačine (2.9.1.1—16) dobiva se

$$(46) \quad \rho = \frac{p}{1 + \cos v} = \frac{p}{2 \cos^2 \frac{v}{2}},$$

pa se onda odmah može odrediti vreme u zavisnosti od prave anomalije v pomoću integrala površine, a s obzirom na (2.9.1.1—15) je

$$\rho^2 \dot{\theta} = \rho^2 \dot{v} = A \quad (= \sqrt{\lambda p}),$$

odakle je prema (46)

$$dt = \frac{p^{3/2}}{2\lambda^{1/2}} \cdot \frac{d\frac{v}{2}}{\cos^4 \frac{v}{2}}$$

Najzad za izabrane početne vrednosti $t = 0$ i $v = 0$ dobiva se

$$(47) \quad t = \frac{p^{3/2}}{6\lambda^{1/2}} \left(\operatorname{tg}^3 \frac{v}{2} + 3 \operatorname{tg} \frac{v}{2} \right).$$

Primeri i zadaci

1. Materijalna tačka mase m kreće se pod uticajem centralne sile tako da u svakom trenutku intenzitet njene brzine bude obrnuto proporcionalan njenom rastojanju od centra. Odrediti silu i trajektoriju.

Prema uslovu zadatka je $v = k/r$, gde je k neka pozitivna konstanta. Iz zakona kinetičke energije proističe

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = dA = F dr,$$

tako da je sila koja izaziva ovo kretanje

$$F = -\frac{m k^2}{r^3}.$$

Kad je zakon dejstva sile određen, može se pomoću Bineovog obrasca odrediti trajektorija. Stavljajući $r^{-1} = u$ iz tog obrasca dobiva se diferencijalna jednačina

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = \frac{k^2}{A^2} u, \quad (A = r_0^2 \dot{\theta}_0)$$

koja za tri moguća slučaja

$$1) \quad A^2 - k^2 > 0, \quad 2) \quad A^2 - k^2 = 0, \quad 3) \quad A^2 - k^2 < 0.$$

ima tri integrala

$$(1) \quad \frac{1}{r} = C_1 \cos l\theta + C_2 \sin l\theta, \quad \left(l^2 = \frac{A^2 - k^2}{A^2} \right);$$

$$(2) \quad \frac{1}{r} = C_1 \theta + C_2$$

$$(3) \quad \frac{1}{r} = C_1 e^{l\theta} + C_2 e^{-l\theta}, \quad \left(l^2 = -\frac{A^2 - k^2}{A^2} \right).$$

2. Bineov obrazac može da se primeni i kada centralna sila zavisi ne samo od rastojanja, već i od pravca, pod uslovom da postoji integral površine. Npr. ako na materijalnu tačku dejstvuje privlačna centralna sila sa zakonom dejstva $F = -m\mu/r^2 \cos^3 \theta$, ($\mu = \text{const.} > 0$), gde su r i θ polarne koordinate sa polom u centru, Bineov obrazac glasi

$$\frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} = \frac{\mu}{A^3 \cos^3 \theta}.$$

Ovo je nehomogena diferencijalna jednačina drugog reda sa konstantnim koeficijentima. Integral homogene jednačine koja odgovara problemu je

$$\frac{1}{r} = C_1 \cos \theta + C_2 \sin \theta,$$

a potpuni integral se dobiva varijacijom konstanata. Diferencijalne jednačine za konstante integracije C_1 i C_2 su

$$\frac{dC_1}{d\theta} \cos \theta + \frac{dC_2}{d\theta} \sin \theta = 0; \quad -\frac{dC_1}{d\theta} \sin \theta + \frac{dC_2}{d\theta} \cos \theta = \frac{\mu}{A^3 \cos^3 \theta},$$

odakle se dobiva

$$\frac{dC_1}{d\theta} = -\frac{\mu}{A^3 \cos \theta} \sin \theta; \quad \frac{dC_2}{d\theta} = \frac{\mu}{A^2 \cos^2 \theta}$$

sa integralima

$$C_1 = \frac{\mu}{A^2} \int \frac{d(\cos \theta)}{\cos^3 \theta} = -\frac{1}{2} \frac{\mu}{A^2 \cos^2 \theta} + C_1^*; \quad C_2 = \frac{\mu}{A^2} \int \frac{d\theta}{\cos^2 \theta} = \frac{\mu}{A^2} \operatorname{tg} \theta + C_2^*,$$

($C_1^* = \text{const.}; \quad C_2^* = \text{const.}$),

tako da se zamenom u integralu homogene jednačine dobiva integral jednačine trajektorije u obliku

$$\frac{1}{r} = C_1^* \cos \theta + C_2^* \sin \theta + \frac{\mu}{2A^2} \frac{1}{\cos \theta}.$$

3. Odrediti trajektoriju materijalne tačke ako se kreće pod dejstvom centralne sile čiji zakon dejstva glasi

$$f(r) = m(a/r^2 + b/r^3),$$

gde su a i b konstante veće od nule.

Bineov obrazac dovodi do diferencijalne jednačine

$$\frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} = -\frac{1}{A^2} \left(a + \frac{b}{r} \right). \quad (A = r_0^2 \dot{\theta}_0)$$

Za integraljenje su važna tri moguća slučaja:

- 1) $A^2 + b > 0;$
- 2) $A^2 + b = 0;$
- 3) $A^2 + b < 0.$

U slučaju 1) je integral homogene jednačine

$$\frac{1}{r} = C_1 \cos l\theta + C_2 \sin l\theta, \quad \left(l^2 = \frac{A^2 + b}{A^2} \right)$$

pa je jednačina trajektorije

$$\frac{1}{r} = C_1^* \cos l\theta + C_2^* \sin l\theta - \frac{a}{A_2 + b}. \quad (C_1^*, C_2^* = \text{const.})$$

U slučaju 2) je jednačina trajektorije

$$\frac{1}{r} = -\frac{a}{2A^2} \theta^2 + B\theta + C, \quad (B, C = \text{const.})$$

a u slučaju 3)

$$\frac{1}{r} = C_1 e^{l\theta} + C_2 e^{-l\theta} - \frac{a}{A^2 + b}. \quad (C_1, C_2 = \text{const.})$$

4. Zemljin veštački satelit kreće se po eliptičnoj putanji, koju obiđe za 2 sata. Da bi izbegao dejstvo atmosfere, njegova najmanja visina iznad površi Zemlje mora biti 800 km. Izračunati najveće udaljenje satelita od površi Zemlje.

Iz polarne jednačine elipse dobiva se da je

$$r_{\min} = a(1 - e), \quad r_{\max} = a(1 + e),$$

gde je r udaljenje satelita od središta Zemlje, a e ekscentričnost putanje. Velika poluosa putanje može se izračunati iz III Keplerovog zakona

$$\frac{2\pi}{T} a^{3/2} = R \sqrt{g},$$

gde je R poluprečnik Zemlje a g ubrzanje sile teže na površi Zemlje. Odavde je

$$a = \sqrt[3]{\frac{R^2 T^2 g}{4 \pi^2}},$$

gde je T period obilaska putanje. Kako je

$$h_{\min} = a(1 - e) - R,$$

to se dobiva

$$e = 1 - (R + h_{\min}) \sqrt[3]{\frac{4 \pi^2}{R^2 T^2 g}},$$

a kako je

$$h_{\max} = a(1 + e) - R,$$

to se dobiva

$$h_{\max} = 2 \sqrt[3]{\frac{R^2 T^2 g}{4 \pi^2}} - 2R - h_{\min}.$$

Ako se unesu numeričke vrednosti

$$h_{\min} = 800 \text{ km}, \quad g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{sec}}, \quad R = 6370 \text{ km}, \quad T = 2^h$$

dobiva se za

$$h_{\max} = 2570 \text{ km.}$$

5. Izračunati energiju potrebnu da raketa mase m uđe u kružnu putanju (orbitu) oko Zemlje, na rastojanju a od njenog centra. Otpor vazduha zanemariti.

Jednačina kretanja je

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{k^2}{r^3} \mathbf{r}.$$

Kako je na površi Zemlje $\left| \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right| = g$, $r = R$, to je $k^2 = R^2 g$ pa je

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{R^2 g}{r^3} \mathbf{r}.$$

Množeći jednačinu skalarno vektorom $\mathbf{v} dt = d\mathbf{r}$ dobiće se

$$v dv = -R^2 g \frac{dr}{r^3},$$

odakle se dalje dobiva integracijom

$$\frac{v_2}{2} - \frac{v_0^2}{2} = -R^2 g \int_R^a \frac{dr}{r^3} = -\frac{Rg}{a} (a - R).$$

Potrebna energija je

$$E = \frac{m v_0^2}{2} = \frac{m v^2}{2} + mg \frac{R}{a} (a - R).$$

Za kružnu putanju je $\mathbf{r} \cdot \mathbf{v} = 0$ i

$$\mathbf{r} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -v^2,$$

pa je brzina u orbiti oko Zemlje ($r = a$)

$$v^2 = -\mathbf{r} \cdot \left(-\frac{R^2 g}{r^3} \mathbf{r} \right) = \frac{R^2 g}{a}$$

i

$$E = mg R \left(1 - \frac{R}{2a} \right).$$

6. Na materijalnu tačku M deluje iz centra O privlačna sila veličine

$$F = \frac{m a b^2 (1 + 5 e^{-2\vartheta})}{\rho^2},$$

gde je $\rho = \overline{OM}$, a m masa tačke. Naći trajektoriju tačke M ako je ona u položaju $\vartheta_0 = 0$, $\rho_0 = a$ imala brzinu $v_0 = 2b$ koja je sa vektorom položaja $\overrightarrow{OM_0}$ obrazovala ugao $\alpha_0 = \pi/4$.

Pri rešavanju ovog zadatka treba koristiti Bineov obrazac. Jednačina trajektorije je

$$\rho = \frac{2a}{1 + e^{-2\vartheta}}.$$

7. Materijalna tačka jedinične mase kreće se pod dejstvom centralne sile F i otporne sile R , koja deluje u smeru suprotnom od smera brzine tačke. Ako je S veličina sektorske brzine \mathbf{S} , p rastojanje tangente na trajektoriji od centra sile a ρ poluprečnik krivine trajektorije, pokazati da je

$$F = -\frac{r}{p^3} \cdot \frac{S^2}{\rho}, \quad R = -\frac{S}{p^2} \cdot \frac{dS}{ds},$$

gde je r rastojanje tačke od centra sile a s dužina luka trajektorije.

Diferencijalna jednačina kretanja je

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = F \frac{\mathbf{r}}{r} - R \frac{\mathbf{v}}{v},$$

a sektorska brzina je određena obrascem

$$\mathbf{S} = \mathbf{r} \times \mathbf{v}.$$

Množenjem diferencijalne jednačine kretanja vektorski s leva vektorom položaja \mathbf{r} dobiće se

$$\frac{d\mathbf{S}}{dt} = -\frac{R}{v} \mathbf{S},$$

odakle se vidi da se tačka stalno kreće u istoj ravni. Iz poslednje relacije dobiva se da je

$$\frac{dS}{dt} = -\frac{R}{v} S, \quad \frac{dS}{ds} = -\frac{RS}{v^2}.$$

Međutim je $p = r \sin \varphi$, gde je φ ugao između vektora položaja i vektora brzine $p = r \sin \varphi = S/v$, pa je

$$v = \frac{S}{p}$$

i dobiće se traženi izraz za R .

Množeći vektorsku jednačinu kretanja skalarno jediničnim vektorom normale \mathbf{N} dobiće se

$$\frac{v^2}{\rho} = F \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{N}}{r} = -\sin \varphi = -\frac{p}{r},$$

pa je

$$\frac{v^2}{\rho} = -F \frac{p}{r},$$

odakle se dobiva traženi izraz za F .

8. Materijalnu tačku M mase m privlači centar O silom intenziteta

$$F = mk^2/\rho^7$$

gde je $\rho = \overline{OM}$. U početnom trenutku tačka M je bila na rastojanju $\overline{OM}_0 = a$ od centra O i imala početnu brzinu $v_0 = k/(a^3\sqrt{3})$ upravnu na \overline{OM}_0 . Pokazati da su konačne jednačine kretanja u polarnim koordinatama

$$\rho^4 = a^4 - \frac{4k^2}{3a^4} t^2, \quad \vartheta = \frac{1}{2} \arcsin \left(\frac{2k}{a^4\sqrt{3}} t \right)$$

i da je trajektorija lemniskata

$$\rho^2 = a^2 \cos 2\vartheta.$$

9. Materijalna tačka mase m pod dejstvom centralne sile opisuje kardioidu

$$\rho = a(1 + \cos \vartheta).$$

Ako je u položaju $\vartheta = 0$ brzina tačke v_0 , pokazati da se ona kreće pod dejstvom sile

$$\mathbf{F} = -\frac{12 ma^3 v_0^2}{\rho^5} \mathbf{e}$$

i da je njena brzina određena obrascem $v^2 = 8a^3 v_0^2 / \rho^3$.

2.10. Veze

Materijalna tačka na koju dejstvuje neka sila \mathbf{F} (jedna ili više njih sa rezultantom \mathbf{F}) kreće se u prostoru isključivo na način određen drugim Njutnovim zakonom i njeno je kretanje određeno jedino silom i početnim uslovima. Za materijalnu tačku čije kretanje nije podvrgnuto nikakvim drugim uslovima kaže se da je *slobodna* u celom prostoru ili bar u onom delu prostora u kome se kretanje posmatra.

Može se međutim sloboda kretanja tačke ograničiti izvesnim naknadnim uslovima i tada je tačka *neslobodna* ili *vezana*. Svako ograničenje slobode kretanja tačke zove se *veza* ili *prinuda*, a kretanje je *neslobodno* ili *prinudno*.

Prema prirodi veza ima ih dve vrste. Vezama može tačka biti prinudena da se kreće tako da njen položaj stalno zadovoljava neke date uslove. Takve veze ograničavaju položaj pokretne tačke, a ograničenje brzine proističe iz uslova da tačka ne može zauzimati proizvoljne položaje. Takve veze nazivaju se *geometrijske*, *konačne* ili *holonomne* (po Hercu (Hertz)). Naziv „geometrijska“ potiče otuda što takva veza obično zahteva da se tačka kreće po nekoj površi ili liniji. Npr. veza $f(x, y, z) = 0$ traži da za vreme kretanja materijalna tačka stalno ostane na površi određenoj tom jednačinom. Naziv „holonomna veza“ potiče od grčkih reči „ὅλος“ = ceo i „νόμος“ = zakon, dakle veza je cela, konačna, nije iskazana diferencijalnim relacijama.

Druga vrsta veza ograničava samo brzine, tako da koordinate brzine moraju da zadovoljavaju izvesne uslove iskazane pomoću jedne ili više relacija oblika $\varphi(x, y, z; \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = 0$. Takve veze su *diferencijalne*, *kinematičke* ili *neholonomne*. Diferencijalne su stoga što su određene diferencijalnim jednačinama, kinematičke jer ograničavaju brzinu tačke, a neholonomne su stoga što nisu holonomne.

Moguć je i slučaj integrabilnih neholonomnih veza; tada se takva veza naziva *prividno neholonomna* (*semiholonomna*). Npr. ako je veza oblika $\varphi = x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z} = 0$, odmah se vidi da je ta veza u stvari $f \equiv x^2 + y^2 + z^2 - \text{const.}^2 = 0$, pa je $\varphi = 0$ prividno neholonomna veza.

Sem podele na konačne i diferencijalne, druga važna podela veza je prema tome da li su veze promenljive u toku vremena ili ne. Veza koja se ne menja u toku vremena ili je nepokretna naziva se *skleronomna* ili *stacionarna*, za razliku od *reonomnih* ili *nestacionarnih* veza koje se menjaju. Relacije koje određuju reonomne veze uvek sadrže eksplicitno i vreme, tj. one su npr. oblika $f(x, y, z; t) = 0$, odnosno $\varphi(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}; t) = 0$. Npr. kada se tačka kreće po sferi čiji se poluprečnik menja u toku vremena $f = x^2 + y^2 + z^2 - a^2(t) = 0$, ili po sferi čiji

se centar kreće po nekom datom zakonu $\mathbf{r}_c = \mathbf{r}_c(t)$, $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_c(t)| = a = \text{const.}$ veza je reonomna. Reonomne mogu biti i neholonomne veze.

Veze mogu da ograničavaju kretanje tačke samo sa jedne strane i da je prinuđuju da se stalno nalazi u jednoj oblasti prostora u kojoj se kreće kao slobodna. Takve veze se izražavaju nejednakostima oblika $f(x, y, z) \geq 0$ ili $\varphi(x, y, z; \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \geq 0$. Npr. ako je neka materijalna tačka prinuđena da se stalno kreće sa jedne strane ravni $z = 0$, i u toj ravni, jednačina veze je $f(\mathbf{r}, t) \equiv z \geq 0$. Veze izražene nejednakostima zovu se *jednostrane (unilateralne)* ili *nezadržavajuće* za razliku od veza izraženih jednačinama koje su *zadržavajuće, dvostrane (bilateralne)*.

Kad postoji samo jedna konačna veza, kaže se da se tačka kreće po površi, a kad postoje dve—po krivoj liniji koja je u preseku površi određenih pojedinačnim jednačinama veza.

Putanja materijalne tačke koja se kreće pod uticajem neke date sile \mathbf{F} je linija potpuno određena drugim Njutnovim zakonom i početnim uslovima. Ako je data jedna dvostrana veza, trajektorija određena silom se u opštem slučaju ne nalazi na površi određenoj datom vezom, a kad su date dve zadržavajuće veze ova trajektorija se u opštem slučaju ne poklapa sa propisanom linijom.

Pošto se stvarno kretanje vrši u saglasnosti sa vezama, na izgled je onda kretanje u suprotnosti sa drugim Njutnovim zakonom. Međutim uticaj veza na kretanje može da se predstavi silom tako da drugi Njutnov zakon ostane u važnosti i da stvarna trajektorija bude linija koja iz tog zakona proističe. Takva se sila naziva *reakcije veze* ili *pasivna sila* za razliku od *aktivne sile* \mathbf{F} pod čijim uticajem se tačka kreće. Uloga sile reakcije \mathbf{R} je upravo u tome da rezultujuća sila $\mathbf{F} + \mathbf{R}$ bude ona pod čijim dejstvom će stvarno kretanje materijalne tačke biti u saglasnosti sa datim vezama. Dakle, mesto veze uvodi se sila reakcije tako da kretanje određeno drugim Njutnovim zakonom, tj. vektorskom diferencijalnom jednačinom

$$(1) \quad m \mathbf{w} = \mathbf{F} + \mathbf{R}$$

bude u saglasnosti sa datim vezama.

Kad je veza trivijalna sile reakcije nema. Npr. pri slobodnom padu iz tačke $z_0 > 0$, $x_0 = y_0 = 0$ trajektorija tačke je prava $x = y = 0$, (u odnosu na sistem u kome je osa z vertikalna). Ako bi bio postavljen zadatak „tačka se kreće pod uticajem sile $\mathbf{F} = -mg \mathbf{k}$, sa vezama $x = 0$, $y = 0$ “ ove „veze“ su neaktivne, jer se slobodna trajektorija tačke poklapa sa prinudnom i ne postoji potreba za uvođenjem sile reakcije, tj. $\mathbf{R} = 0$. Slično bi bilo i kod kosog hica, npr., kad bi kao veza bila data jednačina paraboličnog cilindra čija je direktrisa upravo slobodna trajektorija. Prema tome, sila reakcije se javlja onda kada kretanje pod uticajem aktivne sile nije saglasno sa vezama pa je potrebna takva sila koja će kretanje da dovede u sklad sa prinudom.

Projiciranjem vektorske jednačine (1) na ose Dekartovog pravouglog koordinatnog sistema dobivaju se tri skalarne jednačine kretanja

$$(2) \quad m\ddot{x} = X + R_x, \quad m\ddot{y} = Y + R_y, \quad m\ddot{z} = Z + R_z$$

a projiciranjem na ose nekog sistema generalisanih koordinata istim postupkom kao pri izvođenju diferencijalnih jednačina kretanja slobodne tačke (odjeljak 2.3) dobiva se

$$(3) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial T}{\partial q^i} = Q_i + R_i, \quad (i = 1, 2, 3)$$

gde su R_i generalisane koordinate sile reakcije,

$$(4) \quad R_i = A_i \mathbf{R} \cdot \mathbf{t}_i.$$

2.10.1. Kretanje materijalne tačke po površi

Kad postoji samo jedna konačna dvostruka veza bilo reonomna

$$(1) \quad f(\mathbf{r}, t) = 0,$$

bilo skleronomna

$$(2) \quad f(\mathbf{r}) = 0,$$

gde je \mathbf{r} vektor položaja pokretne tačke, kaže se da se uočena materijalna tačka kreće po površi i to u prvom slučaju po pokretnoj a u drugom po nepokretnoj.

Položaj tačke u prostoru može biti određen u odnosu na bilo koji koordinatni sistem q^1, q^2, q^3 pa se jednačina površi može u opštem slučaju pisati u obliku

$$(3) \quad f(q^1, q^2, q^3) = 0,$$

odn.

$$(4) \quad f(q^1, q^2, q^3; t) = 0,$$

prema tome da li je veza skleronomna ili reonomna. U Dekartovim pravouglim koordinatama jednačina takve veze biće

$$(5) \quad f(x, y, z) = 0 \text{ odnosno } f(x, y, z; t) = 0.$$

Holonomne veze posredno predstavljaju ograničenje za brzinu i ubrzanje pokretne tačke. Ako u nekom trenutku t koordinate x, y i z materijalne tačke zadovoljavaju jednačinu bilateralne veze onda i u trenutku $t + \Delta t$ koordinate novog položaja tačke moraju da zadovoljavaju tu istu jednačinu

$$f(\mathbf{r} + \Delta \mathbf{r}; t + \Delta t) = f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z; t + \Delta t) = 0.$$

Kako je kretanje neprekidno to su i $x = x(t)$, $y = y(t)$ i $z = z(t)$; kao konačne jednačine kretanja, neprekidne funkcije vremena pa za mali priraštaj Δt i priraštaji koordinata $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ moraju biti mali. Za dovoljno malo Δt se stoga gornja relacija može predstaviti pomoću konvergentnog Tejlorovog (Taylor) reda u kome se smeju zanemariti članovi koji sadrže priraštaje koordinata i vremena na stepenima višim od prvog tako da bude

$$f(\mathbf{r} + \Delta \mathbf{r}; t + \Delta t) \approx \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial f}{\partial z} \Delta z + \frac{\partial f}{\partial t} \Delta t = 0.$$

Ako se ova relacija podeli sada sa Δt i pusti da $\Delta t \rightarrow 0$ dobiće se u opštem slučaju za reonomnu vezu

$$(6) \quad \frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial f}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial f}{\partial z} \dot{z} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0.$$

Parcijalni izvodi $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ i $\frac{\partial f}{\partial z}$ su koordinate gradijenta skalarne funkcije f , a \dot{x} , \dot{y} i \dot{z} su koordinate vektora \mathbf{v} brzine tačke pa je uslov za brzinu koji konačna veza nameće

$$(7) \quad \dot{f} = \text{grad } f \cdot \mathbf{v} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0.$$

Za stacionarnu vezu je $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$, jer jednačina veze ne zavisi eksplicitno od vremena pa se uslov za brzinu svodi na

$$(8) \quad \text{grad } f \cdot \mathbf{v} = 0,$$

što znači da brzina pokretne tačke mora stalno da se nalazi u tangentnoj ravni površi $f = 0$, jer je vektor $\text{grad } f$ upravan na površ u uočenoj tački.

U slučaju nestacionarne veze uslov (7) predstavlja ograničenje samo za komponentu brzine u pravcu normale na površ, dok komponenta u tangentnoj ravni nije ograničena.

Neka u nekom trenutku t brzina \mathbf{v} i koordinate pokretne materijalne tačke zadovoljavaju uslov za brzinu (7). Za bilateralnu vezu taj će uslov morati da zadovoljavaju i priraštaji koordinata $x + \Delta x$, $y + \Delta y$, $z + \Delta z$, i priraštaji brzina $\dot{x} + \Delta \dot{x}$, $\dot{y} + \Delta \dot{y}$, $\dot{z} + \Delta \dot{z}$, u trenutku $t + \Delta t$,

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z; \dot{x} + \Delta \dot{x}, \dot{y} + \Delta \dot{y}, \dot{z} + \Delta \dot{z}; t + \Delta t) = 0.$$

Za dovoljno malo Δt ovaj se uslov može aproksimirati članovima Tejlorovog reda linearnim po priraštajima

$$\frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial f}{\partial z} \Delta z + \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \Delta \dot{x} + \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \Delta \dot{y} + \frac{\partial f}{\partial \dot{z}} \Delta \dot{z} + \frac{\partial f}{\partial t} \Delta t = 0.$$

Ako se sada ova relacija podeli sa Δt i pusti da $\Delta t \rightarrow 0$ dobiće se

$$\frac{\partial f}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial f}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial f}{\partial z} \dot{z} + \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \ddot{x} + \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \ddot{y} + \frac{\partial f}{\partial \dot{z}} \ddot{z} + \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{df}{dt} = 0.$$

Iz (6) se vidi da je (pošto se izvrši naknadno parcijalno diferencijaljenje)

$$\frac{\partial f}{\partial x} \ddot{x} + \frac{\partial f}{\partial y} \ddot{y} + \frac{\partial f}{\partial z} \ddot{z} = \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \ddot{x} + \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \ddot{y} + \frac{\partial f}{\partial \dot{z}} \ddot{z}.$$

Ako se još uvede oznaka

$$D_2 f \equiv \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \ddot{x} + \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \ddot{y} + \frac{\partial f}{\partial \dot{z}} \ddot{z} + \frac{\partial f}{\partial t},$$

biće

$$(9) \quad \ddot{f} = \frac{\partial f}{\partial x} \ddot{x} + \frac{\partial f}{\partial y} \ddot{y} + \frac{\partial f}{\partial z} \ddot{z} + D_2 f = 0,$$

gde je

$$(10) \quad D_2 f \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \dot{x}^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \dot{y}^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \dot{z}^2 + \\ + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \dot{x} \dot{y} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \dot{y} \dot{z} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} \dot{z} \dot{x} + \\ + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} \dot{x} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial t} \dot{y} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial t} \dot{z} + \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}.$$

Relacija (9) predstavlja uslov za ubrzanje materijalne tačke koja se kreće po površi. I ovaj uslov kao i uslov za brzinu proističe iz jednačine veze i može se napisati u obliku

$$(11) \quad \text{grad } f \cdot \mathbf{w} + D_2 f = 0,$$

jer su \ddot{x} , \ddot{y} , \ddot{z} koordinate vektora \mathbf{w} ubrzanja tačke. Iz (11) se vidi neposredno da uslov za ubrzanje takođe ograničava samo komponentu ubrzanja u pravcu normale na površ.

U slučaju stacionarne veze je

$$(12) \quad D_2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \dot{x}^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \dot{y}^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \dot{z}^2 + \\ + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \dot{x} \dot{y} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \dot{y} \dot{z} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} \dot{z} \dot{x}.$$

Pri kretanju tačke po površi moguća su samo ona ubrzanja koja zadovoljavaju uslov (11). Kad je data neka aktivna sila \mathbf{F} ubrzanje određeno drugim Njutnovim zakonom $m\mathbf{w} = \mathbf{F}$ ne mora biti moguće, ako je tačka prinuđena da se kreće po površi (1), što znači da zamenom $\mathbf{w} = \mathbf{F}/m$ u uslovu (11) dobivena relacija

$$(13) \quad \mathbf{F} \cdot \text{grad } f + m D_2 f = 0$$

u opštem slučaju nije zadovoljena. Međutim, ako ta relacija nije zadovoljena, uvođenjem dopunske sile reakcije \mathbf{R} dobiće se jednačina

$$(14) \quad (\mathbf{F} + \mathbf{R}) \cdot \text{grad } f + m D_2 f = 0,$$

iz koje se može odrediti reakcija veze \mathbf{R} tako da ubrzanje određeno relacijom (11) bude moguće i saglasno sa vezom.

Iz (14) proističe

$$(15) \quad \mathbf{R} \cdot \text{grad } f = -\mathbf{F} \cdot \text{grad } f - m D_2 f.$$

Vektor \mathbf{R} se može rastaviti u dve komponente, jednu \mathbf{R}_N u pravcu normale na površ, dakle kolinearnu sa $\text{grad } f$,

$$(16) \quad \mathbf{R}_N = \lambda \text{grad } f,$$

gde je λ neki skalarni množilac, i drugu \mathbf{R}_t u tangentnoj ravni površi tako da bude

$$(17) \quad \mathbf{R} = \lambda \text{grad } f + \mathbf{R}_t. \quad (\mathbf{R}_t \perp \text{grad } f)$$

Zamenom ovoga u (15) dobiva se jednačina za određivanje veličine normalne komponente R_N reakcije veze,

$$(18) \quad R_N |\text{grad } f| = \lambda |\text{grad } f|^2 = -(\mathbf{F} \cdot \text{grad } f + m D_2 f),$$

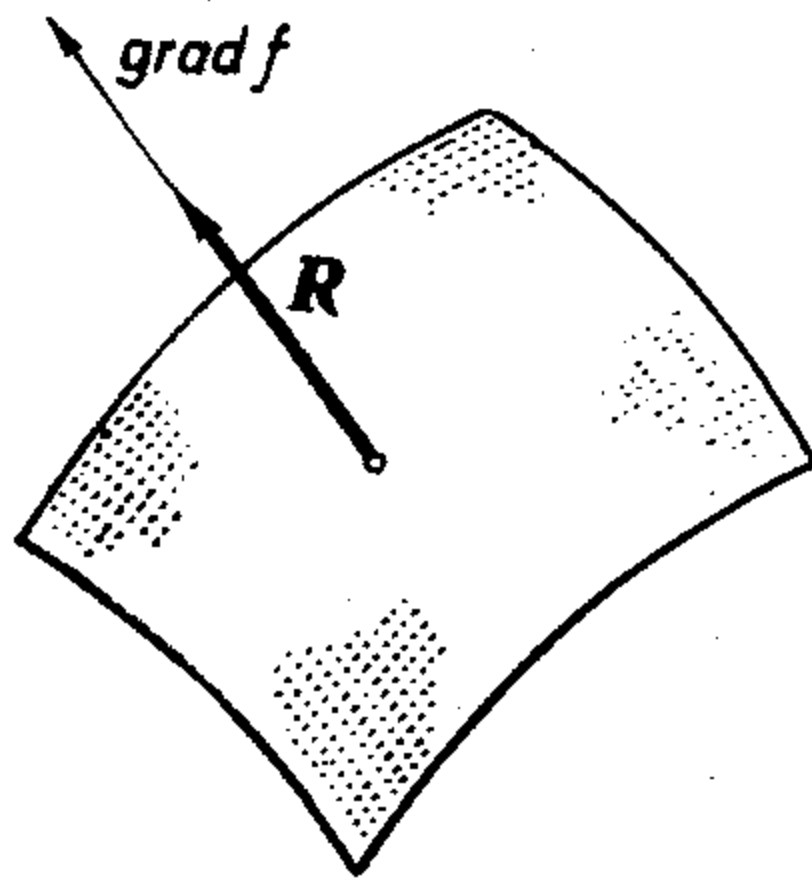
dok tangenta komponenta \mathbf{R}_t ostaje neodređena.

Koristeći izraz (16) iz (18) može se odrediti vrednost množioca

$$(19) \quad \lambda = -\frac{1}{|\text{grad } f|^2} (\mathbf{F} \cdot \text{grad } f + m D_2 f),$$

a time u potpunosti i normalna reakcija veze R_N . λ se zove množilac (multiplikator) veze.

Za određivanje tangentne komponente reakcije moraju se uvesti neke naknadne pretpostavke, jer se iz do sada navedenih uslova \mathbf{R}_t ne može odrediti. Kada je $\mathbf{R}_t = 0$, tj. kada ne postoji reakcija veze u tangentnoj ravni kaže se da je *veza idealna*. Sila \mathbf{R}_t se naziva *trenje* pa se stoga za idealnu vezu kaže i da je *glatka*. Prema tome kad se tačka kreće *bez trenja* po nekoj površi kaže se da je *površ glatka* a *veza idealna* (sl. 79).



Slika 79

Za idealnu vezu je uvek reakcija određena prema (17) obrascem

$$(20) \quad \mathbf{R} = \lambda \text{ grad } f,$$

pri čemu je multiplikator veze određen obrascem (19).

2.10.1.1. Diferencijalne jednačine kretanja materijalne tačke po glatkoj površi

Prema (2.10—1) i (2.10.1—20) vektorska diferencijalna jednačina kretanja tačke po površi u slučaju idealne veze glasi

$$(1) \quad m\mathbf{w} = \mathbf{F} + \lambda \text{ grad } f.$$

Ako je jednačina veze data u Dekartovim pravouglim koordinatama biće

$$(2) \quad \text{grad } f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right).$$

U generalisanim koordinatama q^i ($i = 1, 2, 3$) određenim relacijama

$$(3) \quad x = x(q^1, q^2, q^3; t), \quad y = y(q^1, q^2, q^3; t), \quad z = z(q^1, q^2, q^3; t)$$

jednačina veze je oblika (2.10.1—4)

$$(4) \quad f(q^1, q^2, q^3; t) = 0$$

pa će biti

$$(5) \quad \text{grad } f = \frac{\partial f}{\partial q^i} \frac{\partial q^i}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial q^i} \frac{\partial q^i}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial q^i} \frac{\partial q^i}{\partial z} \mathbf{k} \quad (\text{po ponovljenim indeksima se sabira}).$$

Obeleže li se jedinični vektori Dekartovih pravougljih koordinata sa

$$(6) \quad \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}^1 = \mathbf{i}, \quad \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}^2 = \mathbf{j}, \quad \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}^3 = \mathbf{k},$$

relacija (5) se može napisati, koristeći dosledno konvenciju za sabiranje po ponovljenim indeksima, u obliku

$$(7) \quad \text{grad } f = \frac{\partial f}{\partial q^i} \frac{\partial q^i}{\partial x^a} \mathbf{e}^a.$$

Vektori

$$(8) \quad \mathbf{g}^i = \frac{\partial q^i}{\partial x^a} \mathbf{e}^a = \frac{\partial q^i}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial q^i}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial q^i}{\partial z} \mathbf{k}$$

predstavljaju *kontravarijantne osnovne vektore* za generalisane koordinate q^i , a definisani su već, na nešto drukčiji način, u (1.2.1—13). Da vektori \mathbf{g}^i obra-

zuju zaista u odnosu na vektore $\mathbf{g}_i = \partial \mathbf{r} / \partial q^i$, definisane u (1.1 — 11) recipročnu vektorsku bazu vidi se iz

$$(9) \quad \mathbf{g}^i \cdot \mathbf{g}_j = \left(\frac{\partial q^i}{\partial x^\alpha} \mathbf{e}^\alpha \right) \cdot \left(\frac{\partial x^\beta}{\partial q^j} \mathbf{e}_\beta \right) = \frac{\partial q^i}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\beta}{\partial q^j} \delta_\beta^\alpha = \delta_j^i,$$

jer je u Dekartovim koordinatama prema (6)

$$(10) \quad \mathbf{e}^\alpha \cdot \mathbf{e}_\beta = \delta_\beta^\alpha.$$

Sad se grad f može s obzirom na (7) i (8) izraziti u obliku

$$(11) \quad \text{grad } f = \frac{\partial f}{\partial q^i} \mathbf{g}^i,$$

gde su $\frac{\partial f}{\partial q^i}$ generalisane koordinate gradijenta skalarne funkcije f .

Ako se sa A^i obeleži veličina vektora \mathbf{g}^i , a sa \mathbf{t}^i njegov jedinični vektor

$$(12) \quad \mathbf{t}^M = \frac{1}{A^M} \mathbf{g}^M,$$

gde je velikim slovom kao indeksom po dogovoru naznačeno da ovde ne treba sabirati po M , biće s obzirom na (8)

$$(13) \quad A^i = \left[\left(\frac{\partial q^i}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial q^i}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial q^i}{\partial z} \right)^2 \right]^{1/2}.$$

Tako se grad f može izraziti u obliku

$$(14) \quad \text{grad } f = \frac{\partial f}{\partial q^i} A^i \mathbf{t}^i.$$

Skalarnim množenjem vektora \mathbf{w} , \mathbf{F} i $\lambda \text{ grad } f$ u vektorskoj relaciji (1) osnovnim vektorima \mathbf{g}_i dobiva se onda zbog (2.3 — 5 i 6)

$$(15) \quad \begin{aligned} m \mathbf{w} \cdot \mathbf{g}_i &= \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial T}{\partial q^i}; \\ \mathbf{F} \cdot \mathbf{g}_i &= A_i \mathbf{F} \cdot \mathbf{t}_i = Q_i; \\ \lambda \text{ grad } f \cdot \mathbf{g}_i &= \lambda \frac{\partial f}{\partial q^i}. \end{aligned}$$

Prema tome skalarnim množenjem vektorske diferencijalne jednačine kretanja materijalne tačke po površi osnovnim vektorima \mathbf{g}_i nekog sistema generalisanih koordinata dobiće se tri skalarne diferencijalne jednačine kretanja u odnosu na taj sistem

$$(16) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial T}{\partial q^i} = Q_i + \lambda \frac{\partial f}{\partial q^i}. \quad (i = 1, 2, 3)$$

Ove se jednačine nazivaju *Lagranževe jednačine sa množiocem (multiplikatorom) veze* ili *Lagranževe jednačine prve vrste* za razliku od onih Lagranževih jednačina, koje su kao jednačine (2.3 — 8) bez multiplikatora pa se stoga zovu i *Lagranževe jednačine druge vrste*.

U Dekartovim pravouglim koordinatama zbog $2T = m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$ Lagranževe jednačine prve vrste dobivaju vrlo jednostavan oblik

$$(17) \quad m\ddot{x} = X + \lambda \frac{\partial f}{\partial x}, \quad m\ddot{y} = Y + \lambda \frac{\partial f}{\partial y}, \quad m\ddot{z} = Z + \lambda \frac{\partial f}{\partial z}.$$

Pri rešavanju konkretnih problema izbor koordinatnog sistema igra veoma važnu ulogu, jer struktura sistema diferencijalnih jednačina kretanja zavisi od toga. Najpogodniji je uvek onaj koordinatni sistem za koji je jedna koordinatna površ upravo površ po kojoj se uočena materijalna tačka kreće. Takav koordinatni sistem može da se uvek izabere tako da dve generalisane koordinate, recimo q^1 i q^2 budu neke proizvoljne funkcije koordinata x , y i z , a treća q^3 da bude vezana sa Dekartovim koordinatama pomoću jednačine veze, tj. da bude

$$(18) \quad \begin{aligned} q^1 &= q^1(x, y, z; t), \\ q^2 &= q^2(x, y, z; t), \\ q^3 &= f(x, y, z; t) = 0. \end{aligned}$$

Relacije (18) moraju biti međusobno nezavisne i moraju dopustiti inverziju, a za to je potreban uslov da funkcionalna determinanta koja odgovara koordinatnoj transformaciji (18) bude različita od nule,

$$\frac{\partial (q^1, q^2, q^3)}{\partial (x, y, z)} \neq 0.$$

Tada postoji obrnuta transformacija koordinata,

$$(19) \quad \begin{aligned} x &= x(q^1, q^2, q^3; t), \\ y &= y(q^1, q^2, q^3; t), \\ z &= z(q^1, q^2, q^3; t). \end{aligned}$$

Međutim, tako izabrane generalisane koordinate identički zadovoljavaju jednačinu veze, tj.

$$(20) \quad f(x, y, z; t) = f[x(q^1, q^2, q^3; t), y(q^1, q^2, q^3; t), z(q^1, q^2, q^3; t); t] \equiv 0.$$

Prema trećoj relaciji (18) pri kretanju tačke po površi $f = 0$ je stalno $q^3 = 0$ i položaj tačke na površi je određen samo sa dve nezavisne koordinate q^1 i q^2 , a transformacije (19) postaju

$$(21) \quad \dot{x} = x(q^1, q^2; t), \quad \dot{y} = y(q^1, q^2; t), \quad \dot{z} = z(q^1, q^2; t).$$

Kako je sad stalno $q^3 = 0$, to je i $\dot{q}^3 = 0$ i kinetička energija tačke neće zavisiti od q^3 već samo od q^1 , q^2 , \dot{q}^1 i \dot{q}^2 .

Na ovaj način izabrane generalisane koordinate q^1 i q^2 , za koje su odgovarajuće koordinate vektora reakcije idealne veze jednake nuli, nazivaju se *nezavisne koordinate*.

Neki autori kao npr. Apel (Appell), Viteker (Whittaker), Gantmaher i drugi obeležavaju sa q^i isključivo nezavisne koordinate čiji je broj jednak broju stepena slobode, dok su u ovim izlaganjima q^i svuda opšte generalisane koordinate.

Ako se pođe od izraza za kinetičku energiju u Dekartovim pravouglim koordinatama

$$T = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{m}{2} \delta_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j,$$

gde je $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$, a δ_{ij} Kronekerov simbol, zbog (21) će biti

$$\dot{x}^i = \frac{\partial x^i}{\partial q^1} \dot{q}^1 + \frac{\partial x^i}{\partial q^2} \dot{q}^2 + \frac{\partial x^i}{\partial t} = \frac{\partial x^i}{\partial q^\alpha} \dot{q}^\alpha + \frac{\partial x^i}{\partial t}, \quad (\alpha = 1, 2)$$

tako da izraz za kinetičku energiju postaje

$$T = \frac{m}{2} \left(\delta_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial q^\alpha} \frac{\partial x^j}{\partial q^\beta} \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta + 2 \delta_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial q^\alpha} \frac{\partial x^j}{\partial t} \dot{q}^\alpha + \delta_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial t} \frac{\partial x^j}{\partial t} \right).$$

Ako se uvedu oznake

$$\delta_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial q^\alpha} \frac{\partial x^j}{\partial q^\beta} = g_{\alpha\beta},$$

$$\delta_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial q^\alpha} \frac{\partial x^j}{\partial t} = g_\alpha, \quad (\alpha, \beta = 1, 2)$$

$$\delta_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial t} \frac{\partial x^j}{\partial t} = g_0$$

za kinetičku energiju se najzad može napisati

$$T = \frac{m}{2} (g_{\alpha\beta} \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta + 2 g_\alpha \dot{q}^\alpha + g_0),$$

pri čemu su koeficijenti $g_{\alpha\beta}$, g_α i g_0 u opštem slučaju funkcije samo nezavisnih koordinata q^α i vremena. Za reonomnu vezu kinetička energija, dakle, nije homogena kvadratna funkcija generalisanih brzina \dot{q}^α . Kad je veza skleronomna transformacije (21) ne zavise eksplicitno od vremena i izraz za kinetičku energiju je homogena kvadratna forma,

$$T = \frac{m}{2} g_{\alpha\beta} \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta,$$

a koeficijenti $g_{\alpha\beta}$ ne zavise eksplicitno od vremena.

Prema (11) je

$$(22) \quad \text{grad } f = \frac{\partial q^3}{\partial q^i} \mathbf{g}^i = \mathbf{g}^3,$$

jer je $\frac{\partial q^3}{\partial q^1} = \frac{\partial q^3}{\partial q^2} = 0$ zbog međusobne nezavisnosti koordinata, pa proističe da je osnovni vektor \mathbf{g}^3 normalan na površi po kojoj se tačka kreće.

Skalarnim množenjem vektora sile reakcije idealne veze osnovnim vektorima \mathbf{g}_1 i \mathbf{g}_2 dobiće se prema (9)

$$(23) \quad R_\alpha = \lambda \text{grad } f \cdot \mathbf{g}_\alpha = \lambda \mathbf{g}^3 \cdot \mathbf{g}_\alpha = \lambda \delta_\alpha^3 = \begin{cases} \lambda, & \alpha = 3 \\ 0, & \alpha = 1, 2, \end{cases}$$

odakle proističe da normalna reakcija ne postoji u odnosu na generalisane koordinate q^1 i q^2 određene obrascima (18) odnosno (19),

$$R_1 = 0, \quad R_2 = 0.$$

Množeći vektorsku diferencijalnu jednačinu kretanja (1) osnovnim vektorima \mathbf{g}_1 i \mathbf{g}_2 nezavisnih generalisanih koordinata q^1 i q^2 dobiće se dve skalarne diferencijalne jednačine kretanja

$$(24) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\alpha} - \frac{\partial T}{\partial q^\alpha} = Q_\alpha, \quad (\alpha = 1, 2)$$

koje više ne sadrže reakcije veze. To su *Lagranževe jednačine druge vrste* za kretanje tačke po glatkoj površi.

Diferencijalne jednačine (24) su najpogodnije za proučavanje kretanja materijalne tačke po površi, jer sadrže svega dve nezavisne koordinate koje u potpunosti određuju položaj tačke na određenoj površi. Nedostatak Lagranževih jednačina druge vrste je što se pomoću njih ne mogu neposredno odrediti reakcije veze. U Lagranževim jednačinama prve vrste (16) nepoznate veličine su tri koordinate q^i i množilac veze λ , dakle ukupno četiri i za njihovo određivanje su potrebne četiri jednačine, tri diferencijalne jednačine kretanja (16) i jednačina veze (4). Pri tome treba prvo iz (2.10.1—19) odrediti multiplikator λ i uneti ga u jednačine (16) odnosno (17).

Da bi se odredila reakcija, kad se problem rešava koristeći Lagranževe jednačine druge vrste, potrebno je iz tih jednačina prvo odrediti konačne jednačine kretanja

$$(25) \quad q^1 = q^1(t), \quad q^2 = q^2(t),$$

pa zatim zamenom u (21) odrediti konačne jednačine kretanja u Dekartovim koordinatama

$$(26) \quad \begin{aligned} x &= x[q^1(t), q^2(t); t], \\ y &= y[q^1(t), q^2(t); t], \\ z &= z[q^1(t), q^2(t); t]. \end{aligned}$$

Zamenom funkcija (26) u skalarne jednačine kretanja, pošto je sad ubrzanje jednostavno odrediti diferencijacijom izraza (26), dobivaju se koordinate sile reakcije

$$(27) \quad R_x = X - m\ddot{x}, \quad R_y = Y - m\ddot{y}, \quad R_z = Z - m\ddot{z}.$$

Kinetička energija u generalisanim koordinatama q^i ($i = 1, 2, 3$) je, prema (1.4.1—5)

$$T = \frac{m}{2} v^2 = \frac{m}{2} g_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j, \quad (i, j = 1, 2, 3)$$

Za nezavisne koordinate q^α ($\alpha = 1, 2$) na površi kinetička energija postaje

$$T = \frac{m}{2} g_{\alpha\beta} \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta$$

a koordinate $g_{\alpha\beta}$ metričkog tenzora ne zavise više od q^3 . Tenzor $g_{\alpha\beta}$ je metrički tenzor (*osnovni tenzor*) površi. Ako se uvede tenzor $a_{\alpha\beta} = mg_{\alpha\beta}$ proporcionalan metričkom tenzoru $g_{\alpha\beta}$, u potpunoj analogiji sa (1.6.3—13, 14 i 17) može se napisati

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\alpha} - \frac{\partial T}{\partial q^\alpha} = m w_\alpha = \frac{d v_\alpha}{dt} - \left\{ \begin{array}{c} \gamma \\ \alpha \beta \end{array} \right\}_a v_\gamma v^\beta = \frac{D v_\alpha}{Dt},$$

a to je apsolutni (Bjankijev) izvod kovarijantnih koordinata vektora brzine, ali s obzirom na metrički tenzor $a_{\alpha\beta}$ posmatrane površi. Prema tome i u odnosu na generalisane koordinate na površi diferencijalne jednačine kretanja mogu se napisati u obliku

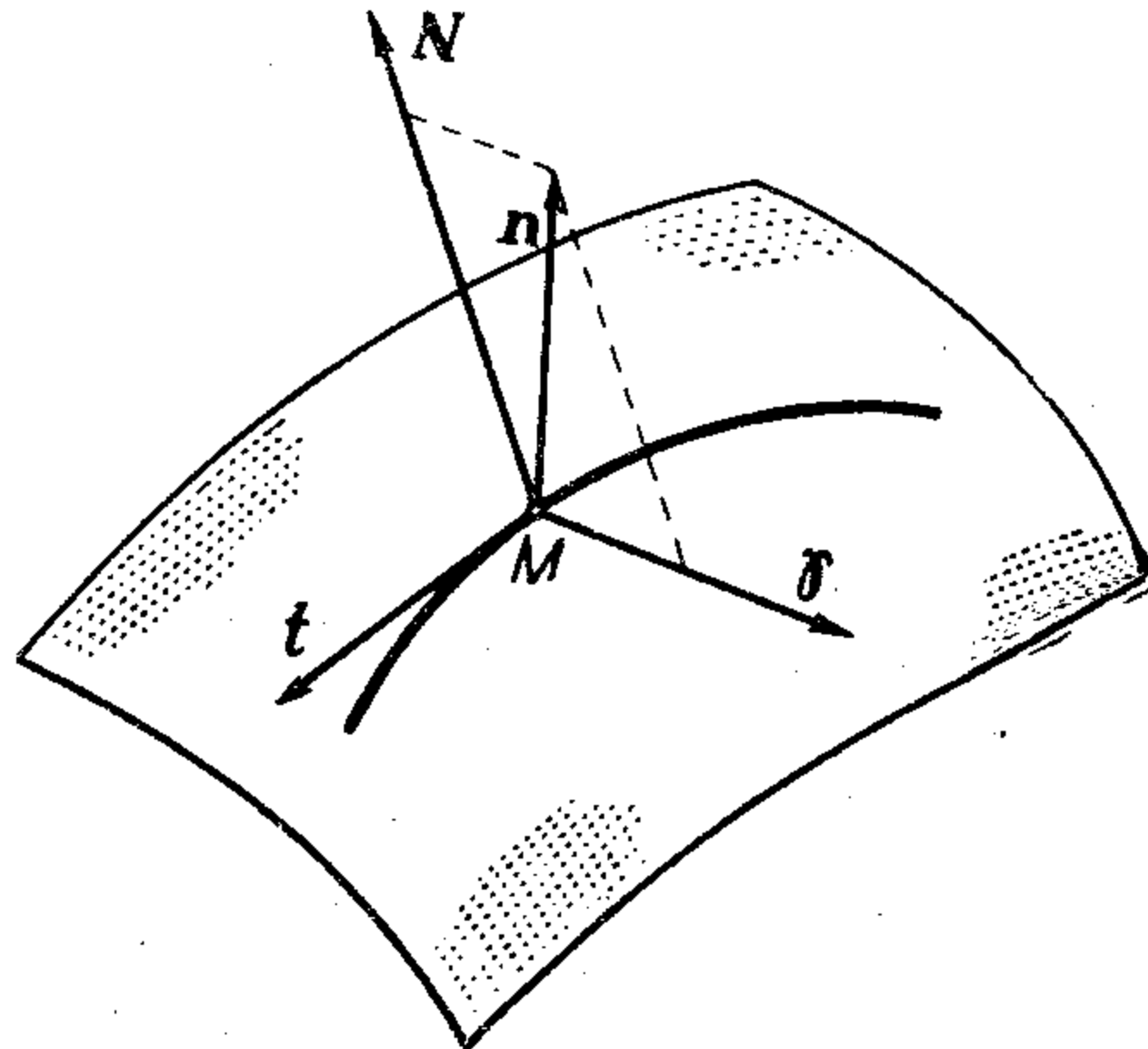
$$\frac{a}{Dt} v_{\alpha} = Q_{\alpha} \quad (\alpha = 1, 2)$$

Ako bi se izvršila kompozicija tih jednačina sa kontravarijantnim tenzorom $a^{\alpha\beta}$, koji se obrazuje od $a_{\alpha\beta}$ na potpuno analogan način kao što je u odeljku 1.6.2.1 formiran kontravarijantni metrički tenzor g^{ij} , dobile bi se kontravarijantne jednačine kretanja (1.6.3—11 i 15)

$$\frac{a}{Dt} v^{\beta} = Q^{\beta} = a^{\alpha\beta} Q_{\alpha}$$

Kovarijantne i kontravarijantne diferencijalne jednačine kretanja pokazuju da i za generalisane koordinate na površi oblik drugog Njutnovog zakona ostaje nepromenjen, tj. da je „promena kretanja proporcionalna sili i da se vrši u pravcu sile“, pri čemu se ovde sada radi o generalisanim silama i apsolutnim izvodima po vremenu u odnosu na odgovarajuću metriku.

Pored navedenih diferencijalnih jednačina kretanja tačke po površi veoma su važne i korisne još i prirodne jednačine koje se dobivaju iz vektorske jednačine (1) projiciranjem na ose prirodnog triedra za površ. Prirodni triedar za površ — Darbuov (Darboux) triedar — u nekoj tački M određen je jediničnim vektorima *tangente* \mathbf{t} na putanji, *normale* \mathbf{N} na površ sa smerom istim kao i grad f i *geodezijskom normalom* $\boldsymbol{\gamma}$ koja je u tangentnoj ravni površi i gradi sa \mathbf{t} kao prvom osom i \mathbf{N} kao trećom osom desni triedar (sl. 80).



Slika 80

Ako je \mathbf{n} vektor normale na putanji i $\mathbf{k} = \frac{1}{\rho} \mathbf{n}$ krivina putanje, vektor \mathbf{k} se može u ravni normalnoj na putanji da rastavi u dve komponente, jednu u pravcu normale \mathbf{N} na površ i drugu u pravcu $\boldsymbol{\gamma}$ geodezijske normale

$$(28) \quad \mathbf{k} = \mathbf{k}_N + \mathbf{k}_g$$

Ako je pri tome φ ugao između normale \mathbf{N} na površ i glavne normale \mathbf{n} putanje, biće

$$(29) \quad \mathbf{k}_N = \frac{\mathbf{N}}{\rho_N} = k \cos \varphi \mathbf{N},$$

$$\mathbf{k}_g = \frac{\boldsymbol{\gamma}}{\rho_g} = k \sin \varphi \boldsymbol{\gamma},$$

gde je $k_N = \frac{1}{\rho_N}$ normalna krivina a $k_g = \frac{1}{\rho_g}$ geodezijska krivina krive linije (putanje) na površi. Iz (29) se dobivaju dva važna obrasca za određivanje normalne i geodezijske krivine

$$(30) \quad \frac{1}{\rho_N} = \frac{\cos \varphi}{\rho}, \quad \frac{1}{\rho_g} = \frac{\sin \varphi}{\rho}.$$

U vektorskoj diferencijalnoj jednačini (1) ubrzanje se može izraziti u obliku (1.6.1—2)

$$\mathbf{w} = \frac{dv}{dt} \mathbf{t} + \frac{v^2}{\rho} \mathbf{n},$$

tako da vektorska diferencijalna jednačina kretanja u slučaju jedne idealne veze postaje

$$(31) \quad m \left(\frac{dv}{dt} \mathbf{t} + \frac{v^2}{\rho} \mathbf{n} \right) = \mathbf{F} + R_N \mathbf{N}.$$

Projiciranjem ove jednačine na ose prirodnog triedra dobiće se onda tri skalarne jednačine kretanja tačke po površi koje se nazivaju *prirodne jednačine kretanja* materijalne tačke

$$(32) \quad \begin{aligned} m \frac{dv}{dt} &= \mathbf{F} \cdot \mathbf{t}, \\ m \frac{v^2}{\rho_g} &= \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\gamma}, \\ m \frac{v^2}{\rho_N} &= \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} + R_N, \end{aligned}$$

gde je R_N algebarska vrednost reakcije idealne veze. Ako veza nije idealna, sa desne strane prve dve skalarne jednačine (32) morale bi da se pojave i odgovarajuće projekcije one komponente reakcije koja se nalazi u tangennoj ravni.

Kad se materijalna tačka kreće po idealno glatkoj površi po *inerciji*, tj. kad na nju ne deluje nikakva aktivna sila ($\mathbf{F} = \mathbf{0}$) iz prve od jednačina (32) dobiva se $v = \text{const.}$ pa je iz druge

$$(33) \quad k_g = \frac{1}{\rho_g} = 0,$$

što znači da je tada putanja tačke takva da joj je geodezijska krivina stalno jednaka nuli. Takva linija na površi zove se *geodezijska linija*.

Pošto se iz prve dve jednačine (32) odredi kretanje materijalne tačke, iz treće jednačine se određuje reakcija veze. Ta jednačina, međutim, može da posluži i za određivanje normalne reakcije i kad se kretanje odredi na neki drugi način, recimo pomoću Lagranževih jednačina druge vrste.

2.10.2. Integrali kinetičkog momenta i kinetičke energije za kretanje materijalne tačke po površi

Za kretanje tačke po glatkoj površi teorema kinetičkog momenta (2.7.2—5) se svodi na vektorsku diferencijalnu jednačinu

$$(1) \quad \frac{d}{dt} (\mathbf{r} \times m \mathbf{v}) = \mathbf{r} \times \mathbf{F} + \lambda \mathbf{r} \times \text{grad } f.$$

Ako postoji integral kinetičkog momenta za neku stalnu osu, recimo \mathbf{u} , prema (2.7.2—10) mora biti

$$(2) \quad (\mathbf{r} \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{u} + \lambda (\mathbf{r} \times \text{grad } f) \cdot \mathbf{u} = 0,$$

gde je \mathbf{u} jedinični vektor u pravcu ose.

Relacija (2) predstavlja u najopštijem slučaju uslov koji moraju da zadovoljavaju istovremeno aktivna sila \mathbf{F} i površ $f = 0$ da bi postojao jedan integral kinetičkog momenta. Ti su uslovi sigurno ispunjeni i ako je svaki pojedinačni sabirak sa leve strane relacije (2) jednak nuli, tj. kad je

$$(3) \quad (\mathbf{r} \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{u} = 0,$$

$$(4) \quad (\mathbf{r} \times \text{grad } f) \cdot \mathbf{u} = 0.$$

Kako je vektor \mathbf{u} stalan, uslov (3) zahteva da se aktivna sila \mathbf{F} uvek nalazi u ravni određenoj vektorima \mathbf{r} i \mathbf{u} . Npr. ako se osa \mathbf{u} poklapa sa z -osom, uslov (3) traži da se sila \mathbf{F} uvek nalazi u ravni koja prolazi kroz z -osu.

Ako se takođe u uslovu (4) stavi da je $\mathbf{u} = \mathbf{k}$, taj se uslov svodi na

$$(5) \quad x \frac{\partial f}{\partial y} - y \frac{\partial f}{\partial x} = 0,$$

što predstavlja linearnu parcijalnu diferencijalnu jednačinu za određivanje onih površi $f = 0$ za koje postoji integral kinetičkog momenta. Prema teoriji linearnih parcijalnih jednačina, jednačini (5) odgovara jedna obična diferencijalna

$$(6) \quad \frac{dy}{x} = \frac{\partial x}{-y}$$

čiji je integral

$$(7) \quad x^2 + y^2 = C.$$

Pošto jednačina (5) ne sadrži ni z niti $\frac{\partial f}{\partial z}$, integraciona konstanta C u (7) može se smatrati proizvoljnom funkcijom od z pa se integral parcijalne jednačine (5) može pisati u obliku

$$x^2 + y^2 = \varphi(z)$$

ili

$$(8) \quad f(x^2 + y^2, z) = 0,$$

a to je jednačina obrtne površi čija se osa obrtanja i simetrije poklapa sa z -osom. Ravni koje sadrže z -osu su meridijanske ravni površi (8).

Prema tome, ako se neka materijalna tačka kreće po površi i ako je 1) ta površ obrtna i 2) ako se aktivna sila nalazi uvek u meridijanskoj ravni površi, sigurno postoji integral kinetičkog momenta za posmatrano kretanje. U tom slučaju projekcija vektora položaja pokretne tačke na ekvatorsku ravan opisuje površinu proporcionalnu vremenu, a to je integral površine koji odgovara pravcu ose obrtanja.

Ovde navedeni uslovi (3) i (4) za postojanje integrala kinetičkog momenta su samo dovoljni ali ne i potrebni, što će reći ako su ti uslovi zadovoljeni jedan integral kinetičkog momenta sigurno postoji, ali može postojati neki takav integral i ako ti uslovi nisu zadovoljeni, već je zadovoljen mnogo opštiji uslov (2).

Prema odeljku (2.3.3.2) integral kinetičke energije za materijalnu tačku postoji ako je rad sile na elementarnom pomeranju totalni diferencijal. Pri kretanju tačke sa jednom idealnom vezom biće elementarni rad

$$(9) \quad dA = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \lambda \operatorname{grad} f \cdot d\mathbf{r}.$$

Iz uslova (2.10.1—7) za brzinu pri kretanju tačke po površi množenjem sa dt proističe

$$(10) \quad \operatorname{grad} f \cdot d\mathbf{r} = -\frac{\partial f}{\partial t} dt,$$

tako da se izraz (9) za elementarni rad svodi na oblik

$$(11) \quad dA = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} - \lambda \frac{\partial f}{\partial t} dt.$$

Desna strana relacije (11) biće svakako totalni diferencijal, ako je

$$(12) \quad \frac{\partial f}{\partial t} = 0$$

i ako je

$$(13) \quad \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = dU,$$

tj.

$$\mathbf{F} = \operatorname{grad} U,$$

gde je U neka skalarna funkcija (funkcija sile). Prema tome za kretanje tačke po površi postojaće integral energije ako je 1) površ nepokretna (veza skleronomna) i 2) aktivna sila konzervativna. Tada je

$$(14) \quad T = U + h,$$

gde je $h = T_0 - U_0$ proizvoljna konstanta koja se određuje iz početnih uslova.

U generalisanim koordinatama q^i koordinate sile su Q_i a jednačina nepokretne površi

$$(15) \quad f(q^1, q^2, q^3) = 0.$$

Elementarni rad sile je (2.7.3—9)

$$(16) \quad dA = Q_i dq^i.$$

Zbog (15) sve generalisane koordinate q^i nisu međusobno nezavisne, već se jedna od njih, recimo q^3 može izraziti kao funkcija ostalih dveju

$$(17) \quad q^3 = q^3(q^1, q^2),$$

pa je

$$dq^3 = \frac{\partial q^3}{\partial q^1} dq^1 + \frac{\partial q^3}{\partial q^2} dq^2.$$

Zamenom ovoga u (16) izraz za elementarni rad postaje

$$(18) \quad dA = \left(Q_1 + Q_3 \frac{\partial q^3}{\partial q^1} \right) dq^1 + \left(Q_2 + Q_3 \frac{\partial q^3}{\partial q^2} \right) dq^2.$$

Ako se generalisane koordinate sile izraze pomoću (17) samo kao funkcije od q^1 i q^2 ,

$$Q_i(q^1, q^2, q^3) = Q_i[q^1, q^2, q^3(q^1, q^2)],$$

uslov da desna strana relacije (18) bude totalni diferencijal biće

$$(19) \quad \frac{\partial}{\partial q^2} \left(Q_1 + Q_3 \frac{\partial q^3}{\partial q^1} \right) - \frac{\partial}{\partial q^1} \left(Q_2 + Q_3 \frac{\partial q^3}{\partial q^2} \right) = 0.$$

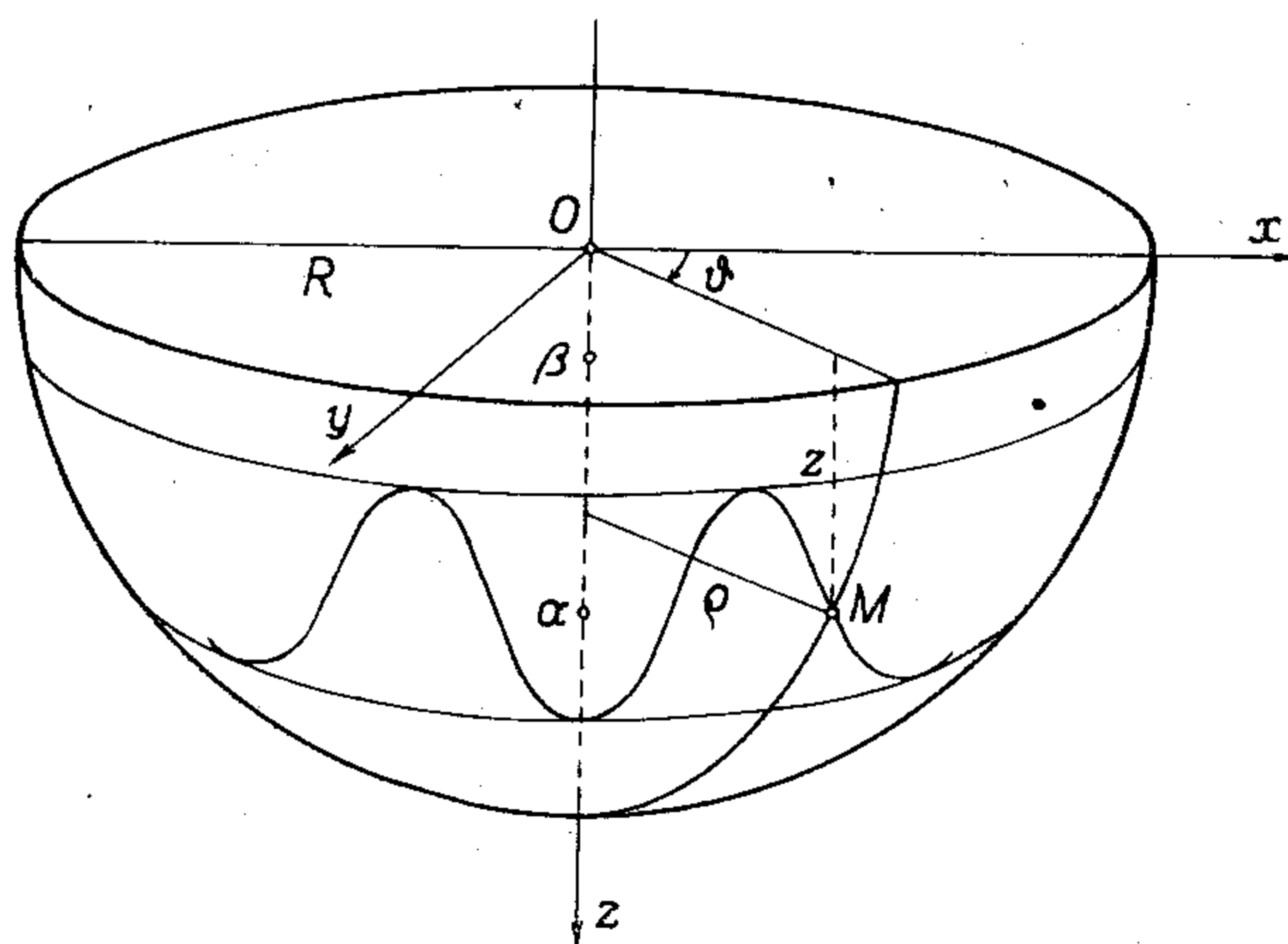
Ako se mesto generalisanih posmatraju Dekartove ortogonalne koordinate ovaj se uslov svodi na oblik (jednačina veze je $z = z(x, y)$)

$$(20) \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(X + Z \frac{\partial z}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(Y + Z \frac{\partial z}{\partial y} \right) = 0.$$

2.10.3. Primeri kretanja materijalne tačke sa jednom idealnom vezom

2.10.3.1. Sferno klatno. Eliptične funkcije

Kretanje teške materijalne tačke po površi nepokretne glatke sfere zove se *sferno klatno*. Za posmatranje takvog kretanja najpogodnije je da se uvede sistem cilindarskih koordinata sa polom u centru O sfere i z -osom orijentisanom naniže, a polarne koordinate ρ i ϑ su u horizontalnoj ravni kroz centar sfere (sl. 81)



Slika 81

Kada se tačka kreće po nepokretnoj sferi poluprečnika $R = a$ jednačina sfere će biti

$$(1) \quad F(\rho, \vartheta, z) = \rho^2 + z^2 - a^2 = 0.$$

Aktivna sila $\mathbf{F} = m \mathbf{g} = mg \mathbf{k}$ je konzervativna, a kako je sem toga i površ nepokretna, prema odeljku (2.10.2) postoji za sferno klatno integral energije. U cilindarskim koordinatama kinetička energija tačke je

$$T = \frac{m}{2} v^2 = \frac{m}{2} (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\vartheta}^2 + \dot{z}^2),$$

a funkcija sile u ovom slučaju je

$$U = mgz,$$

tako da se integral energije može napisati u obliku

$$(2) \quad \dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\vartheta}^2 + \dot{z}^2 = 2gz + h,$$

gde je h konstanta koja se određuje iz početnih uslova a $mh/2$ je totalna energija klatna.

Međutim, postoji i integral kinetičkog momenta (integral površine), jer se aktivna sila nalazi uvek u meridijanskoj ravni sfere, a sama sfera je obrtna površ. Za z -osu iz zakona kinetičkog momenta proističe

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{r} \times m \mathbf{v}) \cdot \mathbf{k} = (\mathbf{r} \times m \mathbf{g}) \cdot \mathbf{k} = 0,$$

tako da je (2.7.2—16a)

$$(3) \quad \rho^2 \dot{\vartheta} = A = \text{const.}$$

integral površine za sferno klatno.

Pri kretanju po datoj površi materijalna tačka ima dva stepena slobode tako da su dve nezavisne diferencijalne jednačine kretanja dovoljne za određivanje kretanja. Takve dve diferencijalne jednačine kretanja jesu prvi integrali (2) i (3). Međutim, u tim jednačinama javljaju se tri koordinate ρ , ϑ i z koje nisu međusobom nezavisne, jer koordinate tačke moraju stalno biti saglasne sa jednačinom veze (1). Prema tome za određivanje kretanja sfernog klatna imamo tri jednačine (1), (2) i (3). Iz tih jednačina mogu se eliminisati dve promenljive tako da se dobije jedna diferencijalna jednačina koja sadrži samo jednu nepoznatu funkciju vremena. Pri tome je najbolje prvo eliminisati ρ i ϑ .

Diferencijaljenjem jednačine veze (1) po vremenu dobiva se

$$(4) \quad \dot{\rho} = -\frac{z \dot{z}}{\rho} = -\frac{z \dot{z}}{\sqrt{a^2 - z^2}},$$

dok se iz integrala površine (3) nalazi, koristeći jednačinu veze,

$$(5) \quad \dot{\vartheta} = \frac{A}{\rho^2} = \frac{A}{a^2 - z^2}.$$

Zamenjujući sad u integralu energije (2) ρ^2 sa $a^2 - z^2$ prema (1) i $\dot{\rho}$ i $\dot{\vartheta}$ iz (4) i (5) relacija (2) će moći da se napiše u obliku

$$(6) \quad a^2 \dot{z}^2 = (2gz + h)(a^2 - z^2) - A^2 = f(z).$$

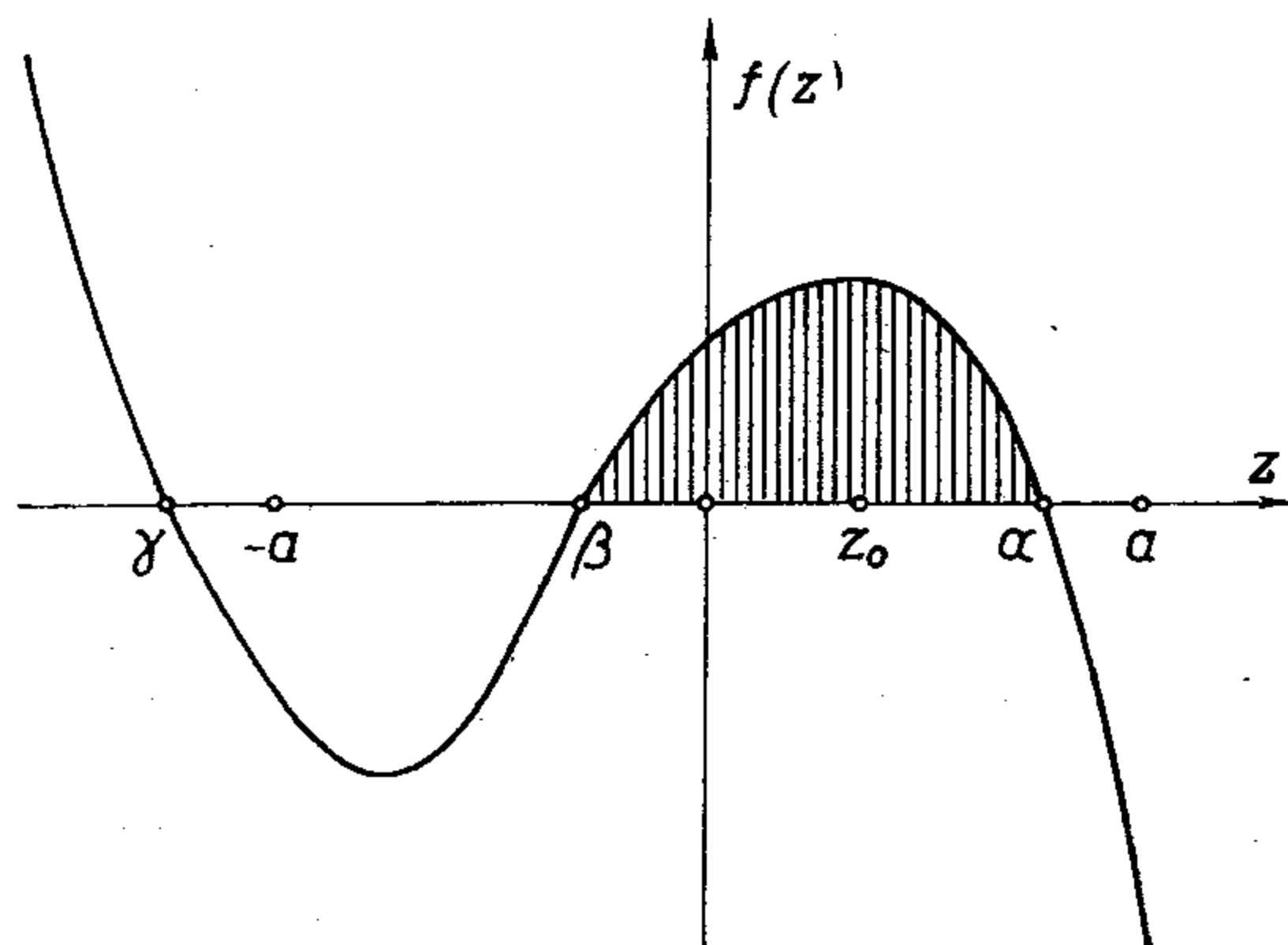
Ovaj oblik integrala energije neposredno određuje kvadrat vertikalne komponente brzine sfernog klatna u zavisnosti od z , tj. od rastojanja tačke od horizontalne ravni koja prolazi kroz centar sfere, kao i od početnih uslova (preko konstanta A i h).

Sa leve strane relacije (6) nalaze se kvadrati realnih brojeva a i z tako da relacija (6) ima smisla samo za one vrednosti promenljive z za koje će desna strana biti pozitivna ili nula. Polinom $f(z)$ je trećeg stepena; kad $z \rightarrow -\infty$ biće $f(z) \rightarrow \infty$, za $z = -a$ je $f(-a) = -A^2$, za $z = a$ je $f(a) = -A^2$ i za $z \rightarrow \infty$ biće $f(z) \rightarrow -\infty$. Međutim za neki početni položaj z_0 koji se sigurno nalazi u in-

tervalu $-a \leq z_0 \leq a$ mora biti $f(z_0) = a^2 z_0^2 > 0$, jer bi u protivnom početna brzina bila imaginarna.

Prema tome polinom $f(z)$ u slučaju $f(z_0) > 0$ menja znak tri puta i ima tri realne nule; ako se nule obeležu redom sa γ, β, α tako da je $\gamma < \beta < \alpha$, te će se nule nalaziti u intervalima (sl. 82)

$$-\infty < \gamma < -a, \quad -a < \beta < z_0, \quad z_0 < \alpha < R.$$



Slika 82

Dakle, moguće vrednosti koordinata z se nalaze u onom intervalu u kome je $-a \leq z \leq a$ i u kome je $f(z) > 0$, a to je interval

$$(7) \quad \beta \leq z \leq \alpha,$$

pa se kretanje sfernog klatna odvija u sfernom pojasu između uporednika $z = \beta$ i $z = \alpha$, koji se zovu *granični uporednici* sfernog klatna.

Polinom $f(z)$ se sad može napisati u obliku

$$(8) \quad f(z) = -2g(z-\alpha)(z-\beta)(z-\gamma).$$

U tačkama $z = \alpha$ i $z = \beta$ je $f(z) = 0$, tj. $\dot{z} = 0$. Ako se posmatra prvi izvod

$$(9) \quad f'(z) = \frac{df}{dz} = -2g[(z-\beta)(z-\gamma) + (z-\gamma)(z-\alpha) + (z-\alpha)(z-\beta)],$$

vidi se da je

$$f'(\alpha) = -2g(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma) < 0,$$

jer je $\alpha > \beta > \gamma$ tako da su $\alpha-\beta$ i $\alpha-\gamma$ istog znaka. Prema tome u položaju $z = \alpha$ brzina je jednaka nuli, ali tačka se ne zaustavlja već nastavlja da se kreće naviše, jer $f(z)$ u toj tački opada. U položaju $z = \beta$ je

$$f'(\beta) = -2g(\beta-\gamma)(\beta-\alpha) > 0,$$

jer je $\beta > \gamma$ ali $\beta < \alpha$ tako da su $\beta-\gamma$ i $\beta-\alpha$ suprotnog znaka. U tom položaju brzina tačke je opet jednaka nuli ali, $f(z)$ raste, pa tačka u tom položaju nastavlja da se kreće naniže.

Za određivanje konačnih jednačina kretanja potrebno je integraliti diferencijalnu jednačinu (6) koja se zbog (8) može napisati u obliku

$$(10) \quad a^2 \dot{z}^2 = -2g(z-\alpha)(z-\beta)(z-\gamma).$$

Pri tome se za početni položaj može izabrati $z_0 = \alpha$ tako da je u tom položaju $\dot{z}_0 = 0$. Smenom

$$(11) \quad z = \alpha - (\alpha - \beta) u^2$$

početni položaj je određen sa $u_0 = 0$, pa (10) dobiva oblik

$$(12) \quad 4a^2 \dot{u}^2 = 2g(\alpha - \gamma)(1 - u^2) \left(1 - \frac{\alpha - \beta}{\alpha - \gamma} u^2\right).$$

Kako je $\alpha > 0$ i $\alpha > \beta > \gamma$ to je količnik

$$\frac{\alpha - \beta}{\alpha - \gamma} \equiv k^2 > 0$$

neka pozitivna veličina; sem toga je $-\beta < -\gamma$ tako da je $\alpha - \beta < \alpha - \gamma$ i $k^2 < 1$. Relacija (12) se rastavljanjem promenljivih može svesti na

$$\frac{\sqrt{2g(\alpha - \gamma)}}{2a} dt = \frac{du}{\sqrt{(1 - u^2)(1 - k^2 u^2)}}.$$

Ako se za početni trenutak uzme $t_0 = 0$ i stavi

$$(13) \quad \frac{\sqrt{2g(\alpha - \gamma)}}{2a} = \lambda$$

može se najzad napisati

$$(14) \quad \lambda t = \int_0^u \frac{du}{\sqrt{(1 - u^2)(1 - k^2 u^2)}},$$

pri čemu je $u^2 \leq 1$. Smenom

$$(14a) \quad u = \sin \varphi$$

ova relacija dobiva oblik ($0 \leq \varphi \leq \pi/2$)

$$(15) \quad \lambda t = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}.$$

Odredeni integral (14) odn. (15) kao funkcija gornje granice ne može se izraziti pomoću konačnog broja poznatih elementarnih funkcija. Taj integral se zove *normalni eliptički integral prve vrste*, pri čemu je (15) njegov tzv. *Ležandrov (Legendre) oblik*. Međutim, normalni eliptički integral i u obliku (14) i u obliku (15) definiše neke funkcije. Tako se na osnovu (15) može napisati

$$(16) \quad \lambda t = F(\varphi, k) = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\Delta\varphi},$$

gde je $\Delta\varphi = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}$. Konstanta k je *modul* eliptičkog integrala i zadovoljava uslov $0 \leq k^2 \leq 1$.

Za $k=0$ i $k=1$ prethodni integral se svodi na elementarne funkcije.

Osnovne osobine funkcije $F(\varphi, k)$ definisane određenim integralom nije teško utvrditi. Npr. očigledno je

$$(17) \quad F(0, k) = 0.$$

Osim toga ta funkcija zadovoljava relaciju

$$(18) \quad F(\varphi + \pi, k) = F(\varphi, k) + F(\pi, k).$$

Tačnost ovog tvrđenja nije teško dokazati. Naime,

$$\begin{aligned} F(\varphi + \pi, k) &= \int_0^{\varphi + \pi} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = \int_0^{\pi} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} + \int_{\pi}^{\varphi + \pi} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} \\ &= \int_0^{\pi} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} + \int_0^{\varphi} \frac{d\Theta}{\Delta\Theta} = F(\pi, k) + F(\varphi, k), \end{aligned}$$

što je i trebalo dokazati, jer se posle smene $\varphi = \pi + \Theta$ u određenom integralu

$$\int_{\pi}^{\varphi + \pi} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi}$$

dobiva određeni integral

$$\int_0^{\varphi} \frac{d\Theta}{\Delta\Theta} = F(\varphi, k).$$

Dalje je

$$(19) \quad F(-\varphi, k) = -F(\varphi, k),$$

tj. Ležandrov normalni eliptički integral prve vrste definiše neparnu funkciju. I ovo tvrđenje je lako dokazati, jer se od određenog integrala

$$\int_0^{-\varphi} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi}$$

smenom $\varphi = -\Theta$ dobiva odmah

$$-\int_0^{\varphi} \frac{d\Theta}{\Delta\Theta} = -F(\varphi, k).$$

Iz obrasca (18) se s obzirom na (19) dobiva za $\varphi = -\frac{\pi}{2}$

$$F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) = F\left(-\frac{\pi}{2}, k\right) + F(\pi, k) = -F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) + F(\pi, k),$$

a odatle je

$$(20) \quad F(\pi, k) = 2F\left(\frac{\pi}{2}, k\right).$$

Određeni integral (čija je standardna oznaka K)

$$(21) \quad K = F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}$$

zove se *potpuni eliptički integral prve vrste*.

Postupnom primenom obrasca (18) dolazi se do obrasca

$$(22) \quad F(\varphi + n\pi, k) = F(\varphi, k) + 2nK,$$

gde je n ceo pozitivan ili negativan broj.

Promenljiva φ u integralu (15) shvaćena kao funkcija od λt , koja se dobiva inverzijom tog integrala, tj.

$$(23) \quad \varphi = \varphi(\lambda t)$$

predstavlja tzv. *amplitudu* normalnog eliptičkog integrala prve vrste

$$(24) \quad \varphi = \operatorname{am} \lambda t,$$

koja se zove *Jakobijeva* (Jacobi) *eliptička funkcija*. Ona ima dimenziju ugla. Osnovne osobine ove eliptičke funkcije dobivaju se odmah pomoću obrazaca (19) i (22) i one glase

$$(25) \quad \begin{aligned} \operatorname{am}(-v) &= -\operatorname{am} v, \\ \operatorname{am}(v + 2nK) &= \operatorname{am} v + n\pi, \end{aligned}$$

kad se radi bolje preglednosti stavi

$$(25a) \quad \lambda t = v.$$

Vidi se da je ova eliptička funkcija neparna, ali nije čisto periodna već *pseudoperiodna*. Međutim, unošenjem (24) u (14a) dobivaju se naredne *osnovne eliptičke funkcije*

$$(26) \quad \begin{aligned} \sin \varphi &= \sin \operatorname{am} v = \operatorname{sn} v, \\ \cos \varphi &= \cos \operatorname{am} v = \operatorname{cn} v, \\ \Delta \varphi &= \Delta \operatorname{am} v = \sqrt{1 - k^2 \sin^2(\operatorname{am} v)} = \operatorname{dn} v. \end{aligned}$$

Ove funkcije su periodne i to prve dve imaju period $4K$, a treća $2K$, što nije teško pokazati. Npr. s obzirom na drugu osobinu (25) amplitude biće

$$\begin{aligned} \operatorname{sn}(v + 4K) &= \sin \operatorname{am}(v + 4K) = \sin(\operatorname{am} v + 2\pi) \\ &= \sin \operatorname{am} v = \operatorname{sn} v \end{aligned}$$

i na sličan način za ostale dve.

I ove tri eliptičke funkcije uveo je Jacobi a skraćene oznake potiču od Gudermana (Gudermann). Pored realnog perioda $4K$ odn. $2K$ ove funkcije imaju još jedan imaginarni period. One su dvostruko periodne.

Među osnovnim eliptičkim funkcijama (26) postoje naredne veze

$$(27) \quad \begin{aligned} \operatorname{sn}^2 v + \operatorname{cn}^2 v &= 1, \\ \operatorname{dn}^2 v + k^2 \operatorname{sn}^2 v &= 1, \\ \operatorname{dn}^2 v - k^2 \operatorname{cn}^2 v &= k^2, \end{aligned}$$

koje odmah proističu iz definicije ovih funkcija. Izvodi pak ovih funkcija glase

$$(28) \quad \begin{aligned} \frac{d(\operatorname{sn} v)}{dv} &= \frac{d}{dv} \sin \varphi = \cos \varphi \frac{d\varphi}{dv} = \cos \varphi \frac{1}{\frac{d\varphi}{dv}} \\ &= \cos \varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} = \operatorname{cn} v \operatorname{dn} v, \\ \frac{d(\operatorname{cn} v)}{dv} &= -\operatorname{sn} v \operatorname{dn} v \\ \frac{d(\operatorname{dn} v)}{dv} &= -k^2 \operatorname{sn} v \operatorname{cn} v. \end{aligned}$$

Što se tiče vrednosti potpunog eliptičkog integrala K , ona se može izračunati na ovaj način. Kad se podintegralna funkcija $\frac{1}{\Delta\varphi}$ razvije u beskonačni red po binomnom obrascu, dobiće se

$$\frac{1}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} = 1 + \frac{1}{2} k^2 \sin^2 \varphi + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} k^4 \sin^4 \varphi + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} k^6 \sin^6 \varphi + \dots$$

a taj red pri uslovu $k^2 < 1$ konvergira jednoliko. Kako je po *Volisovom* (Wallis) obrascu (za n prirodni broj)

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n} \varphi d\varphi = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} \cdot \frac{\pi}{2},$$

dobiva se

$$(29) \quad K = \frac{\pi}{2} \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 k^4 + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 k^6 + \dots \right].$$

Na osnovu prethodnih izlaganja a s obzirom na (14a) inverzijom integrala (14) dobiva se

$$(30) \quad u = \operatorname{sn} \lambda t,$$

čime je promenljiva u određena kao funkcija vremena. Koordinata z sfernog klatna može sad pomoću obrasca (11) da se izrazi u obliku

$$(31) \quad z = \alpha - (\alpha - \beta) \operatorname{sn}^2 \lambda t = f_1(t),$$

što predstavlja jednu konačnu jednačinu kretanja sfernog klatna. Ostale konačne jednačine kretanja nalaze se pomoću obrasca (1) i (3). Tako se iz (1) dobiva

$$(32) \quad \rho = \sqrt{a^2 - z^2} = \sqrt{a^2 - [f_1(t)]^2} = f_3(t),$$

dok je prema (3)

$$(33) \quad \vartheta - \vartheta_0 = A \int_0^t \frac{dt}{a^2 - [f_1(t)]^2} = f_2(t).$$

Za određivanje normalne reakcije najpogodnije je iskoristiti treću prirodnu jednačinu (2.10.1.1—32)

$$(34) \quad R_N = \frac{mv^2}{\rho_N} - \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}.$$

Za sferu je $\rho_N = a$, tj. normalna krivina jednaka je recipročnoj vrednosti poluprečnika, dok je kvadrat brzine određen integralom energije (2),

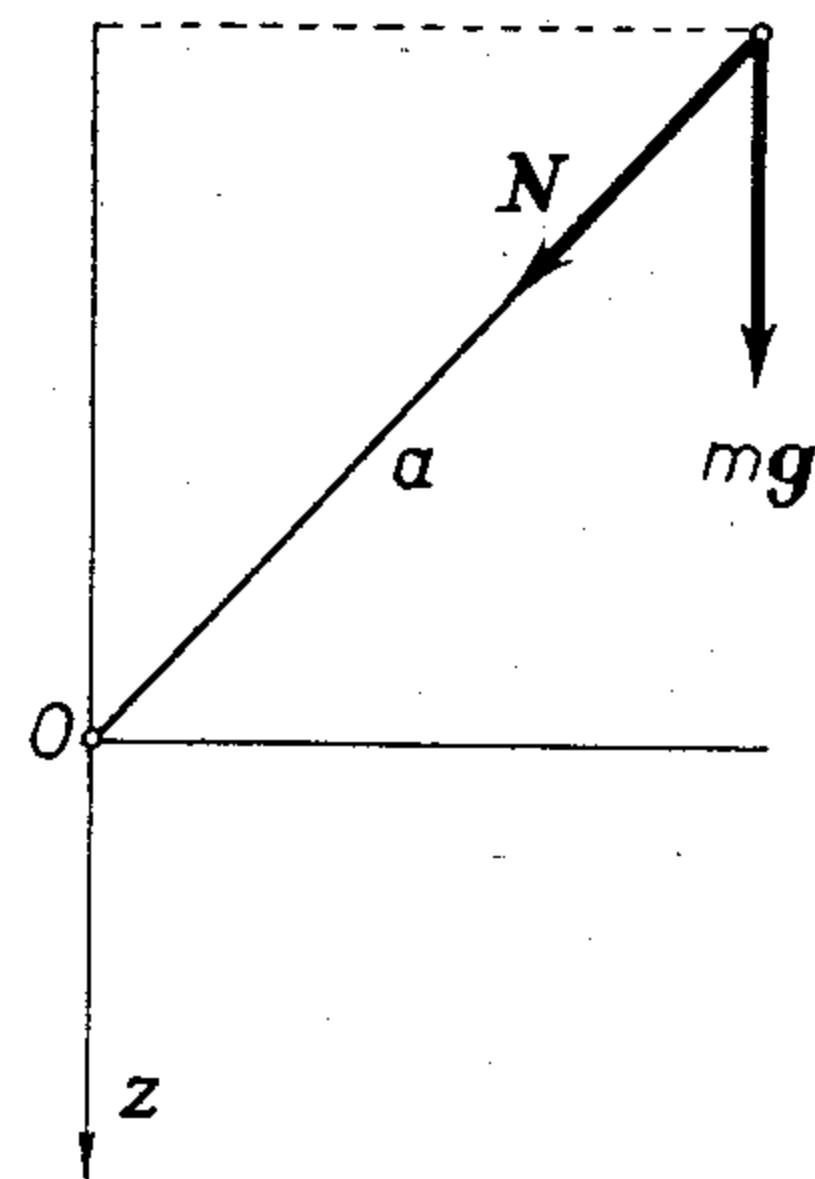
$$mv^2 = 2mgz + mh.$$

Ako se \mathbf{N} usmeri ka centru sfere O biće (sl. 83)

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{N} = mg \frac{z}{a},$$

tako da se za veličinu normalne reakcije dobiva

$$(35) \quad R_N = \frac{m}{a} (3gz + h).$$



Slika 83

2.10.3.2. Konusno klatno

U specijalnom slučaju kada se kod sfernog klatna uporednici $z = \alpha$ i $z = \beta$ poklope materijalna tačka će se kretati stalno po horizontalnom krugu u ravni $z = z_0 = \alpha = \beta$. Pri takvom kretanju poteg iz centra do pokretne tačke opisuje konusnu površ sa temenom u centru sfere, pa se ovo kretanje naziva *konusno klatno*.

Kako je pri takvom kretanju $z = z_0 = \text{const.}$ biće $\dot{z} = 0$ i ne postoji vertikalna komponenta brzine, već se vektor brzine nalazi isključivo u horizontalnoj ravni kretanja, jednačina (2.10.3.1—6) se svodi na

$$(1) \quad f(z_0) = (2gz_0 + h)(a^2 - z_0^2) - A^2 = 0$$

a jednačina (2.10.3.1—8) na

$$(2) \quad f(z) = -2g(z - z_0)^2(z - \gamma) = 0.$$

Iz ove dve jednačine je očigledno da je z_0 dvostruka nula polinoma trećeg stepena $f(z)$. Međutim, neki polinom ima dvostruku nulu $z = z_0$, ako je istovremeno $f(z_0) = 0$ i $f'(z_0) = 0$. Diferencijaljenjem relacije (1) po z_0 ovaj drugi uslov daje

$$(3) \quad f'(z_0) = 2[g(a^2 - z_0^2) - z_0(2gz_0 + h)] = 0.$$

Prema tome da bi se teška materijalna tačka koja se kreće po sferi kretala kao konusno klatno početna brzina ne sme da ima vertikalnu komponentu a početni položaj i veličina početne brzine moraju da budu takvi da konstanta energije h i konstanta A integrala površine zadovoljavaju uslov (1) i (3).

Iz (3) se lako nalazi

$$(4) \quad h = \frac{g}{z_0}(a^2 - 3z_0^2),$$

što zamenom u (1) daje

$$(5) \quad A = \sqrt{\frac{g}{z_0}(a^2 - z_0^2)}.$$

Kako je $A = \rho_0^2 \dot{\vartheta}_0 = \rho^2 \dot{\vartheta}$, a iz jednačine veze (2.10.3.1—1) proističe

$$[\rho^2 = a^2 - z_0^2 = \rho_0^2,$$

biće

$$(6) \quad \dot{\vartheta} = \dot{\vartheta}_0 = \frac{A}{\rho_0^2},$$

pa se tačka kreće po krugu jednoliko sa stalnom tangentnom brzinom

$$(7) \quad v = v_0 = \rho_0 \dot{\vartheta}_0 = \frac{A}{\rho_0},$$

ili prema (5)

$$(8) \quad v = v_0 = \sqrt{\frac{g}{z_0}(a^2 - z_0^2)},$$

tako da se s obzirom na (7) dobiva

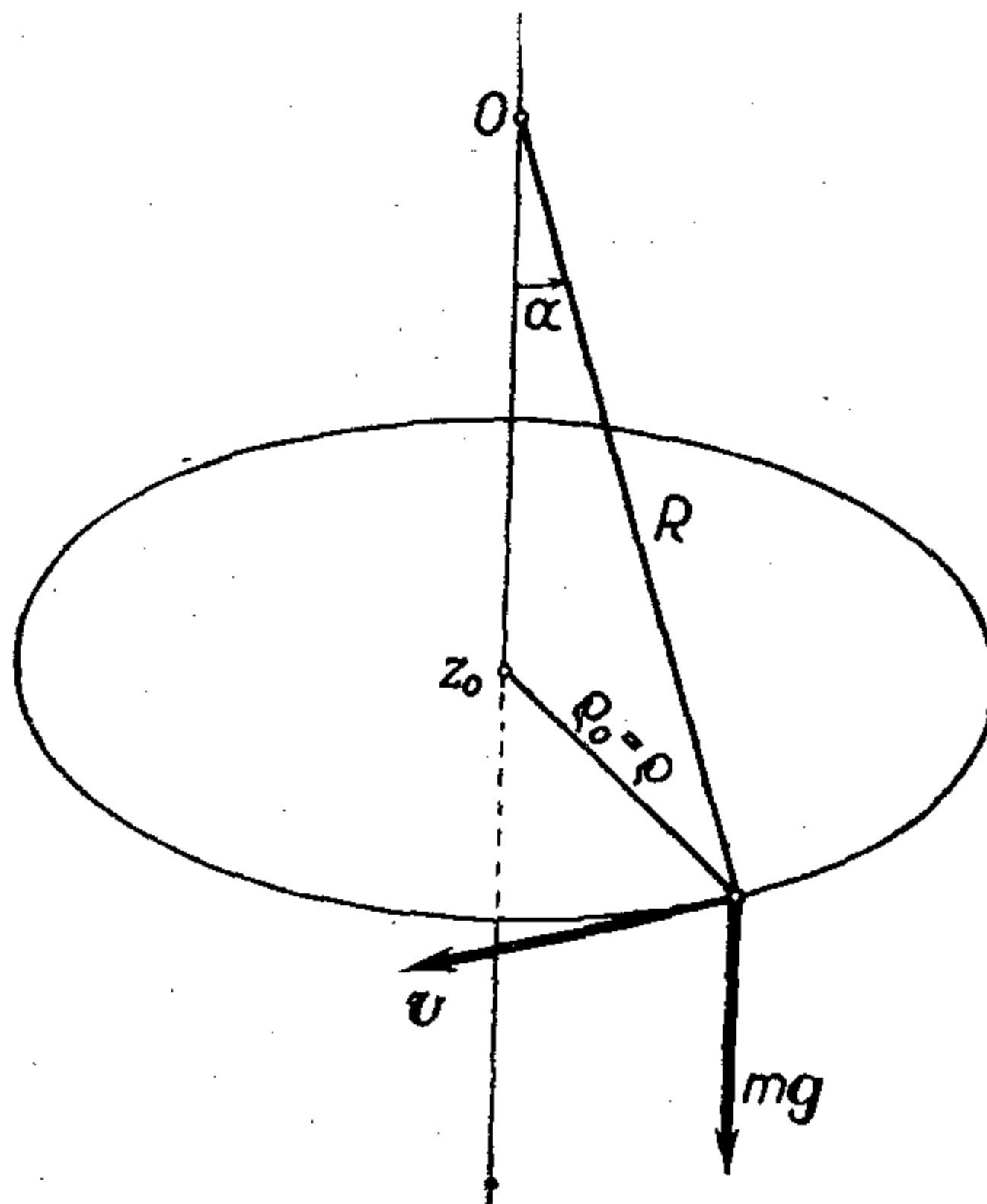
$$(9) \quad \dot{\vartheta} = \dot{\vartheta}_0 = \sqrt{\frac{g}{z_0}}.$$

Kretanje konusnog klatna je moguće samo za $z_0 > 0$, tj. kad se materijalna tačka nalazi na donjoj polusferi.

Konusno klatno može da se ostvari npr. kad se teška loptica obesi o tanak nerastegljiv konac. Ako se loptica izvede iz vertikalnog položaja konca za ugao α (sl. 84) ($R = a$) biće $z_0 = a \cos \alpha$ pa je potrebno da joj se saopšti početna brzina

$$(10) \quad v_0 = a \sqrt{\frac{g}{z_0}} \sin \alpha$$

upravna na ravan određenu vertikalom i koncem, da bi se kretala kao konusno klatno.



Slika 84

Normalna reakcija veze je i kod konusnog klatna kolinearna sa normalom na sferu, a u primeru kuglice obešene o konac reakcija predstavlja silu koja deluje u koncu. S obzirom na (2.10.3.1—35) ta sila će biti

$$(11) \quad R_N = \frac{m g a}{z_0}$$

kad se za konstantu h uzme vrednost (4).

Primeri i zadaci

1. Teška tačka jedinične mase kreće se po glatkom obrtnom paraboloidu

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2az = 0,$$

pri čemu je z -osa orijentisana vertikalno naviše. Ako je početna brzina v_0 tačke horizontalna, izračunati veličinu sile reakcije.

Za izračunavanje reakcije idealne veze može se iskoristiti obrazac (2.10.1—20) tako da je veličina reakcije

$$(1) \quad R = |\lambda| \cdot |\text{grad } f|,$$

dok je prema (2.10.1—19)

$$(2) \quad |\lambda| = \frac{1}{|\text{grad } f|^2} |\mathbf{F} \cdot \text{grad } f + D_2 f|.$$

Za ovde posmatranu vezu je $\text{grad } f = 2(x \mathbf{i} + y \mathbf{j} - a \mathbf{k})$ a prema (2.10.1—10) biće

$$(3) \quad D_2 f = 2(\dot{x}^2 + \dot{y}^2).$$

Sila ($m = 1$) je $\mathbf{F} = -g \mathbf{k}$ pa je

$$(4) \quad \mathbf{F} \cdot \text{grad } f = 2ag,$$

tako da se za veličinu reakcije može pisati

$$(5) \quad R = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + a^2}} [ag + (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)],$$

i kad se iskoristi jednačina veze

$$(6) \quad R = \frac{1}{\sqrt{a^2 + 2az}} [ag + (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)].$$

Kvadrati koordinata brzine eliminišu se pomoću jednačina kretanja. U posmatranom slučaju postoje međutim dva prva integrala tako da nije potrebna integracija diferencijalnih jednačina kretanja. Ako se uvede cilindarski sistem koordinata ρ , ϑ i z , jednačina veze se svodi na

$$(7) \quad \rho^2 - 2az = 0,$$

a prvi integrali su: integral energije

$$(8) \quad \frac{1}{2} v^2 + gz = h \quad (v^2 = \dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\vartheta}^2 + \dot{z}^2)$$

i integral kinetičkog momenta (integral površine)

$$(9) \quad \rho^2 \dot{\vartheta} = A.$$

Kako je $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = v^2 - \dot{z}^2$, a prema integralu energije

$$v^2 = 2(h - gz),$$

to se za reakcije u obrascu (6) može napisati

$$(10) \quad R = \frac{1}{\sqrt{a^2 + 2az}} [ag + 2(h - gz) - \dot{z}^2],$$

pa je dovoljno odrediti vrednost \dot{z}^2 , a to se može postići koristeći relacije (7),

(8) i (9). Iz (7) se nalazi $\dot{\rho} = \frac{az}{\sqrt{2az}}$, a iz (9) $\dot{\vartheta} = \frac{A}{2az}$, što zamenom u (8) do-

vodi do izraza

$$(11) \quad \dot{z}^2 = \frac{4az(h - gz) - A^2}{a^2 + 2az}.$$

Kad se ovaj izraz unese u (10) dobiva se za reakciju

$$(12) \quad R = \frac{ga^3 + 2a^2h + A^2}{(a^2 + 2az)^{3/2}}.$$

Prema početnim uslovima početna brzina je $v_0 = \rho_0 \dot{\vartheta}_0$. Iz integrala energije se nalazi

$$2h = v_0^2 + 2gz_0,$$

a za integral površine se može sada pisati

$$A = \rho_0^2 \dot{\vartheta}_0 = \rho_0 v_0 = v_0 \sqrt{2az_0},$$

tako da se unošenjem ovih vrednosti za konstante h i A dobiva za reakciju najzad obrazac

$$R = \frac{(v_0^2 + ag)(a^2 + 2az_0)}{(a^2 + 2az)^{3/2}}.$$

2. Teška tačka mase m kreće se po površi glatkog kružnog cilindra (z -osa je orijentisana vertikalno naviše)

$$f(x, y, z) \equiv x^2 + y^2 - a^2 = 0.$$

Naći konačne jednačine kretanja i reakciju veze.

Prvi način (korišćenje prvih integrala). U cilindarskim koordinatama, sa početkom u $O(0, 0, 0)$ i z -osom koja se poklapa sa z -osom Dekartovih pravougljih koordinata u odnosu na koje je dat cilindar, jednačina veze je

$$\rho = a = \text{const.},$$

dok je sila $\mathbf{F} = -mg \mathbf{k}$ koja ima funkciju sile $U = -mgz$. Kinetička energija je

$$(1) \quad T = \frac{m}{2} (a^2 \dot{\vartheta}^2 + \dot{z}^2).$$

Kretanje je konzervativno pa postoji integral energije

$$(2) \quad \frac{m}{2} (a^2 \dot{\vartheta}^2 + \dot{z}^2) + mgz = mh = \text{const.}$$

Kako je veza obrtna površ i kako je sila stalno u vertikalnoj ravni kroz obrtnu osu površi to postoji i integral površine

$$(3) \quad a^2 \dot{\vartheta} = A = a^2 \dot{\vartheta}_0.$$

Iz integrala površine se odmah vidi da je $\dot{\vartheta} = \dot{\vartheta}_0 = \text{const.}$ pa je jedna konačna jednačina kretanja (sa početnim uslovima $t_0 = 0$, $\vartheta_0 = 0$)

$$(4) \quad \vartheta = \frac{A}{a^2} t.$$

Prema tome integral energije predstavlja diferencijalnu jednačinu za određivanje nepoznate funkcije $z = z(t)$,

$$(5) \quad \dot{z}^2 = 2h - 2gz - a^2 \dot{\vartheta}_0^2,$$

koja se, kad se h izrazi pomoću početnih uslova, svodi na

$$(6) \quad \dot{z}^2 = \dot{z}_0^2 - 2g(z - z_0).$$

Integraljenjem se odatle neposredno dobiva

$$(7) \quad z = -\frac{1}{2}gt^2 + \dot{z}_0 t + z_0.$$

Reakcija veze se može naći pomoću Lagranževih jednačina prve vrste za Dekartove koordinate (reakcija za gladak kružni cilindar uvek je upravna na površ cilindra i prolazi kroz osu cilindra, što znači da je uvek komplanarna sa xOy ravni)

$$R_x = m\ddot{x}, \quad R_y = m\ddot{y}.$$

Pri tome je $x = a \cos \vartheta$, $y = a \sin \vartheta$, tako da je

$$\ddot{x} = -a \dot{\vartheta}_0^2 \cos \vartheta = -a \dot{\vartheta}_0^2 \cos \left(\frac{A}{a^2} t \right),$$

$$\ddot{y} = -a \dot{\vartheta}_0^2 \sin \vartheta = -a \dot{\vartheta}_0^2 \sin \left(\frac{A}{a^2} t \right).$$

Kako je prema (3) $A = a^2 \dot{\vartheta}_0$ biće

$$\ddot{x} = -a \dot{\vartheta}_0^2 \cos(\dot{\vartheta}_0 t) = -\dot{\vartheta}_0^2 x,$$

$$\ddot{y} = -a \dot{\vartheta}_0^2 \sin(\dot{\vartheta}_0 t) = -\dot{\vartheta}_0^2 y,$$

pa je

$$R_x = -m \dot{\vartheta}_0^2 x, \quad R_y = -m \dot{\vartheta}_0^2 y.$$

Ako se veličina horizontalne komponente početne brzine obeleži sa v_0^* , onda je $A = a v_0^*$ pa će biti

$$R_x = -m \frac{v_0^{*2}}{a^2} x, \quad R_y = -m \frac{v_0^{*2}}{a^2} y$$

i

$$(8) \quad R = m a \dot{\vartheta}_0^2 = \frac{m A^2}{a^3}.$$

Drugi način (Lagranževe jednačine druge vrste). Cilindarske koordinate ϑ i z predstavljaju u stvari nezavisne koordinate tačke koja se kreće po cilindru poluprečnika a . S obzirom na izraz (1) za kinetičku energiju, a kako funkcija sile zavisi samo od promenljive z , odgovarajuće Lagranževe jednačine druge vrste će biti

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\vartheta}} - \frac{\partial T}{\partial \vartheta} = \frac{d}{dt} (m a^2 \dot{\vartheta}) = Q_{\vartheta} = 0,$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{z}} - \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{d}{dt} (m \dot{z}) = Q_z = -mg.$$

Prva jednačina daje prvi integral

$$\dot{\vartheta} = \dot{\vartheta}_0 = \text{const.},$$

a druga

$$\dot{z} - \dot{z}_0 = -gt,$$

što je ekvivalentno sa prethodnim jednačinama (3) i (6) kad se neposredno koriste prvi integrali, tako da je dalje rešavanje zadatka istovetno sa onim što je već gore rečeno.

Očigledno je da se korišćenjem prvih integrala izbegava jedna integracija. Kad za kretanje tačke po površi postoje dva nezavisna prva integrala potpuno je, bar u principu, nepotrebno pisati i diferencijalne jednačine kretanja.

Treći način (Lagranževe jednačine prve vrste). Lagranževe jednačine prve vrste u posmatranom slučaju su

$$(9) \quad m\ddot{x} = \lambda \frac{\partial f}{\partial x}, \quad m\ddot{y} = \lambda \frac{\partial f}{\partial y}, \quad m\ddot{z} = -mg.$$

Treća od ovih jednačina može se neposredno integraliti i njen je integral relacija (7). U prve dve jednačine (9) nalaze se tri nepoznate funkcije, $x = x(t)$, $y = y(t)$ i množilac veze λ , pa se pored tih jednačina mora posmatrati i jednačina veze. Ako se jednačina veze diferencira dva puta po vremenu, za rešavanje zadatka stoje na raspolaganju tri jednačine, dve jednačine (9),

$$(10) \quad m\ddot{x} = 2\lambda x, \quad m\ddot{y} = 2\lambda y,$$

i naredna jednačina izvedena dvostrukim diferencijaljenjem jednačine veze

$$(11) \quad \ddot{f} = 2(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + x\ddot{x} + y\ddot{y}) = 0.$$

Eliminacijom \ddot{x} i \ddot{y} iz ovih jednačina i korišćenjem jednačine veze nalazi se

$$(12) \quad \lambda = -\frac{m}{2a^2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2),$$

pa se diferencijalne jednačine kretanja (10) svode na

$$(13) \quad \ddot{x} = -\frac{1}{a^2}x(\dot{x}^2 + \dot{y}^2), \quad \ddot{y} = -\frac{1}{a^2}y(\dot{x}^2 + \dot{y}^2).$$

U opštem slučaju ovakav sistem spregnutih nelinearnih jednačina je teško integraliti. Međutim u slučaju konzervativnog kretanja, kao što je ovde slučaj, jednačine se uprošćavaju. Integral energije je

$$(14) \quad \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + mgz = mh = \frac{m}{2}(\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2 + \dot{z}_0^2) + mgz_0,$$

odakle proističe

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 2h - 2gz - \dot{z}_0^2.$$

Ako se za \dot{z} iskoristi integral treće jednačine (9), koja se može napisati u obliku

$$\frac{dz}{dz} \dot{z} = -g,$$

tako da bude

$$\dot{z}^2 = \dot{z}_0^2 - 2g(z - z_0),$$

biće

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 2h - 2gz - [\dot{z}_0^2 - 2g(z - z_0)].$$

Sem toga, ako se za h uzme vrednost koja odgovara početnim uslovima zadatka, biće

$$(15) \quad \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2 = v_0^{*2} = \text{const.}$$

Ovaj integral ukazuje na činjenicu da je veličina horizontalne komponente brzine pri kretanju stalna (taj je zaključak ranije neposredno izveden iz integrala površine bez integracije).

Diferencijalne jednačine kretanja se onda uprošćavaju — svode na nespregnut sistem linearnih jednačina

$$(16) \quad \ddot{x} = -\frac{v_0^{*2}}{a^2} x; \quad \ddot{y} = -\frac{v_0^{*2}}{a^2} y,$$

čiji su integrali

$$x = C_1 \cos\left(\frac{v_0^*}{a} t\right) + C_2 \sin\left(\frac{v_0^*}{a} t\right),$$

$$y = C_3 \cos\left(\frac{v_0^*}{a} t\right) + C_4 \sin\left(\frac{v_0^*}{a} t\right).$$

Ako je u početnom trenutku $t_0 = 0$ početni položaj određen recimo sa $x_0 = a$, $y_0 = 0$ i početna brzina sa $\dot{x}_0 = 0$, $\dot{y}_0 = v_0^*$, $\dot{z}_0 \neq 0$, za određivanje integracionih konstanti imamo naredne jednačine

$$x_0 = a = C_1, \quad \dot{x}_0 = 0 = C_2 \frac{v_0^*}{a};$$

$$y_0 = 0 = C_3, \quad \dot{y}_0 = v_0^* = C_4 \frac{v_0^*}{a},$$

tako da je

$$C_1 = x_0 = a, \quad C_2 = 0, \quad C_3 = 0, \quad C_4 = a.$$

Konačne jednačine kretanja su onda

$$x = a \cos\left(\frac{v_0^*}{a} t\right), \quad y = a \sin\left(\frac{v_0^*}{a} t\right).$$

Na osnovu (12) i (15) za multiplikator veze se dobiva

$$\lambda = -\frac{m}{2a^2} v_0^{*2}$$

pa su koordinate reakcije veze

$$R_x = \lambda \frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{m}{a^2} v_0^{*2} x = -\frac{mv_0^{*2}}{a} \cos\left(\frac{v_0^*}{a} t\right),$$

$$R_y = \lambda \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{m}{a^2} v_0^{*2} y = -\frac{mv_0^{*2}}{a} \sin\left(\frac{v_0^*}{a} t\right).$$

3. Teška materijalna tačka se kreće po glatkoj površi nepokretnog kružnog konusa sa pravim uglom u vrhu. Osa konusa je vertikalna i konus je otvoren

naviše. Tački je saopštena horizontalna početna brzina $v_0 = \sqrt{ga/2}$, gde je g ubrzanje Zemljine teže a a početna brzina tačke iznad temena (vrha) konusa. Naći najmanju visinu putanje iznad vrha konusa.

Prvi način (Lagranževe jednačine druge vrste). U zadatku se ne traži reakcija veze te je s toga potpuno dovoljno kretanje tačke proučiti u odnosu na neki sistem nezavisnih koordinata. Ako se npr. uvedu cilindarske koordinate ρ , ϑ i z sa z -osom orijentisanom vertikalno naviše i početkom u vrhu konusa, jednačina veze biće

$$(1) \quad f = \rho - z = 0,$$

pa se za nezavisne koordinate mogu uzeti recimo ϑ i z . Kinetička energija materijalne tačke koja se kreće po ovom konusu je

$$(2) \quad T = \frac{m}{2} (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\vartheta}^2 + \dot{z}^2) = \frac{m}{2} (2\dot{z}^2 + z^2 \dot{\vartheta}^2).$$

Sila je $\mathbf{F} = -mg \mathbf{k}$ pa je funkcija sile $U = -mgz$ tako da su generalisane koordinate sile

$$(3) \quad Q_{\vartheta} = 0, \quad Q_z = -mg.$$

Lagranževe jednačine kretanja će s obzirom na (2) i (3) glasiti

$$(4) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{z}} - \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{d}{dt} (2m\dot{z}) - mz\dot{\vartheta}^2 = -mg,$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\vartheta}} - \frac{\partial T}{\partial \vartheta} = \frac{d}{dt} (mz^2\dot{\vartheta}) = 0.$$

Iz druge od ovih jednačina neposredno se dobiva prvi integral

$$z^2 \dot{\vartheta} = A = z_0^2 \dot{\vartheta}_0.$$

Kako je početna brzina horizontalna to je $v_0 = z_0 \dot{\vartheta}_0$, a kako je početna visina $z_0 = a$ biće

$$(5) \quad z^2 \dot{\vartheta} = A = av_0 = a \sqrt{\frac{ga}{2}}.$$

Eliminacijom $\dot{\vartheta}$ iz prve jednačine (4) pomoću integrala (5) dobiva se

$$(6) \quad 2\ddot{z} - \frac{a^2 v_0^2}{z^3} = -g.$$

Ako se stavi $\ddot{z} = z \frac{d^2 z}{dz^2}$, jednačina (6) može da se integrali razdvajanjem promenljivih,

$$dz^2 = \left(\frac{a^2 v_0^2}{z^3} - g \right) dz,$$

tako da bude (kad se uzme u obzir da je u početnom trenutku $\dot{z}_0 = 0$, $z_0 = a$)

$$(7) \quad \dot{z}^2 = \frac{a^2 v_0^2}{2} \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{z^2} \right) - g(z - a).$$

Kriva $z = z(t)$ će imati ekstremum u tačkama u kojima je $\dot{z} = 0$, a to su s obzirom na (7) tačke određene rešenjem kubne jednačine

$$(8) \quad 2gz^3 - (v_0^2 + 2ga)z^2 + a^2v_0^2 = 0.$$

Jedno rešenje je $z = a$ pa se druga dva rešenja mogu naći iz kvadratne jednačine dobivene deobom jednačine (8) korenim faktorom $z - a$

$$2gz^2 - v_0^2z - av_0^2 = 0.$$

Kad se za v_0 stavi data vrednost, rešenja ove jednačine su

$$z = \frac{a}{8}(1 + \sqrt{17}), \quad z = \frac{a}{8}(1 - \sqrt{17}).$$

Drugo od ovih rešenja je nemoguće jer je $1 - \sqrt{17} < 0$, a tačka se ne može nalaziti u položaju $z < 0$ s obzirom na date početne uslove, tako da su ekstremi putanje $z_1 = a$ i $z_2 = a(1 + \sqrt{17})/8$, pri čemu je z_2 tražena najmanja visina putanje iznad vrha konusa.

Drugi način (korišćenje prvih integrala). Mesto integraljenja diferencijalnih jednačina kretanja zadatak se može rešiti i znatno jednostavnije ako se iskoriste dva prva integrala koje kretanje dopušta. To je integral energije

$$\frac{mv^2}{2} + mgz = mh = \frac{mv_0^2}{2} + mga$$

i integral površine

$$\rho^2 \dot{\vartheta} = A = av_0.$$

Ako se za kinetičku energiju iskoristi izraz (2) i iz integrala energije eliminiše $\dot{\vartheta}$ pomoću integrala površine dobiva se neposredno i bez ikakve integracije jednačina (7) iz koje se dalje nalaze ekstremi putanje na već opisani način.

4. Na kraju vertikalnog prečnika nepokretne glatke sferne površi poluprečnika a nalazi se teška materijalna tačka. Ako se toj tački saopšti horizontalna početna brzina v_0 , na kom će mestu tačka napustiti sfernu površ? Pri kojima vrednostima v_0 tačka napušta sferu odmah u početku kretanja.

Uslov da tačka napusti sferu jeste da reakcija veze postane jednaka nuli. Iz prirodne jednačine kretanja u odnosu na normalu dobivamo za reakciju obrazac

$$R = \frac{mv^2}{a} - F_N,$$

gde je F_N dato sa

$$F_N = \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} = mg \cos \varphi,$$

ako je φ nagib poluprečnika sfere uperenog ka pokretnoj tački prema vertikalnom prečniku sa orijentacijom naviše.

Iz integrala energije dobiva se za kvadrat brzine obrazac

$$v^2 = v_0^2 + 2ga(1 - \cos \varphi).$$

Kad se pretpostavi da je reakcija jednaka nuli i u odgovarajućem izrazu kvadrat brzine izrazi pomoću obrasca dobivenog iz integrala energije dobiva se

$$v_0^2 + 2ga - 3ga \cos \varphi = 0.$$

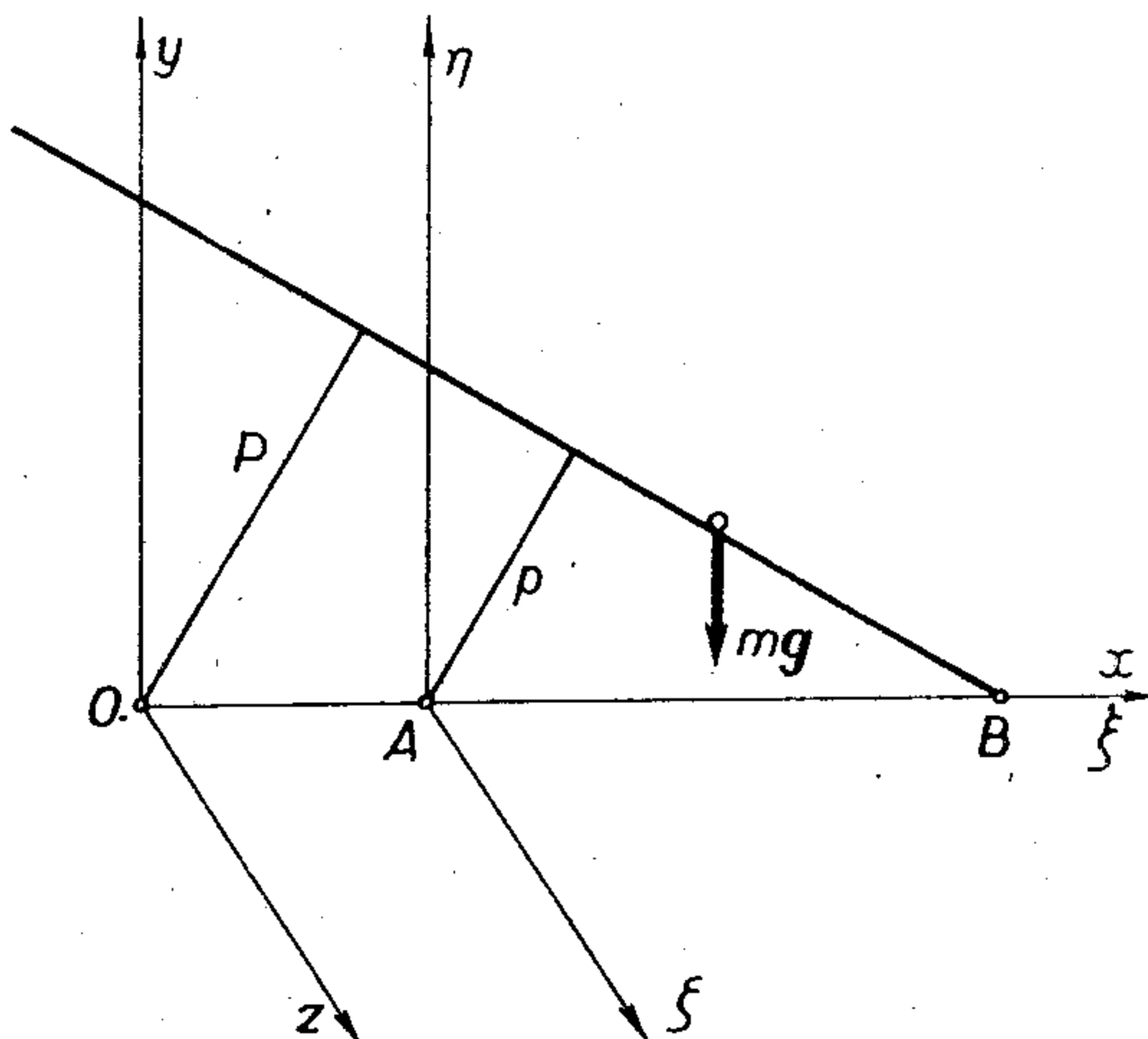
Otuda sledi da će tačka napustiti sferu na mestu koje je u odnosu na početni položaj određeno sa

$$\cos \varphi = \frac{v_0^2 + 2ga}{3ga}$$

Ako se stavi da reakcija postaje jednaka nuli u početnom položaju, tj. da je $\varphi = 0$, može se iz gornje jednačine lako naći da brzina mora biti

$$v_0 \geq \sqrt{ga}.$$

5. Teška materijalna tačka kreće se po strmoj ravni nagnutoj pod uglom $\alpha = \sphericalangle B$ prema horizontu. Strma ravan se kreće konstantnim ubrzanjem a paralelnim sa horizontom. 1) Napisati izraz za kinetičku energiju pokretne tačke



Slika 85

u odnosu na pokretni koordinatni sistem koji se kreće zajedno sa strmom ravni (sl. 85); 2) napisati Lagranževe jednačine kretanja prve vrste; i 3) odrediti reakciju strme ravni na pokretnu tačku.

U ovom zadatku je veza reonomna. Kad se u prostoru uoči neki nepokretni Dekartov koordinatni sistem $Oxyz$ sa osama paralelnim osama $A\xi$, $A\eta$ i $A\zeta$, tako da se pokretni pol A kreće po horizontalnoj x -osi, biće koordinate pokretne tačke

$$(1) \quad x = x_A + \xi, \quad y = \eta, \quad z = \zeta.$$

Jednačina veze je jednačina ravni koja se translatorno kreće u pravcu x -ose stalnim ubrzanjem $\mathbf{a} = a \mathbf{i}$. Pokretni pol se kreće po zakonu $\ddot{x} = a$, tj.

$$(2) \quad x_A = \frac{1}{2} at^2 + bt + c,$$

gde su b i c konstante, $b = \dot{x}_{A_0}$, $c = x_{A_0}$. Rastojanje ravni od nepokretnog pola je

$$P = \overline{OB} \sin \alpha = \left(x_{B_0} + \frac{1}{2} at^2 + bt \right) \sin \alpha = p + x_A \sin \alpha,$$

gde je x_{B_0} apscisa tačke B u kojoj strma ravan seče x -osu u početnom položaju a p je rastojanje tačke od pokretnog pola A . Jednačina veze može da se napiše bilo prema nepokretnom bilo prema pokretnom sistemu koordinata

$$(3) \quad f \equiv x \sin \alpha + y \cos \alpha - P = 0,$$

odnosno

$$(4) \quad f \equiv \xi \sin \alpha + \eta \cos \alpha - p = 0.$$

1) S obzirom na (1) koordinate brzine pokretne tačke su

$$(5) \quad \dot{x} = \dot{x}_A + \dot{\xi} = at + b + \dot{\xi}, \quad \dot{y} = \dot{\eta}, \quad \dot{z} = \dot{\zeta},$$

pa je kinetička energija

$$(6) \quad T = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{m}{2} [(at + b + \dot{\xi})^2 + \dot{\eta}^2 + \dot{\zeta}^2].$$

2) Lagranževe jednačine I vrste u Dekartovim koordinatama x, y, z date su u (2.10.1.1—17). Diferencijaljenjem koordinata brzine (5) po vremenu te jednačine se mogu svesti na oblik

$$(7) \quad \begin{aligned} m \ddot{\xi} &= R_\xi - ma; \\ m \ddot{\eta} &= R_\eta - mg; \\ m \ddot{\zeta} &= R_\zeta, \end{aligned}$$

pri čemu su koordinate sile reakcije veze

$$(8) \quad \begin{aligned} R_x &= \lambda \frac{\partial f}{\partial x} = R_\xi = \lambda \frac{\partial f}{\partial \xi} = \lambda \sin \alpha, \\ R_y &= \lambda \frac{\partial f}{\partial y} = R_\eta = \lambda \frac{\partial f}{\partial \eta} = \lambda \cos \alpha, \\ R_z &= \lambda \frac{\partial f}{\partial z} = R_\zeta = \lambda \frac{\partial f}{\partial \zeta} = 0. \end{aligned}$$

3) S obzirom na (7) i (8) reakcija se određuje iz dve diferencijalne jednačine kretanja

$$(9) \quad m \ddot{\xi} = \lambda \sin \alpha - ma, \quad m \ddot{\eta} = \lambda \cos \alpha - mg,$$

pored kojih treba posmatrati i jednačinu veze (4). Diferencijaleći tu jednačinu dva puta po vremenu dobiće se

$$(10) \quad \ddot{\xi} \sin \alpha + \ddot{\eta} \cos \alpha = 0.$$

Kada se $\ddot{\xi}$ i $\ddot{\eta}$ iz (9) zamene u (10) dobiva se jedna jednačina za određivanje množioca veze λ

$$\lambda = m(a \sin \alpha + g \cos \alpha).$$

Unošenjem ove vrednosti u (8) dobiva se

$$R_x = m(a \sin \alpha + g \cos \alpha) \sin \alpha; \quad R_y = m(a \sin \alpha + g \cos \alpha) \cos \alpha,$$

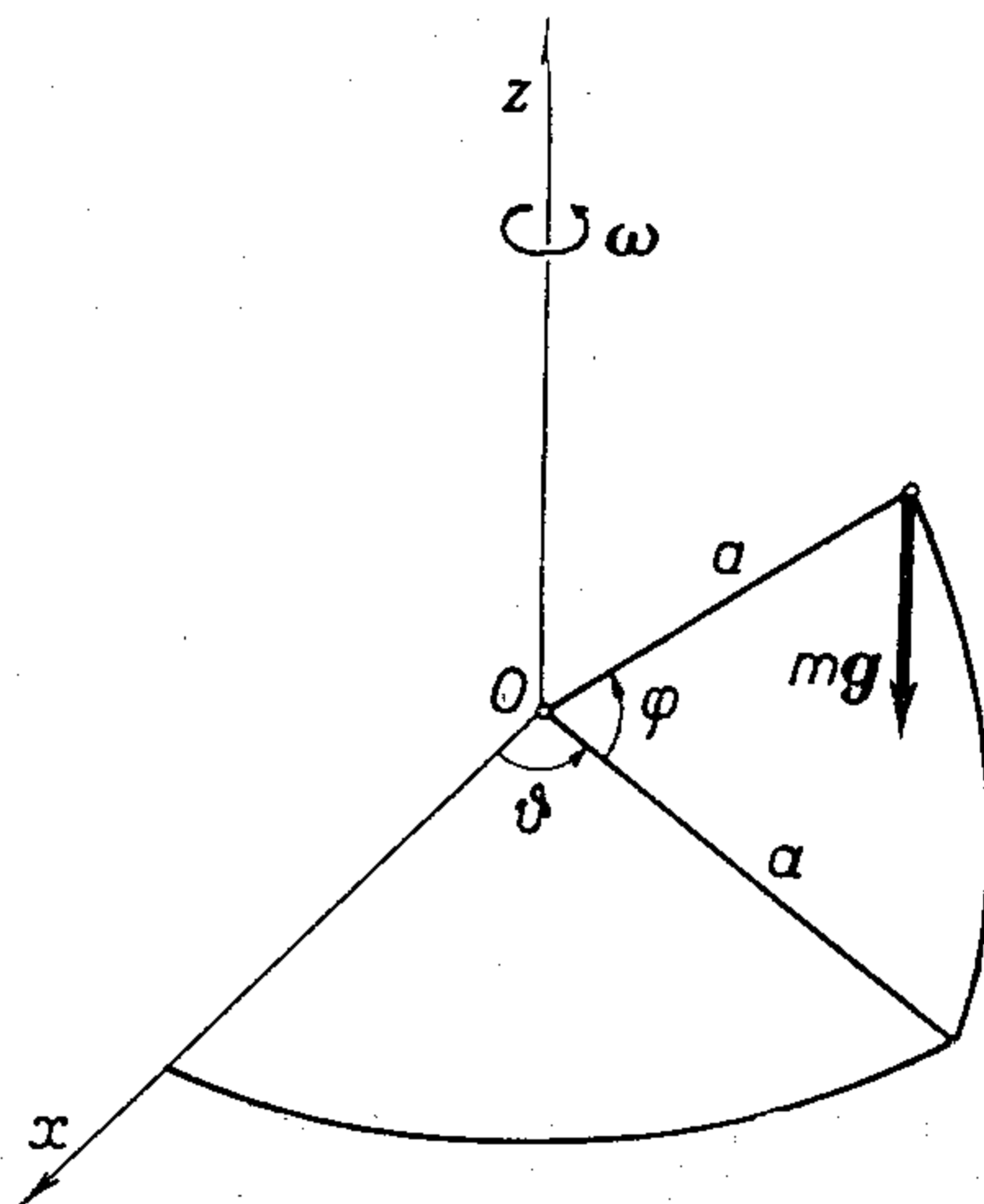
pa je veličina reakcije

$$R = m(a \sin \alpha + g \cos \alpha).$$

6. Sfera poluprečnika a obrće se oko vertikalne ose kroz njen centar O ugaonom brzinom $\omega = \text{const.}$ Na površi sfere nalazi se teška materijalna tačka u relativnoj ravnoteži prema sferi. Odrediti položaj tačke na sferi i njen pritisak na sferu.

Prvi način: U centru O sfere neka se nalazi zajednički početak jednog nepokretnog sfernog koordinatnog sistema R, Θ, Φ i jednog pokretnog r, ϑ, φ koji se kreće zajedno sa posmatranom sferom. Neka je relativni položaj ta dva sistema takav da za ma koju tačku na sferi $R = r = a$ (to je istovremeno i jednačina veze) bude $\Phi = \varphi, \Theta = \omega t + \vartheta$ (sl. 86). Kinetička energija tačke je

$$\begin{aligned} T &= \frac{m}{2} a^2 (\cos^2 \Phi \cdot \dot{\Theta}^2 + \dot{\Phi}^2) = \\ &= \frac{m}{2} a^2 [\cos^2 \varphi (\omega + \dot{\vartheta})^2 + \dot{\varphi}^2]. \end{aligned}$$



Slika 86

Elementarni rad sile teže postoji samo na pomeranju $dz = a \cos \varphi d\varphi$,

tj. $dA = -mg a \cos \varphi d\varphi$, tako da su generalisane koordinate sile

$$Q_\varphi = -mga \cos \varphi, \quad Q_\vartheta = 0.$$

Lagranževe jednačine druge vrste za kretanje tačke po sfernoj površi koja se sama obrće oko svoje vertikalne ose su

$$\frac{d}{dt} [ma^2 \cos^2 \varphi (\omega + \dot{\vartheta})] = 0,$$

$$\frac{d}{dt} (ma^2 \dot{\varphi}) + ma^2 \sin \varphi \cos \varphi (\omega + \dot{\vartheta})^2 = -mga \cos \varphi.$$

Iz prve od ovih jednačina proističe

$$\cos^2 \varphi (\omega + \dot{\vartheta}) = \text{const.}$$

(Ovaj integral se može dobiti i bez odgovarajuće diferencijalne jednačine kretanja, jer je to u stvari integral površine. Naime, uslovi za postojanje integrala kinetičkog momenta u odnosu na vertikalnu osu su ispunjeni tako da je integral površine $\rho^2 \dot{\Theta} = A$, a kako je $\rho = a \cos \varphi$ to upravo sledi gore dobiveni integral $\cos^2 \varphi \dot{\Theta} = A/a^2 = \text{const.}$)

Kad je tačka u ravnoteži prema pokretnoj sferi ne postoji relativno kretanje pa je $\dot{\vartheta} = 0$ a otuda je i $\varphi = \varphi_0$, odn. $\dot{\varphi} = 0$. Stoga se druga od diferencijalnih jednačina kretanja svodi na

$$\sin \varphi = -\frac{g}{a \omega^2},$$

čime je određen položaj u kome se posmatrana teška tačka nalazi u relativnom miru prema sferi. Ta tačka može da se nalazi samo na donjoj polovini sfere, jer je $\sin \varphi < 0$ za $0 > \varphi > -\pi$.

Za određivanje reakcije veze najpogodnija je prirodna jednačina u odnosu na normalu površi (2.10.1.1—32)

$$\frac{mv^2}{\rho_N} = F_N + R.$$

Za sferu $\rho_N = a$, a iz izraza za kinetičku energiju se za kvadrat brzine u položaju relativne ravnoteže nalazi

$$v^2 = a^2 \cos^2 \varphi \omega^2 = a^2 \omega^2 - \frac{g^2}{\omega^2}.$$

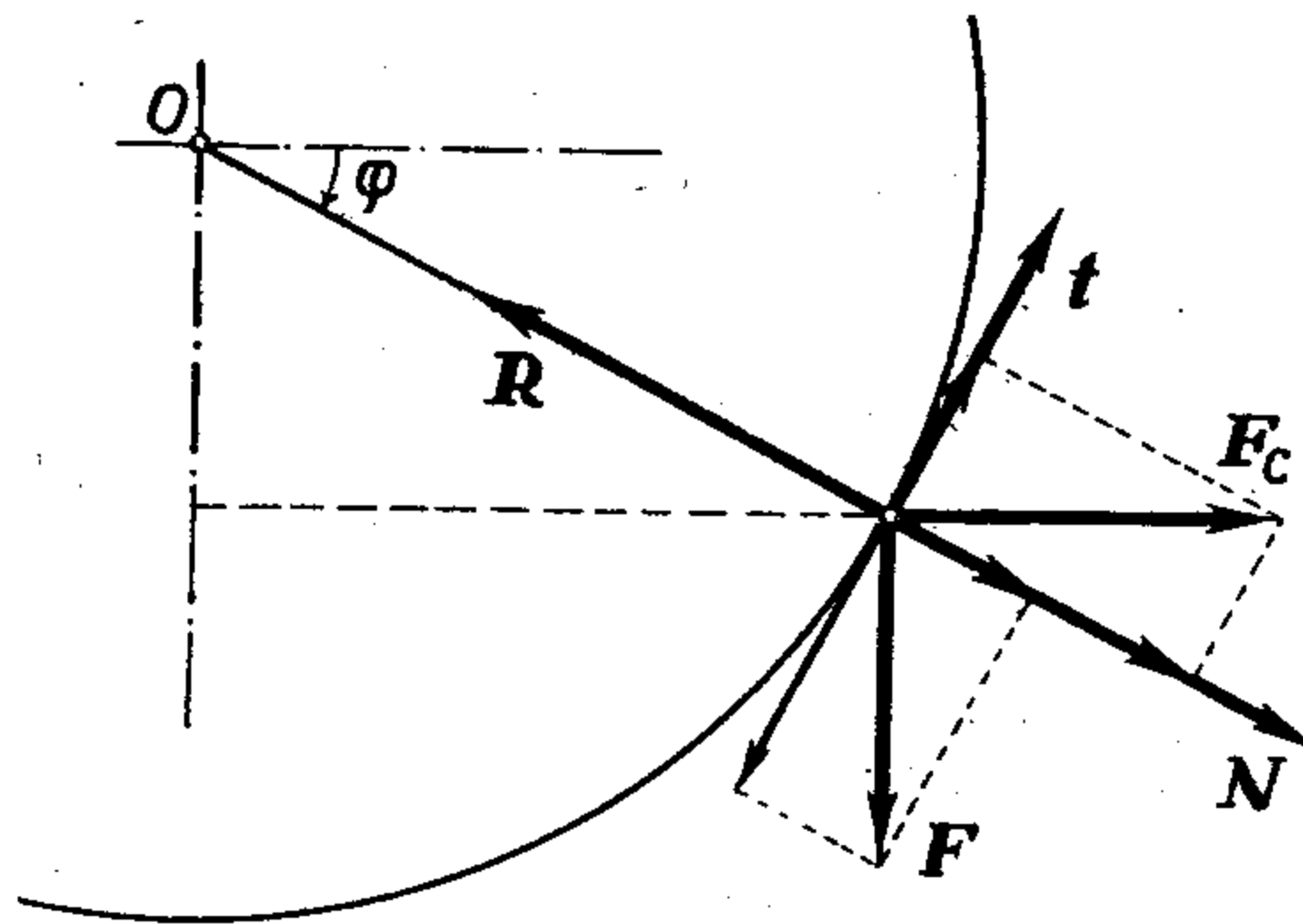
Projekcija sile teže na pravac normale je

$$F_N = mg \sin \varphi = -\frac{mg^2}{a \omega^2},$$

tako da je sila reakcije

$$R = ma \omega^2.$$

Drugi način. Položaj ravnoteže i sila reakcije mogu se odrediti i neposredno iz rasporeda aktivnih sila i sila inercije koje deluju na materijalnu tačku. Te sile su: aktivna $\mathbf{F} = m\mathbf{g}$ koja deluje vertikalno naniže, centrifugalna sila $F_c = mr\omega^2 = ma \cos \varphi \omega^2$ koja deluje u horizontalnoj ravni, prolazi kroz osu obrtanja i usmerena je od ose obrtanja i sile reakcije koja uravnotežuje normalne



Slika 87

komponente aktivne sile i centrifugalne sile. Ako je tačka u relativnoj ravnoteži (sl. 87), nema pomeranja u pravcu tangente na meridijan sfere pa komponente sile \mathbf{F} i \mathbf{F}_c u pravcu tangente na meridijan moraju biti u ravnoteži

$$F_t = -F_{ct}, \quad \text{tj} \quad -mg \cos \varphi = ma \cos \varphi \omega^2 \cdot \sin \varphi,$$

odakle sledi

$$\sin \varphi = -\frac{g}{a \omega^2}.$$

Sila reakcije je

$$R = F_N + F_{cN} = mg \sin \varphi + ma \cos^2 \varphi \omega^2 = ma \omega^2.$$

7. Teška materijalna tačka M mase m nalazi se na temenu obrtnog paraboloida

$$y = p(x^2 + z^2)$$

(y -osa je orijentisana vertikalno naniže) i saopštena joj je početna horizontalna brzina v_0 . 1) Kolika treba da bude početna brzina da bi tačka M napustila vezu i na kome će je mestu napustiti? 2) Proučiti kretanje tačke M za razne vrednosti početne brzine. 3) Naći intenzitet brzine tačke M i izračunati silu reakcije veze kad se tačka nalazi u ravni na rastojanju a od tangentne ravni u temenu paraboloida.

Kretanje tačke M je u vertikalnoj ravni određenoj vektorom početne brzine.

1) U trenutku napuštanja veze prestaje da deluje sila veze (reakcije) $R = mv^2/\rho_N - F_N = 0$ pa se otuda dobiva tražena početna brzina $v^* = \sqrt{g/2p}$.

2) Ako je $v_0 = v^*$, tačka će se kretati po vezi a sila reakcije će stalno biti jednaka nuli pa se u tom slučaju slobodna trajektorija tačke poklapa sa prinudnom. Za $v_0 > v^*$ tačka napušta vezu odmah na početku kretanja. Kad tačka ne može da napusti vezu za $v_0 < v^*$ sila reakcije će biti usmerena na spoljnu stranu površi, a za $v_0 > v^*$ na unutrašnju.

3) Za $y = a$ iz integrala energije se dobiva $v_a^2 = v_0^2 + 2ga$ i

$$R = \frac{m}{(1 + 4pa)^{3/2}} (2pv_0^2 - g).$$

8. Materijalna tačka jedinične mase kreće se po površi sfere čiji poluprečnik raste proporcionalno vremenu po zakonu $r = \alpha t + r_0$. U trenutku $t = 0$ saopštena joj je početna brzina v_0 tangentno na veliki krug sfere. 1) Naći konačne jednačine kretanja, putanju i reakciju veze. 2) Izračunati rad sile reakcije od početnog pa ma do kog trenutka t .

Na tačku ne deluje nikakva sila i kretanje je po inerciji. Ako se izabere sferni koordinatni sistem tako da pravac početne brzine bude u ravni $\varphi = 0$,

1) konačna jednačina kretanja je

$$\vartheta = \frac{v_0}{\alpha} \left(1 - \frac{r_0}{r} \right),$$

putanja je $\varphi = 0$, sila reakcije je $\mathbf{R} = -r_0^2 v_0^2 \mathbf{r}/r^4$;

2) $A = v_0^2/2 (r_0^2/r^2 - 1)$.

9. Teška tačka se nalazi na površi kružnog cilindra sa horizontalnom osom. Odrediti kretanje te tačke, ako se u početnom trenutku ona nalazi u najnižem položaju a njena mala početna brzina v_0 zaklapa ugao α sa pravcem izvodnice cilindra.

Za cilindarske koordinate $\rho = a = \text{const.}$, ϑ i z diferencijalne jednačine kretanja biće

$$a \ddot{\vartheta} + g \sin \vartheta = 0,$$

$$\ddot{z} = 0.$$

Početni uslovi su $z_0 = v_0 \cos \alpha$ i $a \dot{\vartheta}_0 = v_0 \sin \alpha$. Za malo v_0 je $\dot{\vartheta}_0$ malo pa se može staviti $\sin \vartheta \approx \vartheta$ i konačne jednačine kretanja su

$$z = z_0 + v_0 t \cos \alpha, \quad \vartheta = \frac{v_0}{\sqrt{2g}} \sin \alpha \cos \left(\sqrt{\frac{g}{a}} t \right).$$

10. Teret težine G obešen je pomoću konca dužine L o nepokretnu tačku O i kreće se po horizontalnom krugu. Pri tome konac obrazuje sa vertikalom ugao α . Odrediti brzinu tog tereta i silu \mathbf{R} u koncu.

Rešenje: $v = \sin \alpha \sqrt{\frac{gL}{\cos \alpha}}, \quad R = \frac{G}{\cos \alpha}.$

11. Konus (kružni) otvora 2α , koji je otvoren naviše, oslanja se vrhom o horizontalnu ravan i obrće oko svoje (vertikalne) ose ugaonom brzinom $\omega = \text{const.}$ Na unutrašnjoj strani omotača konusa nalazi se teška materijalna tačka koja je u relativnom miru prema konusu. Odrediti pritisak R tačke na konus i njeno rastojanje z od horizontalne ravni kroz vrh konusa.

(Za izračunavanje reakcije po obrascu $R = mv^2/\rho_N - F_N$ treba odrediti ρ_N iz obrasca (2.10.1.1—30), pri čemu je poluprečnik krivine putanje tačke $\rho = z \operatorname{tg} \alpha$, a α ugao između ρ i pravca normale na vezu, $\rho_N = z \sin \alpha / \cos^2 \alpha$.)

Rešenje: $z = g \operatorname{ctg}^2 \alpha / \omega^2, \quad R = mg / \sin \alpha.$

12) Teška tačka M klizi po nepokretnom glatkom kružnom cilindru kome je osa horizontalna. Ako je tačka pošla iz stanja mira sa mesta M_0 na kome ravan kroz osu cilindra i M_0 obrazuje ugao $\varphi_0 = \alpha$ sa vertikalnom ravni kroz osu cilindra, dokazati da će tačka napustiti cilindar kad bude $\cos \varphi = \frac{2}{3} \cdot \cos \alpha$ pri čemu je φ ugao između vertikalne ravni kroz osu cilindra i ravni kroz osu i tačku M .

2.11. Kretanje materijalne tačke po glatkoj krivoj liniji

Kad je sloboda materijalne tačke ograničena sa dve nezavisne holonomne bilateralne veze, tačka je prinuđena da se kreće po krivoj liniji koja se nalazi u preseku površi određenih jednačinama veza. Ako bi bilo tri nezavisne bilateralne veze, mogući položaji materijalne tačke su samo one tačke prostora koje su zajedničke za sve veze. To su u prostoru diskretno raspoređene tačke i kretanje nije moguće. Stoga se ovde zadržavamo na najviše dve nezavisne bilateralne veze.

Neka su te dve veze

$$(1) \quad f_1(\mathbf{r}; t) = f_1(x, y, z; t) = 0,$$

$$f_2(\mathbf{r}; t) = f_2(x, y, z; t) = 0,$$

ili u odnosu na neki sistem generalisanih koordinata

$$(2) \quad f_\alpha(q^1, q^2, q^3; t) = 0. \quad (\alpha = 1, 2)$$

Vektor položaja (odnosno koordinate) materijalne tačke pri kretanju moraju zadovoljavati istovremeno obe jednačine veze. Te dve veze nameću i izvesna ograničenja vektorima brzine i ubrzanja.

Slično onome što je rečeno za jednu zadržavajuću vezu i u slučaju dve takve veze položaj tačke određen vektorom $\mathbf{r} + \Delta \mathbf{r}$ u trenutku $t + \Delta t$ takođe mora da zadovoljava veze. U Dekartovim pravouglim koordinatama taj zahtev se svodi na relacije oblika

$$(3) \quad f_{\alpha}(\mathbf{r} + \Delta \mathbf{r}; t + \Delta t) = f_{\alpha}(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z; t + \Delta t) = 0. \\ (\alpha = 1, 2)$$

Za dovoljno malo Δt uslovi (3) se mogu aproksimirati sa

$$(4) \quad \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial z} \Delta z + \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial t} \Delta t = 0.$$

Ako se ove relacije podele sa Δt i pusti da $\Delta t \rightarrow 0$ dobiće se

$$(5) \quad \dot{f}_{\alpha} = \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial z} \dot{z} + \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial t} = 0,$$

odn.

$$(6) \quad \dot{f}_{\alpha} = \text{grad } f_{\alpha} \cdot \mathbf{v} + \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial t} = 0. \quad (\alpha = 1, 2)$$

Dve relacije (6) predstavljaju *uslove za brzinu* materijalne tačke koja se kreće sa dve dvostrane veze (1). Ti uslovi očigledno ograničavaju samo komponentu brzine u pravcu normale na veze. Ako su veze skleronomne, $\frac{\partial f_{\alpha}}{\partial t} = 0$, uslovi (6) se svode na

$$(7) \quad \text{grad } f_{\alpha} \cdot \mathbf{v} = 0,$$

što znači da je brzina upravna na normale obe površi određene vezama $f_{\alpha} = 0$ i da se nalazi u tangentskim ravnima tih površi, a kako se te ravni ne poklapaju — u njihovom preseku, tj. brzina pokretne tačke koja se kreće po nepokretnoj krivoj liniji mora biti kolinearna sa tangentom na tu krivu liniju.

Ako se uslovi za brzinu napišu u obliku

$$(8) \quad f_{\alpha}(x, y, z; \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}; t) = 0,$$

pa se postavi zahtev da i u trenutku $t + \Delta t$ koordinate $x + \Delta x$, $y + \Delta y$, $z + \Delta z$ tačke i koordinate $\dot{x} + \Delta \dot{x}$, $\dot{y} + \Delta \dot{y}$, $\dot{z} + \Delta \dot{z}$ brzine takođe zadovoljavaju uslov (8), na isti način kao i u slučaju jedne zadržavajuće veze (2.10.1) dobiće se dva *uslova za ubrzanje*

$$(9) \quad \text{grad } f_{\alpha} \cdot \mathbf{w} + D_2 f_{\alpha} = 0, \quad (\alpha = 1, 2)$$

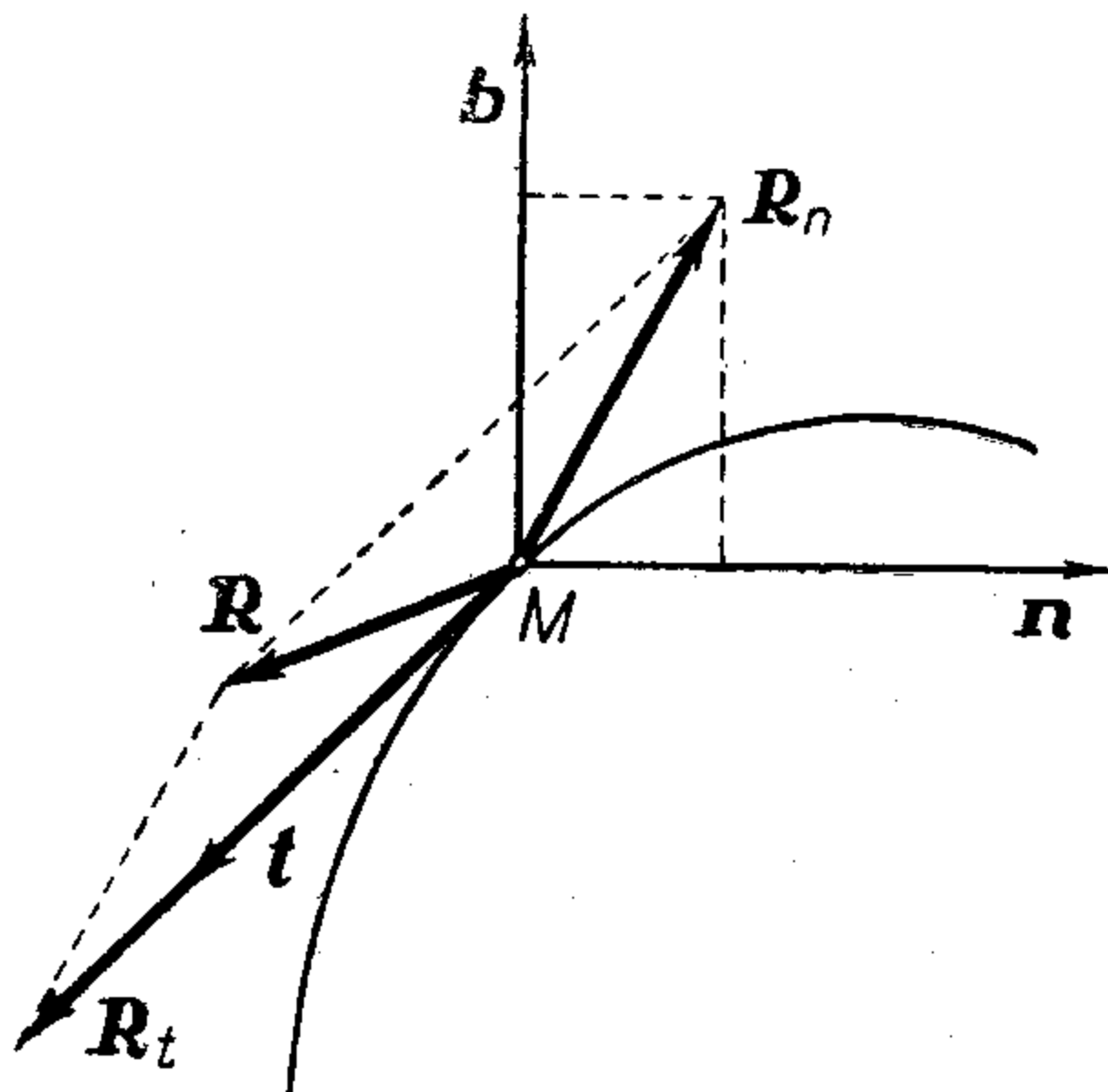
gde su $D_2 f_{\alpha}$ simboli koji imaju isto značenje kao i u slučaju jedne veze (2.10.1—10), samo su sada primenjeni na dve funkcije, f_1 i f_2 . I uslovi za ubrzanje ograničavaju samo komponente ubrzanja u pravcu normala na one površi koje su određene vezama.

Ako na materijalnu tačku koja se kreće sa vezama (1) deluje neka aktivna sila \mathbf{F} , prema drugom Njutnovom zakonu vektorska diferencijalna jednačina kre-

tanja je $m\mathbf{w} = \mathbf{F}$, pa je ubrzanje određeno silom, $\mathbf{w} = \mathbf{F}/m$. Prema tome sila \mathbf{F} treba da zadovolji dva uslova (9)

$$(10) \quad \text{grad } f_\alpha \cdot \mathbf{F} + m D_2 f_\alpha = 0.$$

Sila \mathbf{F} je, međutim, po pravilu nezavisna od veza i taj uslov nije zadovoljen, sem kada se slobodna trajektorija tačke poklopi sa prinudnom (određenom jednačinom veze). Da bi trajektorija bila u saglasnosti sa vezama na tačku, mora se uvesti



Slika 88

i neka dopunska sila, sila prinude, koja se naziva *sila reakcije veza*; neka to bude sila \mathbf{R} , tako da je putanja određena vektorskom diferencijalnom jednačinom

$$(11) \quad m\mathbf{w} = \mathbf{F} + \mathbf{R}$$

saglasna sa vezama (1). Otuda proizlazi da sila $\mathbf{F} + \mathbf{R}$ treba da zadovoljava dve jednačine,

$$(12)$$

$$\text{grad } f_\alpha \cdot (\mathbf{F} + \mathbf{R}) + m D_2 f_\alpha = 0,$$

iz kojih se dobiva da je reakcija veze određena jednačinama

$$(13)$$

$$\text{grad } f_1 \cdot \mathbf{R} = -(\text{grad } f_1 \cdot \mathbf{F} + m D_2 f_1),$$

$$\text{grad } f_2 \cdot \mathbf{R} = -(\text{grad } f_2 \cdot \mathbf{F} + m D_2 f_2).$$

Vektor \mathbf{R} (sl. 88) se može rastaviti u dve komponente, jednu u pravcu tangente na trajektoriju, neka je to \mathbf{R}_t , i jednu u normalnoj ravni trajektorije; kako je ta ravan određena normalama na površi $f_\alpha = 0$, za normalnu komponentu reakcije se može napisati

$$(14) \quad \mathbf{R}_N = \lambda_1 \text{grad } f_1 + \lambda_2 \text{grad } f_2,$$

tako da je ukupna reakcija

$$(15) \quad \mathbf{R} = \mathbf{R}_t + \lambda_1 \text{grad } f_1 + \lambda_2 \text{grad } f_2.$$

Unošenjem ovoga u relacije (13) ove se svode na

$$(16) \quad \lambda_1 (\text{grad } f_1)^2 + \lambda_2 \text{grad } f_1 \cdot \text{grad } f_2 = -(\text{grad } f_1 \cdot \mathbf{F} + m D_2 f_1),$$

$$\lambda_1 \text{grad } f_1 \cdot \text{grad } f_2 + \lambda_2 (\text{grad } f_2)^2 = -(\text{grad } f_2 \cdot \mathbf{F} + m D_2 f_2),$$

tj. na dve jednačine iz kojih se mogu odrediti koeficijenti λ_1 i λ_2 . Otuda proističe da aktivna sila i jednačine veza određuju isključivo normalnu komponentu sile reakcije, dok tangenta komponenta ostaje neodređena. Kao i u slučaju jedne veze, kad postoje dve veze kaže se da su *veze idealne*, ako ne postoji tangenta komponenta sile reakcije. Za krivu liniju određenu idealnim vezama kaže se da je *glatka*. Reakcija \mathbf{R}_t u pravcu tangente na putanju predstavlja silu *trenja*. Za materijalnu tačku koja se kreće pod uticajem dve idealne veze kaže se da se kreće po *glatkoj krivoj, bez trenja*.

Za dve veze su *multiplikatori veza* λ_1 i λ_2 potpuno određeni jednačinama (16) a time u potpunosti je određena i *normalna reakcija* za kretanje tačke po datoj krivoj.

Ako se uvedu oznake

$$(17) \quad -(\text{grad } f_\alpha \cdot \mathbf{F} + m D_2 f_\alpha) = \varphi_\alpha \quad (\alpha = 1, 2)$$

i

$$(18) \quad \text{grad } f_\alpha \text{ grad } f_\beta = f_{\alpha\beta}, \quad (\alpha, \beta = 1, 2)$$

tako da je

$$f_{11} = (\text{grad } f_1)^2, \quad f_{12} = f_{21} = \text{grad } f_1 \cdot \text{grad } f_2, \quad f_{22} = (\text{grad } f_2)^2,$$

sistem jednačina (16) za određivanje množilaca λ_1 i λ_2 može se napisati u obliku

$$(19) \quad \begin{aligned} f_{11} \lambda_1 + f_{12} \lambda_2 &= \varphi_1, \\ f_{21} \lambda_1 + f_{22} \lambda_2 &= \varphi_2. \end{aligned}$$

Ovaj će sistem imati rešenja samo ako je

$$(20) \quad \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{vmatrix} \neq 0,$$

što je ispunjeno uvek kad su veze međusobno nezavisne. Ako uslov (20) nije ispunjen veze nisu nezavisne (npr. dve paralelne ravni ili dve koncentrične sfere ne određuju nikakvu krivu liniju; normale su im kolinearne i uslov (20) nije ispunjen).

Ako je uslov (20) ispunjen množiocu veza se nalaze iz (19),

$$(21) \quad \lambda_1 = \frac{\varphi_1 f_{22} - \varphi_2 f_{12}}{f_{11} f_{22} - (f_{12})^2}; \quad \lambda_2 = \frac{-\varphi_1 f_{12} + \varphi_2 f_{11}}{f_{11} f_{22} - (f_{12})^2}.$$

2.11.1. Diferencijalne jednačine kretanja materijalne tačke po glatkoj krivoj liniji

Vektorska diferencijalna jednačina kretanja materijalne tačke pod dejstvom aktivne sile \mathbf{F} , kad je njena sloboda ograničena dvema idealnim zadržavajućim vezama

$$(1) \quad f_\alpha(\mathbf{r}; t) = f_\alpha(x, y, z; t) = 0 \quad (\alpha = 1, 2)$$

odn.

$$(1a) \quad \varphi_\alpha(q^1, q^2, q^3; t) = 0$$

biće prema (2.11—11 i 14)

$$(2) \quad m \mathbf{w} = \mathbf{F} + \lambda_1 \text{grad } f_1 + \lambda_2 \text{grad } f_2.$$

Skalarne diferencijalne jednačine kretanja dobiće se iz ove vektorske jednačine kretanja skalarnim množenjem osnovnim vektorima koordinatnog sistema u odnosu na koji skalarne jednačine treba napisati.

Uopšte, za neki sistem generalisanih koordinata q^i ($i = 1, 2, 3$) sa kontravarijantnim osnovnim vektorima \mathbf{g}^i za ubrzanje, aktivnu silu i silu reakcije mogu se iskoristiti obrasci (1.6.3—11 i 18), (2.3.1) i (2.10.1.1—11)

$$(3) \quad \mathbf{w} = w_i \mathbf{g}^i = \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial q^i} \right) \mathbf{g}^i,$$

$$(4) \quad \mathbf{F} = Q_i \mathbf{g}^i,$$

$$(5) \quad \mathbf{R} = \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial q^i} \mathbf{g}^i + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial q^i} \mathbf{g}^i = \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial q^i} \mathbf{g}^i, \quad (i = 1, 2, 3; \alpha = 1, 2)$$

Kako je kinetička energija vezana za kvadrat brzine relacijom

$$(6) \quad T = mv^2/2 = m\mathcal{B}$$

i kako je po pretpostavci $m = \text{const.}$, to je

$$(7) \quad m\mathbf{w} = \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} - \frac{d}{dq^i} \right) \mathbf{g}^i$$

Ako se onda jednačina (2) pomnoži skalarno osnovnim kovarijantnim vektorima \mathbf{g}_j koordinatnog sistema q^i , zbog

$$\mathbf{g}^i \cdot \mathbf{g}_j = \delta_j^i = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

biće

$$(8) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^j} - \frac{\partial T}{\partial q^j} = Q_j + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial q^j} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial q^j} \quad (j = 1, 2, 3)$$

Ovaj sistem jednačina, kojih ima ukupno tri, predstavlja *Lagranževe jednačine prve vrste za kretanje* materijalne tačke sa dve bilateralne veze, ili *Lagranževe jednačine sa multiplikatorima veza*.

U Dekartovim pravouglim koordinatama Lagranževe jednačine prve vrste imaju oblik

$$(9) \quad \begin{aligned} m\ddot{x} &= X + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x}; \\ m\ddot{y} &= Y + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial y}; \\ m\ddot{z} &= Z + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial z}. \end{aligned}$$

Tri Lagranževe jednačine sa množiocima veza sadrže pet nepoznatih funkcija koje treba odrediti. To su tri koordinate x, y, z , odn. q^i ($i = 1, 2, 3$) pokretne tačke i dva množioca veza λ_1 i λ_2 . Prema tome, pored diferencijalnih jednačina kretanja potrebne su još dve jednačine, a to su upravo jednačine (2.11—16) koje se izvode iz veza (1). Na taj način za rešavanje problema kretanja i određivanje sile reakcije postoji potpuni sistem jednačina i problem je određen. Uvek se prvo odrede multiplikatori veza pa zamene u jednačine (8) odn. (9).

Podesnim izborom generalisanih koordinata problem integraljenja diferencijalnih jednačina kretanja može se znatno uprostiti. Neka su jednačine veza date u odnosu na neki Dekartov pravougli koordinatni sistem

$$(10) \quad \begin{aligned} f_1(x, y, z; t) &= 0, \\ f_2(x, y, z; t) &= 0. \end{aligned}$$

Generalisane koordinate q^i mogu se takođe izabrati da dve od njih, recimo q^1 i q^2 , budu vezane za Dekartove obrascima

$$(11) \quad \begin{aligned} q^1 &= f_1(x, y, z; t); \\ q^2 &= f_2(x, y, z; t), \end{aligned}$$

a treća nekom proizvoljnom transformacijom

$$(12) \quad q^3 = q^3(x, y, z; t).$$

Proizvoljnost funkcije $q^3(x, y, z; t)$ je jedino ograničena uslovom da tri transformacije (11) i (12) budu međusobno nezavisne i da generalisane koordinate q^i identički zadovoljavaju jednačine veza (10). Iz nezavisnosti funkcija $q^i(x, y, z; t)$ proističe da postoji inverzna transformacija

$$(13) \quad \begin{aligned} x &= x(q^1, q^2, q^3; t), \\ y &= y(q^1, q^2, q^3; t), \\ z &= z(q^1, q^2, q^3; t). \end{aligned}$$

Međutim, s obzirom na jednačine veze (10) za kretanje tačke po krivoj određenoj tim vezama zbog (13) mora biti

$$(14) \quad \begin{aligned} f_1[x(q^1, q^2, q^3), y(q^1, q^2, q^3), z(q^1, q^2, q^3); t] &= q^1 = 0 \\ f_2[x(q^1, q^2, q^3), y(q^1, q^2, q^3), z(q^1, q^2, q^3); t] &= q^2 = 0 \end{aligned}$$

pa se transformacije (13) svode na

$$(15) \quad x = x(q^3; t), \quad y = y(q^3; t), \quad z = z(q^3; t).$$

Prema tome q^3 mora biti tako izabrano da jednačine (10) po x, y, z i t budu identički zadovoljene kad se u njih unesu vrednosti (15) za promenljive x, y i z

$$(16) \quad f_\alpha[x(q^3; t), y(q^3; t), z(q^3; t); t] \equiv 0.$$

Za ovako izabrani sistem koordinata kinetička energija zavisi samo od q^3, \dot{q}^3 i t , a ne od q^1, q^2 i njihovih izvoda po vremenu. Koordinata $q^3 = q$ je nezavisna koordinata za date veze. U Dekartovim koordinatama je

$$(17) \quad T = \frac{m}{2} \delta_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j,$$

gde je $x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z$. Ako se \dot{x}^i, \dot{y}^j i \dot{z}^k izračunaju iz (15) biće.

$$\dot{x}^i = \frac{\partial x^i}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial x^i}{\partial t}$$

pa se izraz za kinetičku energiju svodi na oblik

$$T = \frac{m}{2} \left[\delta_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial q} \frac{\partial x^j}{\partial q} (\dot{q})^2 + 2 \delta_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial q} \frac{\partial x^j}{\partial t} \dot{q} + \delta_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial t} \frac{\partial x^j}{\partial t} \right].$$

Ako se uvedu oznake

$$\delta_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial q} \frac{\partial x^j}{\partial q} = g_{11}, \quad \delta_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial q} \frac{\partial x^j}{\partial t} = g_1, \quad \delta_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial t} \frac{\partial x^j}{\partial t} = g_0,$$

može se najzad kinetička energija napisati u obliku

$$(18) \quad T = \frac{m}{2} [g_{11} (\dot{q})^2 + 2 g_1 \dot{q} + g_0],$$

pri čemu su koeficijenti funkcije samo od q i t . U opštem slučaju je, dakle, kinetička energija nehomogena funkcija generalisane brzine \dot{q} . U slučaju nepokretnih veza biće $\frac{\partial x^i}{\partial t} = 0$ i kinetička energija se svodi na jednostavan izraz

$$(19) \quad T = \frac{m}{2} g_{11} (\dot{q})^2.$$

Za generalisane koordinate određene relacijama (11) i (12) jednačine veze su

$$f_1 \equiv q^1 = 0, \quad f_2 \equiv q^2 = 0,$$

pa je sila reakcije

$$(20) \quad \mathbf{R} = \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial q^i} \mathbf{g}^i + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial q^i} \mathbf{g}^i = \lambda_1 \mathbf{g}^1 + \lambda_2 \mathbf{g}^2.$$

S obzirom na (18) vektor $m\mathbf{w}$ je u ovom sistemu koordinata određen obrascem

$$(21) \quad m\mathbf{w} = \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^3} - \frac{\partial T}{\partial q^3} \right) \mathbf{g}^3,$$

pa se skalarnim množenjem vektorske jednačine (2) osnovnim kovarijantnim vektorom \mathbf{g}_3 dobiva jedna skalarna jednačina

$$(22) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T}{\partial q} = Q,$$

gde je stavljeno $q^3 \equiv q$, $Q_3 \equiv Q$. Prema tome uvođenjem nezavisne koordinate za kretanje tačke po datoj krivoj liniji kretanje je određeno samo jednom diferencijalnom jednačinom kretanja koja ne sadrži silu reakcije; to je *Lagranževa jednačina kretanja druge vrste* za kretanje materijalne tačke sa dve zadržavajuće idealne veze.

Kako se integraljenjem Lagranževe jednačine druge vrste ne može odrediti sila reakcije, već samo konačna jednačina kretanja

$$q = q(t; q_0, \dot{q}_0),$$

to se za određivanje reakcije mora koristiti sistem jednačina koje sadrže reakciju, npr. Lagranževe jednačine prve vrste. Pošto se odredi konačna jednačina kretanja za nezavisnu koordinatu, smenom u (15) i dvostrukim diferencijaljenjem po vremenu odrediće se Dekartove koordinate ubrzanja, što se može zatim uneti u Lagranževe jednačine prve vrste (9) i odatle odrediti koordinate reakcije.

Pri kretanju materijalne tačke po nekoj krivoj liniji ubrzanje se u svakoj tački krive nalazi u oskulatornoj ravni određenoj tangentom i glavnom normalom krive. U odnosu na prirodni triedar krive, koji čine tangenta, glavna normala i binormala (1.6.1—2) ubrzanje je određeno obrascem

$$(23) \quad \mathbf{w} = \frac{dv}{dt} \mathbf{t} + \frac{v^2}{\rho} \mathbf{n} + 0 \cdot \mathbf{b}.$$

Sila reakcije idealnih veza (1) se nalazi u normalnoj ravni krive, koja je u svakoj tački trajektorije određena normalama, odn. gradijentima površi $f_1 = 0$ i $f_2 = 0$. Otuda proističe da je sila reakcije idealnih veza upravna na tangentu trajektorije, ali da u opštem slučaju nije kolinearna ni sa glavnom normalom niti sa binormalom. Prema tome ako se vektorska jednačina kretanja (2) pomnoži

jediničnim vektorima \mathbf{t} , \mathbf{n} i \mathbf{b} prirodnog triedra dobiće se tri prirodne jednačine za kretanje materijalne tačke po datoj krivoj liniji.

$$(24) \quad \begin{aligned} m \frac{dv}{dt} &= F_t, \\ m \frac{v^2}{\rho} &= F_n + R_n, \\ 0 &= F_b + R_b, \end{aligned}$$

gde je ρ poluprečnik krivine trajektorije, a

$$(25) \quad \begin{aligned} F_t &= \mathbf{F} \cdot \mathbf{t}, & F_n &= \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}, & F_b &= \mathbf{F} \cdot \mathbf{b}; \\ R_n &= \mathbf{R} \cdot \mathbf{n}, & R_b &= \mathbf{R} \cdot \mathbf{b}. \end{aligned}$$

Kad je poznata brzina materijalne tačke, prirodne jednačine kretanja su veoma pogodne za određivanje normalne reakcije, posebno ako je trajektorija ravanska kriva. U tom slučaju se tangenta i glavna normala trajektorije nalaze uvek u ravni trajektorije, a binormala je upravna na tu ravan i vektor \mathbf{b} je konstantan pa ga nije uopšte potrebno posebno određivati.

2.11.2. Integral energije za kretanje materijalne tačke po glatkoj krivoj liniji

Da bi za materijalnu tačku čije kretanje je podvrgnuto dvema bilateralnim idealnim vezama postojao integral energije, rad sila (aktivne i reakcije) na elementarnom pomeranju

$$(1) \quad dA = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \lambda_1 \text{grad } f_1 \cdot d\mathbf{r} + \lambda_2 \text{grad } f_2 \cdot d\mathbf{r},$$

mora biti totalni diferencijal. S obzirom na uslove za brzinu (2.11—6) ovaj izraz za rad se može napisati u obliku

$$(2) \quad dA = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} - \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial t} dt - \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial t} dt.$$

Izraz sa desne strane relacije (2) biće totalni diferencijal ako je

$$(3) \quad \frac{\partial f_1}{\partial t} = \frac{\partial f_2}{\partial t} = 0,$$

a ako je

$$(4) \quad \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = dU,$$

gde je U funkcija sile,

$$\mathbf{F} = \text{grad } U.$$

Ako su uslovi (3) i (4) ispunjeni, postoji za kretanje tačke po datoj krivoj integral energije

$$mv^2/2 - U = h = \text{const.}$$

Dve jednačine skleronomnih veza (2.11.1—1 odn. 1a) mogu se rešiti po dve promenljive, recimo x i y tako da je treća (z) nezavisno promenljiva. Tada jednačine veze dobivaju oblik

$$(5) \quad \begin{aligned} x &= x(z), \\ y &= y(z). \end{aligned}$$

Elementarni rad aktivne sile biće onda

$$(6) \quad \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = X dx + Y dy + Z dz = \left(X \frac{dx}{dz} + Y \frac{dy}{dz} + Z \right) dz.$$

Ako se u ovom izrazu koordinate x i y eliminišu pomoću jednačina veza (5), elementarni rad će biti totalni diferencijal

$$(7) \quad \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \Phi(z) dz = dU$$

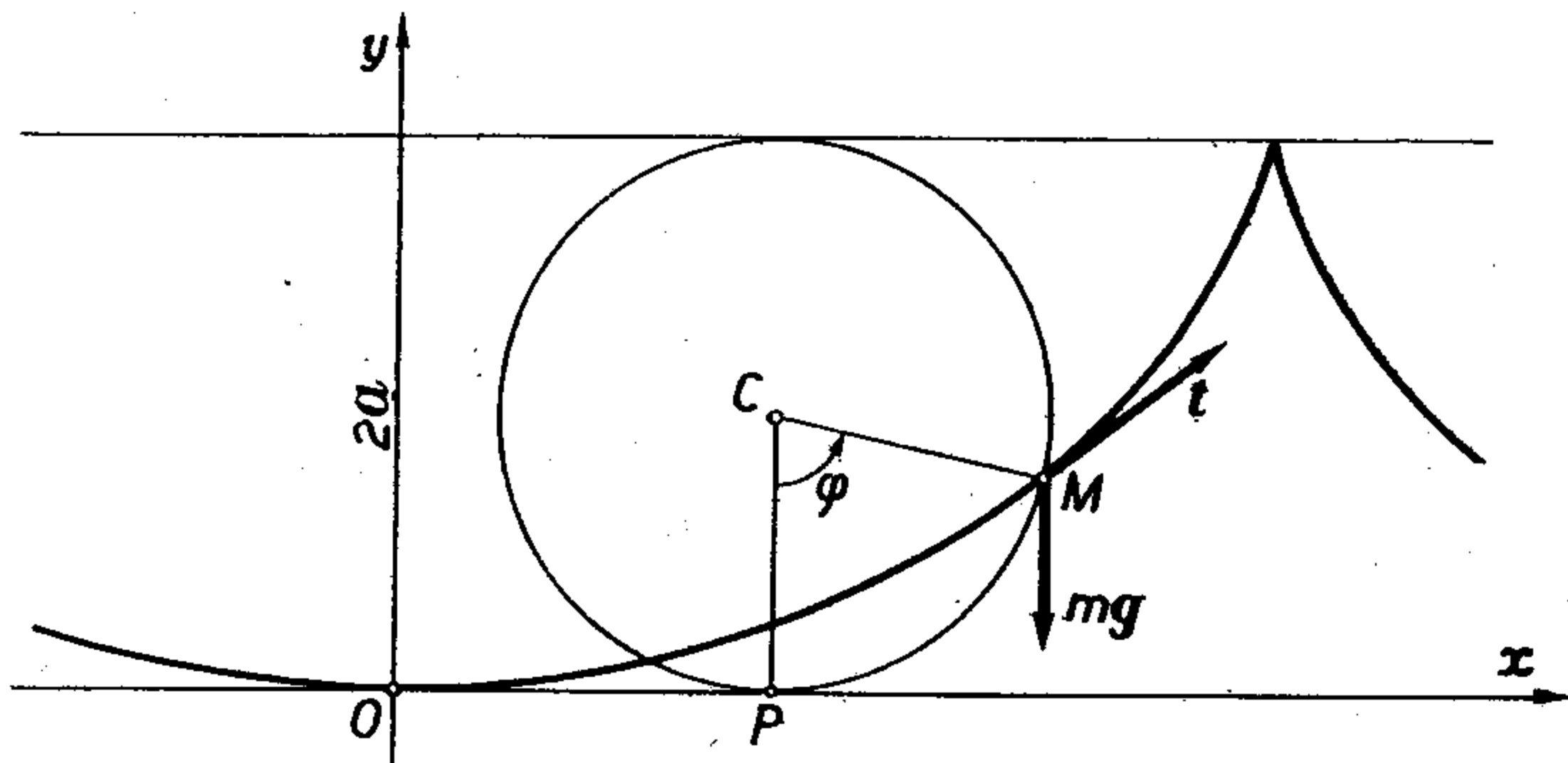
pod uslovom da koordinate sile X , Y i Z zavise samo od položaja a ne i od vremena i brzine tačke.

Prema tome za kretanje materijalne tačke po datoj glatkoj krivoj liniji uvek postoji integral energije ako je kriva nepokretna i ako aktivna sila zavisi samo od položaja.

2.11.3. Primeri kretanja materijalne tačke po glatkoj krivoj liniji

2.11.3.1. Cikloidno klatno

Kretanje teške tačke po glatkoj nepokretnoj cikloidi koja se nalazi u vertikalnoj ravni i ima horizontalnu osnovu zove se cikloidno klatno (sl. 89).



Slika 89

Kako je cikloida ravna kriva linija, može se uzeti da je u ravni Oxy , pa je jedna od dve veze $z = 0$. Cikloida je kriva linija koju opisuje tačka na periferiji kruga koji se kotrlja bez klizanja po nepokretnoj pravoj liniji (osnovi). Neka je a poluprečnik kruga generatora koji se kotrlja po horizontalnoj pravoj $y = 2a$, dok je y -osa orijentisana vertikalno naviše. Ako se centar C kruga u početnom trenutku nalazio na y -osi ($x_{C_0} = 0$, $y_{C_0} = a$) i ako se krug kotrlja bez klizanja, kad se krug obrne za neki ugao φ centar kruga će se nalaziti u položaju $x_C = a\varphi$, $y_C = a$. Neka je na periferiji kruga uočena recimo tačka M koja se u početnom trenutku nalazi u koordinatnom početku (nepokretnom) $O(0, 0)$,

kad se krug obrne za ugao φ koordinate te tačke u nepokretnom koordinatnom sistemu će biti

$$(1) \quad \begin{aligned} x &= a(\varphi + \sin \varphi), \\ y &= a(1 - \cos \varphi). \end{aligned}$$

Jednačine (1) predstavljaju parametarske jednačine cikloide. Parametar je nezavisna koordinata tačke na cikloidi.

Kinetička energija cikloidnog klatna je

$$(2) \quad T = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = 2ma^2 \dot{\varphi}^2 (1 + \cos \varphi) = 4ma^2 \dot{\varphi}^2 \cos^2 \left(\frac{\varphi}{2} \right).$$

Kako je, međutim, $T = mv^2/2 = \frac{m}{2} \left(\frac{ds}{dt} \right)^2$, to se za element luka cikloide nalazi

$$(3) \quad ds = 2a \cos \left(\frac{\varphi}{2} \right) d\varphi,$$

a za sam luk integracijom obrasca (3), ako se za početak merenja luka uzme tačka $s_0 = 0$ za $\varphi = 0$,

$$(4) \quad s = 4a \sin \frac{\varphi}{2}.$$

Za rešenje problema o kretanju cikloidnog klatna dovoljno je odrediti samo zakon puta jer je trajektorija poznata. Zakon puta se najlakše može naći iz prirodne jednačine kretanja u odnosu na tangentu

$$(5) \quad m \frac{d^2 s}{dt^2} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{t}.$$

S obzirom na usvojeni Dekartov koordinatni sistem aktivna sila je $\mathbf{F} = -mg\mathbf{j}$. Za određivanje vektora \mathbf{t} tangente može se poći od formule $\mathbf{t} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}$, gde je $d\mathbf{r}$ elementarno pomeranje tačke na cikloidi, pa je na osnovu jednačina (1)

$$d\mathbf{r} = dx \mathbf{i} + dy \mathbf{j} = a [(1 + \cos \varphi) \mathbf{i} + \sin \varphi \mathbf{j}] d\varphi,$$

što se može još napisati u obliku

$$d\mathbf{r} = 2a \cos \frac{\varphi}{2} \left(\cos \frac{\varphi}{2} \mathbf{i} + \sin \frac{\varphi}{2} \mathbf{j} \right) d\varphi$$

a s obzirom na (3) je

$$d\mathbf{r} = \left(\cos \frac{\varphi}{2} \mathbf{i} + \sin \frac{\varphi}{2} \mathbf{j} \right) ds,$$

tako da je najzad

$$(6) \quad \mathbf{t} = \cos \frac{\varphi}{2} \mathbf{i} + \sin \frac{\varphi}{2} \mathbf{j}.$$

Projekcija aktivne sile na tangentu trajektorije je sad data obrascem

$$(7) \quad F_t = -mg \sin \frac{\varphi}{2},$$

pa se zbog (4) diferencijalna jednačina kretanja može napisati u obliku

$$(8) \quad \frac{d^2 s}{dt^2} = -\frac{g}{4a} s.$$

Integral jednačine (8)

$$(9) \quad s = A \sin \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{a}} t + \alpha \right)$$

predstavlja zakon puta cikloidnog klatna. Za početne uslove $t_0 = 0$, $s_0 = 0$, $\dot{s}_0 = v_0$ dobiće se

$$(10) \quad s = 2v_0 \sqrt{\frac{a}{g}} \sin \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{a}} t \right).$$

Iz ove se relacije vidi da je kretanje cikloidnog klatna harmonijska oscilacija, ali ona nije pravolinijska već krivolinijska i može biti konačne veličine. Period oscilacije je

$$(11) \quad T = 4\pi \sqrt{\frac{a}{g}},$$

a amplituda

$$(12) \quad A = 2v_0 \sqrt{\frac{a}{g}}.$$

Reakcija veze se može odrediti iz prirodne jednačine za glavnu normalu (2.11.1—24)

$$(13) \quad R = \frac{mv^2}{\rho} - F_N.$$

Izvod jediničnog vektora tangente po luku (prvi Freneov obrazac)

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds} = \frac{\mathbf{n}}{\rho},$$

svodi se zbog (3) i (6), pošto su jedinični vektori \mathbf{i} i \mathbf{j} nezavisni, na

$$\frac{\mathbf{n}}{\rho} = \frac{1}{4a \cos \frac{\varphi}{2}} \left(-\sin \frac{\varphi}{2} \mathbf{i} + \cos \frac{\varphi}{2} \mathbf{j} \right)$$

pa je

$$(14) \quad \mathbf{n} = -\sin \frac{\varphi}{2} \mathbf{i} + \cos \frac{\varphi}{2} \mathbf{j},$$

$$\rho = 4a \cos \frac{\varphi}{2}.$$

Projekcija sile na glavnu normalu biće

$$(15) \quad F_N = \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = -mg \cos \frac{\varphi}{2}.$$

Brzina se može odrediti diferencijaljenjem zakona puta (9), tako da je iz (13)

$$(16) \quad R = \frac{m \dot{s}^2}{4a \cos \frac{\varphi}{2}} + mg \cos \frac{\varphi}{2}.$$

Cikloidno klatno ima tri posebne važne osobine: *izohronost*, *tautohronost* i *brahistohronost*.

I z o h r o n o s t je osobina da period T oscilacija ne zavisi od početnih uslova kretanja. Ta osobina cikloidnog klatna proističe iz strukture obrasca (11) za period oscilacija, po kome se vidi da period zaista ne zavisi od početnih uslova već samo od poluprečnika kruga generatora cikloide.

T a u t o h r o n o s t je osobina teške tačke da puštena bez početne brzine silazi niz cikloidu u najnižu tačku njenu za isto vreme iz svih mogućih položaja.

Neka je u trenutku $t_0 = 0$ tačka u nekom položaju s_0 na cikloidi. Ako je puštena iz tog položaja bez početne brzine ($\dot{s}_0 = 0$), odgovarajući zakon puta će se dobiti iz (9),

$$s = s_0 \sin \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{a}} t + \frac{\pi}{2} \right) = s_0 \cos \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{a}} t \right).$$

U najnižem položaju $s = 0$ na cikloidi tačka će doći za vreme određeno jednačinom

$$0 = \cos \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{a}} t \right),$$

tj. za vreme

$$(17) \quad t = \pi \sqrt{\frac{a}{g}},$$

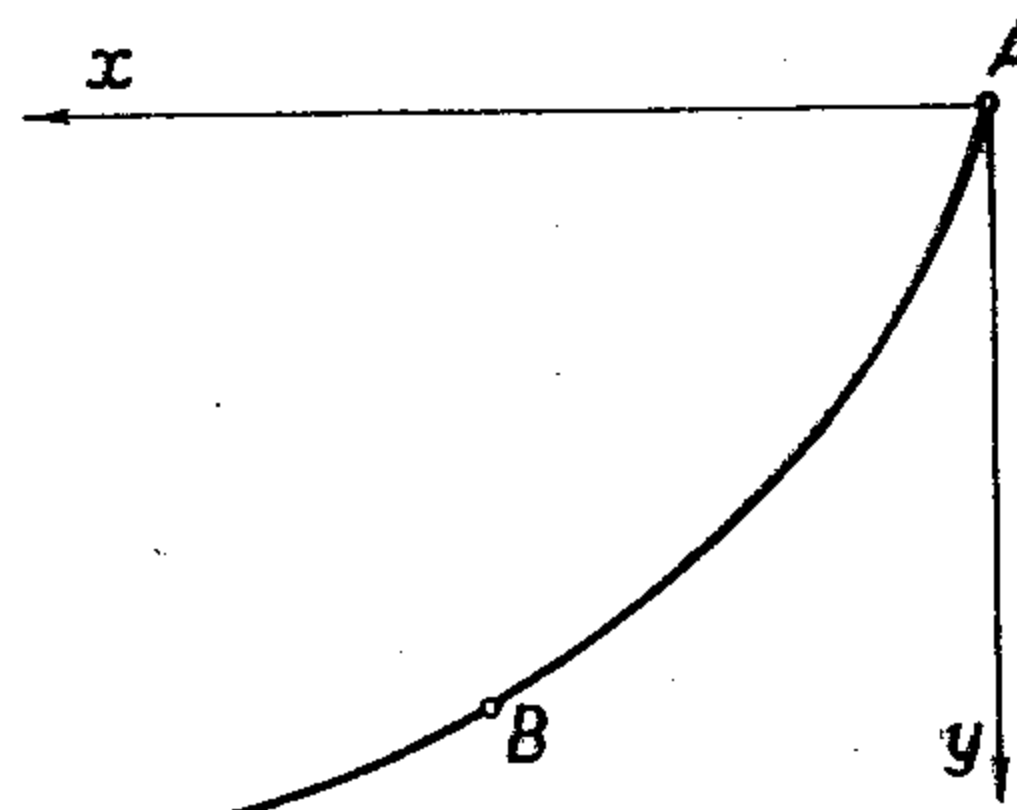
koje ne zavisi od početnog položaja s_0 .

B r a h i s t o h r o n o s t je osobina cikloide da teška tačka na cikloidi stigne u neku nižu tačku na istoj toj glatkoj krivoj, kad je ona u vertikalnoj ravni, za najkraće vreme, kraće nego kada se kreće po ma kojoj drugoj krivoj. Stoga cikloida u vertikalnoj ravni predstavlja brahistohronu za silu teže mg .

Za tešku tačku u vertikalnoj ravni koja se kreće bez početne brzine integral energije je (sl. 90)

$$\frac{mv^2}{2} = mgy.$$

Ako se za kvadrat brzine iskoristi obrazac $v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = (1 + y'^2) \dot{x}^2$, iz integrala energije se dobiva



Slika 90

$$dt = \frac{1}{\sqrt{2gy}} ds = \frac{1}{\sqrt{2g}} \sqrt{\frac{1+y'^2}{y}} dx.$$

Vreme potrebno da tačka iz početnog položaja $A(0, 0)$ pređe u neki drugi položaj B duž krive $y = y(x)$ je određeno formulom

$$(18) \quad t = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^B \sqrt{\frac{1+y'^2}{y}} dx = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^B F(y, y') dx.$$

Problem određivanja brahistrone sada može da se formuliše kao problem određivanja one krive $y = y(x)$ za koju će integral (18) imati najmanju vrednost. To je problem varijacionog računa u kome se pokazuje da je funkcija $y = y(x)$, u našem slučaju, integral diferencijalne jednačine

$$(19) \quad F - \frac{\partial F}{\partial y'} y' = C = \text{const.}$$

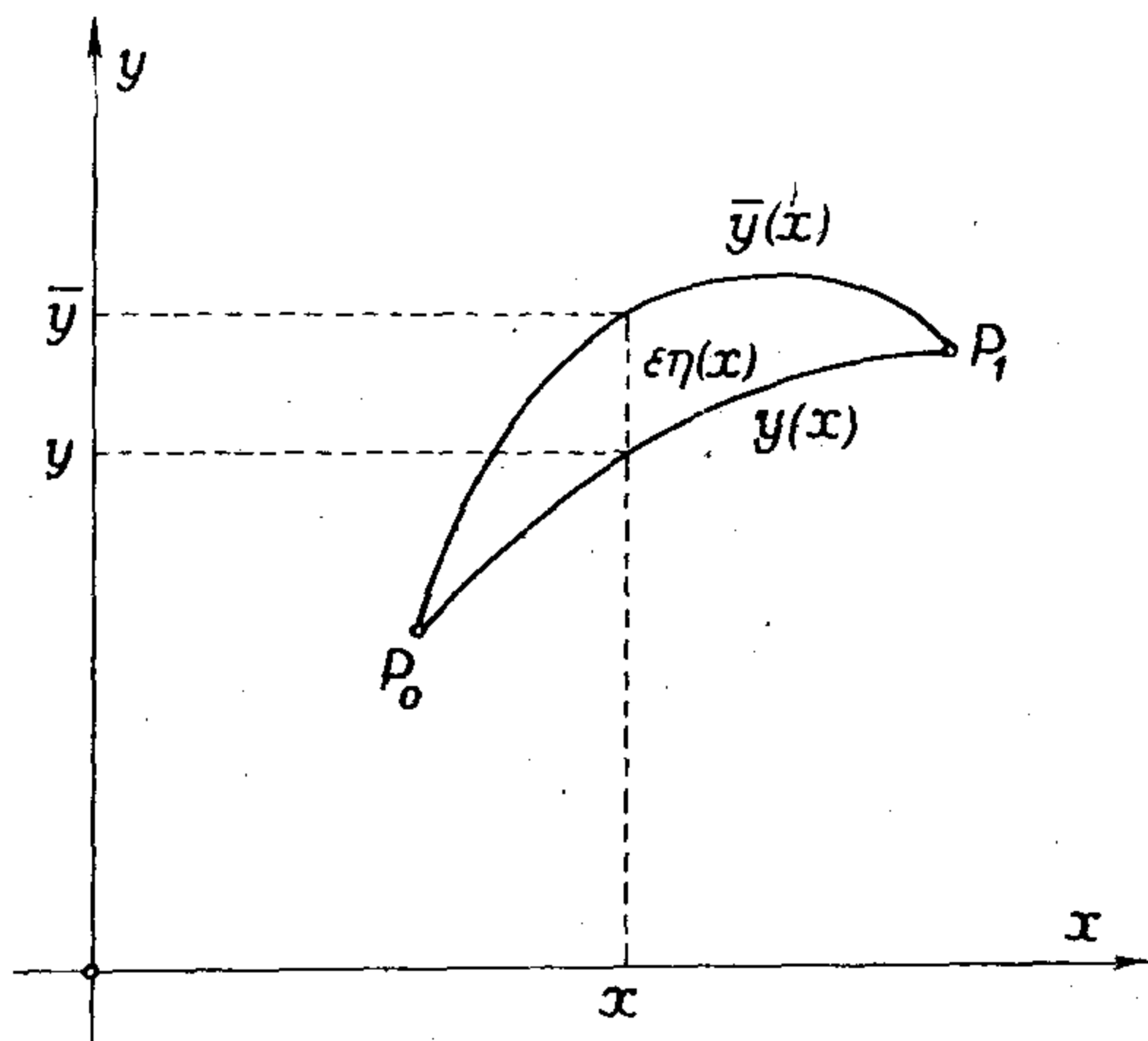
U problemu varijacionog računa traži se takva kriva linija (funkcija) $y = y(x)$ — *ekstremala* — koja prolazi npr. kroz date tačke $P_0(x_0, y_0)$ i $P_1(x_1, y_1)$ (sl. 91) a koja će nekom određenom integralu oblika

$$(a) \quad I = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx,$$

gde je $F(x, y, y')$ neka pristojna funkcija, davati najmanju ili najveću vrednost (uopšte stacionarnu vrednost).

Da bismo našli uslov koji pri tome mora biti zadovoljen, uočićemo niz drugih funkcija

$$(b) \quad \bar{y}(x) = y(x) + \varepsilon \eta(x),$$



Slika 91

gde je $\eta(x)$ proizvoljna neprekidna funkcija sa neprekidnim izvodima do n -tog reda koja zadovoljava uslove

$$(c) \quad \eta(x_0) = \eta(x_1) = 0$$

i gde je ε proizvoljno mali broj (ne mora biti samo pozitivan). U tom slučaju sve ove funkcije određuju susedne krive (zaobilazne putanje) koje sve prolaze kroz tačke P_0 i P_1 (vidi sliku).

Ako umesto funkcije $y(x)$ u podintegralnu funkciju integrala I unesemo $\bar{y}(x) = y(x) + \varepsilon\eta(x)$, onda on očigledno postaje funkcija od ε , tj.

$$(d) \quad I(\varepsilon) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y + \varepsilon\eta, y' + \varepsilon\eta') dx.$$

Sad zahtevamo da $I(\varepsilon)$ ima običan ekstremum za $\varepsilon=0$, a to znači da baš funkcija $y=y(x)$ čini integral I stacionarnim, tj. da ona bude ekstremala tog integrala. Na taj način je postavljeni problem traženja ekstremale sveden na određivanje običnog ekstremuma date funkcije za koji je u našem slučaju potreban uslov

$$\left(\frac{dI}{d\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0} = 0.$$

Radi određivanja ovog ekstremuma razvićemo $F(x, y + \varepsilon\eta, y' + \varepsilon\eta')$ u Meklorinov red po stepenima od ε , pa se dobiva

$$F(x, y + \varepsilon\eta, y' + \varepsilon\eta') = a_0 + a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2 + \dots,$$

gde je

$$\begin{aligned} a_0 &= F(x, y, y'), \\ a_1 &= \left(\frac{dF}{d\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0} = \left[\frac{\partial F}{\partial (y + \varepsilon\eta)} \frac{d(y + \varepsilon\eta)}{d\varepsilon} + \frac{\partial F}{\partial (y' + \varepsilon\eta')} \frac{d(y' + \varepsilon\eta')}{d\varepsilon} \right]_{\varepsilon=0} = \\ &= \frac{\partial F}{\partial y} \eta + \frac{\partial F}{\partial y'} \eta' \text{ itd.} \end{aligned}$$

Prema tome, može se sad integral (d) napisati u obliku

$$(e) \quad I(\varepsilon) = \int_{x_0}^{x_1} \left[F(x, y, y') + \varepsilon\eta \frac{\partial F}{\partial y} + \varepsilon\eta' \frac{\partial F}{\partial y'} + \varepsilon^2(\dots) + \dots \right] dx.$$

Diferencijaljenjem po ε pod integralnim znakom (granice x_0 i x_1 su konstantne) dobiva se

$$\frac{dI}{d\varepsilon} = \int_{x_0}^{x_1} \left[\eta \frac{\partial F}{\partial y} + \eta' \frac{\partial F}{\partial y'} + 2\varepsilon(\dots) + \dots \right] dx$$

i ovaj izraz mora za $\varepsilon=0$ biti jednak nuli, tj. taj traženi uslov glasi

$$\int_{x_0}^{x_1} \left(\eta \frac{\partial F}{\partial y} + \eta' \frac{\partial F}{\partial y'} \right) dx = 0.$$

Međutim, parcijalnom integracijom s obzirom na uslove (c) dobiva se da je

$$\int_{x_0}^{x_1} \eta' \frac{\partial F}{\partial y'} dx = \left[\eta \frac{\partial F}{\partial y'} \right]_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} \eta \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) dx = - \int_{x_0}^{x_1} \eta \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) dx$$

pa je stoga najzad

$$\left(\frac{dI}{d\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0} = \int_{x_0}^{x_1} \eta \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \right) dx.$$

Ali, kako η može biti proizvoljna funkcija, mora biti

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = 0,$$

odnosno kako se obično piše

$$(f) \quad \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} - \frac{\partial F}{\partial y} = 0,$$

a to je traženi uslov—*Ojler-Lagranževa diferencijalna jednačina varijacionog računa*.

Kad F ne zavisi eksplicitno od nezavisno promenljive x , kao što je u slučaju proučavanja problema brahistohrone, već samo od y i y' , onda jednačina (f) ima integral

$$(g) \quad F - \frac{\partial F}{\partial y'} y' = C$$

što je lako proveriti.

Najzad, što se tiče ispitivanja vrste postignutog ekstremuma (max ili min), ono je vrlo složeno, ali kod većine problema iz mehanike i fizike je i nepotrebno, jer je vrsta ekstremuma očigledna. Npr. u problemu brahistohrone uopšte nema maksimuma.

Funkcija $F = \sqrt{(1 + y'^2)}/y$ je definisana obrascem (18) i za nju se diferencijalna jednačina varijacionog problema (19) svodi na

$$(20) \quad y(1 + y'^2) = \frac{1}{C^2}.$$

Ako se uvede konstanta a ($C^2 = 1/2 a$) jednačina (20) se može napisati u obliku

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{2a-y}{y}}$$

pa se razdvajanjem promenljivih svodi dalje na relaciju

$$(21) \quad dx = \sqrt{\frac{y}{2a-y}} dy.$$

Kad se uvede smena

$$(22) \quad y = a(1 - \cos \varphi),$$

dobije se da je $dx = 2a \sin^2 \frac{\varphi}{2} d\varphi = a(1 - \cos \varphi) d\varphi$, odakle se dalje integriranjem dobiva relacija za x

$$(23) \quad x = a(\varphi - \sin \varphi).$$

Relacije (22) i (23) predstavljaju upravo parametarske jednačine cikloide u vertikalnoj ravni, čime je dokazana osobina brahistohronosti za cikloidno klatno. Pri tome razlika u obliku jednačine (23) od prve parametarske jednačine cikloide (1) navedene u početku nije suštinske prirode već ukazuje samo na drugi položaj iste cikloide prema koordinatnom sistemu.

2.11.3.2. Matematičko klatno

Kretanje teške tačke po vertikalnoj nepokretnoj kružnoj liniji bez trenja zove se matematičko klatno (sl. 92).

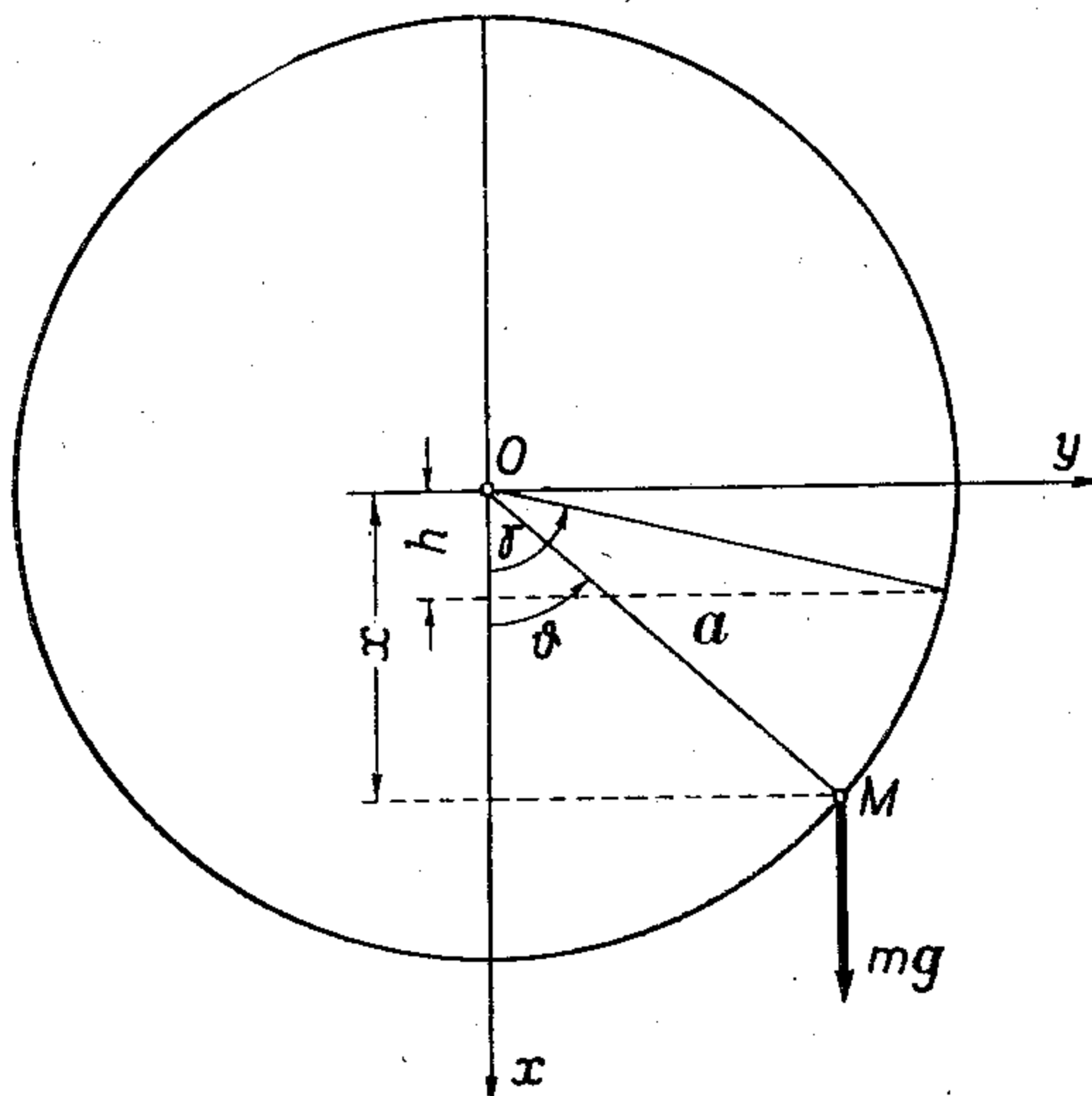
Ako se centar kruga izabere za početak Dekartovog pravouglog koordinatnog sistema čija je x -osa orijentisana vertikalno naniže, jednačine veza su

$$(1) \quad \begin{aligned} f_1 &\equiv x^2 + y^2 - a^2 = 0, \\ f_2 &\equiv z = 0, \end{aligned}$$

gde je \bar{a} poluprečnik kruga. Mesto Dekartovih koordinata zgodno je uvesti cilindarske koordinate tako da su ρ i ϑ polarne koordinate u ravni kruga. Jednačine veza dobivaju tada jednostavan oblik

$$(2) \quad f_1 \equiv \rho - a = 0, \quad f_2 \equiv z = 0.$$

Prema tome, postoji samo jedna nezavisna promenljiva koordinata — ugao ϑ i to je nezavisna koordinata tačke koja se kreće po krugu. Ako se dužina luka kruga meri od tačke preseka kruga sa x -osom, onda je $s = a \vartheta$.



Slika 92

Pošto je trajektorija poznata kretanje će biti određeno zakonom puta, koji se može izračunati iz prirodne jednačine u odnosu na tangentu (2.11.1—24)

$$(3) \quad m \frac{dv}{dt} = F_t = \mathbf{F} \cdot \mathbf{t}.$$

Brzina tačke na krugu je $v = \dot{s} = a \dot{\vartheta}$. Vektor \mathbf{t} tangente se može odrediti pomoću obrasca $\mathbf{t} = d\mathbf{r}/ds$, gde je $\mathbf{r} = a(\cos \vartheta \mathbf{i} + \sin \vartheta \mathbf{j})$ vektor položaja tačke na krugu, tako da je $\mathbf{t} = -\sin \vartheta \mathbf{i} + \cos \vartheta \mathbf{j}$. Projekcija sile $\mathbf{F} = -mg \mathbf{i}$ na pravac tangente je stoga

$$F_t = -mga \sin \vartheta,$$

pa se diferencijalna jednačina kretanja (3) svodi na oblik

$$(4) \quad a \ddot{\vartheta} = -g \sin \vartheta.$$

Zbog nepokretnosti veze može se odmah napisati jedan prvi integral diferencijalne jednačine kretanja — integral energije,

$$\frac{mv^2}{2} - U = mh = \text{const.}$$

Funkcija sile je $U = mgx = mga \cos \vartheta$. Ako su početni uslovi $v_0 = a \dot{\vartheta}_0 \neq 0$, $\vartheta \neq 0$ u trenutku $t_0 = 0$, iz integrala energije se dobiva

$$(5) \quad v^2 = 2gx + 2h,$$

gde je $x = a \cos \vartheta$, a h je konstanta energije,

$$(6) \quad h = \frac{v_0^2}{2} - gx_0 = \frac{v_0^2}{2} - ag \cos \vartheta_0;$$

x_0 je početna visina matematičkog klatna.

Ako se relacija (5) napiše u obliku

$$(7) \quad v^2 = a^2 \dot{\vartheta}^2 = 2ag \left(\cos \vartheta + \frac{h}{ag} \right),$$

vidi se da će materijalna tačka moći da se kreće samo po onom delu kružnog luka na kome je desna strana relacije (7) pozitivna ili nula,

$$(8) \quad f(\vartheta) = \cos \vartheta + \frac{h}{ag} \geq 0.$$

Ovde se mogu razlikovati tri slučaja:

1) Funkcija $f(\vartheta)$ ima nule prvog reda. To znači da postoje vrednosti ϑ^* za koje je $f(\vartheta^*) = 0$, ali $f'(\vartheta^*) \neq 0$. Kako je $f'(\vartheta) = -\sin \vartheta$, to je prema (4)

$$f'(\vartheta) = \frac{a \ddot{\vartheta}}{g},$$

pa u položaju ϑ^* materijalna tačka ima brzinu nula, zaustavlja se, ali na nju deluje tangenta sila $mg \cdot f'(\vartheta^*) \neq 0$ te stoga tačka nastavlja da se kreće. Uslovi za takvo kretanje su

$$(9) \quad \begin{aligned} \cos \vartheta^* &= -\frac{h}{ag}; \\ \sin \vartheta^* &= \sqrt{1 - (h/ag)^2} \neq 0, \end{aligned}$$

odakle proističe uslov da su nule funkcije $f(\vartheta)$ prvoga reda, kad je

$$(10) \quad \left| \frac{h}{ag} \right| < 1.$$

Iz prve relacije (9) se vidi da postoje dva položaja u kojima se tačka zaustavlja

$$(11) \quad \vartheta_1^* = -\arccos \left(\frac{h}{ag} \right) \quad \text{i} \quad \vartheta_2^* = \arccos \left(\frac{h}{ag} \right);$$

ove dve nule funkcije $f(\vartheta)$ su simetrične u odnosu na $\vartheta = 0$ i $\vartheta = \pi$. Kako je $f(0) = 1 + h/ga$ i $|h/ga| < 1$, znači $f(0) > 0$ i matematičko klatno se kreće na delu kružnog luka $(\vartheta_1^*, \vartheta_2^*)$ koji sadrži tačku $\vartheta = 0$. Kako je prema (9) i (5)

$$\cos \vartheta^* = -\frac{h}{ag} = \cos \vartheta_0 - \frac{v_0^2}{2ag},$$

i kao je $v_0^2/2 ag > 0$, biće:

$$\cos \vartheta_0 > \cos \vartheta^*,$$

odakle proističe $|\vartheta_0| < |\vartheta_0^*|$ pa se u intervalu $(\vartheta_1^*, \vartheta_2^*)$ nalazi i početni položaj ϑ_0 .

Ovakvo kretanje matematičkog klatna se naziva *oscilatorno*, jer pokretna tačka osciluje između položaja koji odgovaraju nulama ϑ_1^* i ϑ_2^* funkcije $f(\vartheta)$.

2) Funkcija $f(\vartheta)$ ima nule drugog reda. To znači da je istovremeno $f(\vartheta^*) = 0$ i $f'(\vartheta^*) = 0$ za iste vrednosti promenljive $\vartheta = \vartheta^*$, odnosno

$$(12) \quad \cos \vartheta^* = -\frac{h}{ag}; \quad \sin \vartheta^* = \sqrt{1 - \left(\frac{h}{ag}\right)^2} = 0,$$

pa je uslov

$$(13) \quad \left| \frac{h}{ag} \right| = 1.$$

Nule su $\vartheta^* = n\pi$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$. Kad materijalna tačka pođe iz nekog položaja ϑ_0 sa početnom brzinom v_0 u tački $\vartheta = 0$ je $f(0) = 1 + \frac{h}{ag} =$

$= 1 + \frac{v_0^2}{2ag} - \cos \vartheta_0$ pa $\vartheta = 0$ nije zajednička nula funkcija $f(\vartheta)$ i $f'(\vartheta)$ sem

u slučaju $v_0 = 0$ i $\vartheta_0 = 0$, ali u tom slučaju se materijalna tačka uopšte ne kreće. U tački $\vartheta^* = \pi$ biće oba uslova ispunjena ako prema (6) i (13) početna brzina ima vrednost određenu relacijom $v_0^2 = 2ag(1 + \cos \vartheta_0)$. Materijalna tačka, dakle, dolazi u položaj $\vartheta = \pi$ i tu se zaustavlja, a kako u tom slučaju na nju ne dejstvuje nikakva sila u pravcu tangente, tačka ostaje u stanju mira. Ovakvo kretanje matematičkog klatna se zove *asimptotsko*.

3) Funkcija $f(\vartheta)$ nema realne nule. Uslov za to prema (8) je

$$\cos \vartheta + \frac{h}{ag} > 0$$

odn.

$$(14) \quad \left| \frac{h}{ag} \right| > 1.$$

Pošto je stalno za vreme kretanja $f(\vartheta) = v^2/2 ag > 0$, materijalna tačka se uopšte ne zaustavlja, već stalno nastavlja da se kreće. Takvo kretanje se naziva *progresivno*.

1) *Oscilatorno kretanje matematičkog klatna*. — Integral energije (5) je prvi integral diferencijalne jednačine kretanja (4); napišimo ga u obliku

$$(15) \quad v^2 = 2ag \left(\cos \vartheta + \frac{h}{ag} \right).$$

Kako je za oscilatorno kretanje $\left| \frac{h}{ag} \right| < 1$, to se može uvesti smena

$$(16) \quad \frac{h}{ag} = -\cos \gamma,$$

gde je $0 < \gamma < \pi$, a γ je *amplitudni ugao*. Tako se za integral energije dobiva oblik

$$(17) \quad \sqrt{\frac{a}{g}} \frac{d\vartheta}{dt} = \sqrt{2(\cos \vartheta - \cos \gamma)}.$$

Ako se za $\cos \vartheta$ i $\cos \gamma$ iskoristi obrazac $\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2}$, jednačina (17) postaje

$$(18) \quad \sqrt{\frac{a}{g}} \frac{d\vartheta}{dt} = \sqrt{\sin^2 \frac{\gamma}{2} - \sin^2 \frac{\vartheta}{2}}.$$

Smenom $\sin \frac{\vartheta}{2} = u \sin \frac{\gamma}{2}$, gde je u nova promenljiva, dobiva se za (18)

$$(19) \quad \sqrt{\frac{g}{a}} dt = \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2 u^2)}},$$

gde je stavljeno $k^2 = \sin^2 \frac{\gamma}{2} < 1$. Ako se za početne uslove uzmu vrednosti $t_0 = 0$, $\vartheta_0 = 0$ biće i $u_0 = 0$ pa se iz (19) dobiva

$$(20) \quad \sqrt{\frac{g}{a}} t = \int_0^u \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2 u^2)}}.$$

Na desnoj strani ove relacije nalazi se normalni eliptički integral prve vrste (2.10.3.1—14, odn. 15) pa se stoga inverzijom iz (20) dobiva

$$(21) \quad u = \operatorname{sn} \left(\sqrt{\frac{g}{a}} t \right),$$

odakle se može odrediti ugao kao funkcija vremena

$$\sin \frac{\vartheta}{2} = \sin \frac{\gamma}{2} \operatorname{sn} \left(\sqrt{\frac{g}{a}} t \right).$$

Prema (2.10.3.1) eliptička funkcija $\operatorname{sn}(t\sqrt{g/a})$ je periodna i njen period je

$$(22) \quad T = 4 \sqrt{\frac{a}{g}} K = 4 \sqrt{\frac{a}{g}} \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2 u^2)}}.$$

Vrednosti K za razne vrednosti parametra k nalaze se tabulisane u tablicama eliptičkih integrala, najčešće, međutim, se kao argument uzima amplitudni ugao γ , a $k = \sin \frac{\gamma}{2}$.

Unošenjem vrednosti (2.10.3.1—29) za potpuni eliptički integral K u obrazac (22) za period oscilacija matematičkog klatna, dobiće se za period beskonačni red

$$(23) \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{a}{g}} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2n} \right]^2 k^{2n} \right).$$

Periodno oscilatorno kretanje matematičkog klatna nije ni izohrono ni ta-
utohrono, jer mu period zavisi od početnih uslova preko k .

Za ne velike vrednosti amplitudnog ugla sme se pisati $\sin \frac{\gamma}{2} \approx \frac{\gamma}{2}$, pa se može stoga zadržati na prva dva člana reda (23), čime se za period oscilovanja dobiva približna formula

$$(24) \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{a}{g}} \left(1 + \frac{1}{16} \gamma^2\right).$$

Za sasvim male vrednosti ugla γ može i $\gamma^2/16$ da se zanemari u poređenju sa 1 pa se za period dobiva

$$(25) \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{a}{g}}.$$

Period određen ovim obrascem odgovara *malim oscilacijama matematičkog klatna*. Zaista, ako se u diferencijalnoj jednačini kretanja (4) pretpostavi da su oscilacije male, tj. da je ugao ϑ , za vreme kretanja materijalne tačke uvek mali, sme se staviti $\sin \vartheta \approx \vartheta$, čime se diferencijalna jednačina kretanja uprošćuje i svodi na oblik

$$(26) \quad \ddot{\vartheta} + \frac{g}{a} \vartheta = 0,$$

a to je upravo diferencijalna jednačina kretanja sa periodom određenim formulom (25), tj. diferencijalna jednačina harmonijske oscilacije (2.5.2.1—20).

2) *Asimptotsko kretanje matematičkog klatna*. — Kad početni uslovi zadovoljavaju uslov (13) izraz za integral energije (7) dobiva oblik

$$(27) \quad a \dot{\vartheta}^2 = 2g (\cos \vartheta + 1)$$

ili

$$(28) \quad a \dot{\vartheta}^2 = 2g (\cos \vartheta - 1),$$

prema tome da li je $h = ag$ ili $h = -ag$. U prvom slučaju se iz (6) dobiva

$$v_0^2 = 2ag (\cos \vartheta_0 + 1),$$

a u drugom

$$v_0^2 = 2ag (\cos \vartheta_0 - 1),$$

ali kako je $|\cos \vartheta_0| \leq 1$ a $v_0^2 \geq 0$ to drugi slučaj može da nastupi samo ako je $v_0 = 0$, a tada je $\vartheta_0 = 0$ ili π pa nema kretanja uopšte. Prema tome u netrivialnom slučaju kretanje je određeno diferencijalnom jednačinom (27). Kad se stavi

$1 + \cos \vartheta = 2 \cos^2 \frac{\vartheta}{2}$ ta se jednačina svodi na

$$(29) \quad \sqrt{\frac{g}{a}} dt = \frac{d\frac{\vartheta}{2}}{\cos \frac{\vartheta}{2}}.$$

Integraljenjem od $t_0 = 0$, $\vartheta_0 \neq 0$ do nekog trenutka t kome odgovara ugao ϑ dobiće se iz (29)

$$\sqrt{\frac{g}{a}} t = \ln \frac{\operatorname{tg} \left(\frac{\pi - \vartheta}{4} \right)}{\operatorname{tg} \left(\frac{\pi - \vartheta_0}{4} \right)},$$

odn.

$$(30) \quad \operatorname{tg} \left(\frac{\pi - \vartheta}{4} \right) = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi - \vartheta_0}{4} \right) e^{-t \sqrt{g/a}}$$

Kad $t \rightarrow \infty$ vidi se odavde da $\operatorname{tg} \left(\frac{\pi - \vartheta}{4} \right) \rightarrow 0$ i $\vartheta \rightarrow \pi$. Dakle materijalna tačka će se asimptotski približavati najvišem položaju na krugu.

3) **Progresivno kretanje matematičkog klatna.** — Ovo kretanje nastupa kad početni uslovi zadovoljavaju uslov (14), koji se prema (6) može napisati u obliku

$$(31) \quad \left| \frac{v_0^2}{2ag} - \cos \vartheta_0 \right| > 1.$$

Ovde su moguća dva slučaja

$$\frac{v_0^2}{2ag} - \cos \vartheta_0 > 1$$

i

$$\frac{v_0^2}{2ag} - \cos \vartheta_0 < -1.$$

U prvom slučaju je

$$\frac{v_0^2}{2ag} > 1 + \cos \vartheta_0,$$

a u drugom

$$\frac{v_0^2}{2ag} < -1 + \cos \vartheta_0 \leq 0.$$

Odavde se vidi da je drugi slučaj isključen, jer ne može biti $v_0^2 < 0$. Prema tome, progresivno kretanje će nastupiti kad je $h > ag$. U tom slučaju se integral energije može napisati u obliku

$$a \dot{\vartheta}^2 = 2g \left(\cos \vartheta + \frac{h}{ag} \right) = 2g \left(1 + \frac{h}{ag} - 2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \right),$$

pa ako se uvede oznaka

$$k_1^2 = \frac{2ag}{h+ag} < 1,$$

dobiće se

$$(32) \quad k_1 \sqrt{\frac{a}{g}} \frac{\dot{\vartheta}}{2} = \sqrt{1 - k_1^2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2}}.$$

Razdvajanjem promenljivih odavde sledi relacija

$$(33) \quad \frac{1}{k_1} \sqrt{\frac{g}{a}} dt = \frac{d \frac{\vartheta}{2}}{\sqrt{1 - k_1^2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2}}}.$$

Integraljenjem od $t_0 = 0$, $\vartheta_0 = 0$ do t , ϑ dobiće se

$$\frac{1}{k_1} \sqrt{\frac{g}{a}} t = \int_0^{\vartheta} \frac{d\frac{\vartheta}{2}}{\sqrt{1 - k_1^2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2}}}$$

Sa desne strane javlja se normalni eliptički integral prve vrste (2.10.3.1—15) pa se inverzijom dobiva konačna jednačina kretanja u obliku

$$(34) \quad \frac{\vartheta}{2} = \text{am} \left(\frac{1}{k_1} \sqrt{\frac{g}{a}} t \right).$$

Ako se ovde uvede nova promenljiva $u = \sin \frac{\vartheta}{2}$, dobiva se

$$(35) \quad u = \text{sn} \left(\frac{1}{k_1} \sqrt{\frac{g}{a}} t \right).$$

Dakle i progresivno kretanje matematičkog klatna je periodno sa periodom

$$(36) \quad T = 4 k_1 \sqrt{\frac{a}{g}} K.$$

Prema (2.10.3.1—29) period je

$$T = 2 \pi k_1 \sqrt{\frac{a}{g}} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2n} \right]^2 k_1^2 \right).$$

Periodno kretanje matematičkog klatna nije oscilatorno, jer je prema (32)

$$\dot{\vartheta} = \pm \frac{2}{k_1} \sqrt{\frac{g}{a}} \sqrt{1 - k_1^2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2}},$$

a znak ovde zavisi od početne vrednosti ugaone brzine i pri kretanju se ne menja, jer je potkorena veličina stalno pozitivna.

Normalna reakcija matematičkog klatna dobiće se najlakše iz one prirodne jednačine koja odgovara glavnoj normalni u kojoj se nalazi čitava normalna reakcija R . Za krivu u vertikalnoj ravni celokupna reakcija, kad se i vektor sile nalazi u toj ravni, u toj je ravni tako da je za njeno određivanje dovoljna jednačina

$$(37) \quad \frac{mv^2}{a} = F_n + R.$$

Jedinični vektor normale na krug je $\mathbf{n} = -\mathbf{r}/r = -\mathbf{r}/a$. Za silu $\mathbf{F} = mg \mathbf{i}$ biće stoga

$$(38) \quad F_n = -mg \frac{x}{a} = -mg \cos \vartheta.$$

Iz integrala energije (7) se nalazi

$$(39) \quad mv^2 = 2mag \left(\cos \vartheta + \frac{h}{ag} \right).$$

Unošenjem ove vrednosti za kvadrat brzine, kao i vrednosti (38) za projekciju sile na pravac normale u (39), dobiva se najzad za veličinu reakcije veze obrazac

$$(40) \quad R = mg \left(3 \cos \vartheta + \frac{2h}{a} \right).$$

2.12. Moguća pomeranja, virtualna pomeranja i kriterijum idealnosti veze

Iz uslova za brzinu pri kretanju tačke po površi (2.10.1—7) i pri kretanju tačke po krivoj liniji (2.11—6) proističe da elementarno pomeranje $d\mathbf{r}$ neslobodne materijalne tačke ne može biti proizvoljno. Kako je $\mathbf{v} dt = d\mathbf{r}$, množenjem uslova za brzinu sa dt dobiće se uslovi koje mora da zadovoljava moguća elementarno pomeranje. Taj uslov je za kretanje po površi

$$(1) \quad \text{grad } f \cdot d\mathbf{r} + \frac{\partial f}{\partial t} dt = 0,$$

i za kretanje po krivoj liniji

$$(2) \quad \begin{aligned} \text{grad } f_1 \cdot d\mathbf{r} + \frac{\partial f_1}{\partial t} dt &= 0, \\ \text{grad } f_2 \cdot d\mathbf{r} + \frac{\partial f_2}{\partial t} dt &= 0. \end{aligned}$$

Razlika dva moguća elementarna pomeranja $d\mathbf{r}_1$ i $d\mathbf{r}_2$, tj.

$$(3) \quad \delta \mathbf{r} = d\mathbf{r}_1 - d\mathbf{r}_2$$

zove se *virtualno pomeranje* ili *moguća varijacija pomeranja*.

Pri kretanju po površi dva moguća pomeranja zadovoljavaju uslov (1)

$$\begin{aligned} \text{grad } f \cdot d\mathbf{r}_1 + \frac{\partial f}{\partial t} dt &= 0, \\ \text{grad } f \cdot d\mathbf{r}_2 + \frac{\partial f}{\partial t} dt &= 0, \end{aligned}$$

pa se oduzimanjem dobiva da virtualno pomeranje na površi mora zadovoljavati uslov

$$(4) \quad \text{grad } f \cdot \delta \mathbf{r} = 0$$

bez obzira da li je veza skleronomna ili reonomna.

Takođe i pri kretanju po nekoj datoj krivoj liniji svako od dva moguća pomeranja mora zadovoljavati uslove (2)

$$\text{grad } f_\alpha \cdot d\mathbf{r}_1 + \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} dt = 0; \quad \text{grad } f_\alpha \cdot d\mathbf{r}_2 + \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} dt = 0.$$

Oduzimanjem se dobivaju dva uslova koje mora da zadovoljava moguća varijacija

$$(5) \quad \text{grad } f_\alpha \cdot \delta \mathbf{r} = 0,$$

nezavisno da li je kriva pokretna ili nepokretna.

Ako se jednačina (4) pomnoži množiocem veze λ dobiće se

$$(6) \quad \lambda \operatorname{grad} f \cdot \delta \mathbf{r} = \mathbf{R} \cdot \delta \mathbf{r} = 0.$$

Slično, ako se jednačine (5) pomnože redom množiocima veza λ_α i saberu po α dobiće se

$$(\lambda_1 \operatorname{grad} f_1 + \lambda_2 \operatorname{grad} f_2) \cdot \delta \mathbf{r} = 0,$$

tj.

$$(7) \quad \mathbf{R} \cdot \delta \mathbf{r} = 0.$$

Relacije (6) i (7) tvrde isto: *Virtualni rad reakcije idealne veze jednak je nuli.*

Obrnuto, neka sila \mathbf{R} zadovoljava uslov (7) a virtualno pomeranje uslov (4), tj.

$$\mathbf{R} \cdot \delta \mathbf{r} = 0$$

$$\operatorname{grad} f \cdot \delta \mathbf{r} = 0.$$

Iz druge od ovih relacija proističe da je $\delta \mathbf{r}$ proizvoljan vektor upravan na $\operatorname{grad} f$. Svi mogući takvi vektori $\delta \mathbf{r}$ obrazuju ravan upravnu na $\operatorname{grad} f$. Iz prve relacije proističe da je \mathbf{R} vektor upravan na ma koje $\delta \mathbf{r}$, a to znači da je upravan na ravan u kojoj se nalaze svi mogući vektori $\delta \mathbf{r}$, dakle, \mathbf{R} mora biti kolinearno sa $\operatorname{grad} f$

$$(8) \quad \mathbf{R} = \lambda \operatorname{grad} f.$$

U slučaju dve veze uslovi (5) i (7) daju tri relacije

$$\mathbf{R} \cdot \delta \mathbf{r} = 0,$$

$$\operatorname{grad} f_1 \cdot \delta \mathbf{r} = 0, \quad \operatorname{grad} f_2 \cdot \delta \mathbf{r} = 0.$$

Iz poslednje dve od ovih relacija proističe da $\delta \mathbf{r}$ mora biti upravno na $\operatorname{grad} f_1$ i $\operatorname{grad} f_2$, tj. da se mora nalaziti istovremeno u tangentnim ravnima dvaju površi $f_1 = 0$ i $f_2 = 0$, a to znači da se mora nalaziti u njihovom preseku. Iz prve relacije sledi da \mathbf{R} mora biti upravno na $\delta \mathbf{r}$, što znači da se nalazi u ravni upravnoj na $\delta \mathbf{r}$. Ta je ravan određena vektorima $\operatorname{grad} f_1$ i $\operatorname{grad} f_2$ pa je \mathbf{R} stoga neki vektor oblika

$$(9) \quad \mathbf{R} = \lambda_1 \operatorname{grad} f_1 + \lambda_2 \operatorname{grad} f_2.$$

Prema tome ako se (7) usvoji kao definicija idealne veze, kao posledica se dobivaju oblici (8) i (9) sile reakcije idealne veze. Stoga se (7) uzima i kao kriterijum za utvrđivanje idealnosti veze.

Primeri i zadaci

1. Teška materijalna tačka kreće se po horizontalnom nepomičnom glatkom krugu poluprečnika a . Početna brzina tačke je v_0 . Kretanju se suprotstavlja otpor vazduha proporcionalan kvadratu brzine. Naći konačne jednačine kretanja i reakciju veze.

Prirodne jednačine za kretanje materijalne tačke u odnosu na tangentu i normalu su

$$m \frac{dv}{dt} = -m k^2 v^2, \quad \frac{mv^2}{a} = R_1.$$

Ako se uvede polarni koordinatni sistem u ravni kruga, ugao ϑ će biti nezavisna koordinata (sl. 93). Tada je $\frac{dv}{dt} = \frac{1}{2a} \frac{dv^2}{d\vartheta}$ pa prva prirodna jednačina glasi

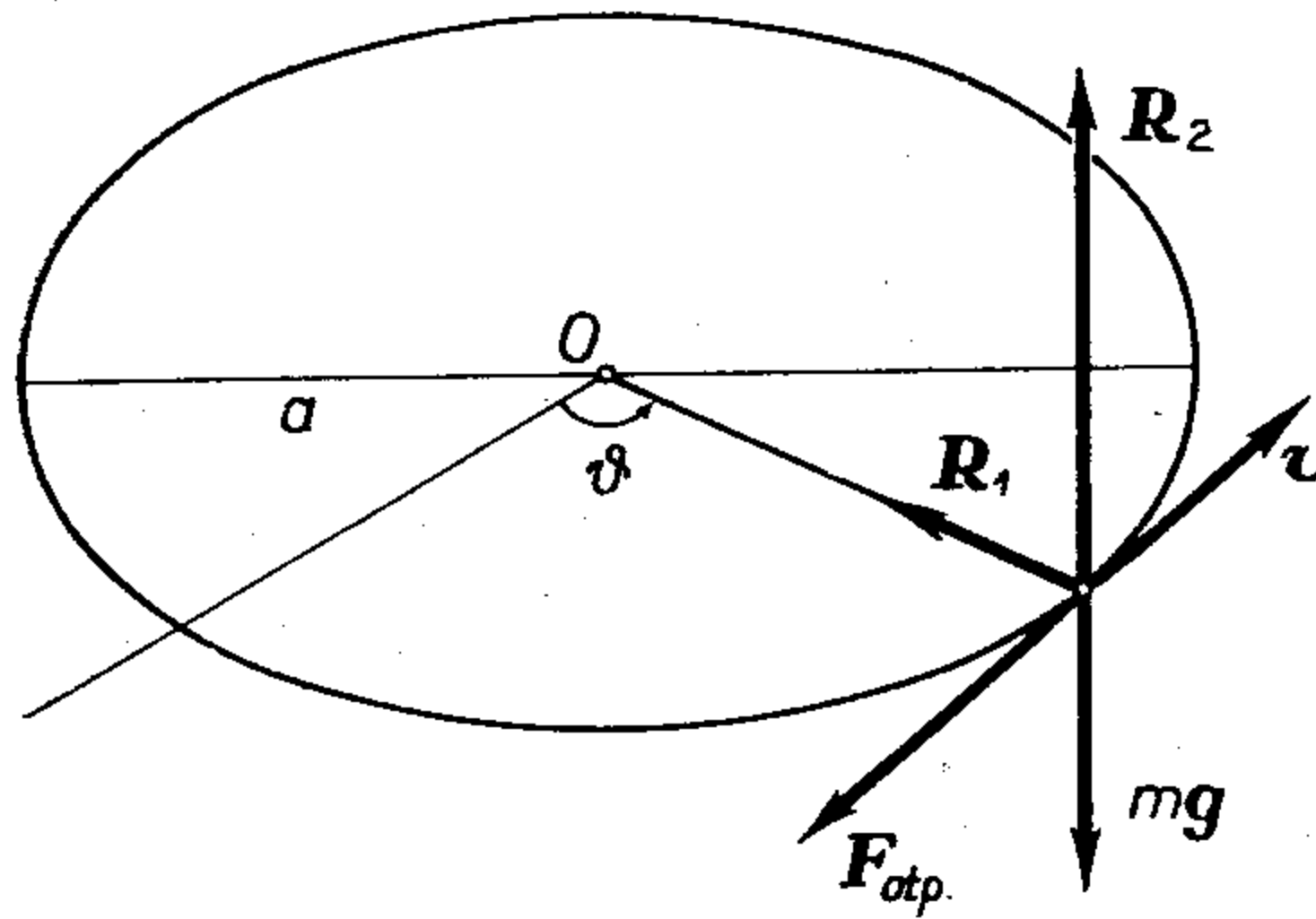
$$\frac{dv^2}{v^2} + 2k^2 a d\vartheta = 0,$$

a njen je integral

$$v^2 = v_0^2 e^{-2k^2 a \vartheta}.$$

Kako je

$$v = \frac{a d\vartheta}{dt} = v_0 e^{-k^2 a \vartheta},$$



Slika 93

vreme će biti određeno izrazom

$$t = \frac{a}{v_0} \int_0^{\vartheta} e^{k^2 a \vartheta} d\vartheta = \frac{1}{v_0 k^2} (e^{k^2 a \vartheta} - 1),$$

odakle se inverzijom dobiva konačna jednačina kretanja:

$$\vartheta = \frac{1}{k^2 a} \ln (1 + v_0 k^2 t).$$

Iz druge prirodne jednačine dobiva se reakcija u ravni kruga,

$$R_1 = m \frac{v_0^2}{a} e^{-2ka\vartheta}.$$

Međutim, usled delovanja sile teže na materijalnu tačku postoji i reakcija upravno na ravan kruga. Upravan na ravan kruga je konstantni vektor \mathbf{b} binormale, iz prirodne jednačine za binormalu imamo

$$R_2 = -F_b = -mg,$$

pa je ukupna reakcija veze

$$R = \sqrt{R_1^2 + R_2^2} = \sqrt{R_1^2 + (mg)^2}.$$

2. Materijalna tačka se kreće po krugu čiji poluprečnik r raste proporcionalno vremenu, $r = at$. Na tačku dejstvuje sila konstantnog intenziteta $F = mk^2$ koja ima pravac tangente na krug. Odrediti konačne jednačine kretanja i trajektoriju, ako je tačka u početnom trenutku bila u miru.

Ako se u ravni kruga izabere polarni koordinatni sistem, kvadrat brzine tačke je

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\vartheta}^2 = a^2 (1 + t^2 \dot{\vartheta}^2).$$

Sila F vrši rad pri pomeranju tačke upravno na pravac potega od centra kruga tako da je $dA = F \cdot r d\vartheta$, pa je generalisana sila

$$Q_r = 0, \quad Q_{\vartheta} = Fr = mk^2 at.$$

S obzirom na izraz za kvadrat brzine kinetička energija tačke je

$$T = \frac{m}{2} a^2 (1 + t^2 \dot{\vartheta}^2),$$

pa Lagranževa jednačina glasi

$$ma^2 \frac{d}{dt} (t^2 \dot{\vartheta}) = mk^2 at.$$

Razdvajanjem promenljivih dobiva se prvi integral

$$t^2 \dot{\vartheta} = \frac{k^2}{2a} (t^2 - t_0^2),$$

odakle se ponovnim razdvajanjem promenljivih dobiva konačna jednačina kretanja

$$\vartheta = \frac{k^2}{2a} \left[t - t_0 + t_0^2 \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t_0} \right) \right].$$

Eliminacijom vremena iz konačne jednačine kretanja i zakona promene poluprečnika kruga dobiće se jednačina trajektorije

$$\vartheta = \frac{k^2}{2a} \left[\frac{r}{a} - t_0 + t_0^2 \left(\frac{a}{r} - \frac{1}{t_0} \right) \right].$$

3. Teškoj tački jedinične mase, koja se kreće po krivoj $f(x, y) = 0$ i prolazi kroz koordinatni početak, saopštena je početna brzina v_0 vertikalno naniže. Ako je y -osa orijentisana vertikalno naviše odrediti krivu $f(x, y) = 0$ tako da za celo vreme kretanja tačke brzina u pravcu y -ose bude konstantna. Veza je idealna.

Neka je za celo vreme kretanja $\dot{y} = C = \text{const}$. Uslov za brzinu vezane tačke koja se kreće u vertikalnoj ravni je

$$(1) \quad \frac{\partial f}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial f}{\partial y} \dot{y} = 0. \quad (\dot{y} = C)$$

Sem toga za kretanje po nepokretnoj krivoj postoji integral energije

$$(2) \quad \dot{x}^2 + C^2 = v_0^2 - 2gy.$$

Unošenjem vrednosti za \dot{x} iz jednačine (2) u jednačinu (1) dobiće se parcijalna diferencijalna jednačina sa nepoznatom funkcijom f

$$(v_0^2 - C^2 - 2gy)^{1/2} \frac{\partial f}{\partial x} + C \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

Ova je jednačina linearna i njoj odgovara obična diferencijalna jednačina

$$\frac{dx}{\sqrt{v_0^2 - C^2 - 2gy}} = \frac{dy}{C}.$$

Integral ove jednačine, pošto kriva $f(x, y) = 0$ prolazi kroz koordinatni početak, biće

$$Cx = -\frac{1}{3g} [(v_0^2 - C^2 - 2gy)^{3/2} - (v_0^2 - C^2)^{3/2}],$$

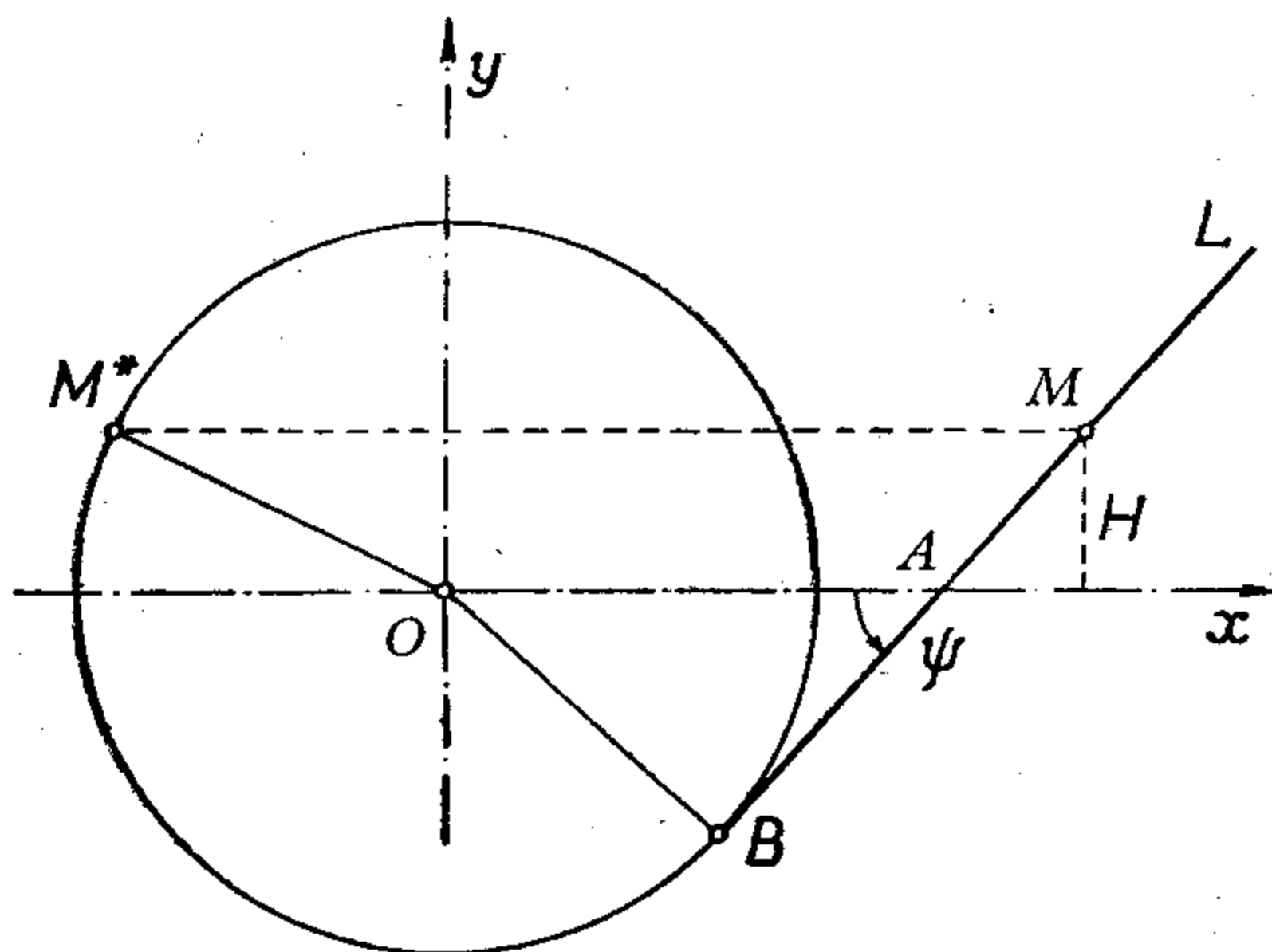
pa je

$$(a^{3/2} - 3gcx)^2 - (a - 2gy)^3 = 0, \quad (a \equiv v_0^2 - C^2).$$

Zbog $v_0 = \dot{y}_0$ i $\dot{y} = \text{const.} = C$ biće $a = 0$ pa je definitivno

$$f(x, y) \equiv 9c^2x^2 + 8gy^3 = 0.$$

4. U vertikalnoj ravni dat je krug poluprečnika a sa centrom u O i glatka prava L koja dodiruje krug u nekoj tački B , a čiji se presek A sa horizontalnom pravom kroz centar kruga nalazi na rastojanju S od centra O . Prava L je postavljena tako da se tačka dodira B nalazi ispod nivoa centra kruga. Na visini H iznad horizontalne prave kroz O , a niz pravu L puštena je bez početne brzine teška materijalna tačka M mase m . Kad tačka dođe do kruga, nastavlja dalje po njemu da se kreće (sl. 94). 1) Naći do koje će najveće visine tačka na krugu da se popne



Slika 94

i za koje vreme t_1 . 2) Pod dejstvom sile teže tačka M će sa najveće visine do koje se popela na krugu početi da se kreće kao matematičko klatno. Naći period oscilacija i proučiti kretanje kad $H \rightarrow a$.

1) Za ovo kretanje postoji integral energije

$$\frac{mv^2}{2} = mg(y_0 - y)$$

bez obzira da li se tačka M nalazi na pravoj L ili na krugu. Tačka će na krugu dospeti do najveće visine y_{max} i zaustaviti se kad bude $v = 0$, a tada mora biti

$y = H$. Za određivanje vremena potrebnog da tačka M dospe do tog položaja treba prvo izračunati vreme potrebno da tačka s ide niz pravu L do tačke B dotira sa krugom. Iz integrala energije za kretanje po pravoj L imamo

$$v^2 = \left(\frac{dL}{dt}\right)^2 = 2g(y_0 - y),$$

a kako je

$$-dL \sin \psi = dy, \quad \sin \psi = \frac{a}{s}, \quad y_B = -a \cos \psi = -\frac{a}{s} \sqrt{s^2 - a^2},$$

to je traženo vreme

$$t_1 = -\frac{s}{a\sqrt{2g}} \int_{y_0}^{y_B} \frac{dy}{\sqrt{y_0 - y}} = \frac{2s}{a\sqrt{2g}} \sqrt{y - y_0}.$$

2) Iz integrala energije nalazi se brzina koju tačka M ima u trenutku kad dospe do položaja B ,

$$v_B^2 = 2g \left(H + \frac{a}{s} \sqrt{s^2 - a^2} \right).$$

Ako se za kretanje po krugu uvedu polarne koordinate integral energije će biti

$$a^2 \dot{\vartheta}^2 = 2h + 2ag \cos \vartheta,$$

gde je konstanta h određena početnim uslovima za kretanje po krugu, pa je

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \sqrt{\frac{2g}{a}} \sqrt{\frac{h}{ag} + \cos \vartheta}.$$

Transformacijama određenim u odeljku o matematičkom klatnu (2.11.3.2) odavde se za vreme potrebno da se tačka popne do najvišeg položaja na krugu nalazi izraz

$$t_2 = \sqrt{\frac{a}{g}} \int_{\varphi_\beta}^{\varphi^*} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}},$$

u kome je k konstanta određena sa $\sin \frac{\vartheta}{2} = k \sin \varphi$, a φ je nova promenljiva

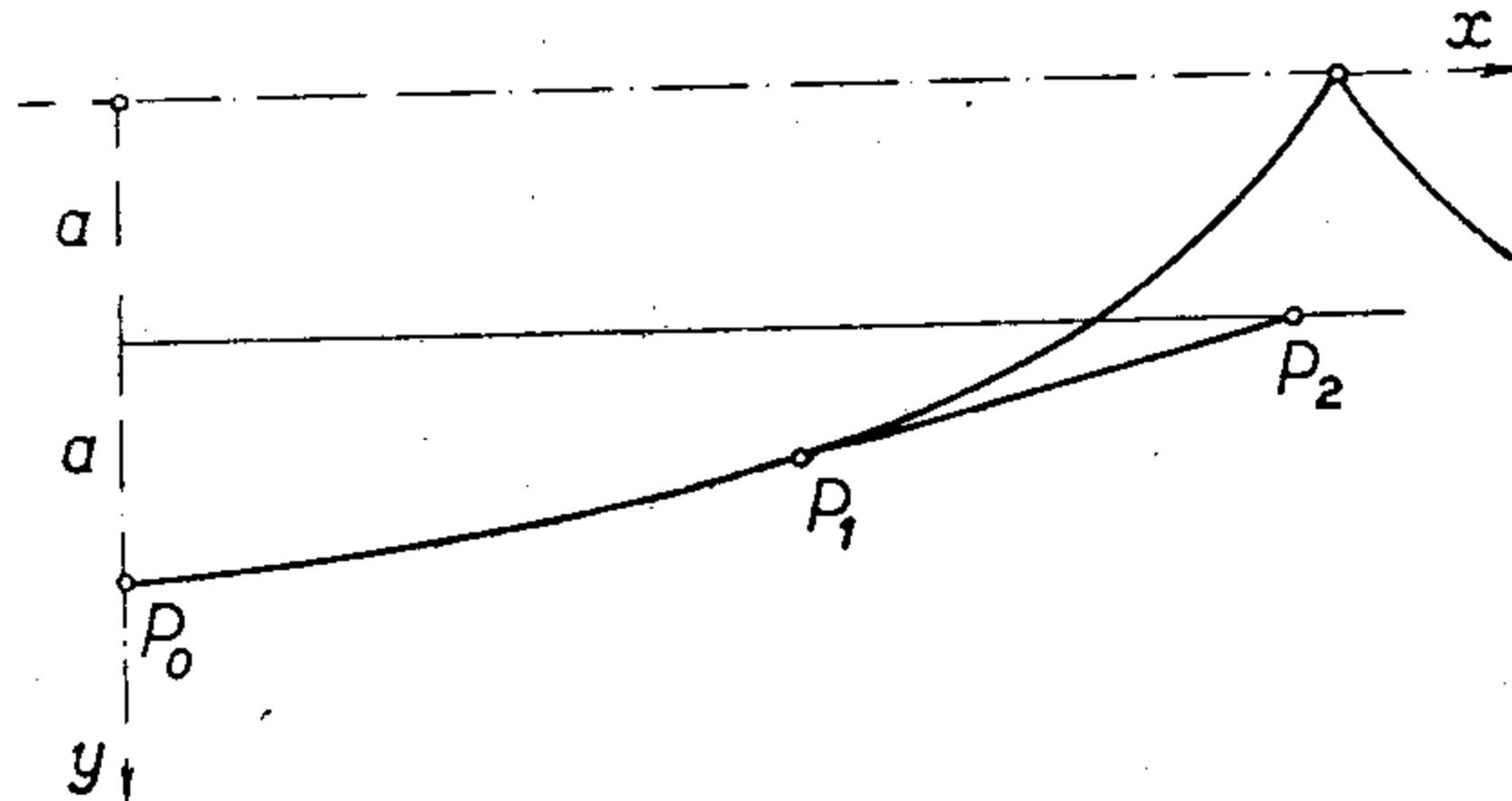
$$\left(k^2 = \frac{h + ag}{ag} < 1 \right).$$

Pošto je vreme t_2 dato eliptičkim integralom prve vrste, koji definiše ugao φ kao periodnu funkciju vremena, period kretanja će biti

$$T = 4 \sqrt{\frac{a}{g}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}.$$

5. Data je vertikalna cikloida sa horizontalnom osnovom (sl. 95). Poluprečnik kruga generatora je a . Tačka P_0 je najniža tačka cikloide. Dužina luka cikloide od te tačke do tačke P_1 iznosi $2a$, tj. $\widehat{P_0 P_1} = s_1 = 2a$. U tački P_1 povučena je

tangenta na cikloidu do tačke P_2 u ravni cikloide koja se nalazi na nivou centra kruga generatora. Teška materijalna tačka polazi bez početne brzine iz položaja P_2 i do P_1 se kreće po pravoj P_2P_1 sa stalnim otporom jednakim $\frac{2}{3}k$ veličine komponente sile teže koja deluje u pravcu kretanja. U tački P_1 materijalna tačka



Slika 95

prelazi na cikloidu po kojoj se dalje kreće bez otpora kao cikloidno klatno. Odrediti kretanje tačke po cikloidi, granični horizontalni nivo do koga se tačka penje i proučiti položaj tog nivoa kad opada sila otpora.

Ako se y -osa orijentiše vertikalno naniže, jednačina cikloide biće

$$x = a(\varphi + \sin \varphi); \quad y = a(1 + \cos \varphi).$$

Koordinate tačke P_0 su $(0, 2a)$. Iz izraza za luk cikloide (2.11.3.1—4)

$$s = 4a \sin \frac{\varphi}{2}$$

nalazi se da tačka P_1 ima nezavisnu koordinatu (tj. vrednost parametra) $\varphi = \frac{\pi}{3}$

tako da su koordinate te tačke

$$x_1 = a\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \quad y_1 = \frac{3}{2}a.$$

Tangenta na cikloidu u tački P_1 obrazuje sa x -osom ugao α ,

$$\operatorname{tg} \alpha = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{P_1} = \left[\left(\frac{dy}{d\varphi}\right) / \left(\frac{dx}{d\varphi}\right)\right]_{P_1} = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Koordinate tačke P_2 su

$$x_2 = a\left(\sqrt{3} + \frac{\pi}{3}\right), \quad y_2 = a,$$

pa je dužina l duži $\overline{P_1P_2}$:

$$l = [(y_2 - y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2]^{1/2} = a.$$

Sila koja deluje na posmatranu materijalnu tačku je rezultanta odgovarajućih komponente sile teže i sile otpora,

$$F = mg \sin \alpha - \frac{2}{3}k mg \sin \alpha, \quad (k > 0)$$

što s obzirom na vrednost ugla α daje

$$F = mg \left(\frac{1}{2} - \frac{k}{3} \right).$$

Kako je sila F konstantna i veza nepokretna, to se iz integrala energije nalazi brzina materijalne tačke kad ova dospe u položaj P_1 ,

$$v_1^2 = 2 \left(\frac{1}{2} - \frac{k}{3} \right) ag.$$

Odatle dalje tačka se kreće bez otpora po cikloidi. Ako se parametar φ uzme za nezavisnu koordinatu na cikloidi integral energije se može napisati u obliku

$$\frac{4 a^2 \cos^2 \frac{\varphi}{2}}{2} \dot{\varphi}^2 - \frac{\left(1 - \frac{2}{3} k\right) ag}{2} = ag (1 + \cos \varphi) - \frac{3}{2} ag.$$

Kad se luk s cikloide uvede kao nezavisna koordinata, integral energije se svodi na

$$\dot{s}^2 + \frac{g}{4a} s^2 - 4ag = K_*,$$

gde je $K_* = -2ag(1 + k/3)$. Ako se još radi kratkoće pisanja uvedu oznake

$$\frac{g}{4a} = p, \quad K_* + 4ag = 2ag \left(1 - \frac{k}{3}\right) = q,$$

kretanje po cikloidi biće određeno diferencijalnom jednačinom

$$\dot{s}^2 + ps^2 = q,$$

koja se integriše razdvajanjem promenljivih,

$$-\sqrt{p}t = \arcsin \left(\frac{s}{2a \sqrt{2 \left(1 - \frac{k}{3}\right)}} \right) - \arcsin \left(\frac{1}{\sqrt{2 \left(1 - \frac{k}{3}\right)}} \right),$$

ili eksplicitno po s

$$s = -2a \sqrt{1 - \frac{2k}{3}} \sin(\sqrt{p}t) + 2a \cos(\sqrt{p}t).$$

Period oscilovanja tačke na cikloidi će otuda biti

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{p}} = 4\pi \sqrt{\frac{a}{g}}.$$

Granični horizontalni nivo do koga tačka dospeva na svome putu je određen uslovom $v = 0$, što zamenom u diferencijalnoj jednačini kretanja dovodi do rezultata

$$s = \sqrt{\frac{2}{p}} = 2a \sqrt{2 \left(1 - \frac{k}{3}\right)},$$

pa je ordinata tog položaja

$$y = 2a \left[1 - \frac{s^2}{(4a)^2} \right] = a \left(1 + \frac{k}{3} \right).$$

Kad koeficijent otpora $k \rightarrow 0$ iz gornjeg izraza proističe da i $y \rightarrow a$, što je i trebalo očekivati jer u tom slučaju treba da bude postignut nivo početnog položaja iz koga je tačka počela da se spušta bez početne brzine.

6. Teška materijalna tačka kreće se bez trenja po nepokretnoj kružnoj glatkoj zavojnici

$$x = a \cos \varphi, \quad y = a \sin \varphi, \quad z = b \varphi,$$

(a i b su pozitivne konstante a z -osa je orijentisana vertikalno naviše). Za koje vreme će tačka preći put koji odgovara jednom zavoju, ako je početna brzina jednaka nuli i kolika je reakcija veze?

Prirodne diferencijalne jednačine kretanja su

$$m \dot{v} = m \ddot{s} = F_t, \quad \frac{mv^2}{\rho} = F_n + R_n, \quad 0 = F_b + R_b.$$

Iz izraza $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ dobiva se za element luka $ds = c d\varphi$, odnosno $s = c\varphi$, ako se stavi da je $s_0 = 0$ i $\varphi_0 = 0$, $c = \sqrt{a^2 + b^2}$. Jedinični vektor u pravcu tangente je

$$\mathbf{t} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \left(-\frac{a}{c} \sin \varphi, \quad \frac{a}{c} \cos \varphi, \quad \frac{b}{c} \right).$$

U pravcu normale je

$$\frac{\mathbf{n}}{\rho} = \frac{d^2 \mathbf{r}}{ds^2} = \left(-\frac{a}{c^2} \cos \varphi, \quad -\frac{a}{c^2} \sin \varphi, \quad 0 \right),$$

pa je vektor glavne normale

$$\mathbf{n} = (-\cos \varphi, \quad -\sin \varphi, \quad 0); \quad \frac{1}{\rho} = \frac{a}{c^2},$$

dok je binormala određena izrazom

$$\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n} = \left(\frac{b}{c} \sin \varphi, \quad -\frac{b}{c} \cos \varphi, \quad \frac{a}{c} \right).$$

Projekcije aktivne sile na ose prirodnog triedra su

$$F_t = -mg \frac{b}{c}, \quad F_n = 0, \quad F_b = -mg \frac{a}{c}.$$

Prva od prirodnih jednačina sad dobiva oblik

$$\ddot{s} = -\frac{b}{c} g,$$

odakle se integracijom za početne uslove $\dot{s}_0 = 0$, $s_0 = 0$ dobiva

$$s = -\frac{1}{2} \frac{bg}{c} t^2.$$

Materijalna tačka će preći jedan zavoj na spirali, kad se ugao φ smanji od 0 na -2π ; pređeni put je tada $s = -2\pi c$, a vreme potrebno da tačka pređe taj put je

$$t = \sqrt{-\frac{2cs}{bg}} = 2 \sqrt{\frac{\pi(a^2 + b^2)}{bg}}.$$

Iz druge i treće prirodne jednačine neposredno se dobivaju projekcije sile reakcije

$$R_n = \frac{mv^2}{\rho} = \frac{mav^2}{c^2}, \quad R_b = -F_b = mg \frac{a}{c}.$$

Iz integrala kinetičke energije $mv^2/2 = -mbg \varphi$ nalazi se da je

$$mv^2 = m \frac{b^2 g^2 t^2}{c^2},$$

što zamenom u izrazima za reakciju daje

$$R_n = \frac{g^2 ab^2 t^2}{(a^2 + b^2)^2}, \quad R_b = mg \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

tako da je sama sila reakcije

$$\mathbf{R} = \frac{mag}{a^2 + b^2} (-2z \mathbf{n} + \sqrt{a^2 + b^2} \mathbf{b}),$$

a njena veličina

$$R = \frac{mag}{a^2 + b^2} \sqrt{4z^2 + a^2 + b^2}.$$

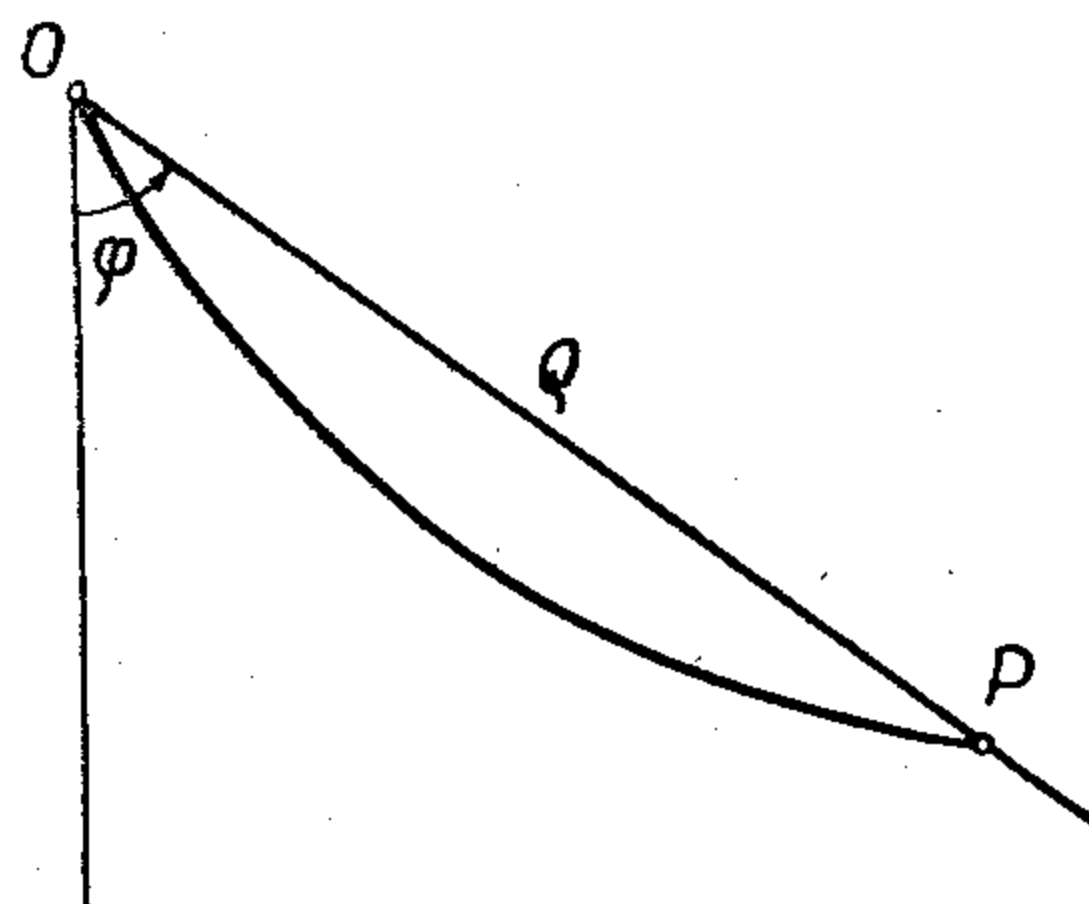
7. Teška materijalna tačka se kreće bez početne brzine po nepokretnoj glatkoj krivoj liniji u vertikalnoj ravni, a iz neke tačke O na toj krivoj (sl. 96). Naći tu krivu, ako tačka prolazi svaki luk \widehat{OP} na njoj za isto vreme za koje bi prošla odgovarajuću tetivu \overline{OP} .

Tačka se kreće niz tetivu \overline{OP} kao niz strmu ravan pa je integral energije

$$\dot{\rho}^2 = 2g\rho \cos \varphi$$

i potrebno vreme da se pređe taj put iznosi

$$(1) \quad t = \int_0^{\rho} (2g\rho \cos \varphi)^{-1/2} d\rho = \\ = \frac{2}{\sqrt{2g}} \left(\frac{\rho}{\cos \varphi} \right)^{1/2}.$$



Slika 96

Integral energije za kretanje niz krivu je

$$(2) \quad \frac{1}{dt^2} (d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2) = 2g\rho \cos \varphi.$$

Diferencijacijom (1), uzimajući u obzir da se duž krive menjaju ρ i φ , dobiva se

$$dt^2 = \frac{1}{2g\rho \cos \varphi} (\rho \operatorname{tg} \varphi d\varphi + d\rho)^2,$$

što zamenom u (2) daje

$$d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2 = (\rho \operatorname{tg} \varphi d\varphi + d\rho)^2.$$

Elementarnim svodenjem dobivenog izraza i deljenjem sa $d\varphi^2$ dobiće se diferencijalna jednačina tražene krive

$$2 \frac{d\rho}{d\varphi} + \rho \frac{\operatorname{tg}^2 \varphi - 1}{\operatorname{tg} \varphi} = 0.$$

Njen integral je

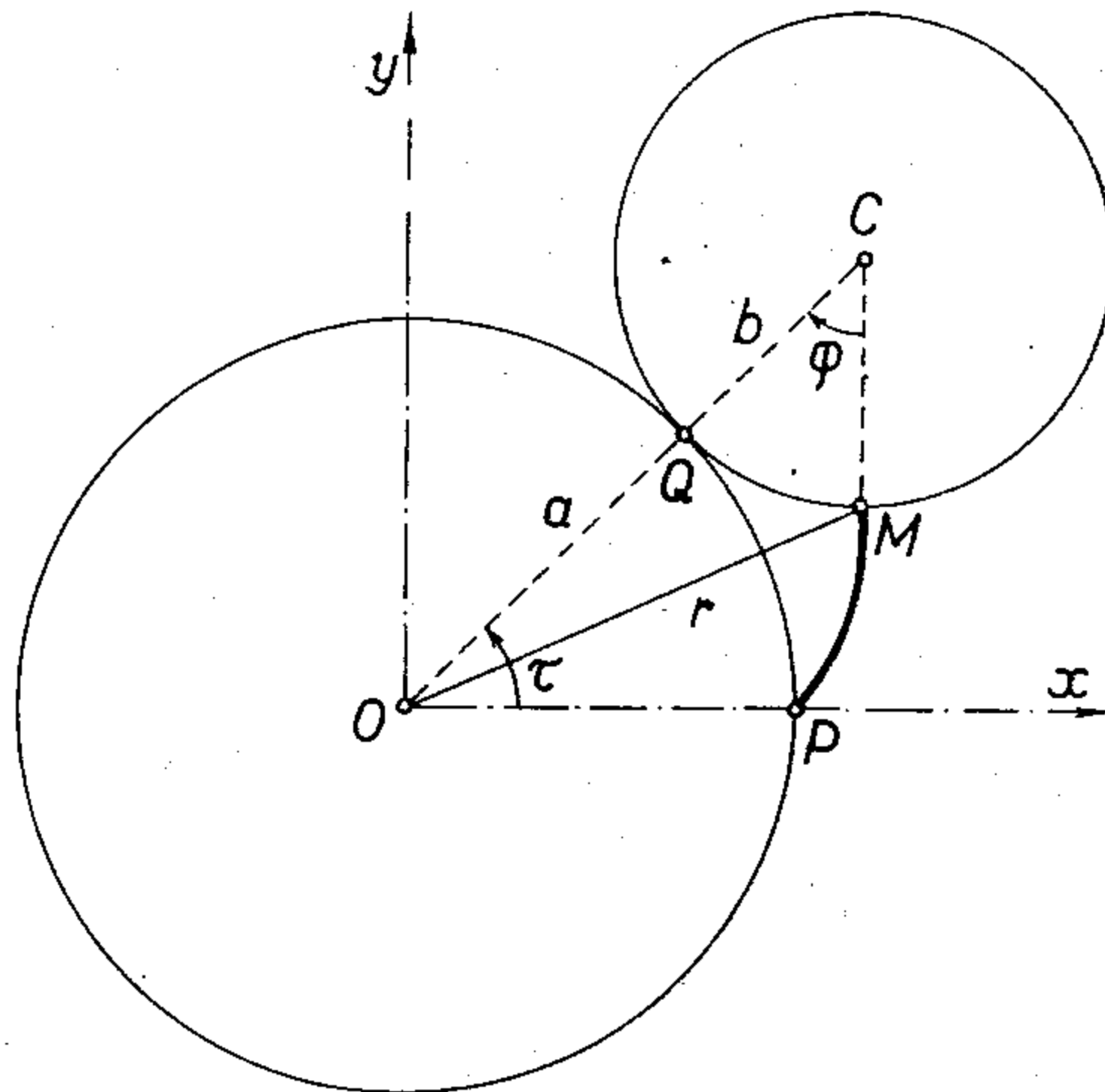
$$\rho^2 = C \sin 2\varphi, \quad C = \text{const.},$$

tj. tražena kriva je lemniskata.

8. Materijalna tačka jedinične mase kreće se po epicikloidi koju opisuje neka tačka sa periferije kruga poluprečnika b koji se kotrlja bez klizanja sa spoljne strane po obimu nepomičnog kruga poluprečnika a . Na tačku deluje odbojna sila μr upravljena od centra nepomičnog kruga, gde je r rastojanje pokretne tačke od tog centra. Tačka se u početku kretanja nalazila u najudaljenijem položaju od centra nepomičnog kruga i saopštena joj je početna brzina s_0 , gde je s luk epicikloide.

Naći period kretanja.

Neka su: P tačka dodira krugova u početku kotrljanja, Q tačka dodira ma u kom kasnijem trenutku i τ ugao koji gradi prava OC koja spaja centre kru-



Slika 97

gova sa pravom OP , a M neka je tačka koja se kreće po epicikloidi. Tada je (sl. 97) $\widehat{PQ} = \widehat{QM}$, gde je

$$\widehat{PQ} = a\tau, \quad \widehat{QM} = b\varphi,$$

pa se za r^2 dobiva ($r = \overline{OM}$)

$$r^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \varphi. \quad (c = a + b)$$

Ako se uvede luk s epicikloide kao nezavisna koordinata, iz parametarskih jednačina epicikloide

$$\begin{aligned} x &= c \cos \tau - b \cos (\tau + \varphi), \\ y &= c \sin \tau - b \sin (\tau + \varphi), \end{aligned} \quad \left(\tau + \varphi = \frac{a+b}{b} \tau = \frac{c}{b} \tau \right)$$

dobiva se za element luka

$$ds = 4 \frac{bc}{a} \sin \left(\frac{a\tau}{2b} \right) d \left(\frac{a\tau}{2b} \right) = 4 \frac{bc}{a} \sin \frac{\varphi}{2} d \frac{\varphi}{2},$$

odakle integraljenjem sledi, pošto se uzmu u obzir početni uslovi zadatka,

$$s = 4 \frac{bc}{a} \int_{\pi}^{\varphi} \sin \left(\frac{\varphi}{2} \right) d \left(\frac{\varphi}{2} \right) = -4 \frac{bc}{a} \cos \left(\frac{\varphi}{2} \right).$$

Zamenom ugla φ u izrazu za r^2 dobiće se naredni izraz kao jednačina epicikloide:

$$r^2 = (a + 2b)^2 - \frac{a^2 s^2}{(a + 2b)^2 - a^2}.$$

Kako sila μr ima funkciju sile $U = \frac{1}{2} r^2 \mu$, integral energije je

$$\frac{1}{2} \dot{s}^2 - \frac{1}{2} \mu r^2 = \frac{1}{2} s_0^2 - \frac{1}{2} \mu r_0^2,$$

gde je $r_0 = a + 2b$. Integral energije se može napisati u obliku

$$\dot{s}^2 = s_0^2 - \frac{\mu a^2}{(a + 2b)^2 - a^2} s^2,$$

koji se, pošto se uvede smena

$$s = s_0 \left[\frac{(a + 2b)^2 - a^2}{\mu a^2} \right]^{1/2} \sin \theta \quad (s_0 = 0)$$

može lako integraliti

$$t = \left[\frac{(a + 2b)^2 - a^2}{\mu a^2} \right]^{1/2} \theta.$$

Odatle se inverzijom dobiva θ kao funkcija vremena,

$$\theta = \left[\frac{\mu a^2}{(a + 2b)^2 - a^2} \right]^{1/2} t,$$

pa je

$$s = s_0 \left[\frac{(a + 2b)^2 - a^2}{\mu a^2} \right]^{1/2} \sin \left\{ \left[\frac{\mu a^2}{(a + 2b)^2 - a^2} \right]^{1/2} t \right\}.$$

Kretanje je periodno i period mu je

$$T = 2\pi \left[\frac{(a + 2b)^2 - a^2}{\mu a^2} \right]^{1/2}.$$

9. Materijalna tačka kreće se po nepokretnoj logaritamskoj spirali

$$\rho = e^{\alpha\theta} \quad (\alpha = \text{const.})$$

pod dejstvom privlačne sile iz pola spirale koja je proporcionalna rastojanju od pola, $F = -k^2 m \rho$. U početnom trenutku tačka se nalazila u miru. Odrediti konačne jednačine kretanja i zakon puta.

Iz integrala energije se nalazi

$$\dot{\rho} = -\frac{k\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}} \sqrt{\rho_0^2 - \rho^2},$$

odakle se razdvajanjem promenljivih može naći ρ kao funkcija vremena. Pomoću jednačine veze dobiće se tada konačne jednačine kretanja

$$\rho = \rho_0 \cos \frac{k\alpha t}{\sqrt{1+\alpha^2}},$$

$$\theta = \frac{1}{\alpha} \ln \left(\rho_0 \cos \frac{k\alpha t}{\sqrt{1+\alpha^2}} \right).$$

Takođe se iz integrala energije nalazi

$$s = \rho_0 \frac{\sqrt{1+\alpha^2}}{\alpha} \left(1 - \cos \frac{k\alpha t}{\sqrt{1+\alpha^2}} \right).$$

10. Materijalna tačka P kreće se bez trenja po nepokretnom glatkom krugu poluprečnika a pod dejstvom privlačne sile iz neke nepokretne tačke Q na krugu. Intenzitet sile je $F = k\rho^n$, gde je $k = \text{const.} < 0$, a ρ rastojanje PQ . Odrediti n tako da reakcija veze bude konstantnog intenziteta.

Sila je u ravni kruga pa je i reakcija u toj ravni, a upravljena je ka centru kruga. Integral energije je

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{k\rho^{n+1}}{n+1} = \text{const.} = h,$$

pa se iz prirodne jednačine koja odgovara glavnoj normalni nalazi za reakciju relacija

$$R - 2h = \rho^{n+1} \left(\frac{2k}{n+1} + \frac{k}{2} \right).$$

Da bi bilo $R = \text{const.}$ mora biti $\rho^{n+1} \left(\frac{2k}{n+1} + \frac{k}{2} \right)$ jednako nuli te je stoga $n = -5$.

11. U vertikalnoj ravni nalazi se prava L koja obrazuje ugao α sa horizontom i krug K koji dodiruje pravu L u određenoj tački. Teška tačka se spušta niz L iz određenog položaja na toj pravoj i sa određenom početnom brzinom i zatim prelazi sa prave na krug i ostaje na njemu. Klasifikovati moguća kretanja na krugu u zavisnosti od početnih uslova na pravoj L .

Kretanje je konzervativno. Ako se početna visina pokretne tačke na pravoj L iznad najniže tačke kruga obeleži sa l i uvede oznaka $H = \frac{v_0^2}{2g} + l$ biće kretanje

1) progresivno za $H > 2a$, 2) asimptotsko za $H = 2a$ i oscilatorno za $H < 2a$, gde je a poluprečnik kruga.

12. Teška tačka se kreće po donjoj grani glatke astroide

$$x^{2/3} + y^{2/3} - (2r)^{2/3} = 0,$$

koja se nalazi u vertikalnoj ravni; y -osa je orijentisana vertikalno naviše. Za koje vreme će tačka preći put od položaja $A(-2r, 0)$ do položaja $B(0, -2r)$, ako joj je početna brzina u početnom položaju A beskonačno mala?

Treba koristiti integral energije i kao nezavisnu koordinatu uvesti parametar φ koji se javlja u parametarskim jednačinama astroide

$$x = 2r \cos^3 \varphi, \quad y = 2r \sin^3 \varphi.$$

Potrebno vreme je $t = \sqrt{6r/g}$.

13. Proučiti kretanje teške tačke koja se kreće po glatkom horizontalnom krugu poluprečnika a , koji se sa svoje strane obrće oko neke tačke O na periferiji stalnom ugaonom brzinom ω .

Iz Lagranževe jednačine druge vrste u kojoj je polarna koordinata ϑ tačke (u polarnom koordinatnom sistemu koji se kreće zajedno sa krugom) uzeta za nezavisnu koordinatu nalazi se da je kretanje iste prirode kao kretanje matematičkog klatna dužine $L = g/\omega^2$.

14. Teška tačka se kreće po paraboli

$$y = \frac{2(1 + \sqrt{2})}{y_0} x^2,$$

gde je y_0 početna ordinata pokretne tačke koja je u početnom trenutku bila u miru (y -osa je orijentisana vertikalno naviše). Na tačku deluje iz temena O parabole odbojna sila intenziteta

$$F = \frac{mgy_0^3}{3\rho^3},$$

gde je ρ poteg od temena parabole do pokretne tačke. Pokazati da će se tačka kretati po paraboli između ordinata y_0 i $y_0/2$.

15. Teška materijalna tačka klizi niz glatku parabolu koja se nalazi u vertikalnoj ravni sa osom orijentisanom vertikalno naviše i temenom dole. Pokazati da je reakcija veze

$$R = \frac{4ah + mg}{(1 + 4ay)^{3/2}},$$

gde je h konstanta energije.

16. Materijalna tačka kreće se po krivoj liniji $r = ae^{\lambda\varphi}$ pod dejstvom sile odbijanja iz nepomičnog pola proporcionalne rastojanju. Ako se u trenutku $t_0 = 0$ tačka nalazila u miru u položaju $r = a$, pokazati da će tačka udvostručiti svoje rastojanje od pola za vreme

$$t = \frac{\sqrt{\lambda^2 + 1}}{\lambda k} \ln(2 + \sqrt{3}),$$

pri čemu je sila $\mathbf{F} = mk^2 \mathbf{r}$.

17. Materijalna tačka se kreće po glatkoj logaritamskoj spirali

$$\rho = ae^{-\lambda\theta}$$

pod dejstvom sile privlačenja proporcionalne rastojanju

$$\mathbf{F} = mk^2 \mathbf{q}.$$

Pokazati da je konačna jednačina kretanja

$$\rho = b \cos \left(\frac{kl^2 t}{\sqrt{l^4 + 1}} \right),$$

da je vreme potrebno da pokretna tačka iz nekog položaja ρ_0 dospe u pol bez početne brzine

$$t = \frac{\sqrt{l^4 + 1}}{kl^2} \cdot \frac{\pi}{2}$$

i da je reakcija veze

$$R = \frac{mk^2}{\sqrt{1+l^4}} \left(\frac{\rho_0^2 - 2\rho^2}{\rho} \right).$$

18. Teška tačka se kreće bez početne brzine po vertikalnom kvadrantu glatkog kruga poluprečnika a i prelazi na horizontalnu pravu po kojoj se kreće pod dejstvom otporne sile proporcionalne brzini. Pokazati da će se tačka zaustaviti, kad se od kraja kružnog kvadranta udalji po pravoj za $x = \frac{\sqrt{2ag}}{k^2}$, gde je k koeficijent otporne sile $F_{\text{otp.}} = -mk^2 \dot{x}$.

19. Teška tačka se kreće po glatkoj krivoj liniji $x = au^3$, $y = au^2$ (y -osa je orijentisana vertikalno naniže). U početnom trenutku, $t = 0$, tačka se nalazila u položaju $u = 0$ i saopštena joj je početna brzina $v_0 = \sqrt{2ag\lambda}$, gde su a i λ pozitivne konstante a g ubrzanje Zemljine teže. 1) Odrediti konačne jednačine kretanja za $\lambda = 4/9$; 2) za istu vrednost λ odrediti silu pod čijim uticajem bi se tačka kretala na isti način iz istog početnog položaja, kad bi bila slobodna i kad sila teže ne bi delovala; 3) za slučaj $\lambda = 0$ odrediti vezu između parametra u i vremena.

$$(1) \quad x = a \left(\frac{2}{3} \sqrt{\frac{2g}{a}} t \right)^{3/2}, \quad y = \frac{2}{3} \sqrt{2ag} t;$$

$$(2) \quad X = \frac{2mg}{3} \left(\frac{a}{x} \right)^{1/3}, \quad Y = 0;$$

$$(3) \quad 3u \sqrt{1 + \left(\frac{3u}{2} \right)^2} + 2 \operatorname{Ar Sh} \left(\frac{3}{2} u \right) = 3 \sqrt{\frac{2g}{a}} t.$$

20. Matematičko klatno dužine konca b potopljeno je u viskoznu tečnost koja pruža otpor kretanju proporcionalan brzini; koeficijent proporcionalnosti je $k = 2m\sqrt{g/b}$, gde je g ubrzanje Zemljine teže. U početnom trenutku je konac činio sa vertikalom mali ugao α a klatno je pušteno bez početne brzine. Pokazati da je konačna jednačina kretanja

$$\theta = \alpha e^{-t \sqrt{\frac{g}{b}}} \left(1 + \sqrt{\frac{g}{b}} t \right),$$

brzina klatna

$$v = -g \alpha t e^{-t \sqrt{\frac{g}{b}}}$$

21. Matematičko klatno dužine L izvedeno je iz vertikale za ugao $\pi/2$ i saopštena mu je početna brzina vertikalno naniže. Pokazati da je sila reakcije $R = mg(3 \cos \vartheta + v_0^2/gL)$, ako je veza idealna.

22. Teška materijalna tačka kreće se po nepokretnoj krivoj liniji, koja se nalazi u vertikalnoj ravni, bez trenja. Odrediti tu krivu tako da materijalna tačka prelazi jednake visine za jednaka vremena, ako je početna brzina usmerena vertikalno naniže.

Ako se y -osa orijentiše vertikalno naniže jednačina tražene krive biće

$$x^2 = \frac{8g}{9v_0^2} y^3.$$

23. Ako je L dužina konca i α otvor konusa kod konusnog klatna, pokazati da je sila u koncu $R = mg/\cos \alpha$, brzina kretanja klatna $v = \sin \alpha \sqrt{gL/\cos \alpha}$ i da klatno obiđe jedan pun krug za vreme $T = 2\pi \sqrt{L \cos \frac{\alpha}{g}}$.

24. Teška materijalna tačka kreće se po kružnoj zavojnici

$$x = a \cos \vartheta; \quad y = a \sin \vartheta; \quad z = a \vartheta \operatorname{tg} \alpha,$$

(osa Oz orijentisana je vertikalno naniže). Ako je u početnom trenutku tačka bila u miru, pokazati da će potpuno obići kružni cilindar na kome je zavojnica za vreme

$$T = 2 \left(\frac{2\pi a}{g \sin 2\alpha} \right)^{1/2}.$$

25. Materijalna tačka se kreće po glatkoj lančanici

$$y = \frac{1}{2} (e^x + e^{-x}) = \operatorname{Ch} x$$

pod dejstvom sile privlačenja prema x -osi koja je proporcionalna rastojanju tačke od x -ose. U početnom trenutku tačka se nalazila u minimumu lančanice i saopštena joj je početna brzina v_0 u pozitivnom smeru x -ose. Odrediti konačne jednačine kretanja, zakon puta i reakciju veze.

$$\mathbf{F} = (0, -mk^2y).$$

Zakon puta je $s = v_0 \sin(kt)/k$, konačne jednačine kretanja su

$$x = \operatorname{Ar} \operatorname{Sh} \left[\frac{v_0}{k} \sin(kt) \right], \quad y = \sqrt{1 + \frac{v_0^2}{k^2} \sin^2(kt)},$$

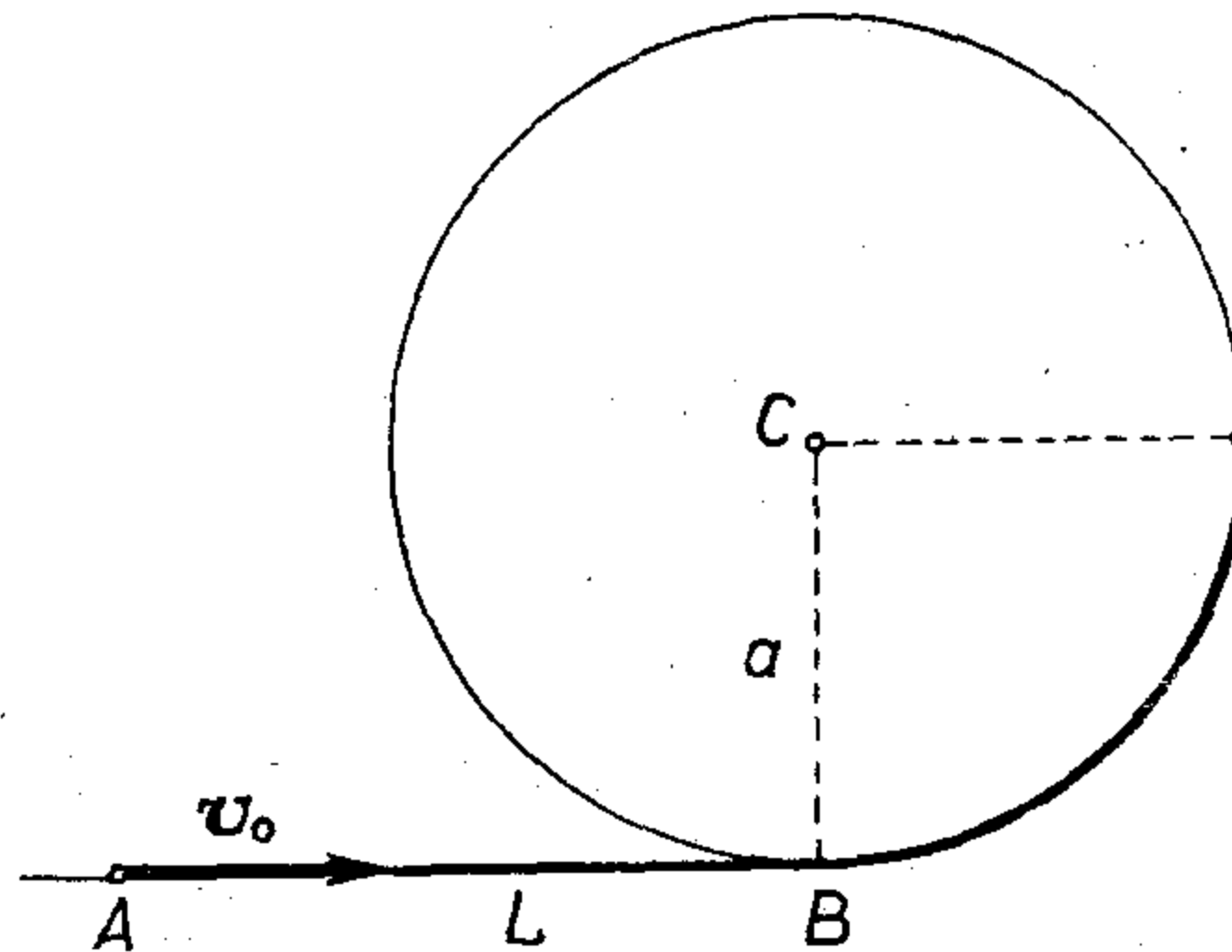
i sila reakcije

$$R = \frac{m}{y^2} (v_0^2 + k^2).$$

26. Teška tačka je bačena brzinom v_0 duž horizontalne prave iz tačke A . Pokretna tačka se kreće po pravoj sa otporom proporcionalnim brzini do tačke B , ($\overline{AB} = L$). U tački B ona prelazi na krug poluprečnika a i kreće se po njemu

naviše bez otpora (sl. 98). Odrediti početnu brzinu tako da tačka pređe na krugu put $s = \pi a/2$.

$$v_0 = k^2 L + \sqrt{2ag}. \quad (k\text{-koeficijent otpora})$$



Slika 98

27. Materijalna tačka se kreće po glatkoj krivoj liniji

$$\rho = a e^{b\varphi},$$

gde su a i b konstante (pozitivne) a φ i ρ su polarne koordinate.

Na tačku deluje privlačna sila prema polu proporcionalna rastojanju, $F = -mk^2 \rho$. Ako je u početnom trenutku, $t = 0$, tačka u miru u položaju φ_0 , naći konačne jednačine kretanja i reakciju veze

$$\varphi = \varphi_0 + \frac{1}{k} \ln \cos \left(\frac{kbt}{\sqrt{1+b^2}} \right);$$

$$R = \frac{mk^2}{\sqrt{1+b^2}} \cdot \frac{\rho_0^2 - 2\rho^2}{\rho}.$$

2.13. Trenje

U odeljcima (2.10) i (2.11) već je rečeno da aktivne sile i jednačine veza određuju samo komponentu sile reakcije koja se nalazi u ravni upravnoj na putanju materijalne tačke. Ta komponenta sile reakcije označena je sa \mathbf{R}_N i nazvana je *normalna reakcija*. Ako veza nije idealna rečeno je da se tada radi o *kretanju sa trenjem* a komponenta sile reakcije koja se nalazi u pravcu tangente na putanju i koja je ostala neodređena naziva se *sila trenja* i označena je bila sa \mathbf{R}_t . Ukupna sila reakcije, kad veze nisu idealne, data je obrascima (2.10—17) i (2.11—15) tj.

$$(1) \quad \mathbf{R} = \mathbf{R}_t + \mathbf{R}_N.$$

Sila trenja se uvodi u racionalnu mehaniku definicijom koja sa svoje strane treba da bude saglasna sa iskustvom i eksperimentalnim zaključcima. Način na koji se uvodi sila trenja naziva se *zakon trenja*.

Kad se pri kretanju materijalne tačke po površi ili krivoj liniji javlja trenje, za površ ili liniju se kaže da je *hrapava*.

Sila trenja se pri kretanju materijalne tačke po hrapavoj površi ili krivoj liniji definiše kao vektor koji je *kolinearan sa vektorom brzine, ali suprotno orijentisan* od vektora brzine, a *po veličini je proporcionalan veličini normalne reakcije*, tj.

$$(2) \quad |\mathbf{R}_t| = k |\mathbf{R}_N|.$$

Koeficijent proporcionalnosti k je pozitivna konstanta i naziva se *koeficijent kinetičkog (dinamičkog) trenja*. Taj koeficijent zavisi od vrste materijala i određuje se eksperimentalnim putem.

Prema tome sila trenja za materijalnu tačku koja se kreće po hrapavoj površi ili liniji brzinom \mathbf{v} određena je obrascem

$$(3) \quad \mathbf{R}_t = -k |\mathbf{R}_N| \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}.$$

Vektorska diferencijalna jednačina kretanja sa trenjem može se stoga napisati u obliku koji sadrži potpunu silu reakcije

$$(4) \quad m \mathbf{w} = \mathbf{F} + \mathbf{R}_N - k |\mathbf{R}_N| \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}.$$

Ako se radi kratkoće pisanja uvede oznaka

$$(5) \quad \mu = \frac{1}{|\mathbf{v}|} |\mathbf{R}_N|$$

biće

$$(6) \quad m \mathbf{w} = \mathbf{F} + \mathbf{R}_N - k \mu \mathbf{v}.$$

Projiciranjem ove jednačine na ose Dekartovog pravouglog koordinatnog sistema dobiće se tri skalarne jednačine kretanja

$$(7) \quad \begin{aligned} m \ddot{x} &= X + R_{Nx} - k \mu \dot{x}, \\ m \ddot{y} &= Y + R_{Ny} - k \mu \dot{y}, \\ m \ddot{z} &= Z + R_{Nz} - k \mu \dot{z}. \end{aligned}$$

Za rešavanje mnogih problema pogodnije su prirodne jednačine kretanja. Ako se sa \mathbf{t} obeleži jedinični vektor tangente trajektorije, koji je orijentisan na stranu na koju luk trajektorije raste, obrazac (3) za silu trenja može da se napiše u obliku

$$(8) \quad \mathbf{F} = \mp k |\mathbf{R}_N| \mathbf{t},$$

jer je $\mathbf{v}/|\mathbf{v}| = \pm \mathbf{t}$ prema tome da li se tačka kreće u pravcu u kome luk trajektorije raste ili u suprotnom pravcu.

Za kretanje tačke po površi prirodni triedar sačinjavaju, kako smo već videli (2.10.1.1), vektori \mathbf{t} tangente trajektorije, \mathbf{N} normale na površ i $\boldsymbol{\gamma}$ geodezijske normale trajektorije. Skalarne jednačine kretanja dobivene projiciranjem vektorske jednačine (6) na ove ose biće

$$(9) \quad \begin{aligned} m \frac{dv}{dt} &= \mathbf{F} \cdot \mathbf{t} \mp k |\mathbf{R}_N|; \\ \frac{mv^2}{\rho_N} &= \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} + R_N; \\ \frac{mv^2}{\rho_s} &= \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\gamma}. \end{aligned}$$

ili pošto je za površ $\mathbf{R}_N = \lambda \text{grad } f$,

$$(10) \quad \begin{aligned} m \frac{dv}{dt} &= \mathbf{F} \cdot \mathbf{t} \mp k |\lambda \text{grad } f|; \\ m \frac{v^2}{\rho_N} &= \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} + |\lambda \text{grad } f|; \\ m \frac{v^2}{\rho_g} &= \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\gamma}. \end{aligned}$$

Za kretanje materijalne tačke po hrapavoj krivoj liniji prirodni triedar je određen vektorima \mathbf{t} tangente na krivu, \mathbf{n} glavne normale i \mathbf{b} binormale krive. Projiciranjem vektorske jednačine (6) na ove ose dobiće se

$$(11) \quad \begin{aligned} m \frac{dv}{dt} &= \mathbf{F} \cdot \mathbf{t} \mp k R_N; \\ m \frac{v^2}{\rho} &= \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} + \mathbf{R}_N \cdot \mathbf{n}; \\ 0 &= \mathbf{F} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{R}_N \cdot \mathbf{b}. \end{aligned}$$

Za kretanje materijalne tačke, kad postoji jedna veza $f(x, y, z; t) = 0$ (kretanje po površi) jednačine kretanja (7) u Dekartovim pravouglim koordinatama glase

$$(12) \quad \begin{aligned} m \ddot{x} &= X + \lambda \frac{\partial f}{\partial x} - k \mu \dot{x}, \\ m \ddot{y} &= Y + \lambda \frac{\partial f}{\partial y} - k \mu \dot{y}, \\ m \ddot{z} &= Z + \lambda \frac{\partial f}{\partial z} - k \mu \dot{z}. \end{aligned}$$

Kad se tačka kreće po hrapavoj liniji određenoj sa dve zadržavajuće veze $f_1(x, y, z; t) = 0$ i $f_2(x, y, z; t) = 0$, jednačine (7) dobivaju oblik

$$(13) \quad \begin{aligned} m \ddot{x} &= X + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x} - k \mu \dot{x}, \\ m \ddot{y} &= Y + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial y} - k \mu \dot{y}, \\ m \ddot{z} &= Z + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial z} - k \mu \dot{z}. \end{aligned}$$

Ako se materijalna tačka nalazi na hrapavoj površi ili krivoj liniji u miru pa treba iz toga stanja da se pokrene pod dejstvom neke sile \mathbf{F} , tome će se suprotstaviti opet sila trenja, ali nešto drukčijeg karaktera od upravo razmatrane sile kinetičkog trenja. Ova *statička sila trenja* je takođe proporcionalna normalnoj reakciji veze, ali je kolinearna sa silom koja dejstvuje na tačku u miru i suprotno od nje orijentisana

$$(14) \quad \mathbf{R}_{t_0} = -k_0 |\mathbf{R}_N| \frac{\mathbf{F}}{|\mathbf{F}|}.$$

Koeficijent k_0 trenja koji se u ovom slučaju javlja razlikuje se od dinamičkog koeficijenta i zove se *statički koeficijent trenja*. Statički koeficijent trenja je po pravilu veći od dinamičkog, $k_0 \geq k$.

Primeri i zadaci

1. Teška tačka mase m klizi po spoljašnjoj površi nepokretne hrapave sfere poluprečnika a , sa koeficijentom trenja $k = 1/2$. Tački je u najvišem položaju na sferi saopštena horizontalna početna brzina $a\omega$. Proučiti za koje vrednosti početne brzine će se ta tačka zaustaviti na sferi, a za koje vrednosti početne brzine će napustiti sferu.

Jednačine kretanja koje odgovaraju normali površi i tangenti putanje su (sl. 99)

$$m \frac{v^2}{a} = mg \cos \vartheta - R,$$

$$m \frac{dv}{dt} = mg \sin \vartheta - k |R|,$$

jer je $\mathbf{R}/R = -\mathbf{n}$, pa se iz prve od ovih prirodnih jednačina nalazi da je veličina normalne reakcije

$$R = -m \left(\frac{v^2}{a} - g \cos \vartheta \right).$$

Dok se pokretna tačka nalazi na sferi mora biti $R > 0$ i otuda $-v^2 + ag \cos \vartheta > 0$, odnosno

$$\cos \vartheta > \frac{v^2}{ag}.$$

Ako se izvod brzine po vremenu izrazi u obliku

$$\frac{dv}{dt} = v \frac{dv}{ds} = \frac{1}{2a} \frac{dv^2}{d\vartheta}$$

i unese vrednost koeficijenta trenja u prirodnu jednačinu koja odgovara tangenti, ova će dobiti oblik

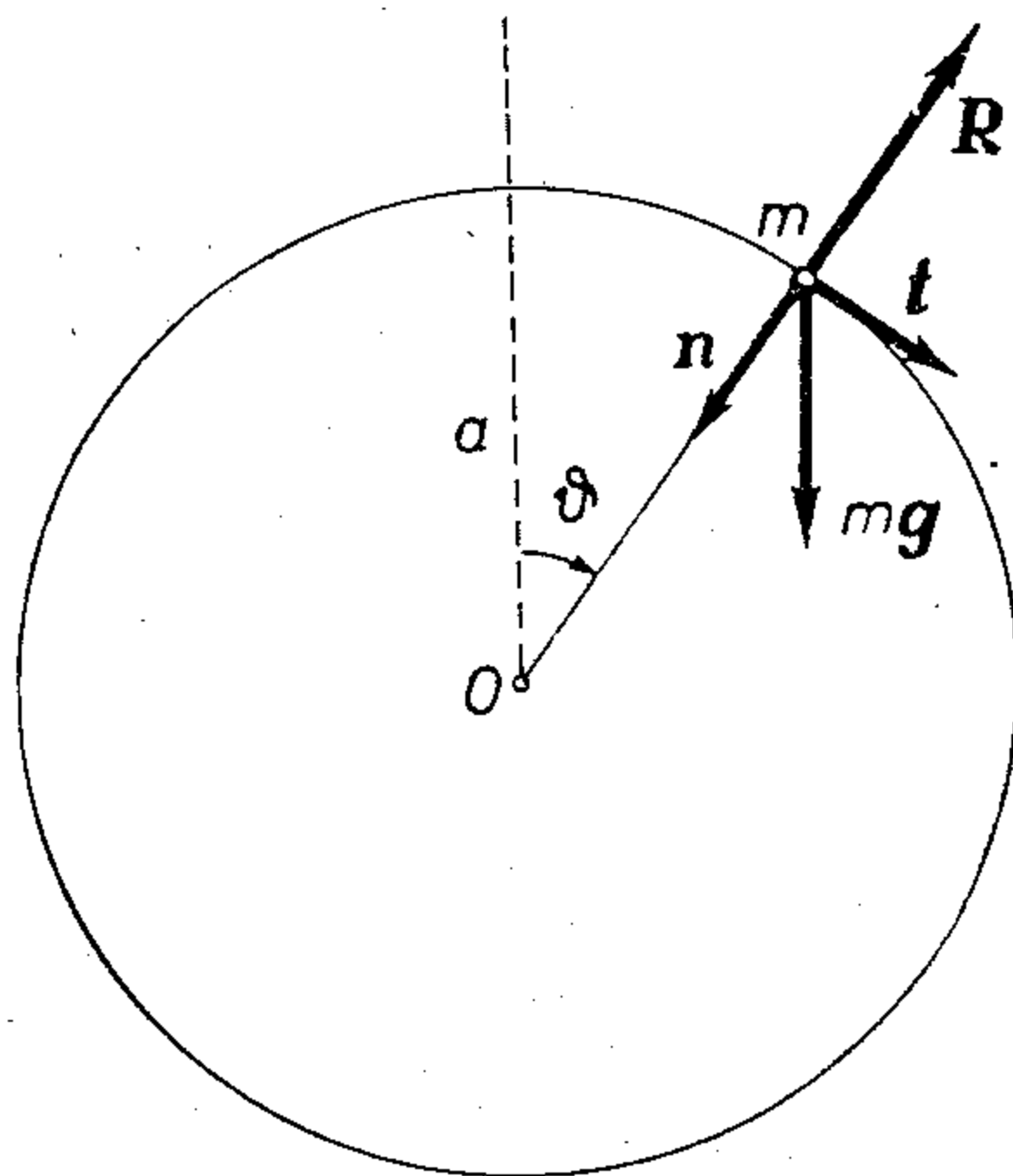
$$\frac{dv^2}{d\vartheta} - v^2 = ag (2 \sin \vartheta - \cos \vartheta).$$

Opšti integral ove diferencijalne jednačine je

$$v^2 = A \sin \vartheta + B \cos \vartheta + C e^{\vartheta},$$

pa kad se odrede vrednosti konstanata A i B i integraciona konstanta C odredi tako da partikularni integral $A \sin \vartheta + B \cos \vartheta$ identički zadovoljava diferencijalnu jednačinu kretanja, za brzinu će se dobiti definitivno obrazac

$$v^2 = a \left(a \omega^2 + \frac{1}{2} g \right) e^{\vartheta} - \frac{1}{2} ag (3 \sin \vartheta + \cos \vartheta).$$



Slika 99

Materijalna tačka koja se kreće po sferi zaustaviće se kad je brzina $v = 0$; ako ugao ϑ tada ima vrednost α , za određivanje početne brzine odnosno veličine ω , tada se dobiva jednačina

$$a \omega^2 + \frac{1}{2} g = \frac{1}{2} g (3 \sin \alpha + \cos \alpha) e^{-\alpha},$$

iz koje se nalazi

$$(1) \quad \omega^2 = \frac{1}{2} n^2 [(3 \sin \alpha + \cos \alpha) e^{-\alpha} - 1]. \quad \left(n^2 \equiv \frac{g}{a} \right)$$

Tačka napušta vezu u položaju u kome prestaje da deluje reakcija veze, $R = 0$; ako je to položaj $\vartheta = \beta$ iz prirodne jednačine koja odgovara normali sfere se nalazi

$$\frac{v^2}{a} - g \cos \beta = 0,$$

pa kad se kvadrat brzine izrazi pomoću nađenog integrala jednačine kretanja, dobiće se

$$(2) \quad \omega^2 = \frac{1}{2} n^2 [3 (\sin \beta + \cos \beta) e^{-\beta} - 1].$$

Da bi se odredila maksimalna početna brzina pri kojoj tačka ostaje na sferi treba u obrascu (1) posmatrati ω kao funkciju ugla α . Za maksimalnu brzinu je uslov $dv/d\alpha = 0$, što primenjeno na obrazac (1) daje

$$\frac{d\omega^2}{d\alpha} = \frac{1}{2} n^2 [(3 \cos \alpha - \sin \alpha) e^{-\alpha} - (3 \sin \alpha + \cos \alpha) e^{-\alpha}] = 0.$$

Otuda proističe da je $\operatorname{tg} \alpha = 1/2$; ako se stavi $\operatorname{arc} \operatorname{tg}(1/2) = \lambda$, biće

$$\cos \lambda = \frac{2}{5} \sqrt{5}, \quad \sin \lambda = \frac{1}{5} \sqrt{5},$$

pa je tražena vrednost koeficijenta ω od koga zavisi početna brzina određena obrascem

$$\omega_0^2 = \frac{1}{2} n^2 (\sqrt{5} e^{-\lambda} - 1).$$

Tačka će ostati na sferi za sve vrednosti početne brzine takve da bude

$$\omega < \omega_0.$$

Maksimalna brzina pri kojoj tačka napušta sferu u položaju različitom od početnog dobiće se iz (2) na sličan način

$$\frac{d\omega^2}{d\beta} = \frac{1}{2} n^2 [3 (\cos \beta - \sin \beta) e^{-\beta} - 3 (\sin \beta + \cos \beta) e^{-\beta}] = 0.$$

Oдавde proističe da je $\sin \beta = 0$, odn. $\cos \beta = 1$, pa je

$$\omega_{\max} = n.$$

Pokretna tačka napušta sferu za

$$\omega_0 < \omega < n$$

u položaju $\beta > 0$, a za $\omega \geq n$, napušta je odmah u početku kretanja.

2. Materijalna tačka M kreće se po hrapavoj pravoj liniji pod dejstvom sile proporcionalne rastojanju tačke M od neke tačke A van date prave. Sila je usmerena ka tački A , a tačka A se nalazi na rastojanju a od prave po kojoj se tačka M kreće. Naći kretanje tačke M , ako je u početnom trenutku bila u miru i na rastojanju b od podnožja normale na datu pravu kroz A .

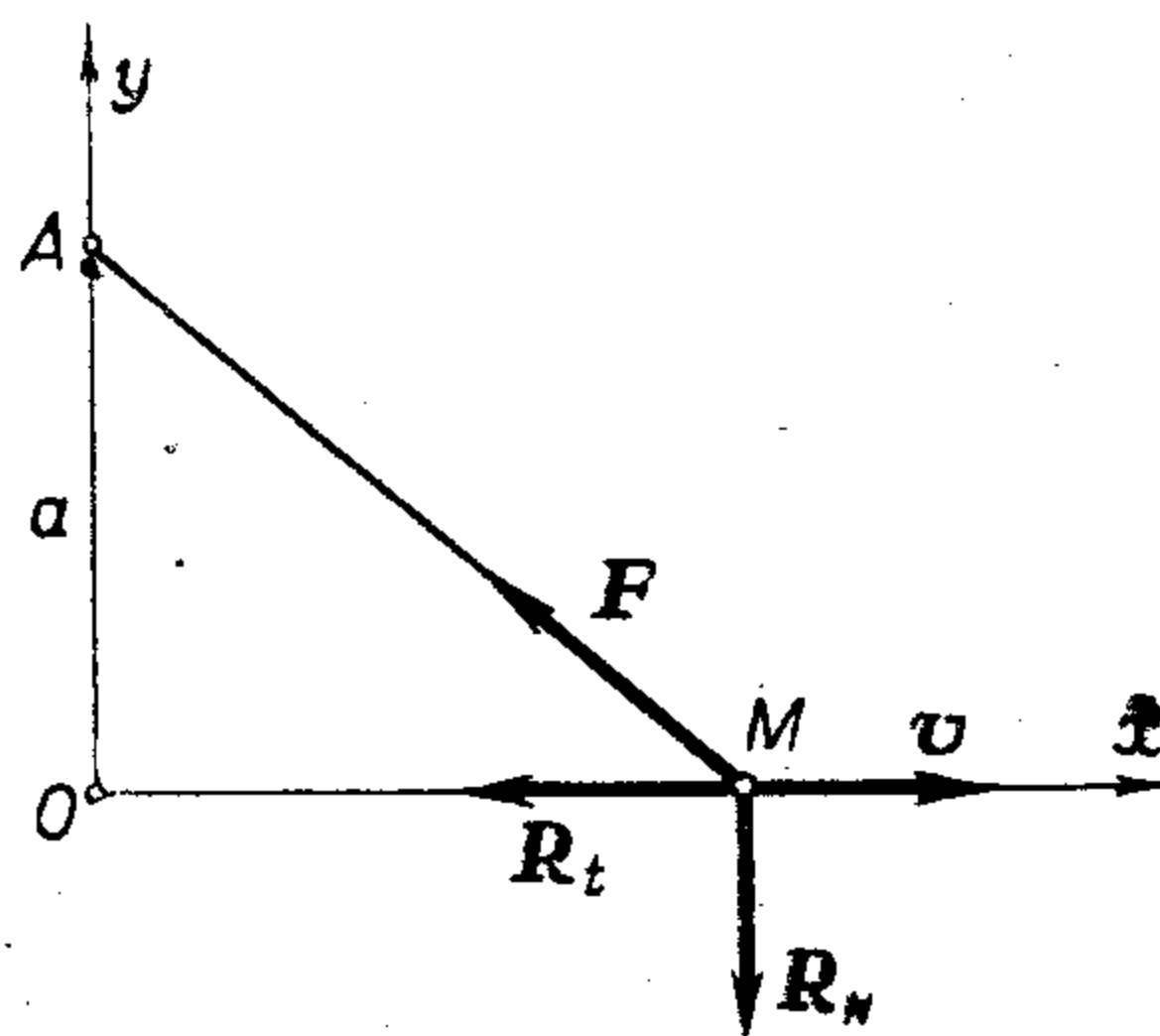
Data prava može da se uzme za x -osu a normala kroz A za y -osu. Sa tako izabranim koordinatnim sistemom sila će biti određena obrascem (sl.100)

$$\mathbf{F} = mc^2 \overrightarrow{MA} = \{-mc^2 x, mc^2 a\},$$

pa diferencijalne jednačine kretanja glase

$$m\ddot{x} = -mc^2 x + k|R|,$$

$$m\ddot{y} = mc^2 a + R. \quad (R_N = R)$$



Slika 100

Kako je za datu vezu stalno $y = a$, iz druge od ovih jednačina se dobiva za normalnu reakciju

$$R = -mc^2 a,$$

što zamenom u prvoj jednačini daje diferencijalnu jednačinu za kretanje tačke M po x -osi

$$\ddot{x} + c^2 x = kc^2 a.$$

Opšti integral ove jednačine je

$$x = C_1 \cos ct + C_2 \sin ct + ka,$$

pa kada se zamene početne vrednosti $x_0 = b$, $\dot{x}_0 = 0$, i $t_0 = 0$ konačna jednačina kretanja će biti

$$x = (b - ka) \cos ct + ka.$$

Tačka M će se kretati oscilatorno po datoj pravoj u intervalu

$$-(b - 2ka) \leq x \leq b$$

sa periodom

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{c}}$$

ukoliko sila trenja u krajnjim tačkama tog intervala nije veća od aktivne sile; ako je veća, tačka M će ostati tamo u trajnom miru.

3. Teška tačka se kreće po hrapavom nepokretnom krugu poluprečnika a koji se nalazi u horizontalnoj ravni (sl. 101). Ako je k koeficijent trenja tačke na krugu i ako je tački saopštena početna brzina v_0 naći koliki će put posmatrana tačka preći do trenutka zaustavljanja.

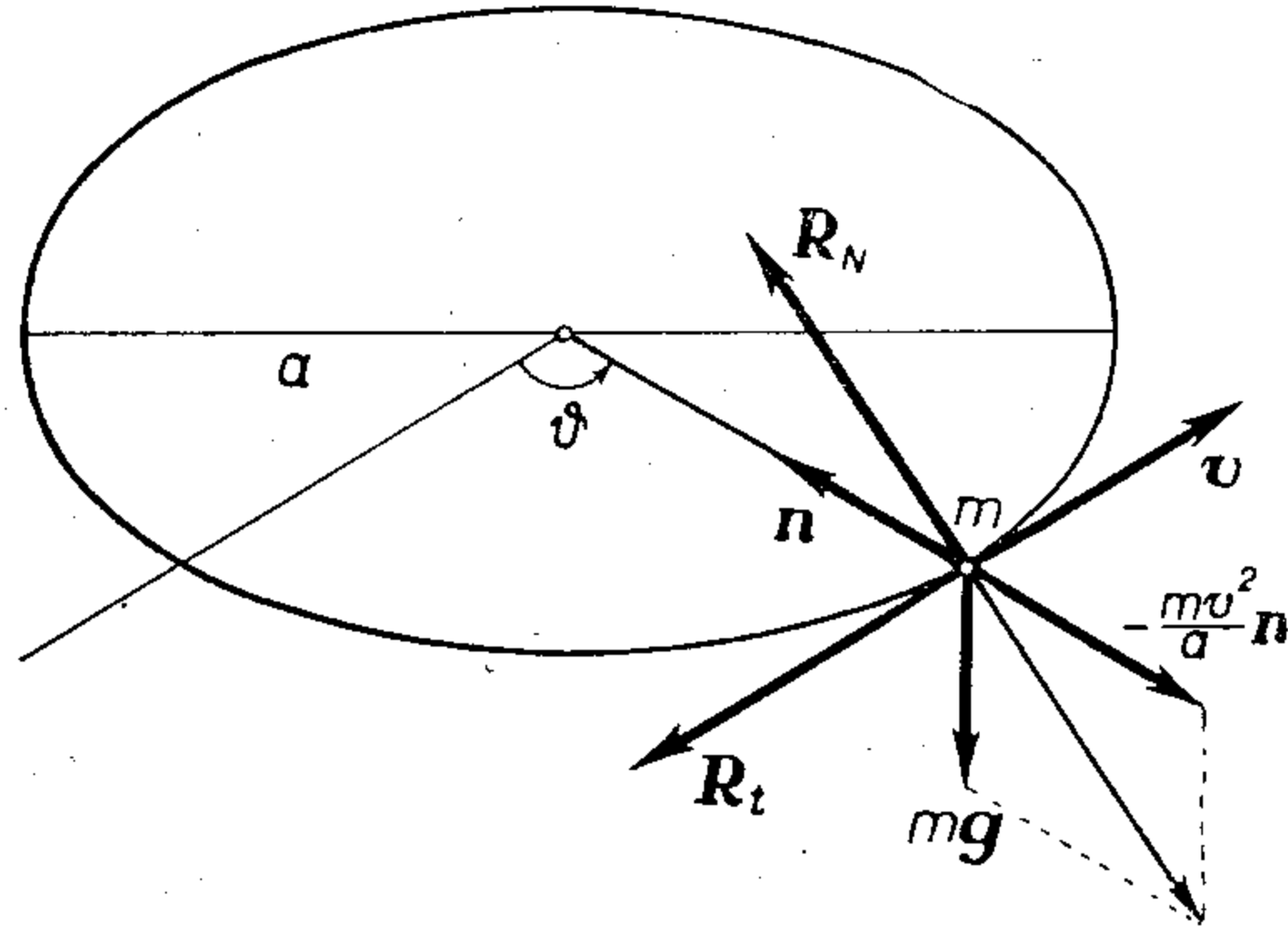
Sila trenja R_t je proporcionalna veličini pritiska koji teška tačka vrši na vezu. Ako se sve posmatra u odnosu na cilindarski koordinatni sistem čiji je početak u centru kruga i z -osom orijentisanom vertikalno naniže, biće jednačine veze

$$f_1 = z = 0, \quad f_2 = \rho - a = 0.$$

Normalna reakcija je data obrascem

$$(1) \quad \mathbf{R} = \lambda_1 \text{grad } f_1 + \lambda_2 \text{grad } f_2 = \lambda_1 \mathbf{k} + \lambda_2 \frac{\mathbf{e}}{a},$$

gde je \mathbf{e} vektor položaja pokretne tačke prema centru kruga.



Slika 101

Za pisanje prirodnih jednačina kretanja treba odrediti vektore glavne normale i binormale trajektorije. Glavna normala \mathbf{n} je u ravni kruga a usmerena je ka njegovom centru, tako da je $\mathbf{n}/\rho_n = -\frac{1}{a} \frac{\mathbf{e}}{a} = -\mathbf{e}/a^2$, a binormala je za ravnu krivu upravna na ravan krive pa je $\mathbf{b} = \mathbf{k}$. Prema tome prirodne jednačine kretanja će biti

$$(2) \quad \begin{aligned} m \frac{dv}{dt} &= \mathbf{F} \cdot \mathbf{t} - k |\mathbf{R}_N| \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}, \\ m \frac{v^2}{\rho} &= \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} + \mathbf{R}_N \cdot \mathbf{n}, \\ 0 &= \mathbf{F} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{R}_N \cdot \mathbf{b}. \end{aligned}$$

Kako je $\mathbf{F} = mg\mathbf{k}$, biće $\mathbf{F} \cdot \mathbf{t} = 0$, $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = 0$, $\mathbf{F} \cdot \mathbf{b} = mg$. S obzirom na obrazac (1) za normalnu reakciju veze biće i $\mathbf{R} \cdot \mathbf{n} = \lambda_2 \frac{\mathbf{e}}{a} \cdot \frac{-\mathbf{e}}{a} = -\lambda_2$, $\mathbf{R} \cdot \mathbf{b} = \lambda_1$.

Druga i treća jednačina (2) sada dobivaju oblik

$$(3) \quad m \frac{v^2}{a} = -\lambda_2, \quad 0 = mg + \lambda_1.$$

Zamenom u (1) dobiće se za veličinu normalne reakcije

$$(4) \quad R_N = \left[\left(\frac{mv^2}{a} \right)^2 + (mg)^2 \right]^{1/2},$$

silu trenja

$$\mathbf{R}_t = -k \left[\left(\frac{mv^2}{a} \right)^2 + (mg)^2 \right]^{1/2} \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}.$$

Diferencijalna jednačina kretanja u odnosu na tangentu je sad

$$\frac{1}{2} m \frac{dv^2}{ds} = -k \left[\left(\frac{mv^2}{a} \right)^2 + (mg)^2 \right]^{1/2},$$

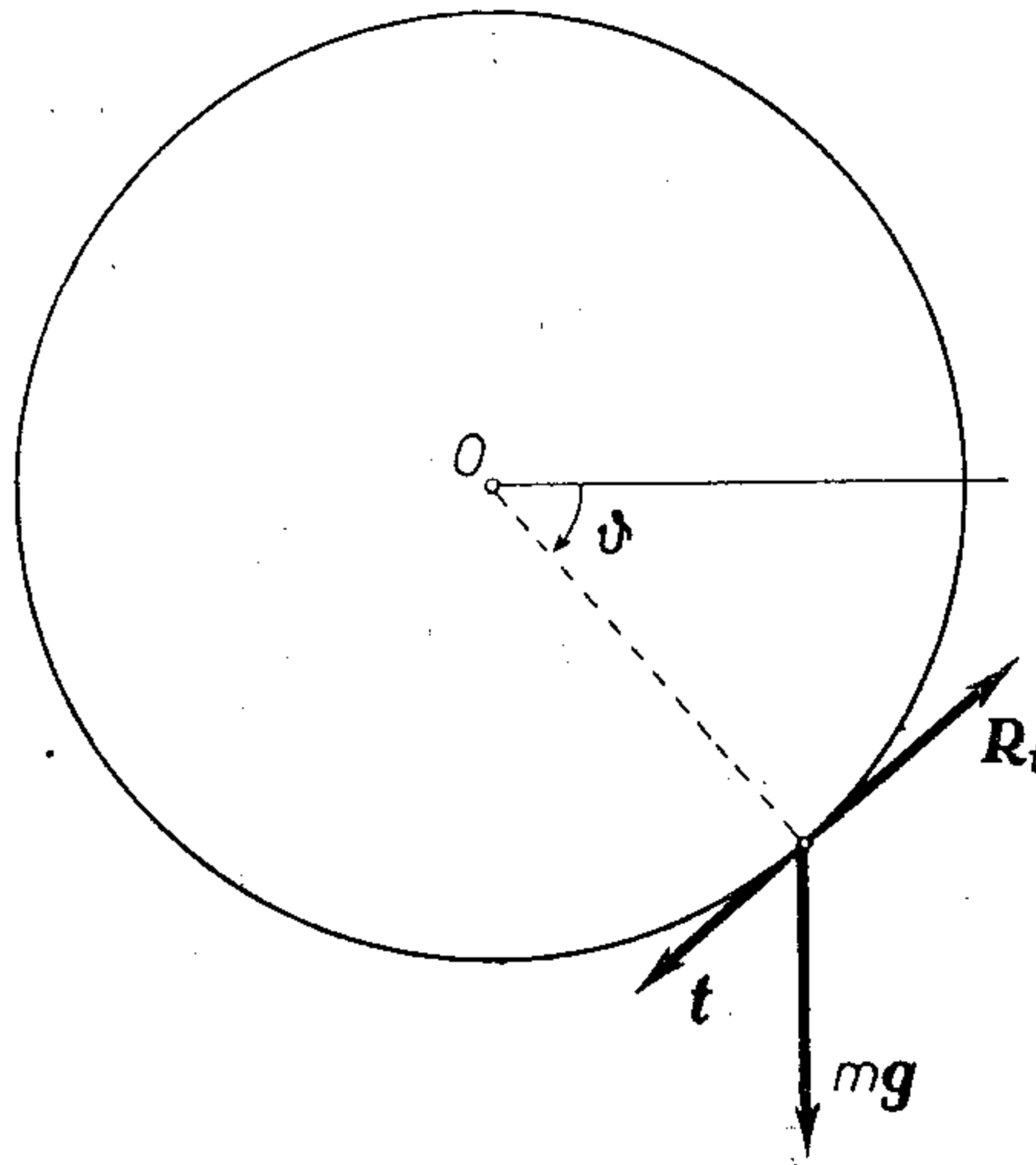
odnosno

$$\frac{a}{2k} \frac{dv^2}{ds} = -\sqrt{v^4 + a^2 g^2}.$$

Razdvajanjem promenljivih i integraljenjem u granicama $0 \leq s \leq S$, $v^2 \leq v_0^2 \leq 0$, dobiće se da je pređeni put do zaustavljanja tačke

$$S = -\frac{a}{2k} \int_{v_0^2}^0 \frac{dv^2}{\sqrt{v^4 + a^2 g^2}} = \frac{a}{2k} \operatorname{Ar sh} \left(\frac{v^2}{ag} \right).$$

4. Teška tačka se kreće sa trenjem po nepokretnom krugu u vertikalno ravni. Ako je tačka pošla iz stanja mira sa mesta na krugu koje se nalazi na istom nivou sa centrom kruga, naći koliki treba da bude koeficijent trenja da bi se tačka zaustavila u najnižoj tački kruga.



Slika 102

Prirodne diferencijalne jednačine za tangentu i glavnu normalu kruga su (sl. 102)

$$m \frac{dv}{dt} = mg \cos \vartheta - k |R_N|, \quad m \frac{v^2}{a} = -mg \sin \vartheta + R_N,$$

pa je normalna reakcija veze

$$R_N = \frac{mv^2}{a} + mg \sin \vartheta.$$

Unošenjem ove vrednosti u prvu prirodnu jednačinu ova postaje posle deobe sa m

$$\frac{dv}{dt} + k \frac{v^2}{a} = g (\cos \vartheta - k \sin \vartheta).$$

Ako se za izvod brzine po vremenu iskoristi relacija

$$\frac{dv}{dt} = v \frac{dv}{ds} = \frac{1}{2a} \frac{d\vartheta^2}{d\vartheta},$$

diferencijalna jednačina kretanja može se napisati u obliku

$$\frac{dv^2}{d\vartheta} + 2k v^2 = 2ag (\cos \vartheta - k \sin \vartheta).$$

Ovo je linearna diferencijalna jednačina prvog reda po kvadratu brzine. Njen je integral ($k > 0$)

$$v^2 = e^{-2k\vartheta} [C + 2ag \int e^{2k\vartheta} (\cos \vartheta - k \sin \vartheta) d\vartheta],$$

a zbog $v = 0$ za $\vartheta = 0$

$$v^2 = \frac{2ag}{1+4k} \left[3k \cos \vartheta + (1-2k^2) \sin \vartheta - 3k e^{-2k\vartheta} \right].$$

Iz uslova da se tačka zaustavi kad je $\vartheta = \pi/2$, dobiva se jednačina

$$0 = (1-2k^2) - 3k e^{-k\pi},$$

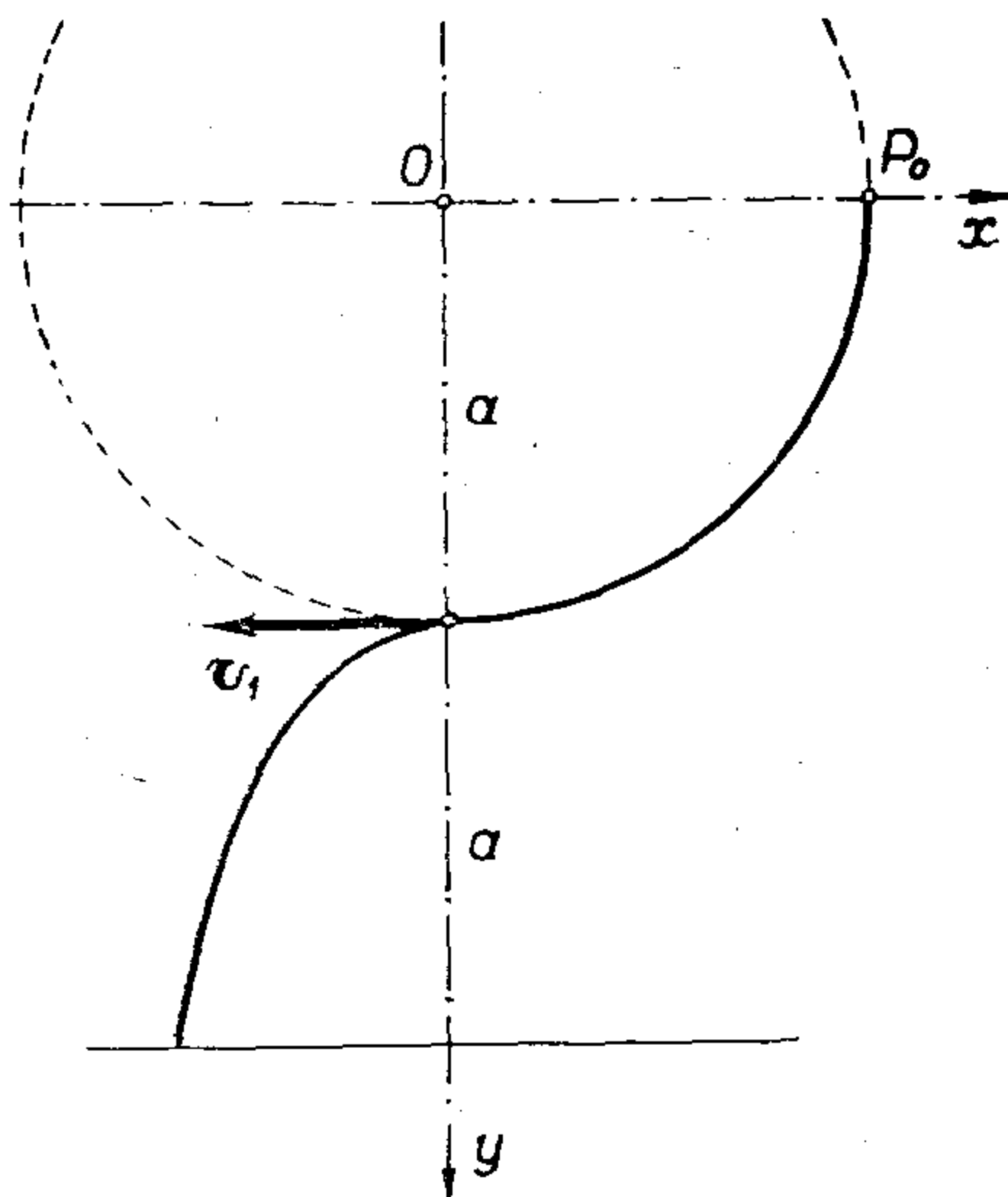
pa je koeficijent trenja određen jednačinom

$$3k = (1-2k^2) e^{k\pi}.$$

5. Iz tačke P_0 na krugu poluprečnika a , koji je nepokretan i nalazi se u vertikalnoj ravni, polazi bez početne brzine teška tačka, kreće se po krugu i kad dođe u najniži položaj napušta ga i dalje se kreće kao slobodna. Kretanju tačke po krugu suprotstavlja se sila trenja sa koeficijentom trenja $k = 1/2$. Odrediti koliko će tačka biti udaljena od vertikale kroz centar kruga kad se bude nalazila na rastojanju a od horizontalne prave kroz centar kruga. Tačka P_0 se nalazi na nivou centra kruga (sl. 103).

Uputstvo: Za kretanje tačke po krugu najbolje je koristiti prirodne jednačine, a za njeno slobodno kretanje Dekartov koordinatni sistem i odgovarajuće jednačine kretanja. Tačka napušta krug u najnižem položaju ($\vartheta = \pi/2$) sa horizontalnom početnom brzinom

$$v_1 = \sqrt{\frac{ag}{2} (1 - 3e^{-\pi/2})}.$$



Slika 103

natni sistem i odgovarajuće jednačine kretanja. Tačka napušta krug u najnižem položaju ($\vartheta = \pi/2$) sa horizontalnom početnom brzinom

Ako je x -osa horizontalna i koordinatni početak u centru kruga, za $y = 2a$ biće

$$|x| = a \sqrt{1 - 3e^{-\pi/2}}.$$

6. Teška tačka se kreće sa trenjem po nepokretnom krugu poluprečnika a koji se nalazi u vertikalnoj ravni. Koeficijent trenja je k . Kad je tačka bila u najnižem položaju na krugu saopštena joj je horizontalna početna brzina v_0 . 1) Naći brzinu tačke na krugu kao funkciju položaja; 2) naći kakva veza mora da postoji između početne brzine i koeficijenta trenja da bi se posmatrana tačka zaustavila na nivou centra kruga; 3) ako je vrednost koeficijenta trenja $k = 1/2$, kolika mora biti početna brzina v_0 da bi se tačka popela do visine centra kruga?

$$(1) \quad v^2 = \left(v_0^2 - 2ag \frac{1 - 2k^2}{1 + 4k^2} \right) e^{-2k\vartheta} + 2ag \frac{1 - 2k^2}{1 + 4k^2} \cos \vartheta - \frac{6agk}{1 + 4k^2} \sin \vartheta,$$

$$(2) \quad v_0^2 (1 + 4k^2) - 2ag(1 - 2k^2) - 6agk e^{k\pi} = 0$$

$$(3) \quad v_0 \geq \sqrt{\frac{ag}{2} (1 + 3e^{\pi/2})}.$$

7. Iz najniže tačke A nepokretnog hrapavog kruga poluprečnika a sa centrom u O kreće se po krugu u vertikalnoj ravni teška tačka M sa početnom brzinom c . Pored sile trenja kretanju se suprotstavlja i otpor vazduha proporcionalan kvadratu brzine, bv^2 . Koeficijent trenja je k . Odrediti: 1) brzinu tačke M u zavisnosti od ugla $\vartheta = \sphericalangle AOM$ i 2) početnu brzinu c tako da se tačka zaustavi kad dođe do visine centra kruga.

Rešenje:

$$(1) \quad v^2 = \left(c^2 + \frac{\alpha\gamma - \beta}{1 + \alpha^2} \right) e^{-\alpha\vartheta} - \frac{\alpha\beta + \gamma}{1 + \alpha^2} \sin \vartheta - \frac{\alpha\gamma - \beta}{1 + \alpha\gamma} \cos \beta,$$

$$(2) \quad c^2 = A e^{\frac{\alpha\pi}{2}} - B.$$

Konstante A , B , α , β , i γ su date obrascima

$$A = -\frac{\alpha\beta + \gamma}{1 + \alpha^2}, \quad B = -\frac{\alpha\gamma - \beta}{1 + \alpha^2},$$

$$\alpha = 2(k + ab), \quad \beta = 2ag, \quad \gamma = 2akg.$$

8. Teška tačka se kreće niz hrapavu nepokretnu cikloidu čija je baza horizontalna i teme dole. U početnom trenutku tačka je bila u miru u preseku dva luka cikloide. Ako se tačka zaustavi u najnižoj tački cikloide (temenu), pokazati da koeficijent trenja k zadovoljava jednačinu $k^2 e^{k\pi} = 1$.

Uputstvo: Ako je x -osa baza cikloide, uzeti jednačinu cikloide u parametarskom obliku

$$x = a(\vartheta - \sin \vartheta), \quad y = a(1 - \cos \vartheta),$$

sa y -osom orijentisanom naniže.

9. Pokazati da je ugaona brzina pri kretanju matematičkog klatna sa trenjem određena relacijom

$$\dot{\vartheta}^2 = -\frac{6gk}{a(1 + 4k^2)} \sin \vartheta + \frac{2g(1 - 2k^2)}{a(1 + 4k^2)} \cos \vartheta + Ce^{-2k\vartheta},$$

gde je k koeficijent trenja a C integraciona konstanta.

2.14. Relativno kretanje materijalne tačke

Kada materijalna tačka ima relativno kretanje prema nekom pokretnom koordinatnom sistemu, za njeno kretanje prema nekom nepokretnom koordinatnom sistemu važe Njutnovi zakoni. Ako je \mathbf{w}_a apsolutno ubrzanje neke materijalne tačke, koja se kreće pod dejstvom sile \mathbf{F} , vektorska diferencijalna jednačina kretanja je

$$(1) \quad m\mathbf{w}_a = \mathbf{F}.$$

Apsolutno ubrzanje se prema (1.13—17) sastoji iz prenosnog

$$(2) \quad \mathbf{w}_p = \mathbf{w}_A + \boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}),$$

relativnog

$$(3) \quad \mathbf{w}_r = \overset{\ominus}{\boldsymbol{\rho}}$$

i Koriolisovog

$$(4) \quad \mathbf{w}_C = 2 \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r = 2 \boldsymbol{\omega} \times \overset{\odot}{\boldsymbol{\rho}}.$$

Kad se ova komponentna ubrzanja unesu u diferencijalnu jednačinu kretanja (1) ova postaje

$$(5) \quad m(\mathbf{w}_p + \mathbf{w}_r + \mathbf{w}_C) = \mathbf{F}.$$

Osnovni problem pri proučavanju kretanja materijalne tačke u odnosu na neki sistem referencije koji ima sopstveno kretanje jeste određivanje relativnog kretanja tačke prema tom pokretnom sistemu referencije, kad je njegovo prenosno kretanje poznato. Osnovna vektorska diferencijalna jednačina kretanja tada sadrži vektor $\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\rho}(t)$ kao nepoznatu funkciju vremena, te se prema (5) može pisati

$$(6) \quad m\mathbf{w}_r = \mathbf{F} - m\mathbf{w}_p - m\mathbf{w}_C.$$

Sile

$$(7) \quad \mathbf{F}_p = -m\mathbf{w}_p = -m[\mathbf{w}_A + \boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho})]$$

i

$$(8) \quad \mathbf{F}_C = -m\mathbf{w}_C = -2m \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r$$

zovu se *prenosna sila* i *Koriolisova sila*. Te se sile zovu ponekad *fiktivne*, jer se ne može ukazati na njihov izvor u nekim masama (vidi odeljak (2.1)), a nazivaju se i *inercione*. Ako u odnosu na neki koordinatni sistem važi jednačina kretanja $m\mathbf{w} = \mathbf{F}$ bez obzira da li se taj sistem kreće ili ne, što je npr. slučaj pri jednolikom pravolinijskom kretanju pokretnog koordinatnog sistema (tada je $\mathbf{w}_p = \mathbf{w}_C = 0$), onda se takav sistem zove *inercioni*. Prema tome su i svi pokretni koordinatni sistemi u kojima se ne pojavljuju inercione sile u opisivanju kretanja ravnopravni sa koordinatnim sistemima koji miruju.

Inercione sile potiču od ubrzanja koje materijalnoj tački saopštava pokretni koordinatni sistem. Prenosna sila se sastoji od translatorne inercione sile

$$(9) \quad -m\mathbf{w}_A,$$

inercione sile usled rotacionog ubrzanja (rotacione inercione sile)

$$(10) \quad -m \boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{\rho} = -m \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{\rho}$$

i aksifugalne sile

$$(11) \quad -m \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho})$$

koja je uvek usmerena od trenutne ose rotacije $\boldsymbol{\omega}$ (1.12). Koriolisova sila je upravna na ravan određenu trenutnom osom rotacije pokretnog koordinatnog sistema

i vektorom relativne brzine. Koriolisova sila ne javlja se u tri slučaja: 1) kad je trenutna ugaona brzina prenosnog kretanja jednaka nuli, 2) kad je relativna brzina jednaka nuli i 3) kad je relativna brzina kolinearna sa osom trenutne rotacije.

Ako posmatrana materijalna tačka nije slobodna, onda u osnovnoj diferencijalnoj jednačini kretanja (6) treba dodati i silu reakcije veze.

Neka je nepokretni koordinatni sistem $Oxyz$ i pokretni $A\xi\eta\zeta$. Tada, ako se neka uočena materijalna tačka kreće po površi $f(\xi, \eta, \zeta; t) = 0$ određenoj u odnosu na pokretni koordinatni sistem, sila reakcije je u opštem slučaju

$$(12) \quad \mathbf{R} = \mathbf{R}_t + \lambda \text{grad } f,$$

gde je \mathbf{R}_t sila trenja, a

$$\text{grad } f = \frac{\partial f}{\partial \xi} \mathbf{l} + \frac{\partial f}{\partial \eta} \mathbf{m} + \frac{\partial f}{\partial \zeta} \mathbf{n}.$$

Ako se materijalna tačka kreće po krivoj liniji čije su jednačine

$$f_1(\xi, \eta, \zeta; t) = 0, \quad f_2(\xi, \eta, \zeta; t) = 0,$$

sila reakcije biće

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_t + \lambda_1 \text{grad } f_1 + \lambda_2 \text{grad } f_2.$$

U oba slučaja diferencijalna jednačina kretanja će biti

$$(13) \quad m\mathbf{w}_r = \mathbf{F} - m\mathbf{w}_p - m\mathbf{w}_C + \mathbf{R}.$$

Prenosno kretanje je *stacionarno*, kad nema translatornog prenosnog kretanja i ugaonog ubrzanja, tj. kada su ispunjeni uslovi

$$(14) \quad \mathbf{w}_A = 0, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = 0.$$

U tom slučaju se osnovna diferencijalna jednačina kretanja (6) svodi na oblik

$$(15) \quad m\mathbf{w}_r = \mathbf{F} - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}) - 2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r.$$

Iz jednačine (15) može se izvesti zakon kinetičke energije za stacionarno kretanje. Kad se jednačina (15) pomnoži skalarno relativnim pomeranjem $d_r \boldsymbol{\rho}$ u odnosu na pokretni sistem dobiće se

$$(16) \quad m\mathbf{w}_r \cdot d_r \boldsymbol{\rho} = \mathbf{F} \cdot d_r \boldsymbol{\rho} - m[\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho})] \cdot d_r \boldsymbol{\rho} - 2m(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r) \cdot d_r \boldsymbol{\rho}.$$

Sa leve strane znaka jednakosti imamo

$$(17) \quad \mathbf{w}_r \cdot d_r \boldsymbol{\rho} = \frac{d_r \mathbf{v}_r}{dt} \cdot \frac{d_r \boldsymbol{\rho}}{dt} dt = d_r \mathbf{v}_r \cdot \mathbf{v}_r = \frac{1}{2} d_r v_r^2,$$

gde $\frac{d_r}{dt}$ označava relativni izvod.

Drugi član sa desne strane jednak je nuli jer mešoviti proizvod sadrži dva kolinearna vektora, naime

$$(18) \quad (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r) \cdot d_r \boldsymbol{\rho} = (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r) \cdot \mathbf{v}_r dt \equiv 0.$$

Drugi član sa desne strane može da se transformiše. Prema pravilu za razvijanje vektorskog proizvoda vektora i vektorskog proizvoda druga dva vektora biće

$$(19) \quad [\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho})] \cdot d_r \boldsymbol{\rho} = [\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\rho}) - \omega^2 \boldsymbol{\rho}] \cdot d_r \boldsymbol{\rho} = \\ = (\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\rho})(\boldsymbol{\omega} \cdot d_r \boldsymbol{\rho}) - \omega^2(\boldsymbol{\rho} \cdot d_r \boldsymbol{\rho}),$$

a prema pravilu za razvijanje skalarnog proizvoda dva vektorska proizvoda biće dalje

$$(20) \quad (\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\rho})(\boldsymbol{\omega} \cdot d_r \boldsymbol{\rho}) - \omega^2 (\boldsymbol{\rho} \cdot d_r \boldsymbol{\rho}) = (\boldsymbol{\rho} \times \boldsymbol{\omega}) \cdot (\boldsymbol{\omega} \times d_r \boldsymbol{\rho}) = \\ = -(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}) \cdot (\boldsymbol{\omega} \times d_r \boldsymbol{\rho}).$$

Za stacionarno prenosno kretanje je vektor $\boldsymbol{\omega}$ konstantan tako da se može napisati

$$(21) \quad [\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho})] \cdot d_r \boldsymbol{\rho} = -(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}) \cdot (\boldsymbol{\omega} \times d_r \boldsymbol{\rho}) = -\frac{1}{2} d_r (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho})^2.$$

S obzirom na (17), (18) i (21), relacija (16) se može napisati u obliku

$$\frac{m}{2} d_r v_r^2 = \mathbf{F} \cdot d_r \boldsymbol{\rho} + \frac{m}{2} d_r (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho})^2,$$

ili najzad

$$(22) \quad \frac{m}{2} d_r [v_r^2 - (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho})^2] = \mathbf{F} \cdot d_r \boldsymbol{\rho}.$$

Obrazac (22) predstavlja zakon kinetičke energije za stacionarno prenosno kretanje u diferencijalnom obliku.

Ako sila \mathbf{F} ima funkciju sile $U(\xi, \eta, \zeta)$, rad na relativnom pomeranju može da se izrazi u obliku totalnog diferencijala

$$\mathbf{F} \cdot d_r \boldsymbol{\rho} = \text{grad } U \cdot d_r \boldsymbol{\rho} = \frac{\partial U}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial U}{\partial \eta} d\eta + \frac{\partial U}{\partial \zeta} d\zeta,$$

pa se tada obrazac (22) svodi na oblik

$$\frac{m}{2} d_r [v_r^2 - (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho})^2] = dU,$$

u kome može neposredno da se integriše, jer se sa obe strane znaka jednakosti javlja totalni diferencijal. Tada je

$$(23) \quad \frac{m}{2} [v_r^2 - (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho})^2] = U + h,$$

što predstavlja integral kinetičke energije za relativno kretanje sa stacionarnim prenosnim kretanjem. Konstanta integracije h je konstanta energije.

2.14.1. Relativno kretanje teške tačke prema Zemlji

Slučajevi kretanja teške tačke koji su posmatrani u odeljcima (2.5.1) (vertikalni hitac i slobodni pad), (2.6.1) (kos hitac) i (2.11.3) (sferno klatno) su idealizacije stvarnog kretanja. Tamo je pretpostavljeno da na materijalnu tačku deluje konstantna sila Zemljine teže i da ne postoji nikakvo dejstvo prenosnog kretanja koje bi poticalo od Zemljine rotacije.

Zanemarivanje Zemljine rotacije je bilo moguće, jer je veličina $\boldsymbol{\omega}$ ugaone brzine Zemlje veoma mala. Zemlja napravi jedan obrt za 24 časa, odnosno tačnije za 86 164 sekunde, što za ugaonu brzinu daje

$$(1) \quad \omega = \frac{2\pi}{86164} \text{ sec}^{-1} = 0,0000729 \text{ sec}^{-1}.$$

Međutim, usled Zemljinog obrtanja javljaju se neke pojave koje se mogu uočiti i meriti.

Aktivna sila koja deluje na neku materijalnu tačku mase m je privlačenje Zemlje (težina materijalne tačke). Ta sila može se označiti sa $\mathbf{F}_1 = m \mathbf{g}_0$, gde je \mathbf{g}_0 ono ubrzanje koje potiče samo od privlačenja Zemljine mase. Drugih aktivnih sila od značaja nema, jer se privlačenje Sunca duž Zemljine putanje poništava inercionom silom usled njenog translatorsnog prenosnog kretanja, a privlačenje ostalih nebeskih tela može se zanemariti. Od inercionih sila usled Zemljine rotacije javljaju se rotacioni deo prenosne sile i Koriolisova sila.

Prenosna inerciona sila je centrifugalna sila (5.5—11) koja se može izraziti u obliku

$$(2) \quad \mathbf{F}_2 = -m [\boldsymbol{\omega} (\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\rho}) - \omega^2 \boldsymbol{\rho}]$$

ili

$$(3) \quad \mathbf{F}_2 = -m \omega^2 [(\boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\omega}_0) \boldsymbol{\omega}_0 - \boldsymbol{\rho}]. \quad \left(\boldsymbol{\omega}_0 = \frac{\boldsymbol{\omega}}{|\boldsymbol{\omega}|} \right).$$

Vektor u srednjoj zagradi je u stvari ona komponenta vektora položaja $\boldsymbol{\rho}$ koja se nalazi u ekvatorskoj ravni, jer je $(\boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\omega}_0) \boldsymbol{\omega}_0$ komponenta vektora položaja u pravcu ose obrtanja. Sem toga taj vektor je usmeren ka osi obrtanja, jer je vektor $\boldsymbol{\rho}$ usmeren od Zemljinog središta. Ako se uvede oznaka

$$(\boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\omega}_0) \boldsymbol{\omega}_0 - \boldsymbol{\rho} = -\mathbf{d},$$

biće

$$(4) \quad \mathbf{F}_2 = m \omega^2 \mathbf{d}$$

i aksifugalna (centrifugalna) sila je usmerena od ose rotacije.

Ukupna sila koja deluje na uočenu materijalnu tačku, a koja potiče od mase Zemlje i njene rotacije (sl. 104), biće

$$(5) \quad \mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = \\ = m \mathbf{g}_0 + m \omega^2 \mathbf{d} = m \mathbf{g},$$

tako da je ubrzanje koje se opaža na Zemljinoj površi i koje mi zovemo *ubrzanje Zemljine teže*

$$(6) \quad \mathbf{g} = \mathbf{g}_0 + \omega^2 \mathbf{d}.$$

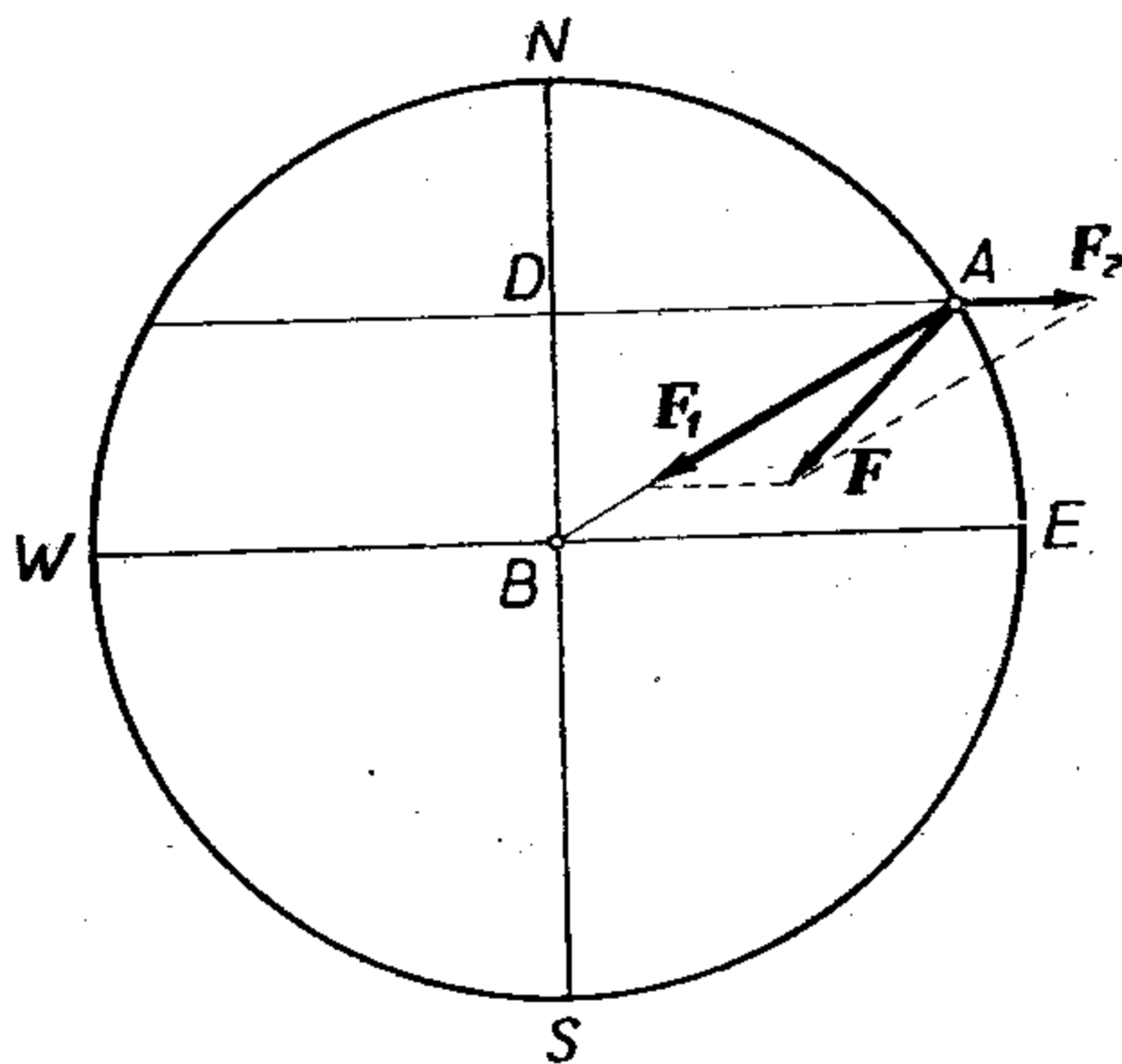
Pravac vektora \mathbf{g} određuje u svakoj tački Zemljine površi pravac vertikale, koja za sva mesta na površi Zemlje ne prolazi kroz njeno središte. To odstupanje je malo s obzirom na veličinu ugaone brzine koja je takođe mala. Na geografskoj širini φ je $d = |\mathbf{d}| = a \cos \varphi$, gde je a poluprečnik Zemlje, pa je centrifugalno ubrzanje

$$(7) \quad \omega^2 d = a \omega^2 \cos \varphi.$$

Ako se za ugaonu brzinu uzme vrednost (1) a za poluprečnik Zemlje $6370 \text{ km} = 6,37 \times 10^8 \text{ cm}$, dobiće se da npr. na geografskoj širini $\varphi = 45^\circ$ ovo ubrzanje iznosi samo oko $2,4 \text{ cm/sec}^2$.

Vektorska diferencijalna jednačina relativnog kretanja (2.14—15) za kretanje teške tačke prema Zemlji s obzirom na (5) sada dobiva oblik

$$(8) \quad m \mathbf{w}_r = m \mathbf{g} - 2 m \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r.$$



Slika 104

Kako je $\mathbf{w}_r = \overset{\ominus}{\mathbf{e}}$, $\mathbf{v}_r = \overset{\odot}{\mathbf{e}}$ i $\boldsymbol{\omega} = \text{const.}$ jednačina (8) se može neposredno integraliti. Posle skraćivanja sa m jednačina (8) postaje

$$(9) \quad \frac{d\mathbf{v}_r}{dt} = \mathbf{g} - 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r = \mathbf{g} - 2\boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{e}}{dt},$$

pri čemu smo ovde i u toku narednih proučavanja relativnih kretanja sa $\frac{d}{dt}$ kratko obeležili relativni izvod.

Prvi integral ove jednačine biće

$$(10) \quad \mathbf{v}_r - \mathbf{v}_{r_0} = \mathbf{g}t - 2\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{e} - \mathbf{e}_0),$$

gde je \mathbf{v}_{r_0} početna relativna brzina a \mathbf{e}_0 početni relativni položaj u trenutku $t = 0$.

Unošenjem ove vrednosti za relativnu brzinu u jednačinu (9) (na desnu stranu) ova će postati

$$(11) \quad \frac{d\mathbf{v}_r}{dt} = \mathbf{g} - 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{r_0} - 2t\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{g} + 4\boldsymbol{\omega} \times [\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{e}_0 - \mathbf{e})].$$

Poslednji član sa desne strane relacije (11) sadrži kvadrat ugaone brzine. S obzirom na malu vrednost ugaone brzine taj član predstavlja malu veličinu drugog reda u poređenju sa $\boldsymbol{\omega}$ pa se sme zanemariti, čime se za relativno kretanje teške tačke prema Zemlji dobiva približna diferencijalna jednačina

$$(12) \quad \frac{d^2\mathbf{e}}{dt^2} = \mathbf{g} - 2(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{g})t - 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{r_0}.$$

Jedna kvadratura daje prvi integral ove jednačine

$$(13) \quad \frac{d\mathbf{e}}{dt} = \mathbf{v}_{r_0} + \mathbf{g}t - 2t\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{r_0} - t^2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{g},$$

a ponovljena kvadratura dovodi do konačne jednačine kretanja

$$(14) \quad \mathbf{e} = \mathbf{e}_0 + \mathbf{v}_{r_0}t + \frac{1}{2}\mathbf{g}t^2 - t^2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{r_0} - \frac{t^3}{3}\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{g}.$$

Ovo je konačna vektorska jednačina relativnog kretanja teške tačke prema Zemlji, izvedena pri navedenim pretpostavkama.

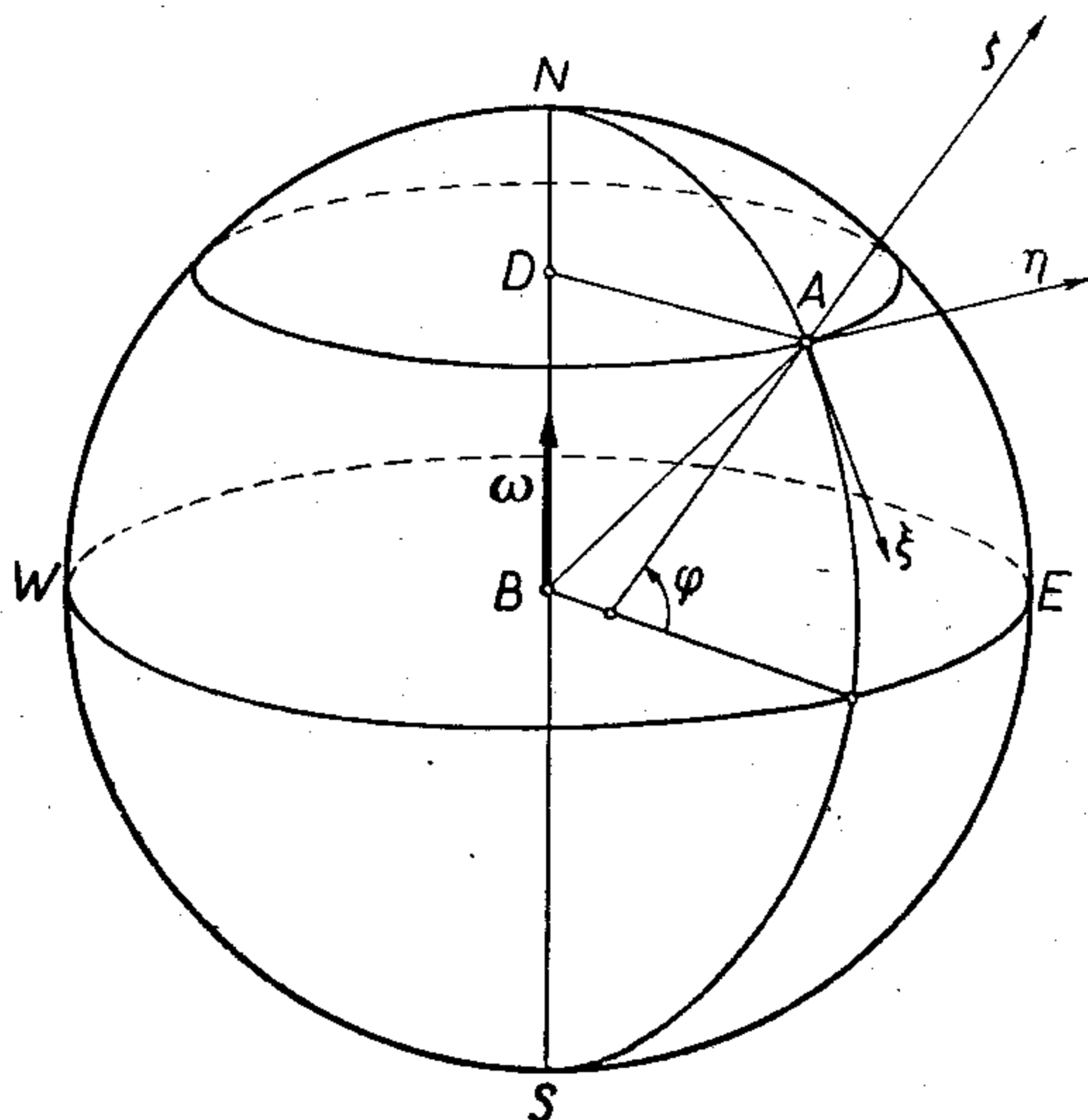
Ako se pokretni koordinatni sistem $A\xi\eta\zeta$, koji se kreće zajedno sa Zemljom izabere tako da mu na severnoj polusferi koordinatni početak bude u blizini početnog položaja tačke na površi Zemlje, da mu ξ -osa bude tangenta na meridian orijentisana prema jugu, η -osa da bude tangenta na uporednik orijentisana prema istoku i ζ -osa vertikalna sa orijentacijom naviše (ta je vertikala uvek određena pravcem ubrzanja \mathbf{g} (sl. 105), vektori koji se javljaju u konačnoj jednačini kretanja (14) imaće ove koordinate

$$(15) \quad \mathbf{e} = \{\xi, \eta, \zeta\}, \quad \mathbf{v}_r = \overset{\odot}{\mathbf{e}} = \{\dot{\xi}, \dot{\eta}, \dot{\zeta}\}, \quad \mathbf{g} = \{0, 0, -g\}, \\ \boldsymbol{\omega} = \{-\omega \cos \varphi, 0, \omega \sin \varphi\},$$

pri čemu se vidi da koordinate ugaone brzine zavise od geografske širine.

Projiciranjem jednačine (14) na ose triedra $A\xi\eta\zeta$ dobiće se tri skalarne konačne jednačine kretanja

$$(16) \quad \begin{aligned} \xi &= \xi_0 + \dot{\xi}_0 t + \dot{\eta}_0 \omega t^2 \sin \varphi, \\ \eta &= \eta_0 + \dot{\eta}_0 t - \omega (\dot{\xi}_0 \sin \varphi + \dot{\zeta}_0 \cos \varphi) t^2 + \frac{t^3}{3} g \omega \cos \varphi, \\ \zeta &= \zeta_0 + \dot{\zeta}_0 t - \frac{1}{2} g t^2 + \dot{\eta}_0 \omega t^2 \cos \varphi. \end{aligned}$$



Slika 105

Iz ovih se jednačina vidi da trajektorija nije u opštem slučaju ravnska kriva linija. Da bi se trajektorija nalazila u ravni $\xi = 0$ potrebno je da je $\xi_0 = 0$ i da početna brzina bude u pravcu vertikalne ($\dot{\xi}_0 = \dot{\eta}_0 = 0$). Tada se putanja nalazi u ravni upravnoj na meridijan. Ravnsko kretanje u ravni koja je vertikalna i upravna na mesni uporednik (upravna na pravac zapad — istok), tj. u ravni $\eta = 0$ moguće je samo kad je $\mathbf{v}_{r_0} = 0$ i ako je $\varphi = \pi/2$, što znači samo ako se materijalna tačka nalazi na severnom ili južnom polu i kreće se bez početne brzine.

Projiciranjem vektorske jednačine (12) na pravac vertikalne (na osu ζ) ili dvostrukom diferencijacijom po vremenu treće jednačine (16) dobiće se za ubrzanje materijalne tačke obrazac

$$(17) \quad \ddot{\zeta} = -g + 2 \dot{\eta}_0 \omega \cos \varphi,$$

odakle proističe da *vertikalno ubrzanje nije konstanta, već zavisi od početnih uslova.*

Obrasci (16) mogu sad neposredno da se primene na slučajeve kretanja teške tačke koji su ranije proučavani zanemarujući Zemljinu rotaciju.

1. *Slobodni pad* se prema odeljku (2.5.1) posmatra kao kretanje teške tačke u bezvazдушnom prostoru bez početne brzine, $\mathbf{v}_{r_0} = 0$. Ako se koordinatni po-

četak A smesti u početni položaj pokretne tačke, u početnom trenutku $t = 0$ biće i $\mathbf{q}_0 = 0$. Vektorska konačna jednačina kretanja (14) je tada

$$(18) \quad \mathbf{q} = \frac{1}{2} \mathbf{g} t^2 - \frac{1}{3} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{g}) t^3,$$

a skalarne jednačine (16) biće

$$(19) \quad \begin{aligned} \xi &= 0, \\ \eta &= \frac{1}{3} g \omega t^3 \cos \varphi, \\ \zeta &= -\frac{1}{2} g t^2. \end{aligned}$$

Iz ovih se jednačina vidi da je trajektorija ravanska kriva u ravni upravnoj na pravac meridijana mesta, ali nije vertikalna prava. Jednačina linije trajektorije će se dobiti iz konačnih jednačina kretanja (19) eliminacijom vremena. Ona glasi

$$(20) \quad \zeta^3 + k^2 \eta^2 = 0, \quad \left(k^2 = \frac{9}{8} \frac{g}{\omega^2 \cos^2 \varphi} \right)$$

a to je *Najlova* (Neil) ili *semikubna parabola* sa vrhom u početnom položaju tačke. Iz druge jednačine (19) vidi se da je $\eta > 0$, a kako je osa η usmerena ka istoku to znači da pri slobodnom padu teška tačka uvek skreće ka istoku. To je tzv. *istočna devijacija*. Veličina tog skretanja zavisi od visine pada ζ . Iz obrasca (20) se nalazi za veličinu devijacije

$$(21) \quad \eta = \frac{1}{k} (-\zeta)^{3/2} = \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{g}} (-\zeta)^{3/2} \omega \cos \varphi.$$

2. *Vertikalni hitac* u bezvazdušnom prostoru je u odeljku (2.5.1) proučen kao hitac vertikalno naviše i naniže. Ograničimo se ovde na slučaj hica naviše. Ako se koordinatni početak smesti na Zemljinoj površi u početni položaj pokretne tačke, u trenutku $t_0 = 0$ početni uslovi biće $\xi_0 = \eta_0 = \zeta_0 = 0$, $\dot{\xi}_0 = \dot{\eta}_0 = 0$, $\dot{\zeta}_0 > 0$ i konačne jednačine kretanja (16) svode se na

$$(22) \quad \xi = 0, \quad \eta = -\dot{\zeta}_0 t^2 \omega \cos \varphi + \frac{1}{3} g t^3 \omega \cos \varphi, \quad \zeta = \dot{\zeta}_0 t - \frac{1}{2} g t^2.$$

Prema tome i vertikalni hitac nije prava linija, ali se teška tačka kreće u ravni upravnoj na meridijan mesta izbacivanja.

Tačka će dostići najveću visinu u trenutku t_1 zaustavljanja; tada je $\dot{\zeta} = 0$ i iz treće jednačine (22) se diferencijaljenjem po vremenu i izjednačavanjem sa nulom dobiva taj trenutak

$$(23) \quad t_1 = \frac{\dot{\zeta}_0}{g}.$$

Unošenjem ove vrednosti u drugu jednačinu (22) dobiće se da je u trenutku zaustavljanja pokretna tačka skrenula u ravni upravnoj na meridijan za

$$(24) \quad \eta_1 = -\frac{2}{3} \frac{\dot{\zeta}_0^3 \omega \cos \varphi}{g^2}$$

i to na zapad. Visina do koje se tačka popela dobiće se unošenjem vrednosti za t_1 u treću jednačinu (22),

$$(25) \quad \zeta_1 = \frac{\dot{\zeta}_0^2}{2g}$$

Ta je visina jednaka visini koja se dobiva i kad se zanemari Zemljina rotacija. U položaju (η_1, ζ_1) materijalna tačka ima brzinu $\mathbf{v}_{r1} = \{0, \dot{\eta}_1, 0\}$, gde se $\dot{\eta}_1$ dobiva diferencijacijom po vremenu druge od jednačina (22) i unošenjem vrednosti t_1 iz (23). Prema tome, u trenutku t_1 na visini ζ_1 materijalna tačka pri vertikalnom hicu uvis ima horizontalnu brzinu $\dot{\eta}_1$ usmerenu na zapad.

Ako se sada početni uslovi $t_1, \mathbf{p}_1 = \{0, \eta_1, \zeta_1\}$ i $\mathbf{v}_{r1} = \{0, \dot{\eta}_1, 0\}$ unesu u konačne jednačine kretanja (16) dobiće se jednačine kretanja tačke pri padu

$$(27) \quad \begin{aligned} \xi &= \dot{\eta}_1 t \omega \sin \varphi, \\ \eta &= \eta_1 + \dot{\eta}_1 t + \frac{1}{3} g t^3 \omega \cos \varphi, \\ \zeta &= \zeta_1 - \frac{1}{2} g t^2 + \dot{\eta}_1 t^2 \omega \cos \varphi. \end{aligned}$$

Tačka će pasti na Zemlju kad bude $\zeta = 0$, a to je u trenutku

$$(28) \quad t_2 = \frac{\dot{\zeta}_0}{\sqrt{g^2 + 2\dot{\zeta}_0^2 \omega^2 \cos^2 \varphi}}$$

Ako se uzme u obzir da je ω veoma malo, ω^2 biće mala veličina drugog reda prema ω , pa se u relaciji (28) može staviti da je $t_2 \approx t_1$, to ukupno vreme od izbacivanja tačke vertikalno uvis pa do njenog pada na Zemlju iznosi $2 t_1$. Koordinate tačke pada su $\{\xi_2, \eta_2, 0\}$ te se zamenom $t = t_2 \approx t_1$ u jednačinama (27) dobiva

$$(29) \quad \begin{aligned} \xi_2 &\approx -\frac{\dot{\zeta}_0^3 \omega^2}{g^2} \sin \varphi \cos \varphi, \\ \eta_2 &\approx -\frac{4}{3} \frac{\dot{\zeta}_0^3 \omega}{g^2} \cos \varphi. \end{aligned}$$

Prema tome pri padu na Zemlju teška tačka koja je izbačena vertikalno uvis skreće na zapad za $\eta_2 \approx 2 \eta_1$, ali se javlja i skretanje na sever (pošto je ξ -osa orijentisana na jug); skretanje na sever određeno je prvim obrascem (29).

3. *Kos hitac.* Prema odeljku (2.6.1) teškoj tački na Zemljinoj površi saopštena je početna brzina koja je prema horizontu nagnuta za ugao α . Ako se koordinatni početak postavi u početni položaj tačke (projektila) i uzme da je početna brzina \mathbf{v}_0 u ravni upravnoj na meridijan mesta izbacivanja, početni uslovi su $\mathbf{p}_0 = 0, \mathbf{v}_{r0} = \{0, v_0 \cos \alpha, v_0 \sin \alpha\}$. Unošenjem ovih vrednosti u jednačine kretanja (16) dobiće se

$$(30) \quad \begin{aligned} \xi &= v_0 t^2 \omega \sin \varphi \cos \alpha, \\ \eta &= v_0 t \cos \alpha - v_0 t^2 \omega \cos \varphi \sin \alpha + \frac{1}{3} g t^3 \omega \cos \varphi, \\ \zeta &= v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2} g t^2 + v_0 t^2 \omega \cos \varphi \cos \alpha. \end{aligned}$$

Iz ovih jednačina se vidi da je putanja prostorna kriva linija.

Vreme celokupnog leta projektila od trenutka izbacivanja $t_0 = 0$ do trenutka pada na Zemlju dobiće se iz jednačina (30) kad se stavi $\zeta = 0$. Jedno rešenje ($t_0 = 0$) odgovara početnom trenutku, a drugo

$$(31) \quad t_1 = \frac{2 v_0 \sin \alpha}{g - 2 v_0 \omega \cos \alpha \cos \varphi}$$

padu na Zemlju. Kad se obrtanje Zemlje ne uzme u obzir to vreme će iznositi $t_1 = 2 v_0 \sin \alpha / g$, što se poklapa sa rezultatom koji proističe iz (2.6.1—4).

Ako se u obrascu (31) izdvoji faktor $\tau = 2 v_0 \sin \alpha / g$,

$$t_1 = \tau \left(1 - \frac{2 v_0 \omega}{g} \cos \varphi \cos \alpha \right)^{-1},$$

i izraz u maloj zagradi razvije u red po binomnom obrascu, onda će se za vreme trajanja leta, odn. za trenutak pada projektila na Zemlju dobiti obrazac

$$(32) \quad t_1 = \tau \left(1 + \frac{2 v_0 \omega}{g} \cos \varphi \cos \alpha + \dots \right).$$

Zbog male vrednosti ω male veličine višeg reda mogu se zanemariti. Za kos hitac prema istoku ($0 < \alpha < \pi/2$) je $\cos \alpha > 0$ i

$$(33) \quad t_1 = \tau \left(1 + \frac{2 v_0 \omega}{g} \cos \varphi \cos \alpha \right),$$

a za kos hitac prema zapadu ($\pi/2 < \alpha < \pi$) je $\cos \alpha < 0$ i

$$(34) \quad t_1 = \tau \left(1 - \frac{2 v_0 \omega}{g} \cos \varphi |\cos \alpha| \right).$$

Upoređenjem obrazaca (33) i (34) vidi se da projektil izbačen prema istoku ima duže trajanje leta od projektila izbačenog prema zapadu, jer obrćući se od zapada na istok Zemlja u svom kretanju povlači projektil sa sobom.

Najveća daljina dometa η_1 projektila dobiće se unošenjem vrednosti t_1 iz (33) u drugu jednačinu (30). Kad se opet zanemare male veličine višeg reda, za domet će se dobiti obrazac

$$(35) \quad \eta_1 = v_0 \tau \cos \alpha \left(1 + \frac{2 v_0 \omega}{g} \cos \varphi \cos \alpha \right) - v_0 \tau^2 \omega \cos \varphi \sin \alpha + \frac{g \tau^3}{3} \omega \cos \varphi.$$

Najveća daljina dometa x_D u slučaju kosog hica kad se zanemari Zemljina rotacija, prema (2.6.1—7) iznosi

$$(36) \quad x_D = \dot{x}_0 \tau = v_0 \tau \cos \alpha = \frac{v_0^2}{g} \sin 2 \alpha,$$

pa je razlika u dometu za slučaj izbacivanja projektila u ravni, upravnoj na meridijan mesta izbacivanja

$$(37) \quad \Delta \eta = \eta_1 - x_D = \frac{4}{3} \frac{v_0^3}{g} \omega (1 - 4 \cos^2 \alpha) \cos \varphi \cos \alpha.$$

4. *Fukoovo* (Foucault) *klatno* je sferno klatno vezano za Zemlju koja se obrće. Posmatraju se samo male oscilacije tog klatna oko položaja ravnoteže. Fuko-

ovo klatno može da se približno ostvari pomoću teške loptice obešene o veoma dug konac tako da je tačka vešanja nepokretna u odnosu na Zemlju.

Na materijalnu tačku izvedenu malo iz ravnotežnog položaja (kad se konac izvede za veoma mali ugao iz pravca vertikalne) dejstvuje pored aktivne sile mg i Koriolisova sila $\mathbf{F}_C = -2m(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r)$ i sila reakcije veze \mathbf{R}_N (sl. 106).

Vektorska diferencijalna jednačina kretanja (9) može se onda napisati u obliku ($\dot{\rho}$ i $\ddot{\rho}$ su ovde relativni izvodi)

$$(40) \quad \ddot{\boldsymbol{\rho}} = \mathbf{g} - 2(\boldsymbol{\omega} \times \dot{\boldsymbol{\rho}}) + \mathbf{R}^*,$$

gde je $\mathbf{R}^* = \mathbf{R}/m$. Jednačina veze je

$$(41) \quad f \equiv \rho^2 - a^2 = 0,$$

pa je reakcija veze

$$(42) \quad \mathbf{R}^* = \lambda \text{grad } f = 2\lambda \boldsymbol{\rho}.$$

Unošenjem ovoga u (40) za vektorsku diferencijalnu jednačinu kretanja se dobiva

$$(43) \quad \ddot{\boldsymbol{\rho}} = \mathbf{g} - 2(\boldsymbol{\omega} \times \dot{\boldsymbol{\rho}}) + 2\lambda \boldsymbol{\rho}.$$

Za male oscilacije vektor položaja $\boldsymbol{\rho}$ teške tačke u odnosu na tačku vešanja klatna može se rastaviti u dve komponente

$$(44) \quad \boldsymbol{\rho} = \mathbf{a} + \boldsymbol{\rho}_1$$

tako da komponenta \mathbf{a} predstavlja vertikalni prečnik sfere (orijentisan naniže) a vektor $\boldsymbol{\rho}_1$ je vektor položaja teške tačke u horizontalnoj ravni.

U najnižoj tački sfere je, prema tome, sferna površ zamenjena tangentnom horizontalnom ravni, što se za male oscilacije klatna oko najnižeg položaja na sferi može učiniti. Zbog (44) diferencijalna jednačina kretanja (43) dobiva oblik ($\dot{\rho}_1$ i $\ddot{\rho}_1$ su relativni izvodi)

$$(45) \quad \ddot{\boldsymbol{\rho}}_1 = \mathbf{g} + 2\lambda \mathbf{a} - 2(\boldsymbol{\omega} \times \dot{\boldsymbol{\rho}}_1) + 2\lambda \boldsymbol{\rho}_1.$$

Ugaona brzina obrtanja Zemlje $\boldsymbol{\omega}$ može se rastaviti na dve komponente, jednu u pravcu vertikalne kroz tačku vešanja klatna,

$$(46) \quad \boldsymbol{\omega}_1 = (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{v} = \omega \sin \varphi \mathbf{v}$$

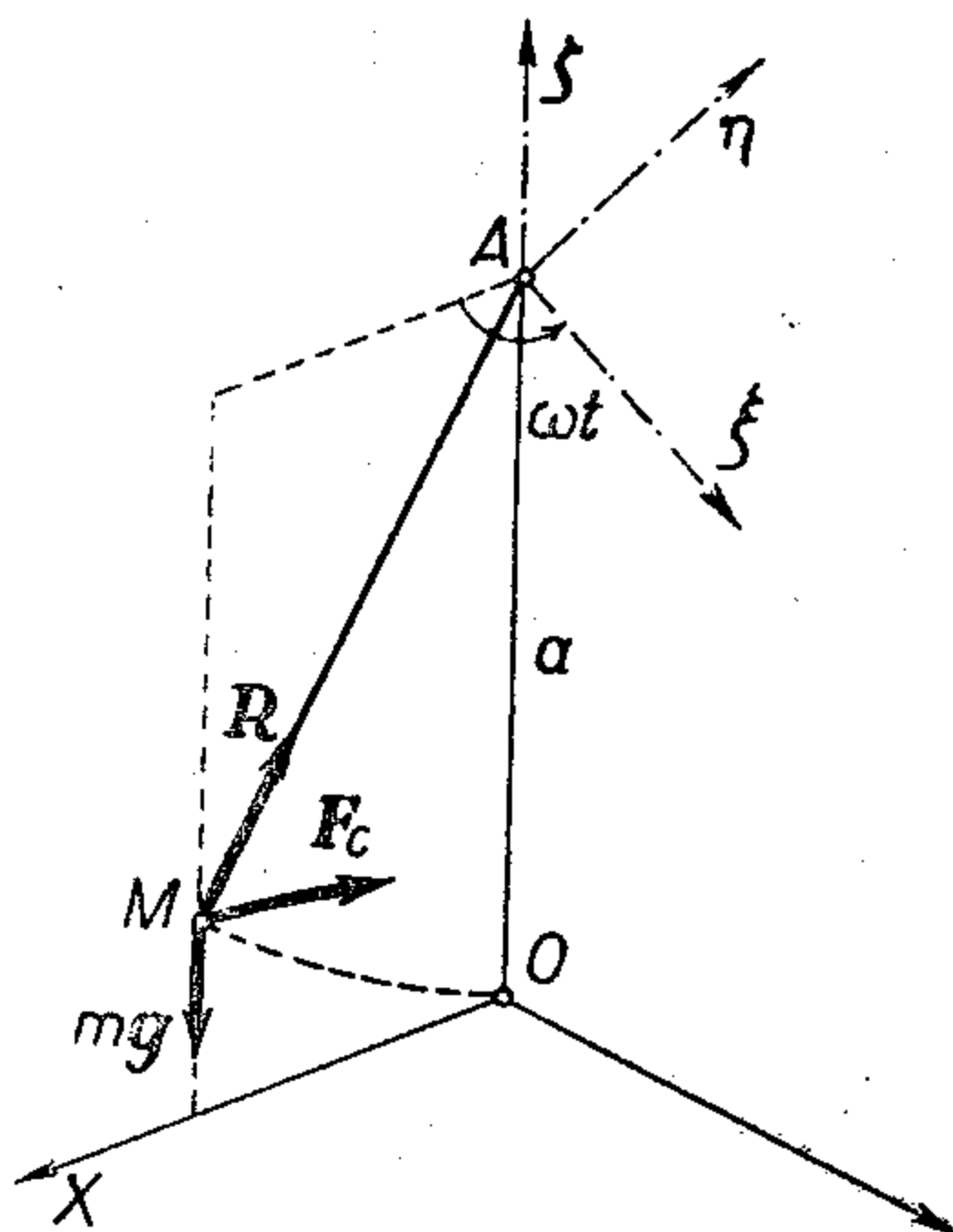
i jednu $\boldsymbol{\omega}_2$ u horizontalnoj ravni. Veličina ove druge komponente je $\omega_2 = \omega \cos \varphi$. Vektorski proizvod $\boldsymbol{\omega} \times \dot{\boldsymbol{\rho}}_1$ se onda rastavlja u dva komponentna proizvoda

$$(47) \quad \boldsymbol{\omega} \times \dot{\boldsymbol{\rho}}_1 = \boldsymbol{\omega}_1 \times \dot{\boldsymbol{\rho}}_1 + \boldsymbol{\omega}_2 \times \dot{\boldsymbol{\rho}}_1.$$

Vektor $\boldsymbol{\omega}_1 \times \dot{\boldsymbol{\rho}}_1$ nalazi se u horizontalnoj ravni, jer je $\boldsymbol{\omega}_1$ vertikalno. Vektor $\boldsymbol{\omega}_2 \times \dot{\boldsymbol{\rho}}_1$ je vertikalno, jer se vektori $\boldsymbol{\omega}_2$ i $\dot{\boldsymbol{\rho}}_1$ nalaze u horizontalnoj ravni. Diferencijalna jednačina kretanja sad se svodi na oblik

$$(48) \quad \ddot{\boldsymbol{\rho}}_1 = \mathbf{g} + 2\lambda \mathbf{a} - 2\boldsymbol{\omega}_2 \times \dot{\boldsymbol{\rho}}_1 - 2\boldsymbol{\omega}_1 \times \dot{\boldsymbol{\rho}}_1 + 2\lambda \boldsymbol{\rho}_1,$$

u kome su razdvojeni vektori koji se nalaze u horizontalnoj ravni i vektori kolinearni sa vertikalom. Prema tome, vektorska jednačina (48) se raspada na dve



Slika 106

vektorske jednačine; kretanje u horizontalnoj ravni je određeno vektorskom jednačinom.

$$(49) \quad \ddot{\mathbf{q}}_1 = -2 \boldsymbol{\omega}_1 \times \dot{\mathbf{q}}_1 + 2 \lambda \mathbf{q}_1,$$

dok je kretanje u pravcu vertikale određeno vektorskom relacijom

$$(50) \quad \mathbf{0} = \mathbf{g} + 2 \lambda \mathbf{a} - 2 \boldsymbol{\omega}_2 \times \dot{\mathbf{q}}_1.$$

Ugaona brzina $\boldsymbol{\omega}_2$ i brzina horizontalnog pomeranja $\dot{\mathbf{q}}_1$ su male veličine pa stoga proizvod $\boldsymbol{\omega}_2 \times \dot{\mathbf{q}}_1$ može da se zanemari u relaciji (50) kao mala veličina drugog reda u poređenju sa konačnim veličinama \mathbf{g} i \mathbf{a} , tako da se (50) svodi na

$$(51) \quad \mathbf{g} + 2 \lambda \mathbf{a} = \mathbf{0}.$$

Kako su vektori \mathbf{g} i \mathbf{a} kolinearni, jednačini (51) odgovara skalarna jednačina iz koje se neposredno nalazi množilac veze λ

$$(52) \quad \lambda = -\frac{g}{2a}.$$

Zamenom vrednosti za množilac veze λ u diferencijalnoj jednačini (49) horizontalnog kretanja sfernog klatna ova jednačina postaje

$$(53) \quad \ddot{\mathbf{q}}_1 = -2 \boldsymbol{\omega}_1 \times \dot{\mathbf{q}}_1 + \frac{g}{a} \mathbf{q}_1.$$

Projiciranjem na ose ξ i η u horizontalnoj ravni vektorske jednačine (53) dobiće se dve skalarne jednačine kretanja

$$(54) \quad \begin{aligned} \ddot{\xi} &= 2 \omega_1 \dot{\eta} - \frac{g}{a} \xi; \\ \ddot{\eta} &= -2 \omega_1 \dot{\xi} - \frac{g}{a} \eta, \end{aligned}$$

gde je prema (46) $\omega_1 = \omega \sin \varphi$.

Diferencijalne jednačine (54) su spregnute. U cilju njihovog integraljenja zgodno je uvesti nove koordinate X i Y u horizontalnoj ravni tako da se mesto jednačina (54) dobije sistem nespregnutih jednačina. Uvedimo zbog toga koordinatnu transformaciju

$$(55) \quad \begin{aligned} \xi &= X \cos \alpha + Y \sin \alpha; \\ \eta &= -X \sin \alpha + Y \cos \alpha, \end{aligned}$$

u kojoj su nove koordinate X i Y kao i ugao α funkcije vremena. Diferencijacijom tih relacija i unošenjem u jednačine kretanja (54) dobiće se dve jednačine

$$\begin{aligned} &\ddot{X} \cos \alpha + \ddot{Y} \sin \alpha - 2 \dot{X} \dot{\alpha} \sin \alpha + 2 \dot{Y} \dot{\alpha} \cos \alpha - X \dot{\alpha}^2 \cos \alpha - Y \dot{\alpha}^2 \sin \alpha = \\ &= -2 \omega_1 \dot{X} \sin \alpha + 2 \omega_1 \dot{Y} \cos \alpha - 2 \omega_1 X \dot{\alpha} - 2 \omega_1 Y \dot{\alpha} \sin \alpha - \frac{g}{a} (X \cos \alpha + Y \sin \alpha); \\ &- \ddot{X} \sin \alpha + \ddot{Y} \cos \alpha - 2 \dot{X} \dot{\alpha} \cos \alpha - 2 \dot{Y} \dot{\alpha} \sin \alpha + X \dot{\alpha}^2 \sin \alpha - Y \dot{\alpha}^2 \cos \alpha = \\ &= -2 \omega_1 \dot{X} \cos \alpha - 2 \omega_1 \dot{Y} \sin \alpha + 2 \omega_1 X \dot{\alpha} \sin \alpha - 2 \omega_1 Y \dot{\alpha} \cos \alpha + \frac{g}{a} (X \sin \alpha - Y \cos \alpha). \end{aligned}$$

Ako se u njima stavi da je $\dot{\alpha} = \omega_1$, odn. $\alpha = \omega_1 t + \alpha_0$ ove dve jednačine će se uprostiti

$$\begin{aligned} \ddot{X} \cos \alpha + \ddot{Y} \sin \alpha &= -X \omega_1^2 \cos \alpha - Y \omega_1^2 \sin \alpha - \frac{g}{a} (X \cos \alpha + Y \sin \alpha), \\ -\ddot{X} \sin \alpha + \ddot{Y} \cos \alpha &= X \omega_1^2 \sin \alpha - Y \omega_1^2 \cos \alpha + \frac{g}{a} (X \sin \alpha - Y \cos \alpha). \end{aligned} \quad (56)$$

Na taj način uvedeni koordinatni sistem OXY u horizontalnoj ravni obrće se ugaonom brzinom ω_1 oko vertikalne ose u odnosu na koordinatni sistem $A\xi\eta$ od istoka na zapad. Međutim ravan $\xi\eta$ se zajedno sa Zemljom obrće istom ugaonom brzinom od zapada na istok, pa otuda proističe da ravan XY ostaje pri obrtanju Zemlje u miru i da se u odnosu na tu ravan koordinatni sistem $A\xi\eta$ obrće ugaonom brzinom ω_1 od zapada na istok.

Ako se sad prva jednačina (56) pomnoži sa $\cos \alpha$ a druga sa $-\sin \alpha$ i tako dobivene jednačine saberu, a zatim prva pomnoži sa $\sin \alpha$ a druga sa $\cos \alpha$ i ponovo saberu, dobiće se dve jednostavne diferencijalne jednačine kretanja

$$\begin{aligned} \ddot{X} + \left(\omega_1^2 + \frac{g}{a} \right) X &= 0; \\ \ddot{Y} + \left(\omega_1^2 + \frac{g}{a} \right) Y &= 0, \end{aligned} \quad (57)$$

koje više nisu spregnute. To su diferencijalne jednačine harmonijskih oscilacija (2.5.2.1—20) duž X -ose i duž Y -ose. Dakle, jednačine (57) određuju u horizontalnoj ravni koja ima u prostoru stalnu orijentaciju (relativno prema Zemlji ona se obrće sa istoka na zapad) dve uzajamno upravne harmonijske oscilacije i prema tome elipsu kao putanju Fukoovog klatna u toj ravni. Integrali jednačina (57) su (prema 2.5.2.1)

$$\begin{aligned} X &= A_1 \cos nt + A_2 \sin nt, \\ Y &= B_1 \cos nt + B_2 \sin nt. \end{aligned} \quad \left(n^2 = \omega_1^2 + \frac{g}{a} \right) \quad (58)$$

Ako se u početnom trenutku $t = 0$ ose X i ξ , kao i ose Y i η poklapaju, ($\alpha_0 = 0$), a klatnu se da početna amplituda $X_0 = \xi_0 = l_0$, $Y_0 = \eta_0 = 0$ i pusti se da osciluje bez početne brzine

$$X = l \cos nt, \quad Y = 0, \quad (59)$$

ovo klatno će se kretati duž X -ose koja u prostoru ima stalnu orijentaciju. Međutim, u ravni $\xi\eta$, koja se kreće zajedno sa Zemljom, klatno će opisivati neku krivu liniju. Unošenjem vrednosti (59) u koordinatnu transformaciju (55) u kojoj je sada $\alpha = \omega t$ dobiće se jednačine putanje klatna u pokretnoj horizontalnoj ravni

$$\begin{aligned} \xi &= X \cos \omega_1 t = l \cos nt \cos \omega_1 t, \\ \eta &= -X \sin \omega_1 t = -l \cos nt \sin \omega_1 t. \end{aligned} \quad (60)$$

Period oscilovanja klatna u ravni oscilovanja AOX je $\frac{2\pi}{n} = \frac{2\pi \sqrt{a}}{\sqrt{g + \omega_1^2}}$.

Sama ravan klaćenja će se obrnuti za 2π za vreme

$$(61) \quad T = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi}{\omega \sin \varphi}.$$

Kako Zemlja oko svoje ose napravi jedan obrt za 24 časa, obrćući se ugaonom brzinom ω , biće $2\pi = \omega \cdot 24 \text{ h}$ pa se (61) može izraziti i u obliku

$$(62) \quad T = \frac{24 \text{ h}}{\sin \varphi}.$$

Dakle, brzina obrtanja ravni oscilovanja zavisi od geografske širine φ . Najveći efekt obrtanja je na samom polu ($\varphi = \pi/2$), gde se ravan klaćenja obrne potpuno za 24 časa, a najmanji efekt obrtanja je na ekvatoru ($\varphi = 0$) gde uopšte nema obrtanja. Obrćući se ugaonom brzinom $\omega_1 = \omega \sin \varphi$ ravan klaćenja se za jedan čas na geografskoj širini φ obrne za ugao (u radijanima)

$$(63) \quad \alpha = 1 \text{ h} \cdot \omega \sin \varphi = \frac{\pi \sin \varphi}{12},$$

a u stepenima ($\pi/12$ radijana $= 15^\circ$)

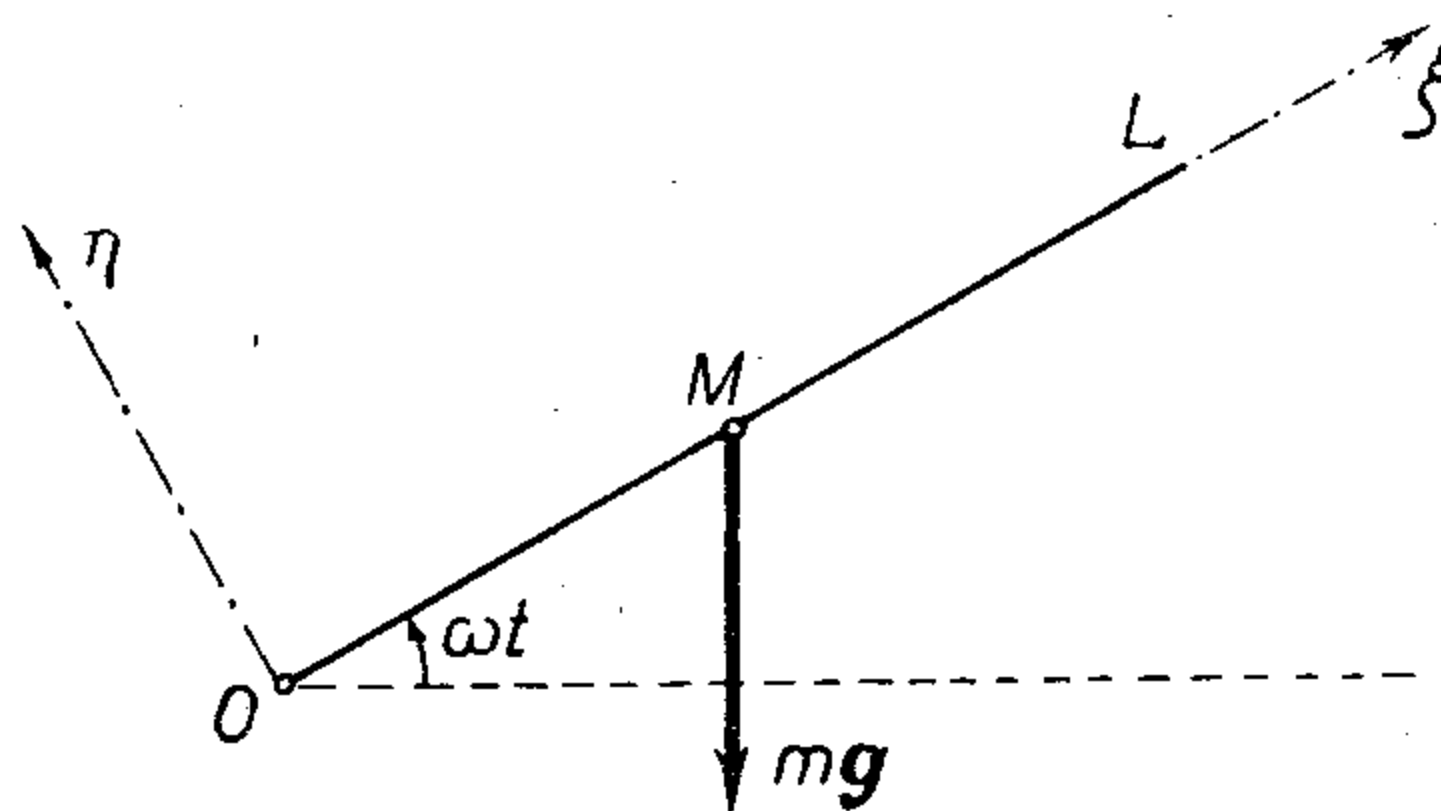
$$(64) \quad \alpha^\circ = 15^\circ \cdot \sin \varphi.$$

U Beogradu ($\varphi = 44^\circ 48' 13''$) ravan klaćenja se obrne za $10^\circ 34'$ u toku jednog časa.

Fukoovo klatno je jedan od relativno lako izvodljivih eksperimenata za dokazivanje Zemljine rotacije. Sam Fuko je taj eksperiment izveo prvi 1851. godine u Parizu sa klatnom dužine 67 m i težine 30 kp.

Primeri i zadaci

1. Teška tačka M se kreće po glatkoj pravnoj liniji OL , koja se sa svoje strane obrće u vertikalnoj ravni konstantnom ugaonom brzinom ω oko horizontalne ose kroz O . Ako je u početnom trenutku prava OL bila horizontalna i ako



Slika 107

je tačka imala relativnu brzinu v_0 i nalazila se na rastojanju a od ose obrtanja, odrediti relativno kretanje tačke i silu reakcije.

$$\text{Apsolutno ubrzanje tačke je } \mathbf{w}_a = \overset{\ominus}{\mathbf{q}} + 2 \overset{\ominus}{\boldsymbol{\omega}} \times \overset{\odot}{\mathbf{q}} - \omega^2 \overset{\odot}{\mathbf{q}}.$$

Ako se prava OL poklopi sa ξ -osom a η -osa izabere tako da bude upravna na pravu OL u ravni obrtanja (sl. 107) onda je $\mathbf{p} = \xi \boldsymbol{\lambda}$, $\mathbf{p}^{\odot} = \dot{\xi} \boldsymbol{\lambda}$, $\mathbf{p}^{\ominus} = \ddot{\xi} \boldsymbol{\lambda}$ i projekcije apsolutnog ubrzanja su

$$w_{\xi} = \ddot{\xi} - \omega^2 \xi, \quad w_{\eta} = 2 \omega \dot{\xi}.$$

Diferencijalne jednačine kretanja su

$$\ddot{\xi} - \omega^2 \xi = -g \sin \omega t,$$

$$2 \omega \dot{\xi} = \frac{R}{m} - g \cos \omega t.$$

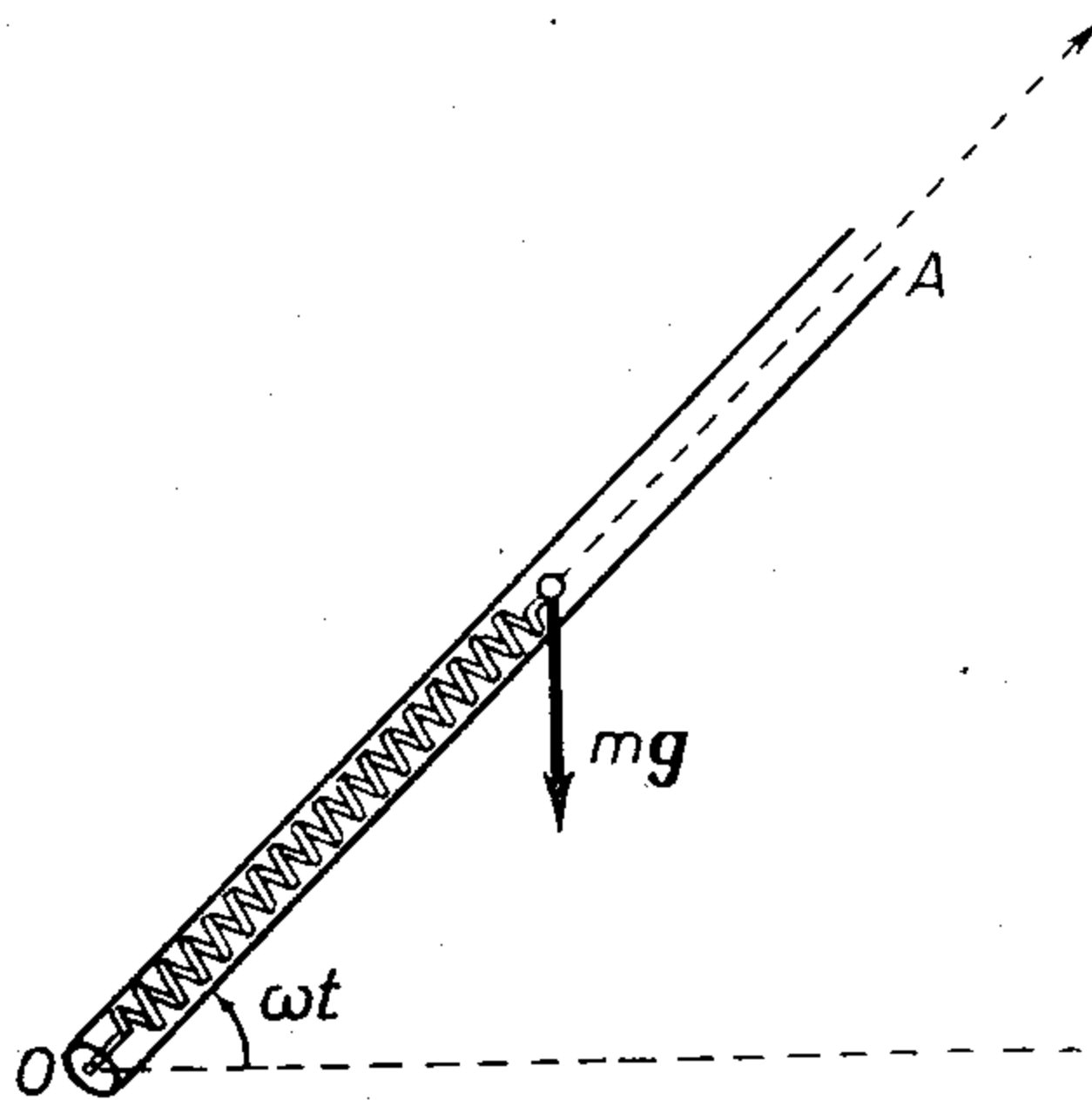
Integraljenjem prve jednačine dobiće se konačna jednačina relativnog kretanja

$$\xi = a \operatorname{ch} \omega t + \left(\frac{v_0}{\omega} - \frac{g}{2 \omega^2} \right) \operatorname{sh} \omega t + \frac{g}{2 \omega^2} \sin \omega t.$$

Unošenjem vrednosti za relativnu brzinu $\dot{\xi}$, koja se dobiva diferencijaljenjem konačne jednačine relativnog kretanja po vremenu, u drugu od jednačina kretanja nalazi se sila reakcije veze,

$$R = m [2 g \cos \omega t + 2 a \omega^2 \operatorname{sh} \omega t + (2 v_0 \omega - g) \operatorname{ch} \omega t].$$

2. Pravolinijska glatka cev OA obrće se u vertikalnoj ravni oko horizontalne ose O konstantnom ugaonom brzinom ω . U cevi se nalazi teška tačka, učvršćena za jedan kraj elastične opruge krutosti c čiji je drugi kraj pričvršćen u tački O (sl. 108). Odrediti relativno kretanje tačke u odnosu na cev, ako je u početnom



Slika 108

trenutku cev bila horizontalna, relativna brzina tačke jednaka nuli a opruga neistegnuta i dužine l_0 .

Neka je u ravni obrtanja prave OA u tački O početak koordinatnog sistema $O\xi\eta$, neka se ξ -osa poklapa sa pravcem OA i neka je η -osa upravna na OA u ravni obrtanja.

Apsolutno ubrzanje pokretne tačke je

$$\begin{aligned}\mathbf{w}_a &= \overset{\ominus}{\mathbf{q}} + 2 \overset{\ominus}{\boldsymbol{\omega}} \times \overset{\ominus}{\mathbf{q}} + \overset{\ominus}{\boldsymbol{\omega}} \times (\overset{\ominus}{\boldsymbol{\omega}} \times \overset{\ominus}{\mathbf{q}}) \\ &= (\ddot{\xi} - \omega^2 \xi) \boldsymbol{\lambda} + 2 \omega \dot{\xi} \boldsymbol{\mu}.\end{aligned}$$

Aktivna sila teže je $\mathbf{F}_1 = mg$ i ima koordinate (slika) $F_{1\xi} = mg \sin \varphi$, $F_{1\eta} = -mg \cos \varphi$ ($\varphi = \omega t$). Elastična sila je kolinearna sa ξ -osom, $\mathbf{F}_2 = -c(\xi - l_0) \boldsymbol{\lambda}$. Skalarnе diferencijalne jednačine kretanja će biti

$$\begin{aligned}\ddot{\xi} + \left(\frac{c}{m} - \omega^2\right) \xi &= g \sin \omega t + \frac{c}{m} l, \\ 2 \omega \dot{\xi} &= -g \cos \omega t + \frac{R}{m}.\end{aligned}$$

Moguća su tri slučaja:

1) $n^2 = c/m - \omega^2 > 0$; tada je konačna jednačina relativnog kretanja

$$\xi = \frac{l}{n^2} \left(\frac{c}{m} - \omega^2 \cos nt \right) + \frac{mg}{c} \left(\sin \omega t - \frac{\omega}{n} \sin nt \right);$$

2) $c/m - \omega^2 = 0$; konačna jednačina relativnog kretanja je

$$\xi = \frac{g}{\omega^2} (\omega t - \sin \omega t) + \frac{cl}{2m} t^2 + \frac{g}{\omega} t + l_0;$$

3) $c/m - \omega^2 = -n^2 < 0$; konačna jednačina relativnog kretanja će biti

$$\begin{aligned}\xi &= -l_0 \frac{m\omega^2 - 2c^2}{mn^2} \operatorname{ch} nt + \frac{\omega}{n} \frac{mg}{2m\omega^2 - c} \operatorname{sh} nt - \\ &\quad - \frac{mg}{2m\omega^2 - c} \sin \omega t - \frac{cl_0}{mn^2}.\end{aligned}$$

D. DINAMIKA MATERIJALNOG SISTEMA

Skup materijalnih tačaka obrazuje *materijalni sistem*. Materijalne tačke koje obrazuju sistem mogu da se nalaze međusobno na konačnim rastojanjima i da ih ima konačan broj. Tada se govori o *diskretnom sistemu* i to je materijalni sistem u užem smislu reči. Masa može u nekom delu prostora (oblasti) da bude i neprekidno raspoređena. Tada materijalnih tačaka ima beskonačno mnogo i sistem obrazuje *neprekidnu sredinu (kontinuum)*. Oblast prostora ispunjena neprekidno raspoređenom masom predstavlja *materijalno telo*. Ako se pod dejstvom sila ne menja oblik i veličina tela, kaže se da je telo *kruto*, u suprotnom ono je *čvrsto*, ako ima stalan oblik ali pod dejstvom sila može da menja i oblik i veličinu, a *fluidno* kad nema stalan oblik već oblik suda u kome se nalazi. Takođe se kaže da je i diskretnan sistem krut ako se međusobna rastojanja materijalnih tačaka pod dejstvom sila i za vreme kretanja ne menjaju.

3.1. Geometrija masa

3.1.1. Gustina

Ako se u nekoj oblasti prostora (telu) zapremine ΔV nalazi masa Δm količnik

$$(1) \quad \sigma_s = \frac{\Delta m}{\Delta V}$$

zove se *srednja gustina*. Ovako definisan pojam srednje gustine odnosi se kako na telo (kada je zapremina ΔV ispunjena neprekidno raspoređenim masama) tako i na diskretnan sistem materijalnih tačaka koje se nalaze u oblasti prostora zapremine ΔV .

Granična vrednost srednje gustine kad zapremina ΔV teži nuli u nekoj tački prostora

$$(2) \quad \sigma = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} = \frac{dm}{dV}$$

naziva se *gustina u datoj tački*. Gustina σ može da zavisi od niza faktora, po pravilu od položaja, a zatim od vremena, temperature itd. U racionalnoj mehanici se posmatra prvenstveno zavisnost gustine od položaja

$$(3) \quad \sigma = \sigma(\mathbf{r}) = \sigma(x, y, z)$$

i relacije takvog oblika određuju raspored masa u prostoru.

Ako je za neko telo $\sigma = \text{const.}$ kaže se da je telo *homogeno*, u protivnom gustina se menja od tačke do tačke i telo je *nehomogeno*.

Celokupna masa nekog materijalnog sistema je zbir masa svih materijalnih tačaka tog sistema. Ako su mase nekog diskretnog sistema $m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, \dots, m_N$ celokupna masa je

$$(4) \quad m = \sum_{i=1}^N m_i.$$

Celokupna masa nekog tela ili dela tela obuhvaćenog zapreminom V prema (2) biće data obrascem

$$(5) \quad m = \int_V \sigma dV.$$

pri čemu (trostruki) integral po zapremini predstavlja granični slučaj zbira u obrascu (4), kad broj materijalnih tačaka teži beskonačnosti, $N \rightarrow \infty$, u ograničenom delu V prostora.

Obrazac (5) može da se primeni i na diskretne sisteme, kao i na slučajevne sisteme koji se sastoje od neprekidno raspoređenih masa i diskretnih materijalnih tačaka (koncentrisanih masa). U slučaju diskretno raspoređenih materijalnih tačaka gustina σ nije neprekidna funkcija položaja; ona je svuda jednaka nuli sem u onim tačkama prostora u kojima se nalaze pojedine materijalne tačke m_i . U tim tačkama je gustina m_i . Da bi obrazac (5) mogao da bude primenjen i na takve slučajevne zgodno je uvesti *Dirakovu* (Dirac) δ -funkciju (*delta-funkciju*) koja nije funkcija u uobičajenom smislu već predstavlja u stvari *generalisanu funkciju* (*distribuciju*).

Jednodimenziona δ -funkcija, $\delta(x)$, je definisana pomoću njene naredne dve osobine:

$$(6) \quad \delta(x) = 0, \text{ za sve vrednosti } x \text{ sem za } x = 0, \text{ i}$$

$$(7) \quad \int_a^b \delta(x) dx = 1, \text{ ako interval } a \leq x \leq b \text{ obuhvata tačku } x = 0.$$

Prema ovoj definiciji, ako je x_0 neka uočena vrednost nezavisno promenljive x , odn. neka tačka na x -osi, biće

$$(8) \quad \delta(x - x_0) = 0, \quad \text{za sve } x \neq x_0$$

i

$$(9) \quad \int_a^b \delta(x - x_0) dx = 1. \quad (a \leq x_0 \leq b)$$

Iz definicije δ -funkcije proističe jedan važan obrazac. Ako je $f(x)$ neka neprekidna funkcija, onda je

$$(10) \quad \int_a^b f(x) \delta(x - x_0) dx = f(x_0).$$

Dokaz ovog obrasca sledi iz osobina (8) i (9). Podintegralna funkcija $f(x) \delta(x - x_0)$, prema (8), jednaka je nuli za sve vrednosti $x \neq x_0$, pa se stoga može pisati

$$\int_a^b f(x) \delta(x - x_0) dx = \int_a^b f(x_0) \delta(x - x_0) dx,$$

a kako je $f(x_0)$ određena vrednost funkcije f u tački x_0 , prema (9) je

$$\int_a^b f(x_0) \delta(x - x_0) dx = f(x_0) \int_a^b \delta(x - x_0) dx = f(x_0),$$

čime je obrazac (10) dokazan.

Prostorna δ -funkcija

$$\delta(\mathbf{r}) = \delta(x, y, z)$$

definisana je obrascem

$$(11) \quad \delta(x, y, z) = \delta(x) \delta(y) \delta(z).$$

Osobine jednodimenzione δ -funkcije (8) i (9) proširuju se i na prostornu δ -funkciju tako da je

$$(12) \quad \begin{aligned} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) &= 0 & \text{za } \mathbf{r} \neq \mathbf{r}_0, \\ \int_V \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) dV &= 1 & \text{za } V \supset \mathbf{r}_0. \end{aligned}$$

Drugim rečima, prostorna δ -funkcija jednaka je nuli u svim tačkama prostora sem u \mathbf{r}_0 , tj. sem u tački u kojoj argument ima vrednost nulu, jer je

$$(13) \quad \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0) = \delta(x-x_0) \delta(y-y_0) \delta(z-z_0),$$

pa se na komponentne δ -funkcije $\delta(x-x_0)$, $\delta(y-y_0)$, $\delta(z-z_0)$ primenjuje obrazac (8). Takođe se i za drugi obrazac (12) može reći da važi za svaku oblast V prostora koja sadrži tačku \mathbf{r}_0 .

Analogno sa obrascem (10) koji je dokazan za jednodimenzionu δ -funkciju važi za prostornu δ -funkciju obrazac

$$(14) \quad \int_V f(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0) dV = f(\mathbf{r}_0),$$

gde je $f(\mathbf{r})$ proizvoljna „normalna“ funkcija položaja.

Neka je u prostoru dat diskretan sistem materijalnih tačaka m_1, m_2, \dots, m_N sa vektorima položaja $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N$, tako da se sve tačke tog sistema nalaze u nekoj oblasti V prostora. Gustina tog sistema pomoću δ -funkcije može da se izrazi obrascem

$$(15) \quad \sigma(\mathbf{r}) = m_1 \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1) + m_2 \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_2) + \dots + m_N \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_N)$$

ili

$$(16) \quad \sigma(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^N m_i \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_i).$$

Celokupna masa tog sistema je

$$(17) \quad m = \int_V \sigma dV = \int_V \sum_{i=1}^N m_i \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_i) dV = \sum_{i=1}^N m_i \int_V \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_i) dV.$$

Kako oblast integracije obuhvata sve tačke \mathbf{r}_i , $i=1, 2, 3, \dots, N$, to se na svaki pojedinačni integral može primeniti obrazac (13),

$$\int_V \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_i) dV = 1$$

pa je

$$m = \sum_{i=1}^N m_i,$$

odakle se vidi da se obrascem (5), koji je prvobitno važio samo za neprekidno raspoređene mase, obuhvataju i diskretni sistemi.

Kad se u nekom telu gustine $\sigma^*(\mathbf{r})$ nalazi, recimo, u tački \mathbf{r}' koncentrisana masa m' , opšti obrazac za gustinu je

$$(18) \quad \sigma(\mathbf{r}) = \sigma^*(\mathbf{r}) + m' \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}'),$$

pa je celokupna masa, ako je zapremina tela V ,

$$(19) \quad \int_V \sigma dV = \int_V \sigma^* dV + \int_V m' \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') dV = \overset{*}{m} + m',$$

gde je $\overset{*}{m}$ masa tela bez diskretne mase m' . Obrazac (18) može da se proširi i na proizvoljan broj N diskretnih tačaka u telu V ,

$$(20) \quad \sigma(\mathbf{r}) = \sigma^*(\mathbf{r}) + \sum_{i=1}^N m_i \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_i),$$

tako da će ukupna masa sistema biti

$$(21) \quad m = \int_V \sigma dV = \int_V \sigma^* dV + \sum_{i=1}^N m_i \int_V \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_i) dV = \overset{*}{m} + \sum_{i=1}^N m_i.$$

Celokupna masa nekog sistema može biti raspoređena u tanjem sloju po nekoj površi (ploče, ljuske itd.) i tada se može odrediti relacija te mase prema površini S na kojoj se nalazi. Gustina takvog rasporeda masa naziva se *površinska*

gustina masa. Ako je ΔS površina na kojoj se nalazi masa Δm , srednja gustina σ_{1s} mase na površi je

$$(22) \quad \sigma_{1s} = \frac{\Delta m}{\Delta S},$$

a površinska gustina u određenoj tački je

$$(23) \quad \sigma_1 = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta S} = \frac{dm}{dS}.$$

Celokupna masa na površini S je

$$(24) \quad m = \int_S \sigma_1 dS,$$

gde je \int_S površinski (dvostruki) integral po površini S .

Masa nekog sistema može biti raspoređena i duž neke krive linije L . Ako se na dužini ΔL te linije nalazi masa Δm , srednja linijska gustina mase je

$$(25) \quad \sigma_{2s} = \frac{\Delta m}{\Delta L},$$

a tzv. *linijska gustina* u određenoj tački biće

$$(26) \quad \sigma_2 = \lim_{\Delta L \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta L} = \frac{dm}{dL}.$$

Celokupna masa na liniji L je

$$(27) \quad m = \int_L \sigma_2 dL,$$

gde je \int_L linijski (jednostruki) integral duž L .

Dimenzija gustine mase proističe iz definicije. Za zapreminsku gustinu je iz (2)

$$(28) \quad [\sigma] = M L^{-3},$$

dok je prema (23) dimenzija površinske gustine

$$(29) \quad [\sigma_1] = M L^{-2},$$

a prema (26) biće dimenzija linijske gustine

$$(30) \quad [\sigma_2] = M L^{-1}.$$

3.1.2. Centar masa. Linearni moment mase

Raspored masa nekog materijalnog sistema određen je gustinom mase tog sistema u oblasti prostora koju posmatrani sistem zauzima. Ako su mase raspoređene neprekidno gustina će biti neprekidna funkcija položaja oblika (3.1.1—3) za diskretne sisteme to je funkcija položaja koja se izražava u obliku (3.1.1—16). Za sisteme kod kojih je masa delimično raspoređena neprekidno a delimično je koncentrisana u pojedinim tačkama, gustina je određena relacijom (3.1.1—20).

Gustina je kao funkcija položaja određena u svakoj tački prostora. Van oblasti prostora koju obuhvata posmatrani materijalni sistem njena je vrednost nula

Ako je u tački \mathbf{r} gustina $\sigma(\mathbf{r})$, V oblast prostora koju posmatrani sistem obuhvata, a \mathbf{r} vektor položaja tačaka sistema u odnosu na zajednički pol O , vektor

$$(1) \quad \mathbf{M} = \int_V \sigma \mathbf{r} dV$$

zove se *linearni polarni moment* materijalnog sistema ili *vektorski statički moment sistema* u odnosu na pol O .

Za diskretni sistem relacija (1) se zbog (3.1.1—16) svodi na zbir

$$(2) \quad \mathbf{M} = \int_V \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) dV = \sum_{i=1}^N m_i \int_V \mathbf{r} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) dV,$$

a s obzirom na (3.1.1—14) biće

$$(3) \quad \int_V \mathbf{r} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) dV = \mathbf{r}_i,$$

tako da se (2) svodi na

$$(4) \quad \mathbf{M} = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i.$$

Vektorski linearni moment mase (1) može se projicirati na ose Dekartovog pravouglog koordinatnog sistema $Oxyz$. Na taj način se dobivaju tri skalarna momenta mase

$$(5) \quad M_x = \int_V \sigma x dV, \quad M_y = \int_V \sigma y dV, \quad M_z = \int_V \sigma z dV,$$

koji se za diskretni sistem prema (4) izražavaju u obliku

$$(6) \quad M_x = \sum_{i=1}^N m_i x_i, \quad M_y = \sum_{i=1}^N m_i y_i, \quad M_z = \sum_{i=1}^N m_i z_i.$$

Dekartove koordinate M_x , M_y , M_z linearnog momenta mase predstavljaju *linearne planarne momente* sistema ili *statičke momente* sistema u odnosu na koordinatne ravni yOz , zOx i xOy . Koordinate x , y i z pojedinih tačaka sistema predstavljaju normalna rastojanja tačaka od koordinatnih ravni yOz , zOx i xOy , pa se *linearni planarni moment* nekog sistema u odnosu na neku ravan Π može definisati uopšte kao zbir proizvoda masa tačaka sistema i rastojanja tih tačaka od ravni Π . Ako je rastojanje tačke \mathbf{r} u kojoj je gustina σ od ravni Π obeleženo sa $h(\mathbf{r})$, linearni planarni moment M_Π sistema u odnosu na ravan Π biće

$$(7) \quad M_\Pi = \int_V \sigma h(\mathbf{r}) dV.$$

Za diskretni sistem, kada gustina ima oblik (3.1.1—16) obrazac (7) postaje

$$(8) \quad M_\Pi = \int_V \sum_{i=1}^N m_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) h(\mathbf{r}) dV = \sum_{i=1}^N m_i h_i, \quad (h_i = h(\mathbf{r}_i)).$$

Pomoću linearnog polarnog momenta \mathbf{M} definisanog obrascem (1) može se odrediti jedna važna tačka vezana za materijalni sistem. Definiše se *centar mase* (*centar inercije*) materijalnog sistema kao tačka C određena vektorom položaja \mathbf{r}_C tako da bude

$$(9) \quad m \mathbf{r}_C = \mathbf{M} = \int_V \sigma \mathbf{r} dV,$$

pri čemu je m celokupna masa sistema a σ njegova gustina. Sam vektor položaja centra mase \mathbf{r}_C određen je obrascem

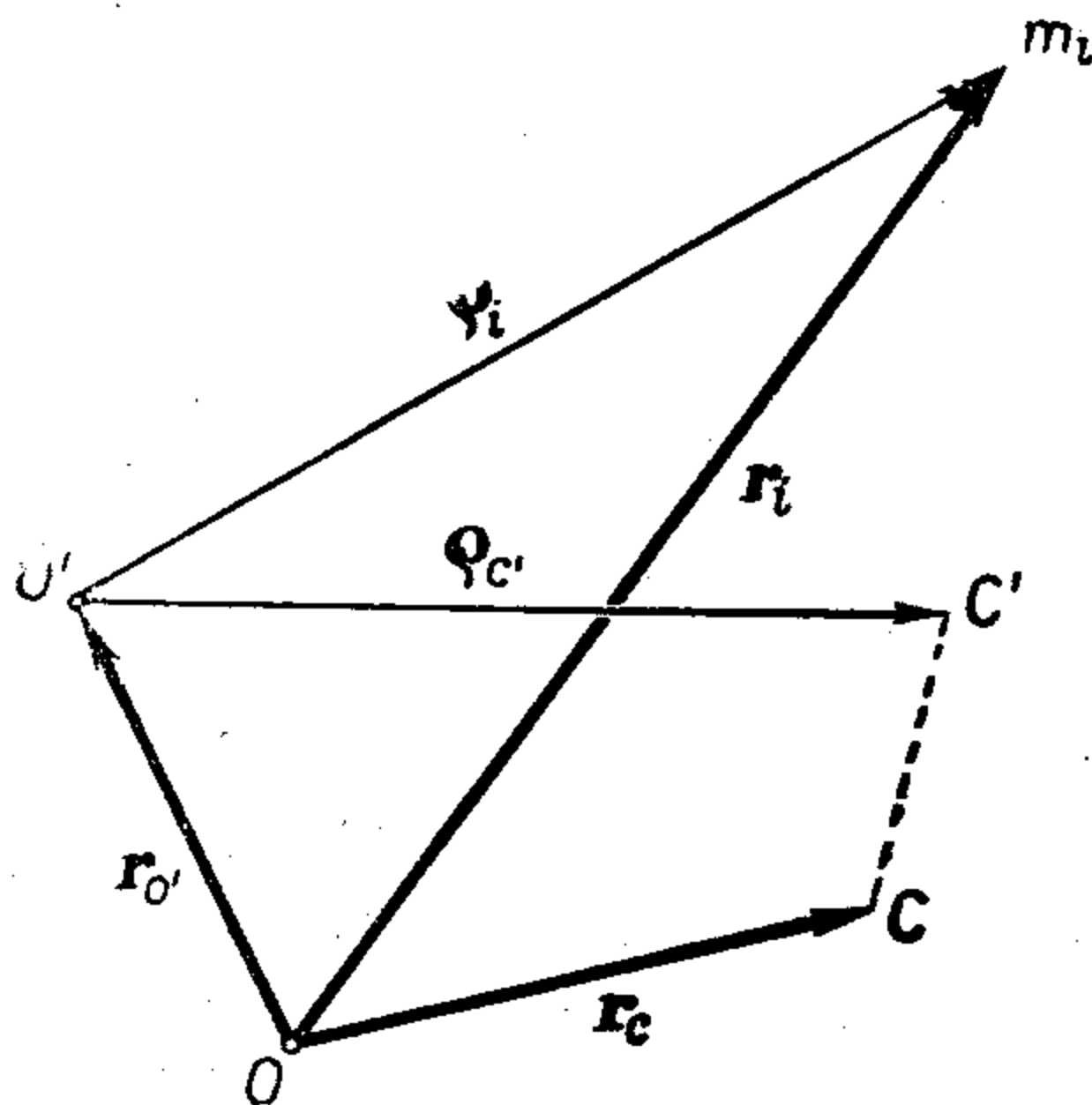
$$(10) \quad \mathbf{r}_C = \frac{1}{m} \mathbf{M} = \frac{1}{m} \int_V \sigma \mathbf{r} dV. \quad (m = \int_V \sigma dV)$$

Za diskretan sistem ovaj se obrazac svodi na zbir

$$(11) \quad \mathbf{r}_C = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i.$$

Postoje dve važne osobine centra mase:

1) *Položaj centra mase nekog sistema ne zavisi od izbora pola, već samo od rasporeda masa tog sistema.* Za dokaz može se u prostoru izabrati neki novi po



Slika 109

polu O' (sl. 109) prema kome su vektor položaja tačaka sistema \mathbf{q}_i . Neka je C' centar mase sistema u odnosu na pol O' . Za diskretni sistem se može pisati

$$(12) \quad m \mathbf{q}_{C'} = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{q}_i.$$

Ako je $\mathbf{r}_{O'}$ vektor položaja pola O prema polu O' , može se pisati

$$\mathbf{q}_i = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{O'},$$

pa je

$$\begin{aligned} m \mathbf{q}_{C'} &= \sum_{i=1}^N m_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{O'}) = \\ &= m \mathbf{r}_C - m \mathbf{r}_{O'}, \end{aligned}$$

odakle proističe

$$\mathbf{q}_{C'} = \mathbf{r}_C - \mathbf{r}_{O'},$$

ili

$$\vec{O'C'} = \vec{OC} - \vec{OO'} = \vec{O'C},$$

što znači da se tačke C i C' poklapaju, odnosno položaj centra mase ne zavisi od izbora pola. Na sličan način se ovaj stav može dokazati i za neprekidno raspoređene mase.

2) *Linearni polarni moment mase u odnosu na centar mase jednak je nuli.* Neka su \mathbf{q}_i vektori položaja tačaka m_i nekog materijalnog sistema u odnosu na centar inercije C tog sistema, a neka su \mathbf{r}_i vektori položaja tih tačaka u odnosu na nek proizvoljno izabrani pol O . Sem toga neka je \mathbf{r}_C vektor položaja tačke C u odnosu na O . Tada je

$$(13) \quad \mathbf{q}_i = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_C.$$

Linearni polarni moment sistema u odnosu na C biće onda

$$(14) \quad \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{q}_i = \sum_{i=1}^N m_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_C) = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i - \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_C,$$

Prema definiciji centra masa relacija

$$(15) \quad \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{e}_i = m \mathbf{e}_C$$

određuje položaj \mathbf{e}_C centra masa u odnosu na pol C , dok je

$$(16) \quad \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i = m \mathbf{r}_C$$

i

$$(17) \quad \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_C = \left(\sum_{i=1}^N m_i \right) \mathbf{r}_C = m \mathbf{r}_C,$$

jer se sabiranje ne odnosi na vektor \mathbf{r}_C . Kad se relacije (15), (16) i (17) unesu u (14) dobiće se

$$(18) \quad \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{e}_i = m \mathbf{e}_C = m \mathbf{r}_C - m \mathbf{r}_C \equiv \mathbf{0},$$

što je i trebalo dokazati.

U Dekartovim pravouglim koordinatama položaj centra mase određen je projiciranjem vektorske relacije (10) odn. (11). Za neprekidno raspoređene mase biće

$$(19) \quad x_C = \frac{\int_V \sigma x dV}{\int_V \sigma dV}, \quad y_C = \frac{\int_V \sigma y dV}{\int_V \sigma dV}, \quad z_C = \frac{\int_V \sigma z dV}{\int_V \sigma dV},$$

a za diskretan sistem

$$(20) \quad x_C = \frac{\sum_{i=1}^N m_i x_i}{\sum_{i=1}^N m_i}, \quad y_C = \frac{\sum_{i=1}^N m_i y_i}{\sum_{i=1}^N m_i}, \quad z_C = \frac{\sum_{i=1}^N m_i z_i}{\sum_{i=1}^N m_i}.$$

U slučaju površinskog rasporeda masa biće linearni polarni moment određen obrascem

$$(21) \quad \mathbf{M}_1 = \int_S \sigma_1 \mathbf{r} dS = m \mathbf{r}_C,$$

pa su koordinate centra masa

$$(22) \quad x_C = \frac{1}{m} \int_S \sigma_1 x dS, \quad y_C = \frac{1}{m} \int_S \sigma_1 y dS, \quad z_C = \frac{1}{m} \int_S \sigma_1 z dS,$$

jer je celokupna masa, prema (3.1.1—24) data sa $m = \int_S \sigma_1 dS$.

Slično tome za linijski raspored masa biće

$$(23) \quad \mathbf{M}_2 = m \mathbf{r}_C = \int_L \sigma_2 \mathbf{r} dL,$$

pa su koordinate centra masa

$$(24) \quad x_C = \frac{1}{m} \int_L \sigma_2 x dL, \quad y_C = \frac{1}{m} \int_L \sigma_2 y dL, \quad z_C = \frac{1}{m} \int_L \sigma_2 z dL,$$

gde je, prema (3.1.1—27), $m = \int_L \sigma_2 dL$.

Kad je uočeno telo homogeno gustina je konstantna pa se obrazac (3.1.1—5) svodi na

$$(25) \quad m = \int_V \sigma dV = \sigma \int_V dV = \sigma V,$$

gde je V zapremina tela. Obrazac (1) za linearni polarni moment dobiće za homogeno telo oblik

$$(26) \quad \mathbf{M} = m \mathbf{r}_C = \int_V \sigma \mathbf{r} dV = \sigma \int_V \mathbf{r} dV.$$

Prema tome iz izraza (10) za vektor položaja centra inercije može se tada eliminisati gustina. U tom slučaju imamo

$$(27) \quad \mathbf{r}_C = \frac{1}{V} \int_V \mathbf{r} dV,$$

tako da su koordinate centra mase homogenog tela

$$(28) \quad x_C = \frac{1}{V} \int_V x dV, \quad y_C = \frac{1}{V} \int_V y dV, \quad z_C = \frac{1}{V} \int_V z dV,$$

u potpunosti određene geometrijskim oblikom tela. U ovom smislu se govori i o centru inercije geometrijskih oblika.

Analogno tome obrasci za vektor položaje centra homogenog površinskog ili linijskog rasporeda masa biće

$$(29) \quad \mathbf{r}_C = \frac{1}{S} \int_S \mathbf{r} dS, \quad \text{odnosno} \quad \mathbf{r}_C = \frac{1}{L} \int_L \mathbf{r} dL,$$

a koordinate će biti

$$(30) \quad x_C = \frac{1}{S} \int_S x dS, \quad y_C = \frac{1}{S} \int_S y dS, \quad z_C = \frac{1}{S} \int_S z dS,$$

gde je S veličina površine obuhvaćene masama sistema, odn.

$$(31) \quad x_C = \frac{1}{L} \int_L x dL, \quad y_C = \frac{1}{L} \int_L y dL, \quad z_C = \frac{1}{L} \int_L z dL,$$

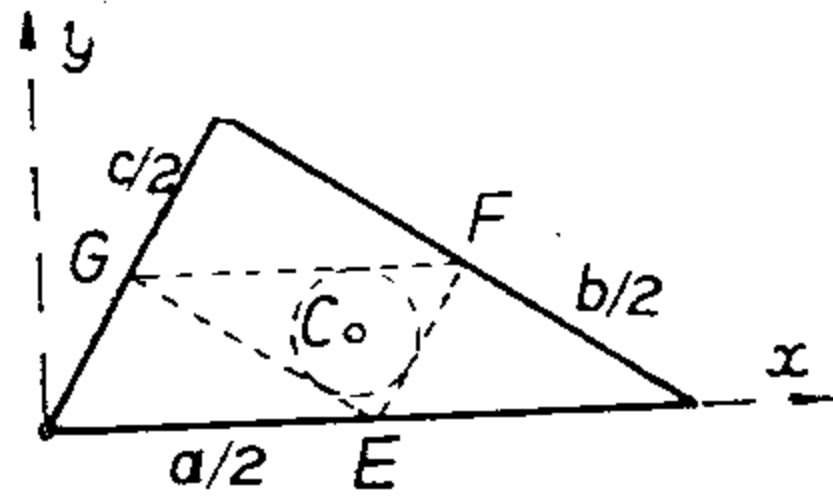
gde je L dužina linije po kojoj je masa raspoređena.

Za homogene sisteme (tela, površine, linije) važe ova pravila: 1) Ako telo ima geometrijski centar simetrije, on se poklapa sa centrom mase. 2) Ako telo ima ravan simetrije, centar mase se nalazi u toj ravni. 3) Ako telo ima osu simetrije, centar mase se nalazi na njoj.

Kad se uočeni materijalni sistem nalazi u polju Zemljine teže (kad su mase teške), tada je centar mase u stvari centar paralelnih sila i određuje napadnu tačku rezultante težine tela, a zove se *težište tela* (ili sistema diskretnih materijalnih tačaka). Vrlo često se stoga centar mase tela zove težište i nezavisno od težine.

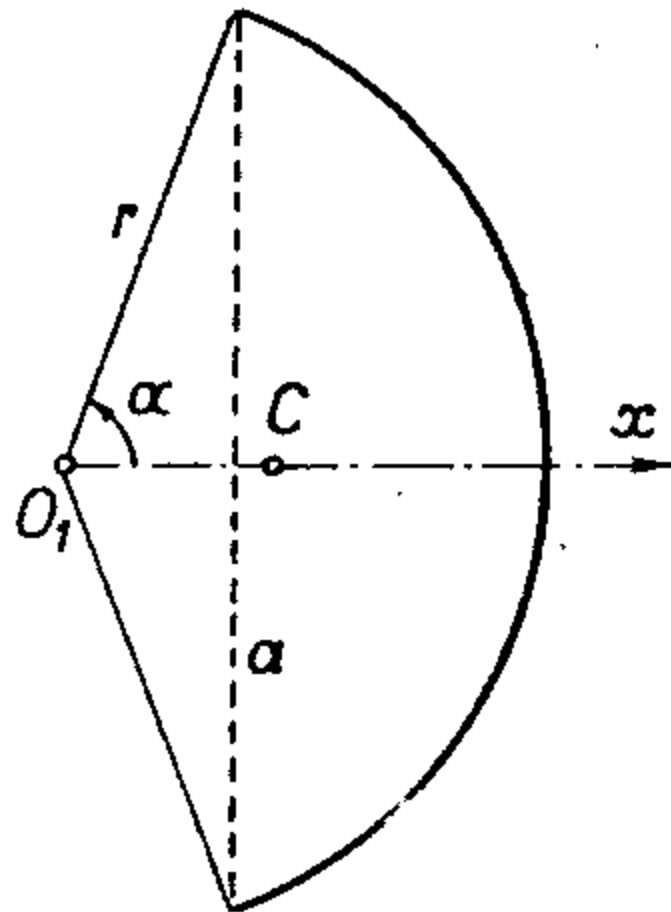
T a b l i c a I V

Centri inercije homogenih ravnih figura i tela (C je centar inercije)



Obim trougla:

$$y_C = \frac{h_a}{2} \cdot \frac{b+c}{a+b+c}$$



Kružni luk:

$$x_C = \frac{ar}{l} = r \frac{\sin \alpha}{\alpha}$$

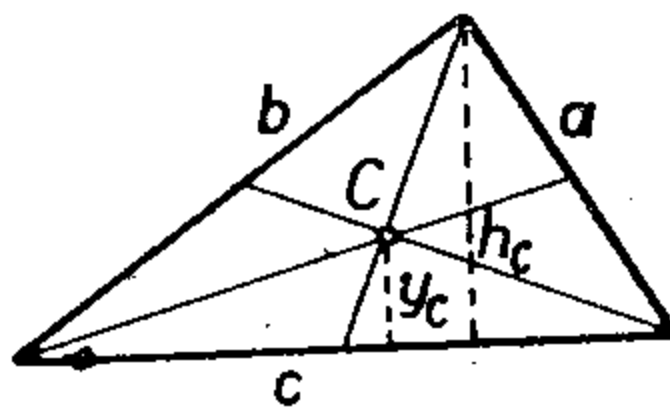
(2 α — centralni ugao u radijanima, l — dužina luka, a — tetiva).Poluobim kruga ($\alpha = \pi/2$):

$$x_C = \frac{2r}{\pi}$$

Kvadrant kružne linije ($\alpha = \pi/4$):

$$x_C = \frac{2\sqrt{2}r}{\pi}$$

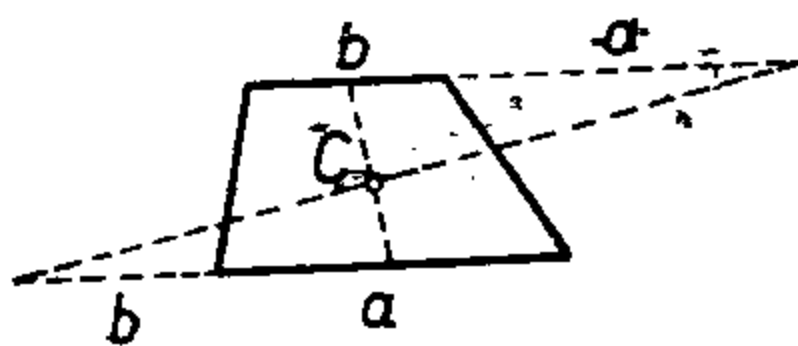
Površina trougla:



$$y_C = \frac{1}{3} h_a$$

$$x_C = \frac{1}{3} (x_1 + x_2 + x_3); \quad y_C = \frac{1}{3} (y_1 + y_2 + y_3); \quad z_C = \frac{1}{3} (z_1 + z_2 + z_3)$$

(u zagradama su koordinate temena trougla).



Površina trapeza:

$$h_a = \frac{h}{3} \cdot \frac{a+2b}{a+b}; \quad h_b = \frac{h}{3} \cdot \frac{2a+b}{a+b}; \quad \frac{h_a}{h_b} = \frac{a+2b}{2a+b}$$

Površina kružnog isečka (sektora):

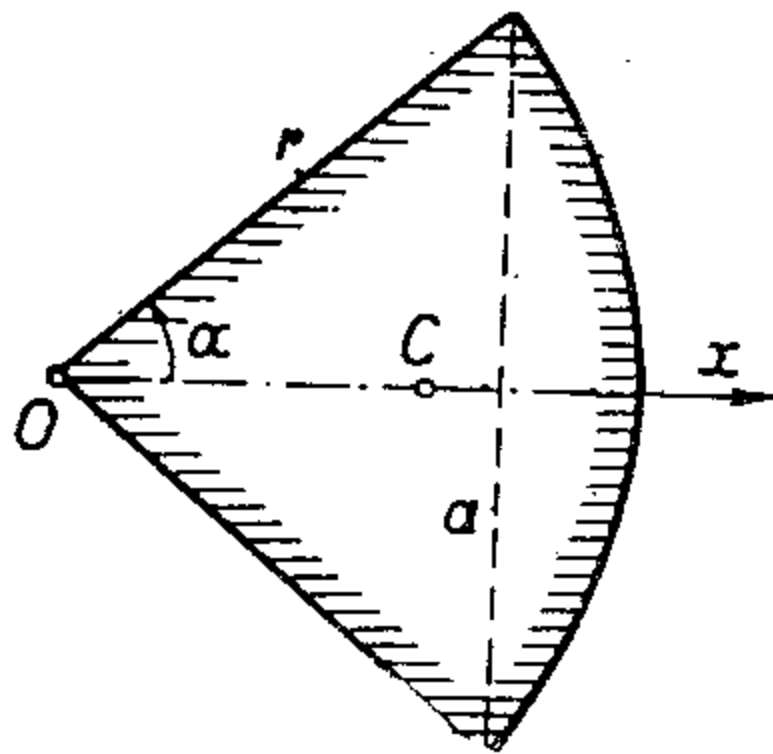
$$x_C = \frac{2ar}{3l} = \frac{2r \sin \alpha}{3\alpha} = \frac{ar^2}{3P}$$

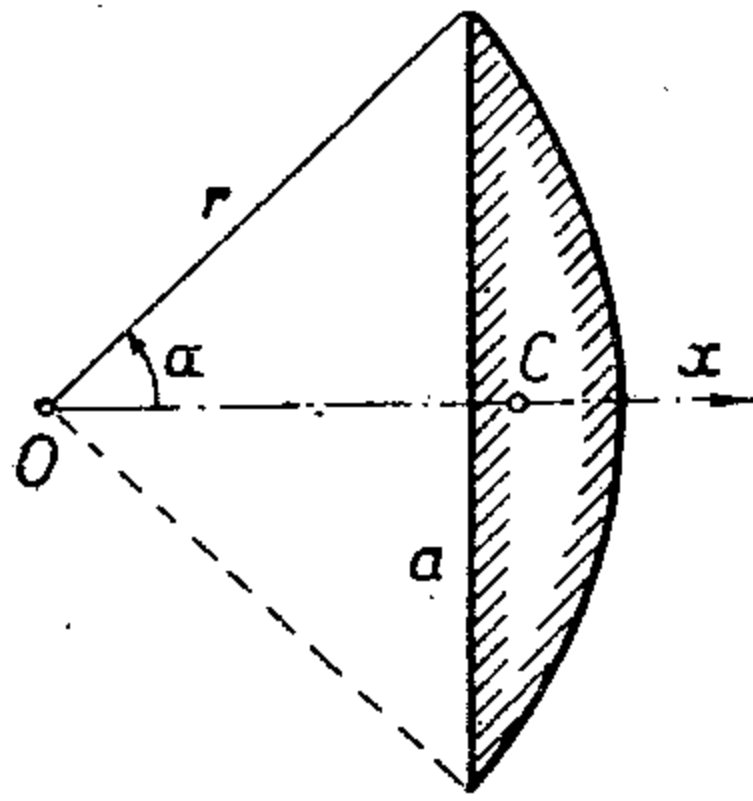
(l — dužina luka, P — površina, α u radijanima, a — tetiva).Površina polukruga ($\alpha = \pi/2$):

$$x_C = \frac{4r}{3\pi}$$

Kružni kvadrant ($\alpha = \pi/4$):

$$x_C = \frac{4r\sqrt{2}}{3\pi}$$



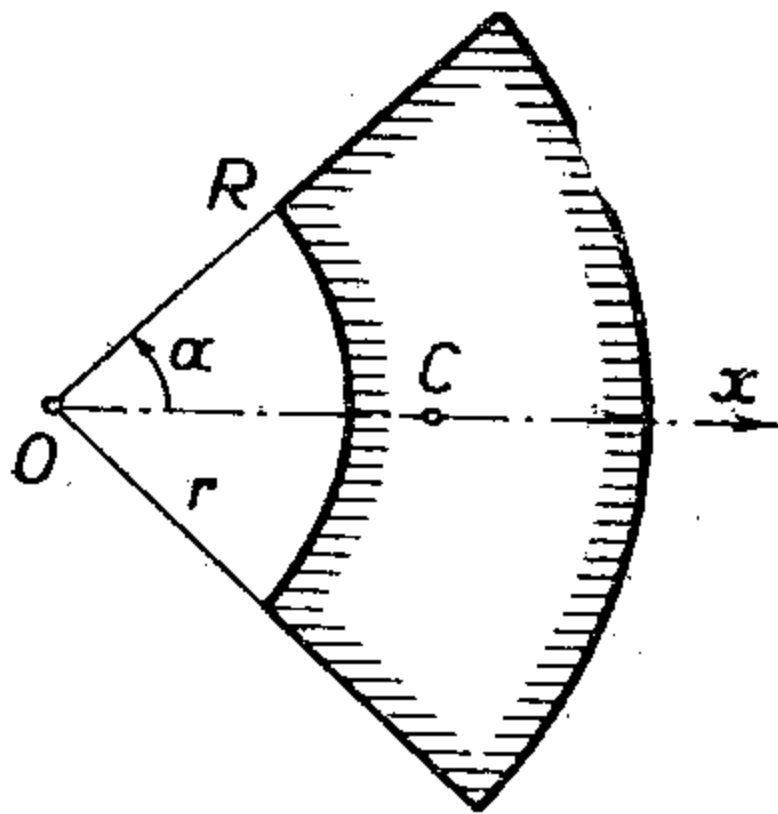


Površina kružnog odsečka (segmenta):

$$x_C = \frac{a^3}{12P} = \frac{2r^3 \sin^3 \alpha}{3P} = \frac{4}{3} \frac{r \sin^3 \alpha}{2\alpha - \sin 2\alpha}$$

(P – površina odsečka, 2α – centralni ugao u radijanima
 a – tetiva).

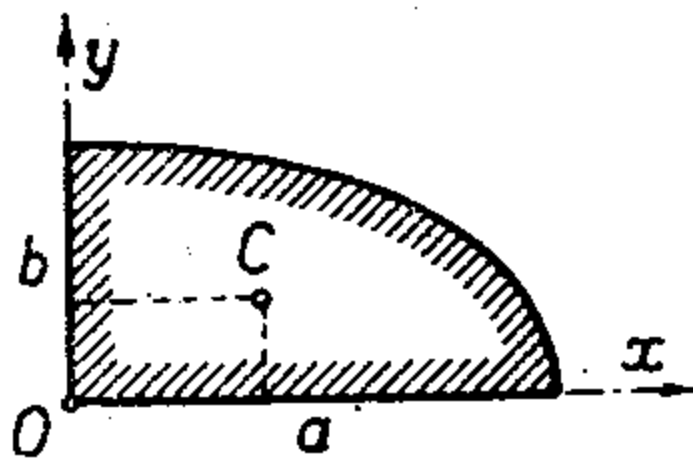
Za $\alpha = \pi/2$ dobiva se centar inercije polukruga.



Površina isečka kružnog prstena:

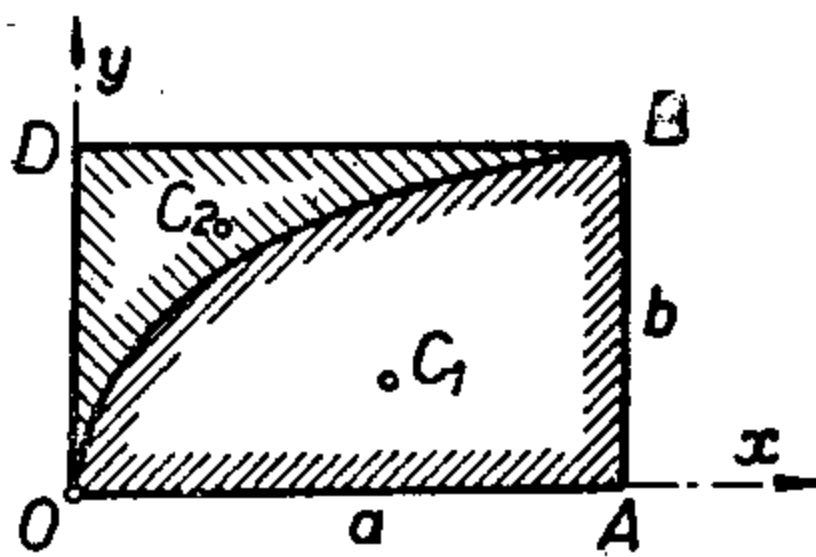
$$x_C = \frac{2}{3} \frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2} \frac{\sin \alpha}{\alpha}$$

(α u radijanima).



Površina kvadranta elipse:

$$x_C = \frac{4a}{3\pi}, \quad y_C = \frac{4b}{3\pi}$$



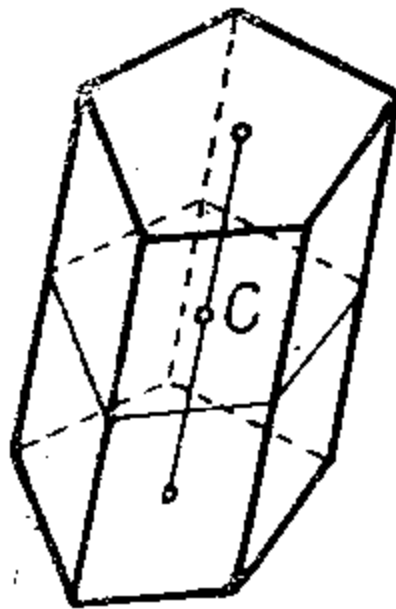
Površine ograničene parabolom:

a) Odsečak parabole OAB:

$$x_{C_1} = \frac{3}{5} a, \quad y_{C_1} = \frac{3}{8} b.$$

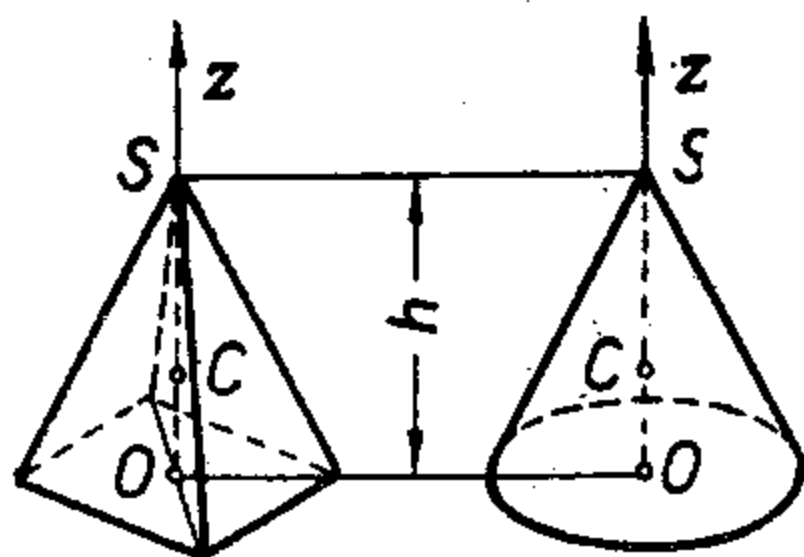
b) Parabolični trougao ODB:

$$x_{C_2} = \frac{3}{10} a, \quad y_{C_2} = \frac{3}{4} b.$$



Površina omotača prizme (prave i kose) i cilindra:

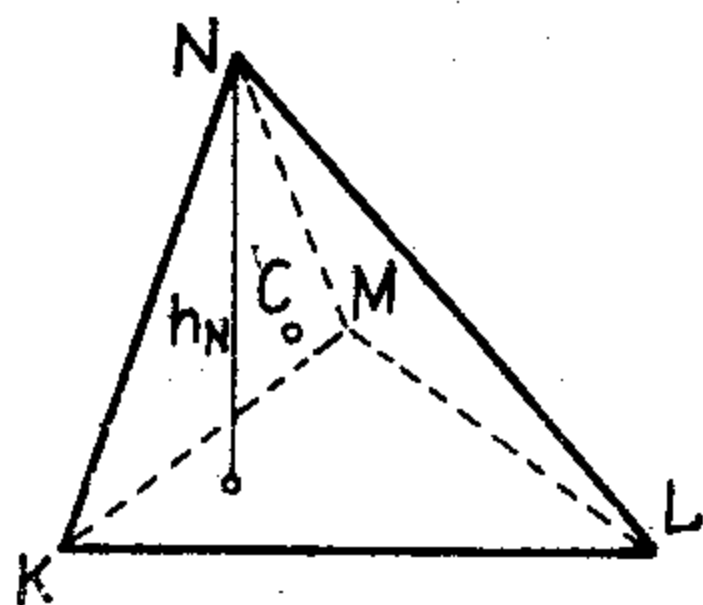
Centar inercije prizme i cilindra sa paralelnim osnovama nalazi se u centru inercije obima srednjeg preseka.



Površina omotača piramide i konusa:

$$z_C = \frac{1}{3} h$$

(C leži na pravoj SO, gde je O centar inercije obima osnove).



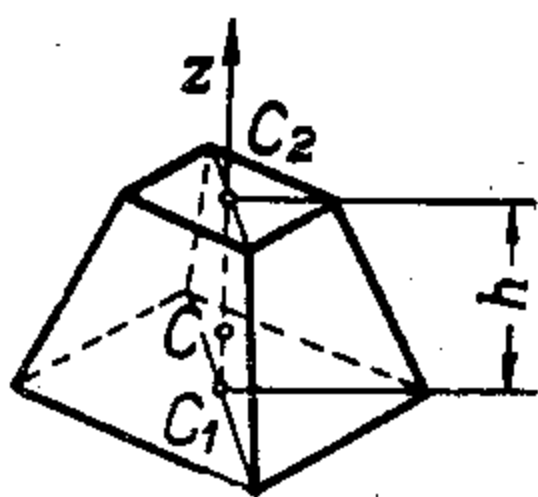
Površina tetraedra (trostrane piramide):

$$z_C = \frac{h_N}{3} \cdot \frac{P_K + P_L + P_M}{P_K + P_L + P_M + P_N}$$

(P_K, P_L, P_M, P_N – površine strana tetraedra suprotnih temenima K, L, M, N).

Površina omotača zarubljene piramide:

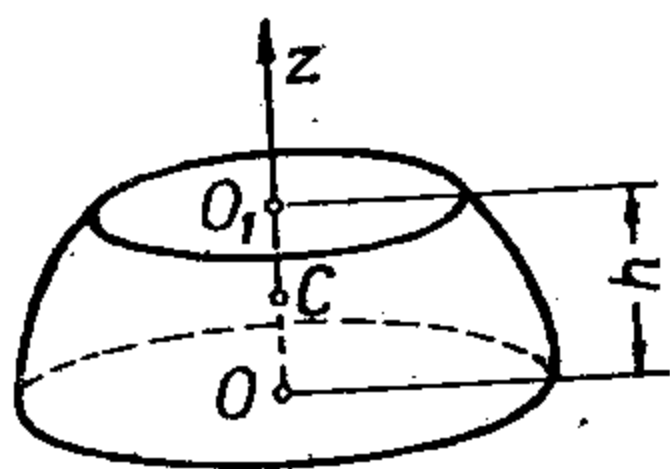
$$z_C = \frac{h}{3} \frac{O + 2o}{O + o}$$



(O i o – obimi donje i gornje osnove; C leži na pravoj C_1C_2 koja spaja centre inercije osnova).

Površina omotača zarubljenog kružnog konusa ($O = 2\pi R$, $o = 2\pi r$):

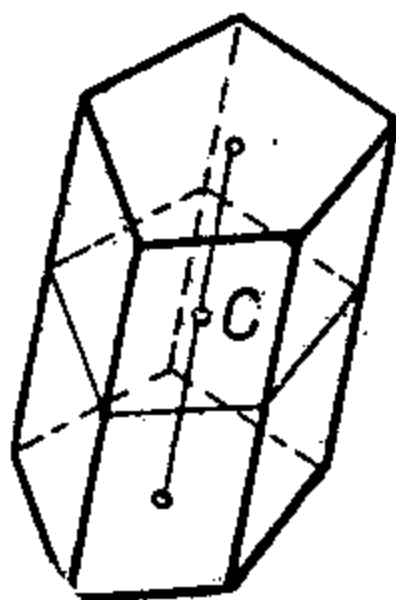
$$z_C = \frac{h}{3} \frac{R + 2r}{R + r}$$



Površina sfernog pojasa (zone):

$$z_C = \frac{1}{2} h.$$

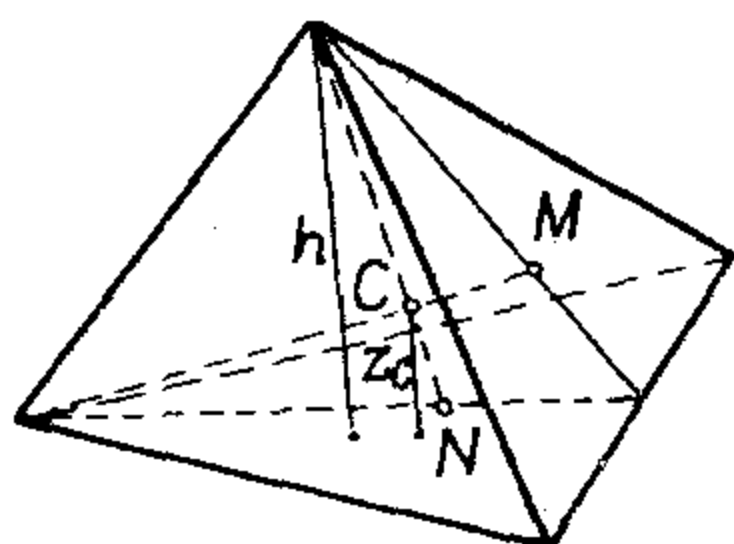
Isti obrazac važi i za sfernu kalotu, ako h označava njenu visinu.



Zapremina prizme (prave i kose) i cilindra:

Centar inercije zapremine prizme i cilindra sa paralelnim osnovama nalazi se u centru inercije površine srednjeg preseka.

Zapremina tetraedra:



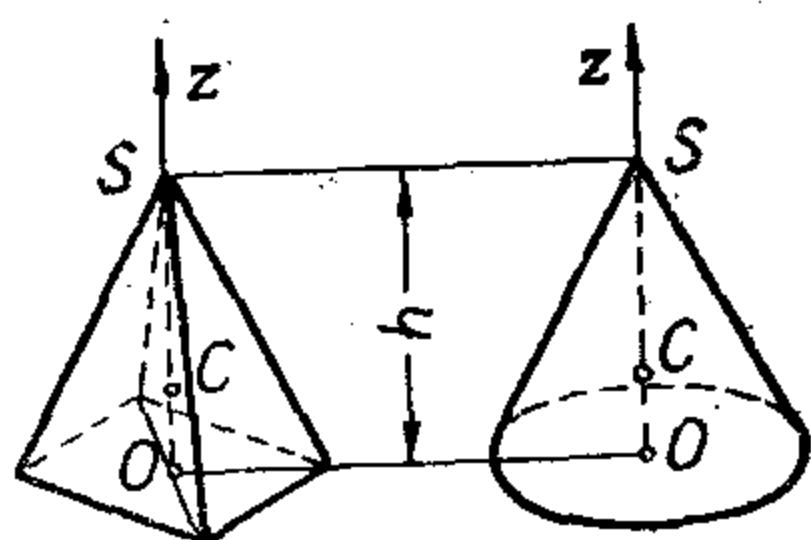
$$z_C = \frac{1}{4} h;$$

$$x_C = \frac{1}{4} (x_1 + x_2 + x_3 + x_4),$$

$$y_C = \frac{1}{4} (y_1 + y_2 + y_3 + y_4),$$

$$z_C = \frac{1}{4} (z_1 + z_2 + z_3 + z_4)$$

(h – visina tetraedra; u zagradama su koordinate temena)

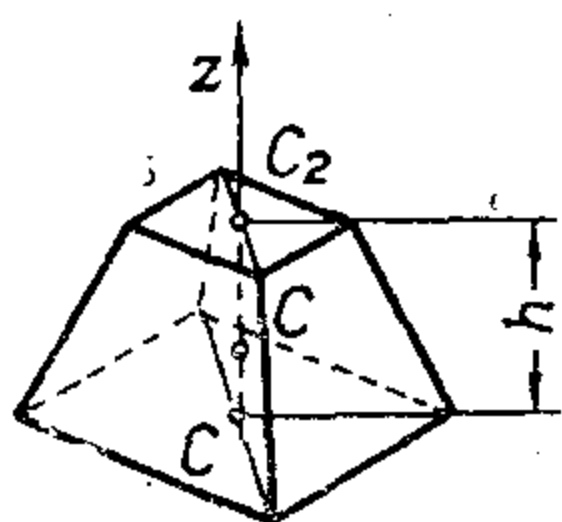


Zapremina piramide i konusa:

$$z_C = \frac{1}{4} h$$

(C leži na pravoj SO , gde je O centar inercije osnove)

Zapremina zarubljene piramide:



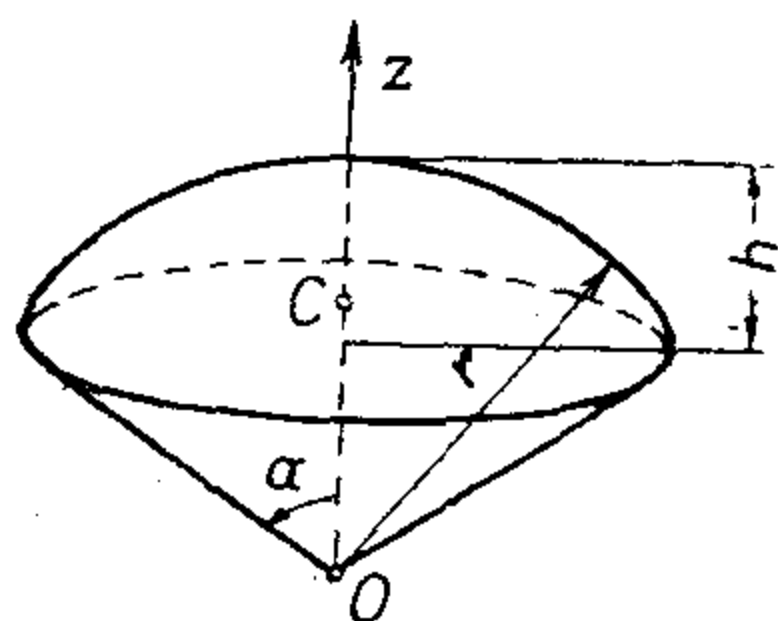
$$z_C = \frac{h P_0 + 2\sqrt{P_1 P_2} + 3P_2}{4 P_0 + \sqrt{P_1 P_2} + P_2}$$

(P_1 i P_2 – površine gornje i donje osnove; centar inercije leži na pravoj koja spaja centre inercija C_2 i C_1 površina gornje i donje osnove).

Zapremina zarubljenog kružnog konusa ($P_1 = \pi R^2$, $P_2 = \pi r^2$):

$$z_C = \frac{h R^2 + 2Rr + 3r^2}{4 R^2 + Rr + r^2}$$

Zapremina sfernog isečka (sektora):

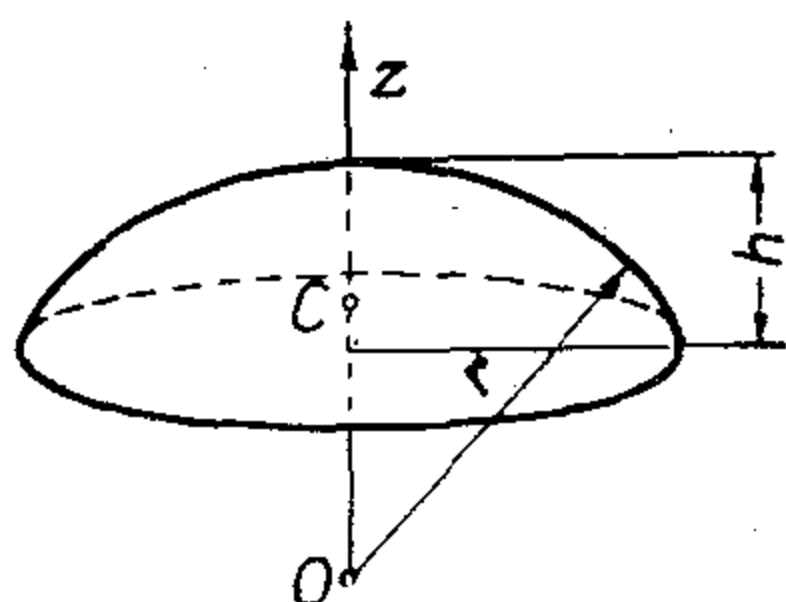


$$z_C = \frac{3}{8} (2r - h) = \frac{3}{8} (1 + \cos \alpha) r = \frac{3}{4} r \cos^2 \frac{\alpha}{2}$$

(r – poluprečnik lopte, 2α – otvor sektora, h – visina odgovarajućeg odsečka).

Polulopta ($\alpha = \pi/2$):

$$z_C = \frac{3}{8} r.$$

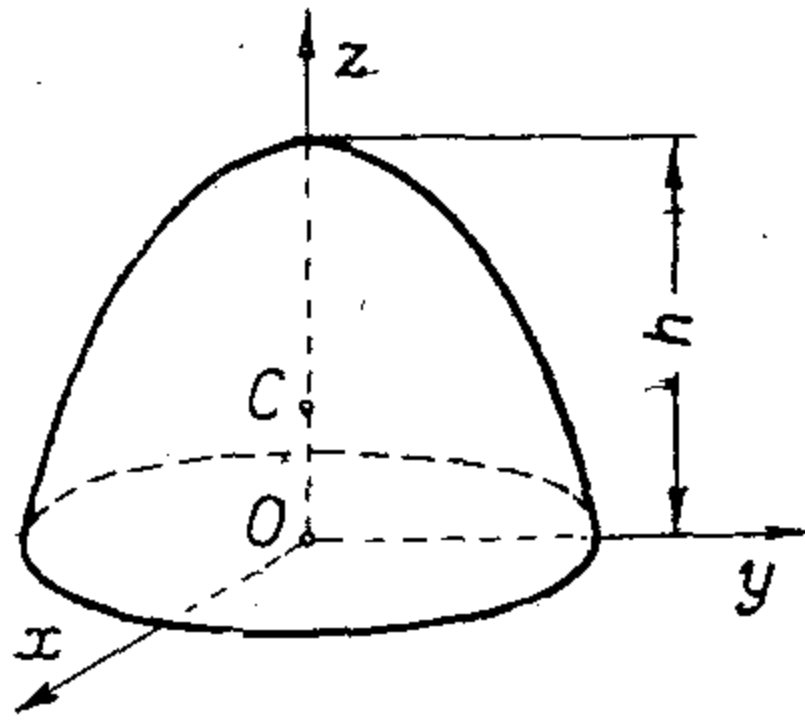


Zapremina sfernog odsečka (segmenta):

$$z_C = \frac{h}{4} \frac{4r - h}{3r - h}$$

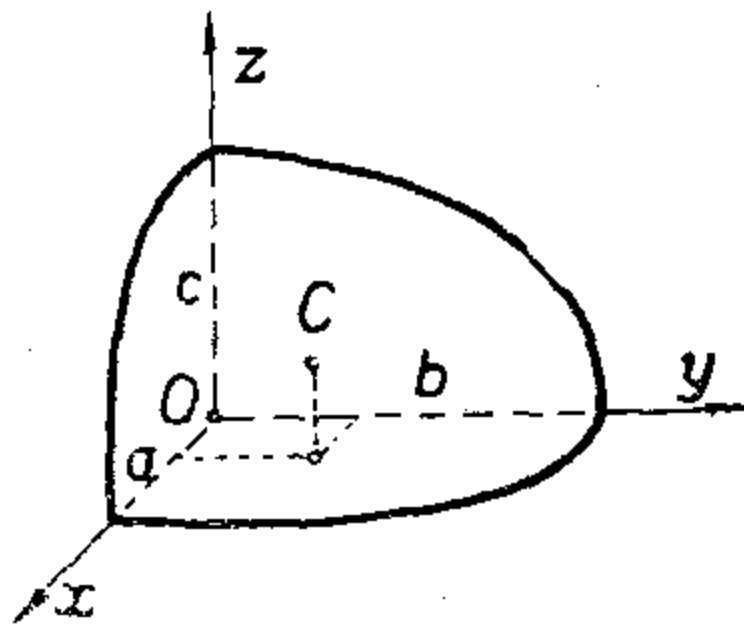
(r – poluprečnik lopte, h – visina odsečka).

Za $h=r$ dobiva se centar inercije polulopte.



Zapremina obrtnog paraboloida:

$$z_C = \frac{1}{3} h.$$



Zapremina oktanta elipsoida:

$$x_C = \frac{3}{8} a, \quad y_C = \frac{3}{8} b, \quad z_C = \frac{3}{8} c.$$

3.1.2.1 Papos-Guldinove teoreme

Za određivanje centra mase (centra inercije) obrtnih površi i tela, kao i za određivanje površine i zapremine obrtnih tela kad je poznat položaj centra inercije mogu zgodno da posluže dve *Papos (Pappos)-Guldinove (Guldin) teoreme*.

Prva teorema: *Površina S površi, dobivene obrtanjem luka L ravanske krive oko ose u ravni krive koja krivu ne seče, jednaka je proizvodu dužine luka krive i obima kruga koji opisuje centar inercije tog luka,*

$$(1) \quad S = 2\pi r_C L.$$

Neka je $L = AB$ luk neke ravanske krive (sl. 110) i u osa u ravni krive. Linearni moment masa neprekidno raspoređenih duž luka L u odnosu na osu u je

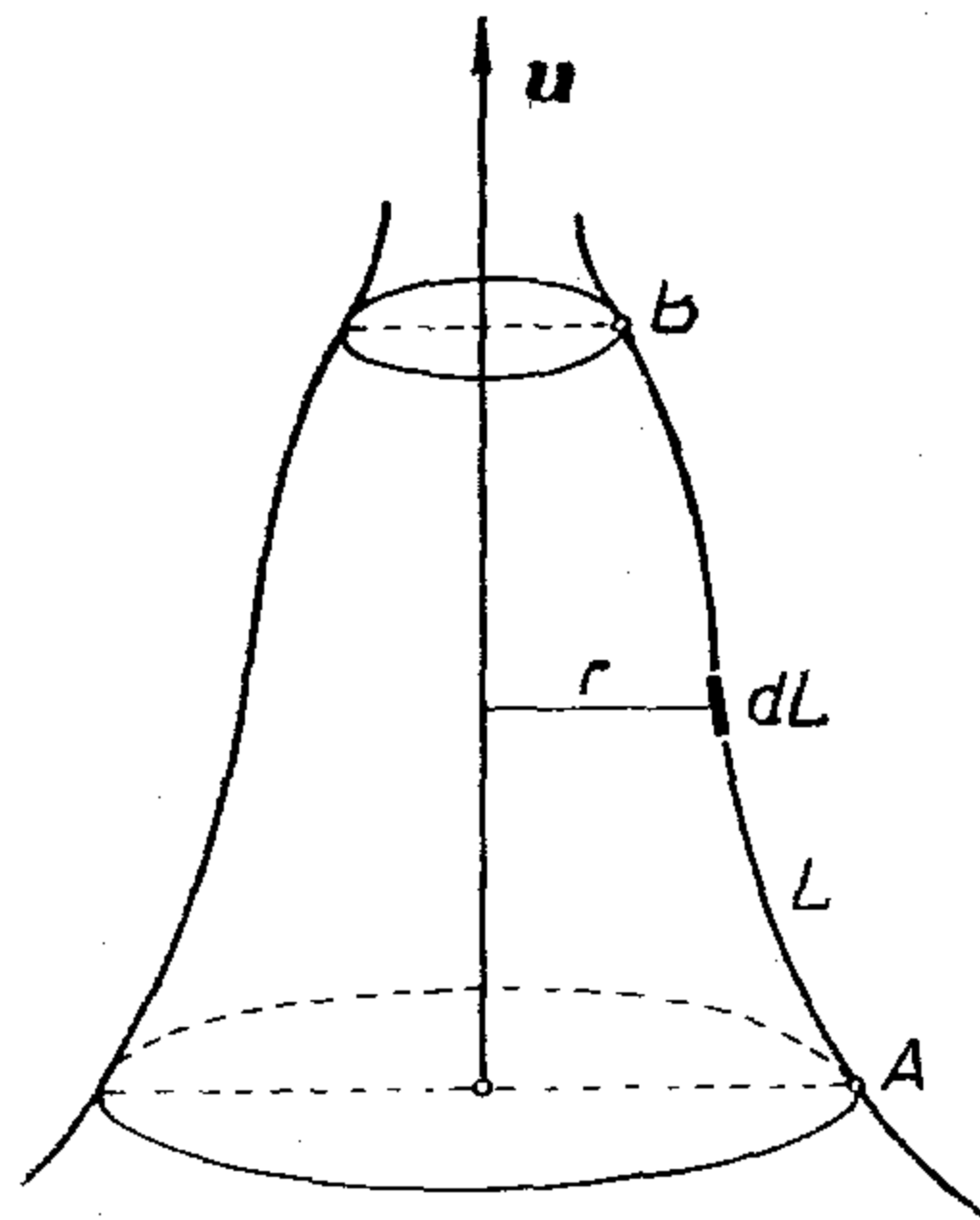
$$(2) \quad m r_C = \int_L \sigma r dL,$$

gde je r rastojanje tačke krive od ose u a r_C rastojanje centra masa C luka L od te ose. Za $\sigma = \text{const.}$ je celokupna masa luka L data obrascem $m = \sigma L$ i obrazac (2) dobiva oblik

$$(3) \quad L r_C = \int_L r dL.$$

Međutim, površina S obrtne površi dobivene obrtanjem luka L oko ose u je

$$(4) \quad S = 2\pi \int_L r dL.$$



Slika 110

Upoređenjem ovog obrasca sa obrascem (3) neposredno se dobiva

$$S = 2\pi r_C L,$$

kao što tvrdi prva Papos-Guldinova teorema.

Druga teorema: Zapremina tela dobivenog obrtanjem neke ravne figure površine S oko ose koja se nalazi u ravni figure i ne seče je jednaka je proizvodu površine te figure i obima kruga koji opisuje centar mase figure,

$$(5) \quad V = 2\pi r_C S.$$

Neka je S površina neke ravne figure (sl. 111). Zapremina tela dobivenog obrtanjem te figure oko ose u je

$$(6) \quad V = 2\pi \int_S r dS,$$

gde je r rastojanje tačke figure od ose obrtanja. Centar mase uočene ravne figure je određen obrascem

$$(7) \quad m r_C = \int_S \sigma r dS.$$

Za $\sigma = \text{const.}$ masa figure biće

$$m = \int_S \sigma dS = \sigma S,$$

pa se s obzirom na (7) može napisati

$$(8) \quad S r_C = \int_S r dS.$$

Upoređenjem obrasca (8) s obrascem (6) dobiva se

$$V = 2\pi r_C S,$$

što je trebalo i dokazati.

Primeri i zadaci

1. Odrediti centar mase dve diskretne mase m_1 i m_2 koje se nalaze na međusobnom rastojanju l .

Kako dve tačke u prostoru određuju pravu liniju, može se linija određena materijalnim tačkama m_1 i m_2 izabrati za x -osu, tako da koordinate tih materijalnih tačaka budu $x = a$ i $x = b$. Ukupna masa sistema je $m = m_1 + m_2$. Linearni moment za ove dve mase je

$$m x_C = \int_a^b \sigma x dx.$$

Gustina sistema je

$$\sigma = m_1 \delta(x-a) + m_2 \delta(x-b),$$

pa je

$$\begin{aligned} m x_C &= \int_a^b [m_1 x \delta(x-a) + m_2 x \delta(x-b)] dx \\ &= m_1 \int_a^b x \delta(x-a) dx + m_2 \int_a^b x \delta(x-b) dx \\ &= m_1 a + m_2 b. \end{aligned}$$

Centar mase je na rastojanju x_C od početka O ($x = 0$),

$$(1) \quad x_C = \frac{m_1 a + m_2 b}{m_1 + m_2}.$$

Ako se za početak izabere centar masa C , biće prema (3.1.2—18) $x_C = 0$, pa je

$$(2) \quad m_1 a = -m_2 b,$$

što znači da se mase m_1 i m_2 nalaze sa raznih strana centra masa na pravoj koja prolazi kroz te dve tačke i centar masa. Sem toga je

$$\frac{m_1}{m_2} = -\frac{b}{a},$$

pa se vidi da su rastojanja tačaka m_1 i m_2 od centra masa obrnuto proporcionalna masama tačaka, tj. centar masa je bliži većoj masi, a ako su mase jednake nalazi se tačno na sredini duži koja ih spaja.

2. Odrediti centar inercije homogene duži.

Neka se duž L nalazi na x -osi tako da je jedan kraj u koordinatnom početku i neka je $\sigma_2 = \text{const.}$ njena gustina. Ukupna masa duži je

$$m = \int_L \sigma_2 dL = \sigma_2 L.$$

Linearni moment mase duži u odnosu na koordinatni početak O je

$$m x_C = \int_L \sigma_2 x dx = \frac{1}{2} \sigma_2 L^2,$$

pa je $x_C = L/2$.

3. Odrediti centar inercije homogene duži L na čijem se jednom kraju nalazi koncentrisana masa m' .

Neka se duž nalazi na x -osi tako da je jedan kraj u koordinatnom početku, a kraj na kome se nalazi masa m' ima tada apscisu $x = L$. Gustina same duži je $\sigma^* = \text{const.}$ a celog sistema

$$\sigma_2 = \sigma^* + m' \delta(x-L).$$

Masa sistema je

$$m = \int_0^L \sigma_2 dx = \int_0^L \sigma^* dx + m_1 \int_0^L \delta(x-L) dx = \sigma^* L + m_1' = m^* + m',$$

gde je m^* masa same duži. Rastojanje centra inercije od koordinatnog početka $x = 0$ određeno je obrascem

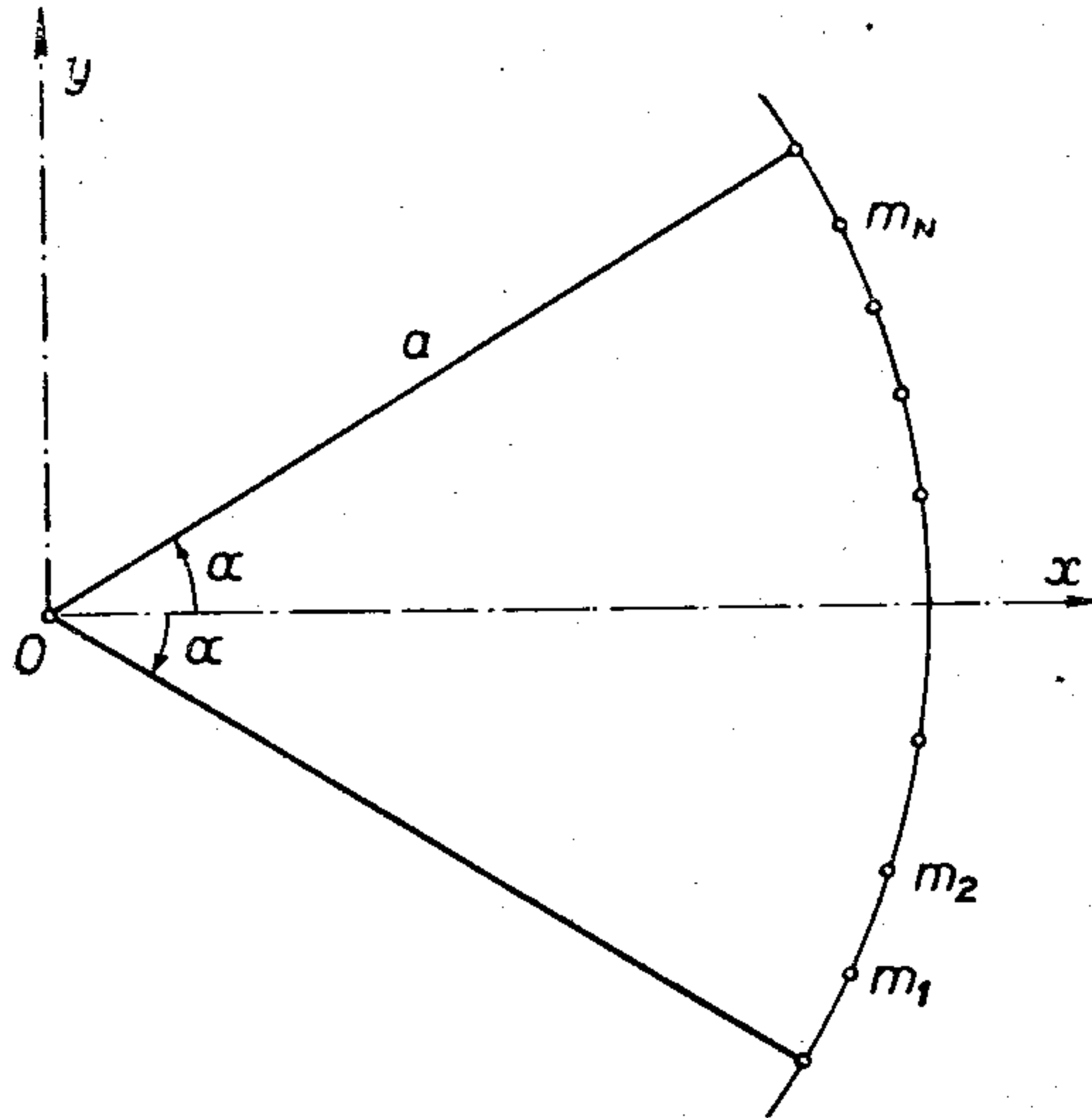
$$\begin{aligned} m x_C &= \int_0^L \sigma_2 x dx = \sigma^* \int_0^L x dx + m' \int_0^L x \delta(x-L) dx \\ &= \frac{1}{2} \sigma^* L^2 + m' L, \end{aligned}$$

pa je

$$x_C = L \frac{m - \frac{1}{2} m^*}{m}.$$

4. Odrediti centar inercije homogenog kružnog luka na kome se nalazi N jednoliko raspoređenih koncentrisanih masa.

Neka je a poluprečnik kruga i neka posmatrani luk odgovara centralnom uglu 2α ; x -osa može se tako izabrati da bude simetrala tog ugla i da polovi uočeni luk (sl. 112). Ako je $\sigma_2^* = \text{const.}$ gustina homogenog luka i ako su polarne



Slika 112

koordinate koncentrisanih masa (a, ϑ_i) , $i = 1, 2, \dots, N$, gustina celog sistema je (pošto se za nezavisnu promenljivu uzme dužina luka, $a \vartheta = L$, krive)

$$(1) \quad \sigma_2 = \sigma_2^* + \sum_{i=1}^N m_i \delta(L - L_i).$$

Celokupna masa sistema je određena obrascem

$$m = \int_{-a}^a \sigma_2 a d\vartheta = 2 \sigma_2^* a \alpha + \sum_{i=1}^N m_i \int_{-a}^a \delta(a\vartheta - a\vartheta_i) d(a\vartheta) = m^* + \sum_{i=1}^N m_i.$$

U odnosu na Dekartov pravougli koordinatni sistem u ravni kružnog luka koordinate centra inercije će biti

$$(2) \quad \begin{aligned} m x_C &= \int_{-a}^a \sigma_2 x a d\vartheta = a^2 \int_{-a}^a \sigma_2 \cos \vartheta d\vartheta, \\ m y_C &= \int_{-a}^a \sigma_2 y a d\vartheta = a^2 \int_{-a}^a \sigma_2 \sin \vartheta d\vartheta. \end{aligned}$$

Kad se vrednost gustine σ_2 iz (1) unese u ove obrasce dobiće se

$$\begin{aligned} m x_C &= a^2 \int_{-a}^a \sigma^* \cos \vartheta d\vartheta + a \sum_{i=1}^N m_i \int_{-a}^a \delta(a\vartheta - a\vartheta_i) \cos \vartheta d(a\vartheta) \\ &= m^* a \frac{\sin \alpha}{\alpha} + a \sum_{i=1}^N m_i \cos \vartheta_i; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 m y_C &= a^2 \int_{-\alpha}^{\alpha} \sigma \sin \vartheta d\vartheta + a \sum_{i=1}^N m_i \int_{-\alpha}^{\alpha} \delta(a\vartheta - a\vartheta_i) \sin \vartheta d(a\vartheta) \\
 &= a \sum_{i=1}^N m_i \sin \vartheta_i,
 \end{aligned}$$

tako da je

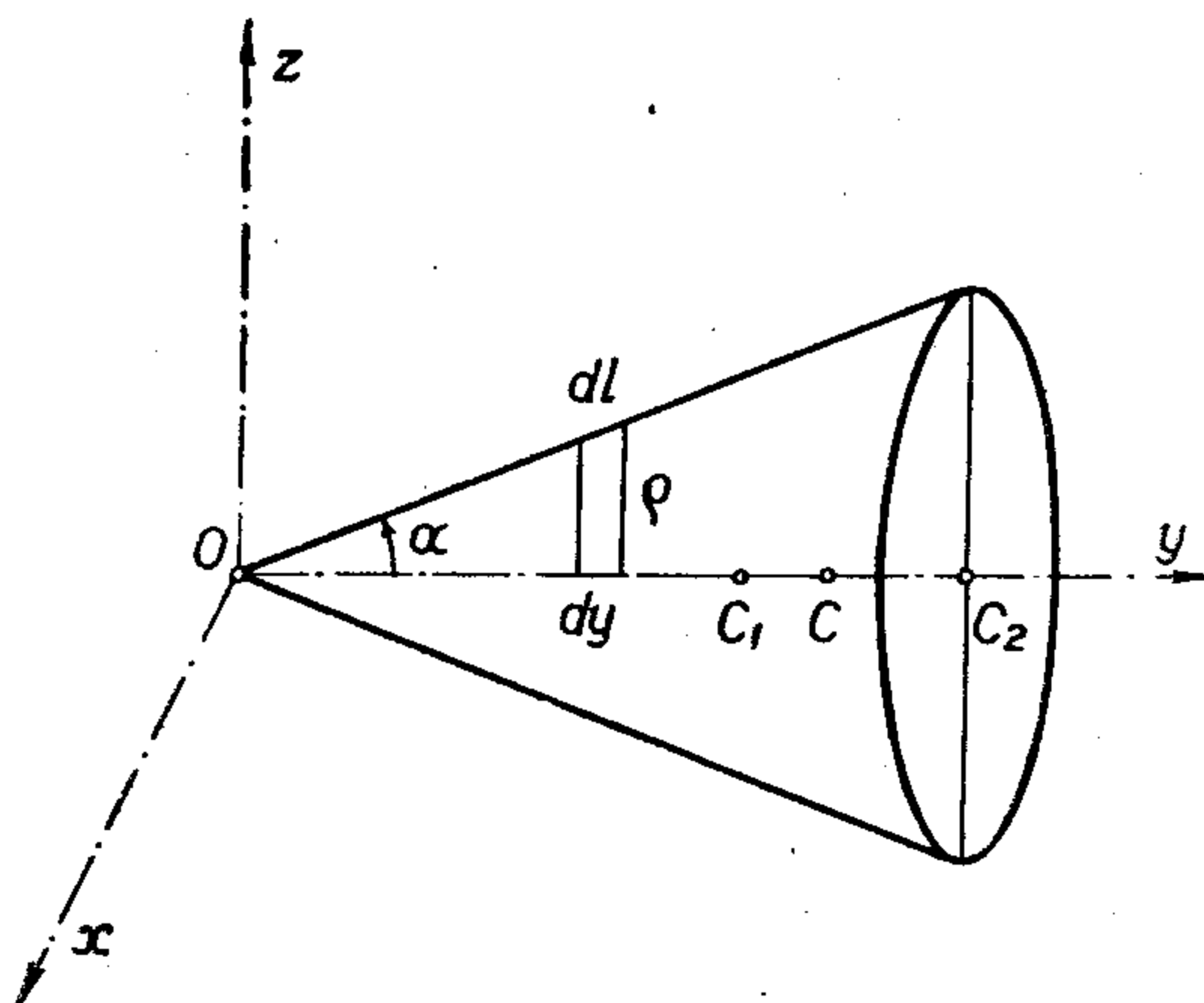
$$x_C = \frac{a}{m} \left(m_0 \frac{\sin \alpha}{\alpha} + \sum_{i=1}^N m_i \cos \vartheta_i \right),$$

$$y_C = \frac{a}{m} \sum_{i=1}^N m_i \sin \vartheta_i.$$

Za homogeni luk, kad nema koncentrisanih masa, ovi se obrasci svode na jednostavnije,

$$x_C = \frac{a \sin \alpha}{\alpha}, \quad y_C = 0.$$

5. Odrediti otvor kružnog konusa tako da se centar inercije površine konusa poklopi sa centrom inercije zapremine.



Slika 113

Centar inercije C_1 omotača konusa (sl. 113) može se naći pomoću obrasca za linearni moment, sabirajući linearne momente masa u malim kružnim presecima ($\sigma = 1$),

$$y_{C_1} \int_{y=0}^{y=h} 2\rho\pi dL = \int_{y=0}^{y=h} 2\rho\pi y dL,$$

gde je

$$\rho = y \operatorname{tg} \alpha, \quad dL = dy / \cos \alpha,$$

što zamenom u gornju relaciju daje

$$y_{C_1} \int_0^h y \operatorname{tg} \alpha \frac{dy}{\cos \alpha} = \int_0^h y_2 \operatorname{tg} \alpha \frac{dy}{\cos \alpha},$$

odnosno

$$y_{C_1} \frac{h^2}{2} = \frac{h^3}{3},$$

odakle se dobiva

$$y_{C_1} = \frac{2}{3} h.$$

Centar inercije osnove konusa nalazi se na osi konusa (y -osi) odn. u geometrijskom centru osnove, a masa osnove u ovom smislu je πr^2 . Kad su poznate mase dva dela jednog tela i položaji centara inercije tih delova, mesto tela mogu se posmatrati samo ta dva centra inercije kao materijalne tačke sa masama koje su jednake masama odgovarajućih delova tela. Ako su C_1 i C_2 centri masa omotača i osnove konusa a C centar masa celokupne površine kružnog konusa, prema obrascu (3) u zadatku 1. biće

$$\overline{C_1 C} : \overline{CC_2} = m_2 : m_1,$$

odnosno

$$\overline{C_1 C} : \overline{CC_2} = \pi r^2 : \frac{\pi r^2}{\sin \alpha}.$$

Pošto je

$$\overline{C_1 C} + \overline{CC_2} = y_{C_2} - y_{C_1} = \frac{1}{3} h$$

dobiće se da centar inercije površine celog kružnog konusa leži na osi i udaljen je od osnove za

$$\overline{CC_2} = \frac{1}{3} \frac{h}{1 + \sin \alpha}.$$

Centar inercije C_3 zapremine konusa može se odrediti iz obrasca za linearni moment sabiranjem momenata kružnih slojeva upravni na osu konusa

$$y_{C_3} \int_0^h \rho^2 \pi dL = \int_0^h y \rho^2 \pi dL.$$

Iz ovog obrasca se dobiva

$$y_{C_3} \pi \int_0^h y^2 \operatorname{tg}^2 \alpha \frac{dy}{\cos \alpha} = \pi \int_0^h y^3 \operatorname{tg}^2 \alpha \frac{dy}{\cos \alpha},$$

odnosno

$$y_{C_3} \frac{h^3}{3} = \frac{h^4}{4},$$

tako da je definitivno

$$y_{C_3} = \frac{3}{4} h.$$

Da bi se centri inercije površine i zapremine ovoga konusa poklopili treba da bude $\overline{OC} = y_{C_3}$, ili $\overline{C_2C} = h - y_{C_3}$, odakle se dobiva

$$\frac{1}{3} \frac{h}{1 + \sin \alpha} = \frac{1}{4} h,$$

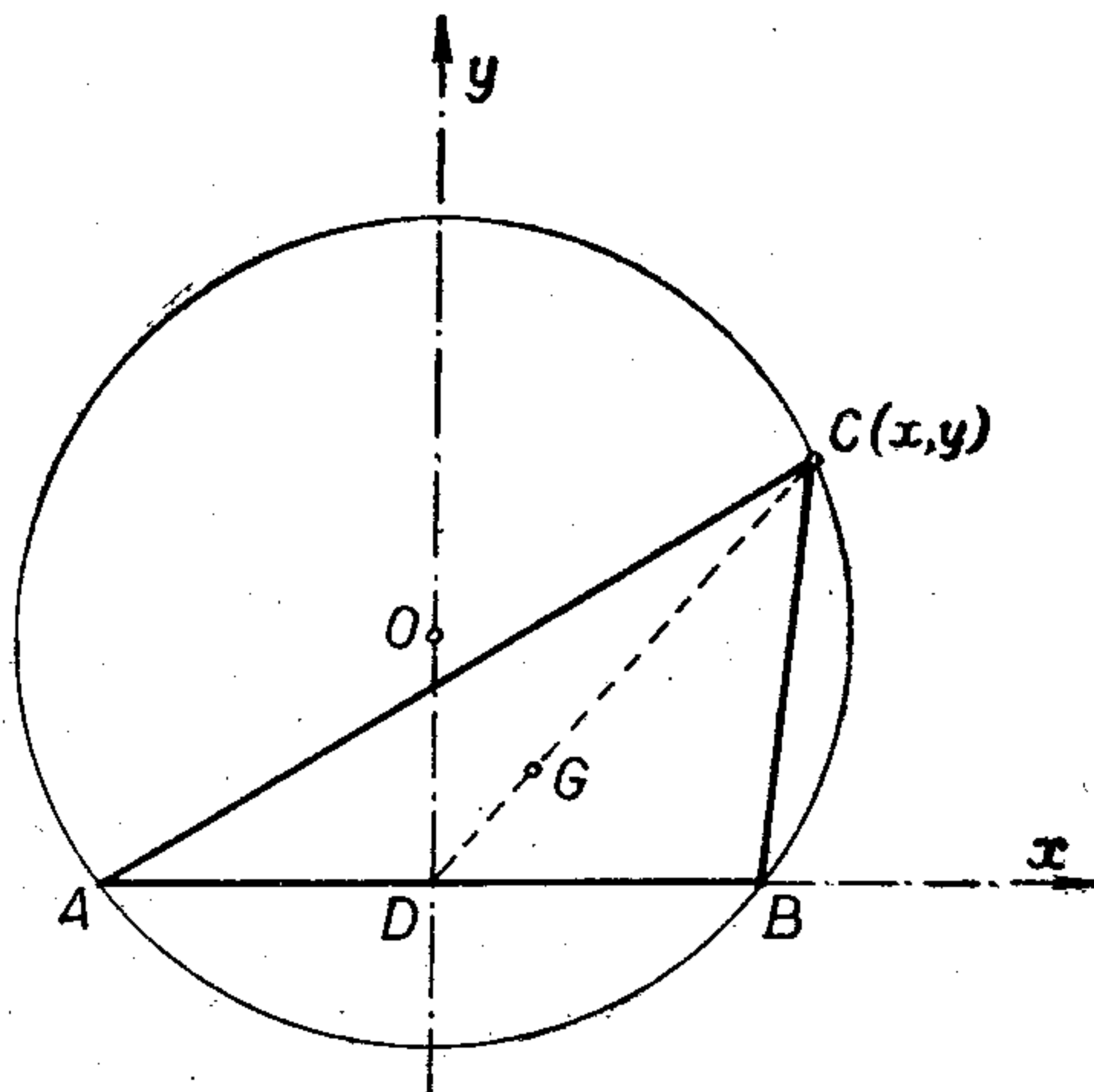
pa je traženi otvor konusa

$$\alpha = \arcsin \frac{1}{3}.$$

6. Osnovica AB trougla ABC je nepomična i dat je ugao ACB ; ako se teme C kreće, pokazati da se geometrijsko mesto centara inercije G tako dobivenih trouglova nalazi na luku nekog kruga.

Geometrijsko mesto svih temena C takvih da je $\sphericalangle ACB = \gamma = \text{const.}$ je kružni luk. Ako se dužina \overline{OD} označi sa L , pri čemu je O centar opisanog kruga za sve trouglove ABC a D sredina nepomične stranice AB , jednačina tog kruga u odnosu na koordinatni sistem Dxy (sl. 114) je

$$x^2 + (y - L)^2 = r^2.$$



Slika 114

U odnosu na taj sistem koordinata, a pošto se centar inercije (težište) trougla nalazi na $1/3$ duži DC , koordinate centra inercije će biti

$$x_G = \frac{1}{3} x, \quad y_G = \frac{1}{3} y.$$

Kako se tačka $C(x, y)$ nalazi na krugu, biće

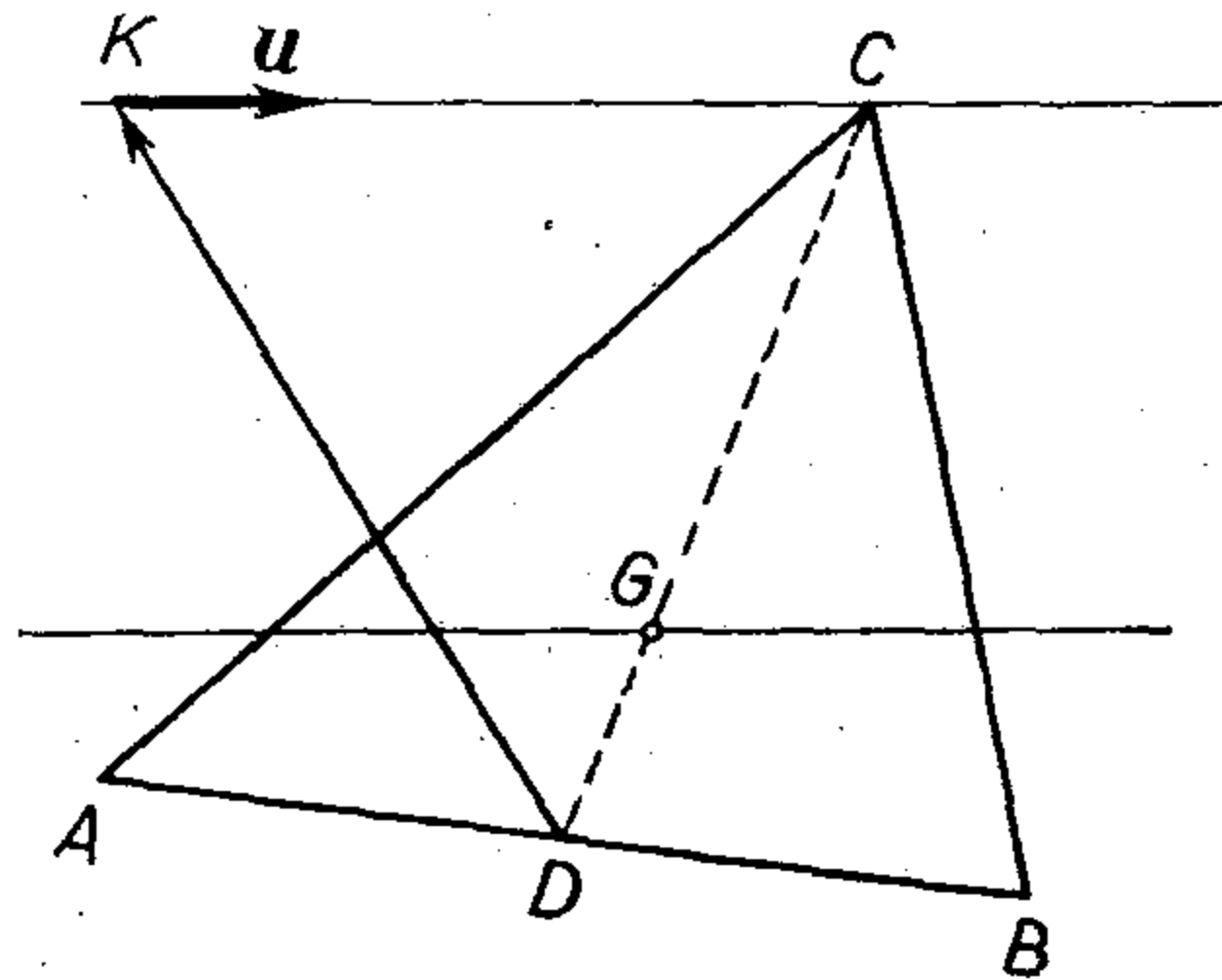
$$9x_G^2 + 9\left(y_G - \frac{L}{3}\right)^2 = r^2,$$

što predstavlja traženo geometrijsko mesto centara inercije. To je krug poluprečnika $r/3$.

7. Stranica AB trougla ABC je nepokretna, a teme C se kreće po pravoj liniji. Pokazati da je geometrijsko mesto centara inercije G trouglova ABC takođe prava linija.

Neka je prava na kojoj se nalazi stalno teme C trougla ABC data vektorskom jednačinom (sl. 115)

$$\vec{DC} = \vec{DK} + \lambda \mathbf{u},$$



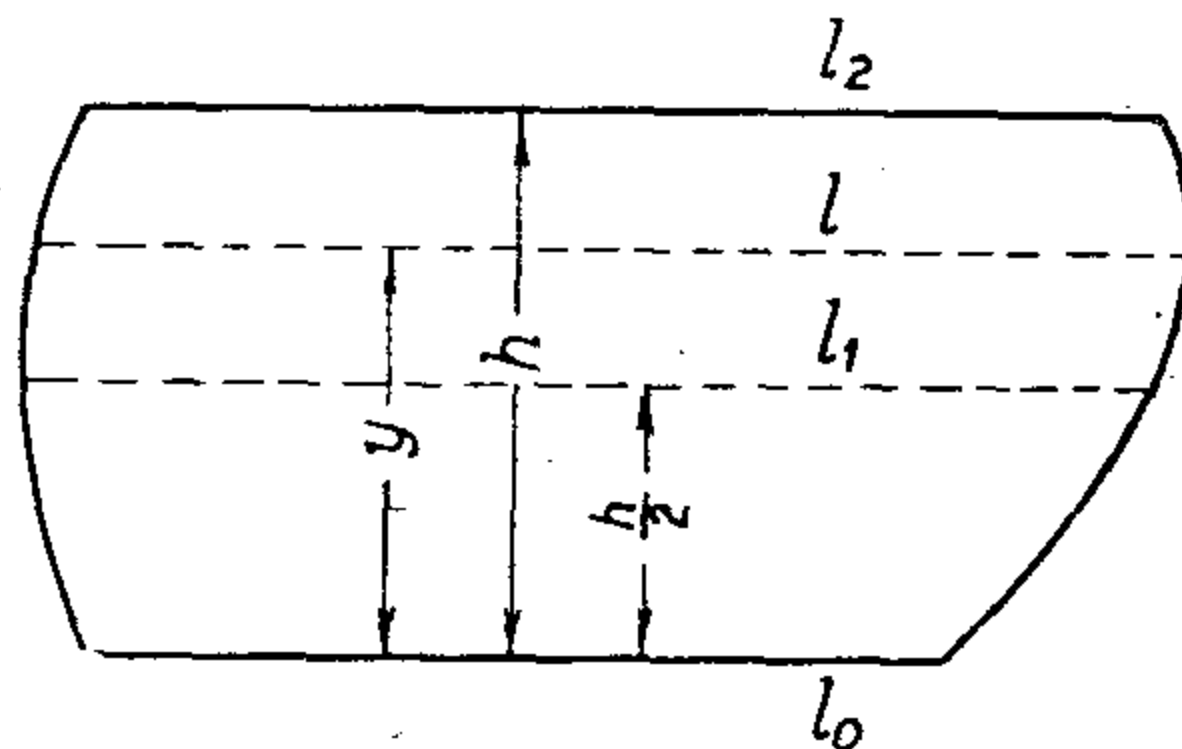
Slika 115

pri čemu je središte D duži AB izabrano za pol. Kako je centar inercije trougla udaljen od D za $1/3$ duži DC , geometrijsko mesto centara inercije trougla biće određeno vektorskom jednačinom

$$\vec{DG} = \frac{1}{3} \vec{DK} + \frac{1}{3} \lambda \mathbf{u},$$

a to je prava paralelna pravoj po kojoj se kreće teme C .

8. Odrediti centar inercije ravne površine (homogene ploče) ograničene dvema paralelnim dužima kao osnovicama čiji su preseki, paralelni tim dužima, kvadratne funkcije rastojanja od osnovica.



Slika 116

Ako se uzme da je koordinatni sistem u ravni naše površine postavljen onako kako to pokazuje slika 116, tada je dužina l presečne duži na rastojanju y od osnovice l_0 određena obrascem

$$(1) \quad l = a + by + cy^2,$$

pa je

$$(2) \quad l_0 = a; \quad l_2 = a + bh + ch^2,$$

a srednji presek (srednja linija)

$$(3) \quad l_1 = a + \frac{b}{2} h + \frac{c}{4} h^2$$

ako se osnovice obeleže l_0 i l_2 i ako je rastojanje između paralelnih osnovica jednako h .

Tada se koordinata y_C centra inercije može odrediti iz relacije za određivanje linearnog momenta date površine u odnosu na osnovicu l_0

$$Py_C = \iint_P y dP,$$

gde je P data površina a $dP = l dy$, pa se dobiva (l je promenljivi presek)

$$Py_C = \int_0^h ly \, dy.$$

Posle unošenja vrednosti za y iz (1) i integracije dobiva se s obzirom na (2) i (3)

$$Py_C = \frac{h^2}{6} (l_2 + 2l_1).$$

Oдавde se može izračunati y_C , kad je površina P poznata ili se može lako izračunati. Međutim, ako je površinu P teško izračunati, može se određivanjem linearnog momenta iste površine u odnosu na drugu osnovicu l_2 istim postupkom dobiti

$$P(h - y_C) = \int_0^h l(h - y) \, dy = \frac{h^2}{6} (l_0 + 2l_1).$$

Tako se najzad dobiva razmera rastojanja centra inercije od obe osnovice

$$\frac{y_C}{h - y_C} = \frac{l_2 + 2l_1}{l_0 + 2l_1}$$

u obliku linearne jednačine po y_C u kojoj nema površine P . Apscisa x_C centra inercije se određuje za svaki slučaj oblika posebno.

Npr. kod *trapeza* koji ispunjava uslov da je presek kvadratna funkcija rastojanja od osnovica, biće ($l_0 = a, l_2 = b, l_1 = (a + b)/2$)

$$\frac{y_C}{h - y_C} = \frac{a + 2b}{b + 2a}, \quad \text{odn. } y_C = \frac{h}{3} \frac{a + 2b}{a + b}.$$

Oдавde se izvodi za trougao ($b = 0$)

$$y_C = \frac{h}{3}.$$

9. Odrediti centar inercije zapremine (homogenog tela), ograničenog dvema ravnim površinama kao osnovama, čiji su preseki, paralelni tim ravnima, kvadratne funkcije rastojanja tog preseka od tih paralelnih ravni.

Neka površina P paralelnog preseka (sl. 117) bude

$$P = a + bz + cz^2,$$

pri čemu je

$$P_0 = a; \quad P_1 = a + \frac{b}{2} h + \frac{c}{4} h^2 \text{ (srednji presek),} \quad P_2 = a + bh + ch^2,$$

ako se koordinatni sistem postavi kako je to prikazano na slici. Tada će koordinata z_C centra inercije moći da se odredi iz obrasca

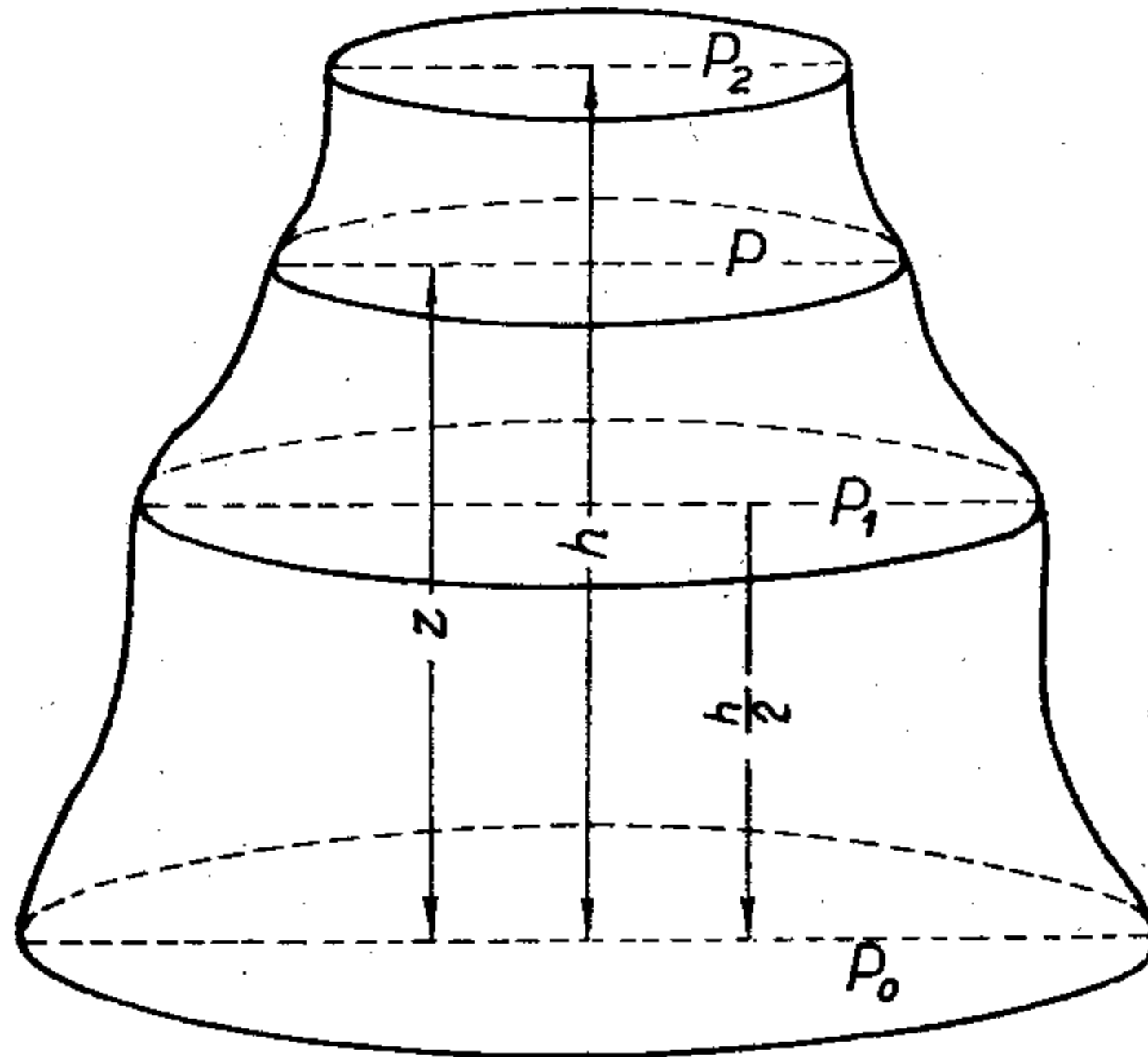
$$a) \quad Vz_C = \iiint_V z \, dV$$

za određivanje linearnog momenta zapremine u odnosu na osnovu P_0 . Kad se uzme u obzir da je P promenljivo i da se za zapreminski element može napisati $dV = P dz$ i to unese u a) dobiće se, s obzirom na vrednosti za P_0 , P_1 i P_2

$$V z_C = \int_0^h P z dz = \frac{h^2}{6} (P_2 + 2P_1).$$

Određivanjem linearnog momenta za gornju osnovu dobiće se

$$V(h - z_C) = \int_0^h P(h - z) dz = \frac{h^2}{6} (P_0 + 2P_1)$$



Slika 117

i najzad razmera u kojoj centar inercije deli rastojanje između paralelnih graničnih ravni

$$\frac{z_C}{h - z_C} = \frac{P_2 + 2P_1}{P_0 + 2P_1},$$

a to je linearna jednačina za određivanje z_C pomoću površina osnova i površine srednjeg preseka. Na ovaj način se uvek prosto određuje kod ovakvih homogenih tela samo koordinata z_C a ostale dve zavise u svakom pojedinom slučaju od oblika tela.

Npr. za zarubljenju piramidu i zarubljeni konus čije su osnove P_0 i P_2 biće

$$P_1 = \frac{1}{4} (P_0 + 2\sqrt{P_0 P_2} + P_2),$$

pa se dobiva

$$z_C = \frac{1}{4} h \frac{P_0 + 2\sqrt{P_0 P_2} + 3P_2}{P_0 + \sqrt{P_0 P_2} + P_2}.$$

U slučaju kružne zarubljene kupe odavde proističe obrazac

$$z_C = \frac{1}{4} h \frac{R^2 + 2Rr + 3r^2}{R^2 + Rr + r^2}.$$

Za konus, i to ne samo kružni, lako se izračunava

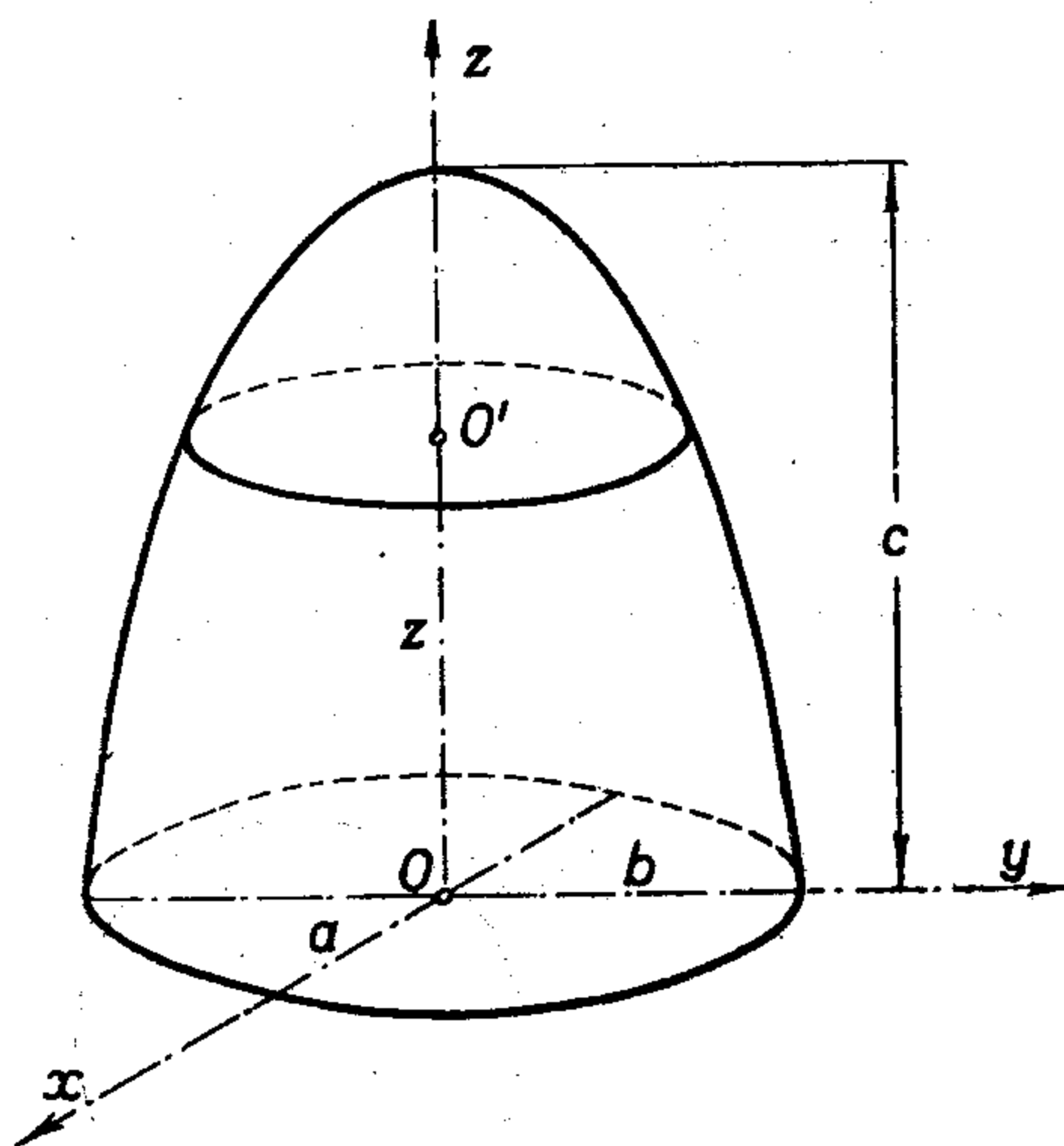
$$\frac{z_C}{h - z_C} = \frac{1}{3}, \quad \text{tj. } z_C = \frac{1}{4} h.$$

U kategoriju ovakvih tela spada i polovina homogenog elipsoida

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

(sl. 118), jer je tada presek na rastojanju $z = OO'$ od osnove određen obrascem

$$P = \pi ab \left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right),$$



Slika 118

pa imamo $P_0 = \pi ab$, $P_1 = 3\pi ab/4$ i $P_2 = 0$. Tako se onda dobiva

$$\frac{z_C}{c - z_C} = \frac{3}{5},$$

odakle je

$$z_C = 3c/8.$$

10. Naći centar inercije luka homogene cikloide $x = a(\vartheta + \sin \vartheta)$, $y = a(1 - \cos \vartheta)$, računatog od temena.

$$\left[x_C = \left(\pi - \frac{4}{3} \right) a, \quad y_C = \frac{2}{3} a. \right]$$

11. Naći centar inercije homogenog luka astroide $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ između dve uzastopne povratne tačke.

$$\left[x_C = y_C = \frac{2}{5} a. \right]$$

12. Odrediti centar inercije homogenog luka kružne zavojnice

$$x = a \cos \vartheta, \quad y = a \sin \vartheta, \quad z = b\vartheta,$$

od tačke $\vartheta = 0$ do $\vartheta = \alpha$.

$$\left[x_C = \frac{a}{\alpha} \sin \alpha; \quad y_C = \frac{a}{\alpha} (1 - \cos \alpha); \quad z_C = \frac{1}{2} b \alpha. \right]$$

13. Odrediti centar inercije homogenog luka lančanice

$$y = \frac{c}{2} \left(e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}} \right)$$

od tačke $x = y = 0$ do tačke $M(x, y)$.

$$\left[x_C = x - \frac{c(y-c)}{s}, \quad y_C = \frac{y}{2} + \frac{cx}{2s} \right]$$

(s je dužina luka lančanice od tačke O do M , $s = c \operatorname{sh}(x/c)$).

14. Odrediti centar inercije homogene površine dobivene obrtanjem kardioidne

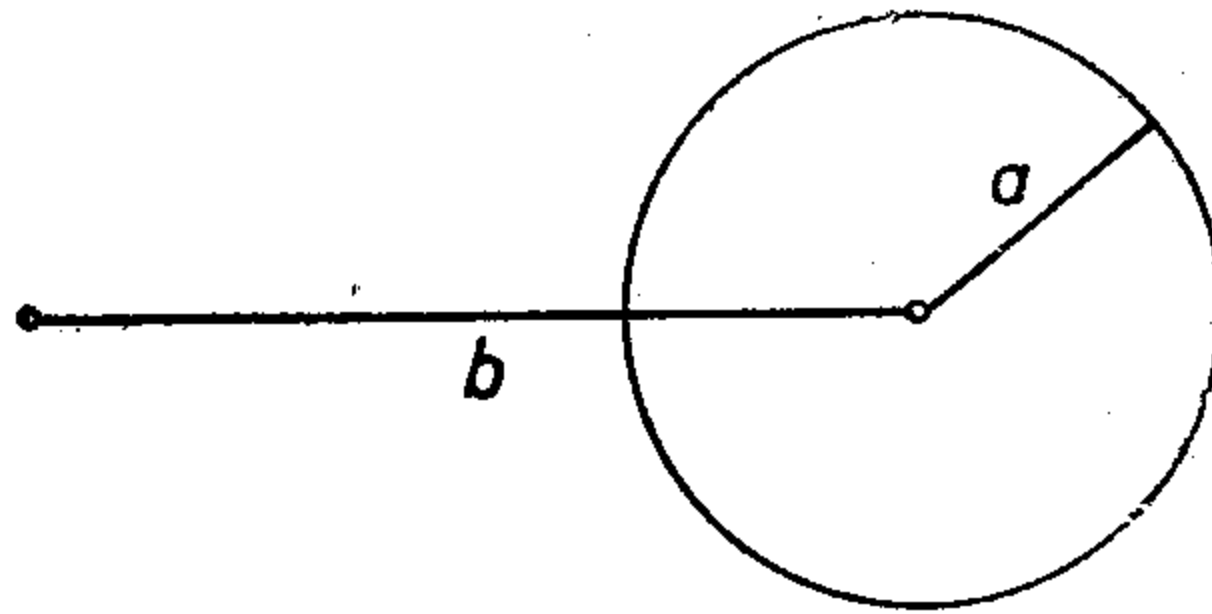
$$r = a(1 + \cos \vartheta)$$

oko njene ose.

$$\left[x_C = \frac{50}{63} a. \right]$$

15. Pomoću Papos-Guldinovih teorema odrediti površinu i zapreminu torusa (sl. 119).

$$[S = 4 \pi^2 ab, \quad V = 2 \pi^2 a^2 b.]$$



Slika 119

16. Trougao površine S obrće se oko prave koja se nalazi u ravni trougla. Temena trougla su udaljena od ose obrtanja za p_1, p_2, p_3 . Pokazati da je zapremina tako dobivenog tela $V = \frac{2 \pi S(p_1 + p_2 + p_3)}{3}$.

17. Odrediti centar mase tela dobivenog obrtanjem površine ograničene parabolama $y^2 = 4ax$ i $x^2 = 4by$ oko x -ose.

$$\left[x_C = \frac{20}{9} a^{1/3} b^{1/3}. \right]$$

18. Kod polukružne ravne ploče, ograničene prečnikom OA , gustina je u svakoj tački proporcionalna rastojanju od tačke O ($\sigma = \lambda r$). Odrediti koordinate centra mase.

Ako je A poluprečnik kruga, i pravac OA izabran za x -osu biće

$$x_C = \frac{6a}{5}, \quad y_C = \frac{9a}{20}.$$

19. Odrediti centar mase površine ograničene y -osom, cikloidom

$$x = a(\vartheta + \sin \vartheta), \quad y = a(1 - \cos \vartheta)$$

i bazom cikloide.

$$\left[x_C = \frac{9\pi^2 - 16}{18\pi} a, \quad y_C = \frac{7a}{6} \right]$$

20. Pokazati da se centar inercije sistema koji se sastoji od tri homogene duži koje grade trougao nalazi u centru upisanog kruga u trouglu čija su temena središta duži.

21. Homogeno telo se sastoji od kružnog cilindra i kružnog konusa sastavljenih osnovama a postavljenih sa raznih strana od zajedničke osnove (sl. 120). Ako je visina cilindra H a konusa h odrediti vrednost razmere h/H tako da se centar inercije čitavog tela nalazi u centru zajedničke osnove.

O d g o v o r: $h/H = \sqrt{6}$.

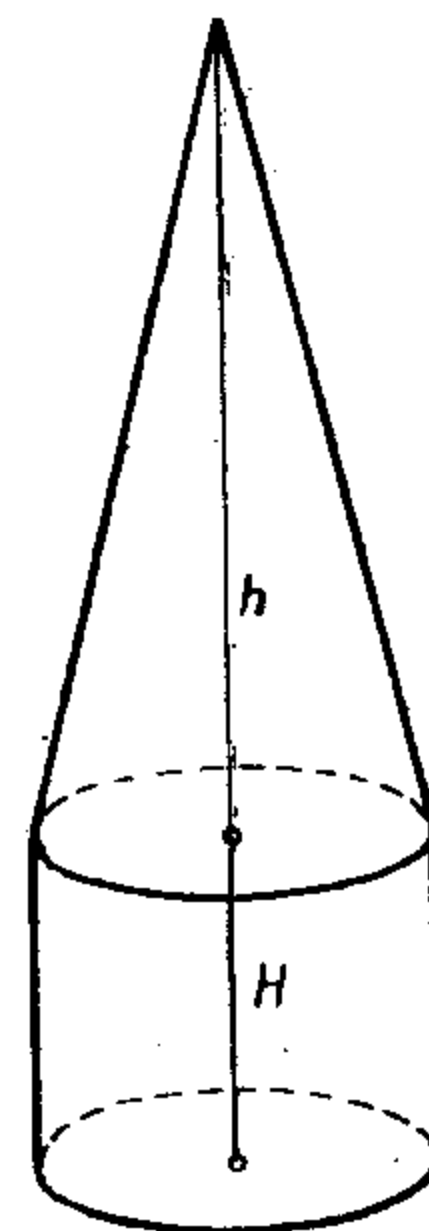
22. Dat je sferni sektor poluprečnika R i visine $h = R(1 - \cos \alpha)$, gde je α poluotvor sfernog sektora.

a) Odrediti centar inercije tog sfernog sektora, ako se z -osa uzme kao osa sfernog sektora a koordinatni početak Dekartovog koordinatnog sistema u centru sfere.

O d g o v o r: Centar inercije leži na z -osi kao osi sektora. $z_C = \frac{3}{4} R \cos^2 \frac{\alpha}{2}$. Za $\alpha = \pi/2$, kad se sferni sektor pretvara u poluloptu, dobiva se $z_C = 3R/8$.

b) Odrediti visinu h sektora tako da rastojanje centra mase od centra lopte bude R/n .

O d g o v o r: $h = 2R \frac{3n-4}{3n}$.



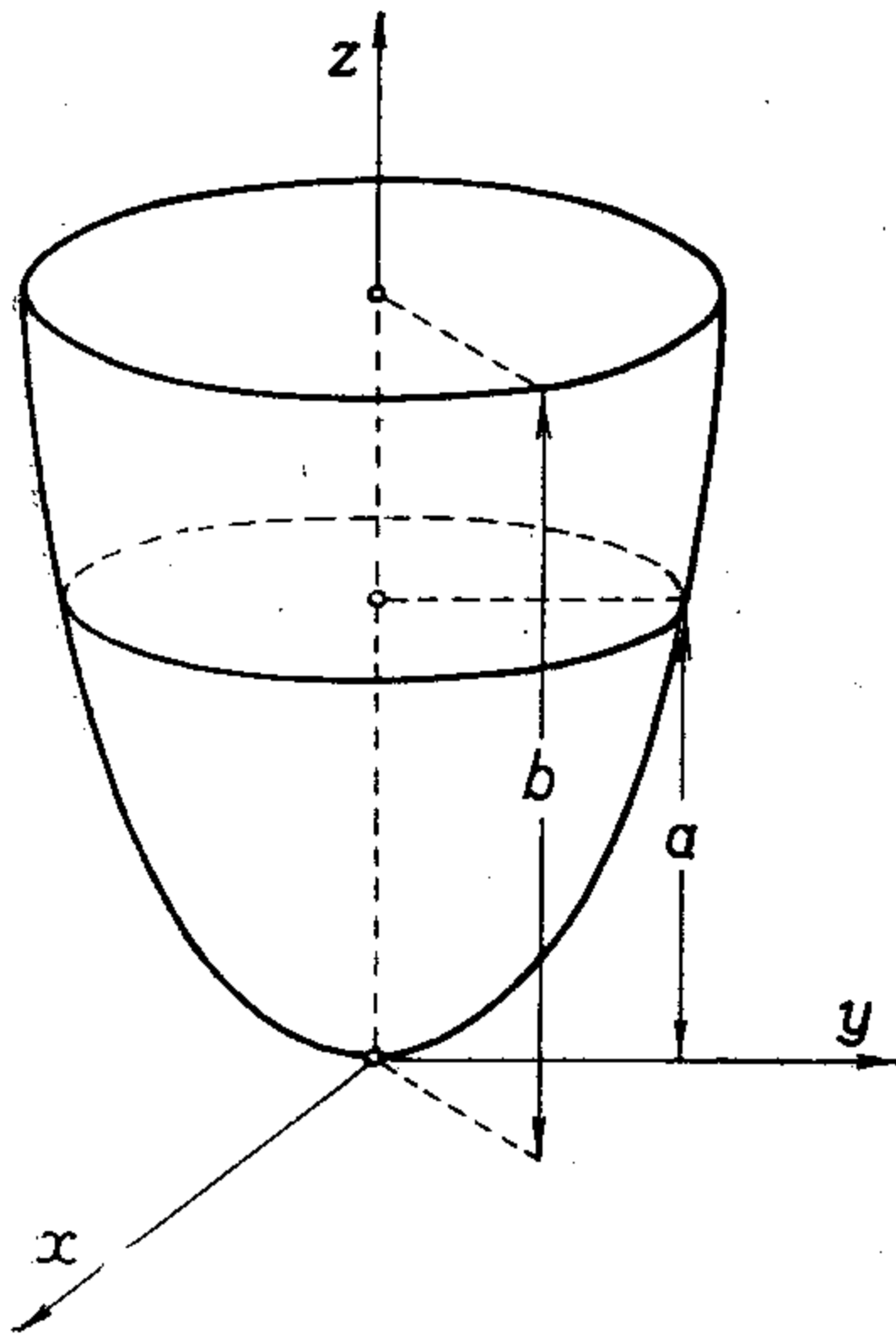
Slika 120

23. Odrediti položaj centra inercije sfernog oktanta (homogenog tela takvog oblika), ako je poluprečnik lopte R , u odnosu na Dekartov koordinatni sistem, ako je teme oktanta u koordinatnom početku, a koordinatne ravni se poklapaju sa stranama oktanta. Odrediti rastojanje d tog centra od centra lopte.

O d g o v o r: $x_C = y_C = z_C = \frac{3}{8} R$, $d = \frac{3\sqrt{3}}{8} R$.

24. Odrediti centar inercije odsečka rotacionog paraboloida kome je z -osa osa rotacije, teme u koordinatnom početku a uočeni odsečak leži između ravni $z = a$ i $z = b$ ($b > a$) (sl. 121).

Odgovor: Traženi centar inercije se nalazi na z -osi, ne zavisi od parametra p parabole koja se obrće i njegova koordinata je određena obrascem



Slika 121

$$z_C = \frac{2}{3} \frac{b^2 + ab + a^2}{a + b}$$

U slučaju $a = 0$, biće

$$z_C = \frac{2}{3} b.$$

25. Odrediti centar mase sfernog sloja lopte poluprečnika R čiji je centar u koordinatnom početku Dekartovog koordinatnog sistema a koji se nalazi između ravni $z = a$, $z = b$ ($b > a$).

Odgovor: Traženi centar mase leži na z -osi i njegova koordinata je

$$z_C = \frac{3}{4} (b + a) \frac{2R^2 - b^2 - a^2}{3R^2 - b^2 - a^2 - ab}$$

U slučaju $b = R$ (sferni segment) dobiva se

$$z_C = \frac{3}{4} \frac{(R + a)^2}{2R + a}$$

I najzad, odavde, kad je $a = 0$ (polulopta) dobiva se kao i u zadatku 9 ($a = b = c = R$)

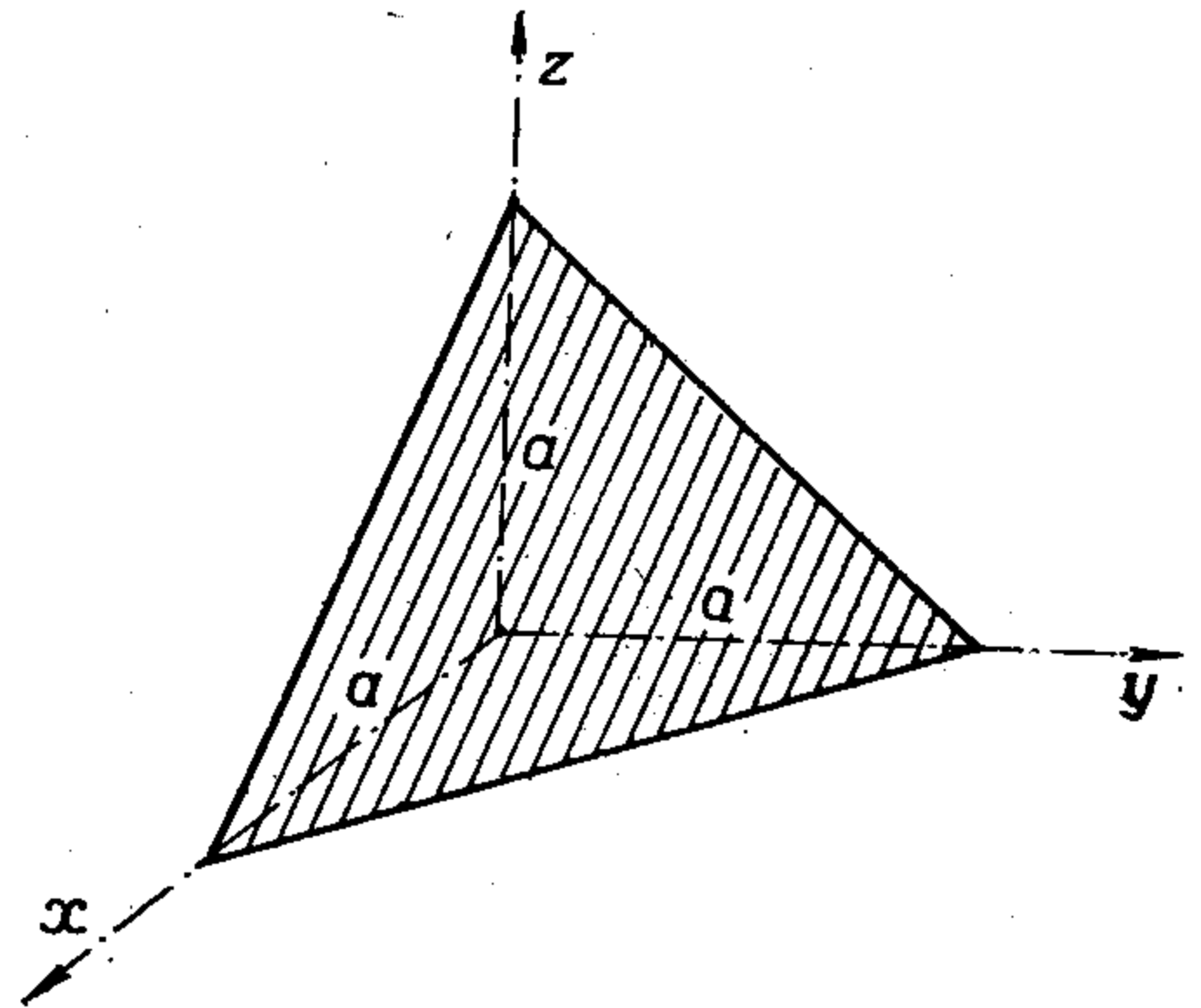
$$z_C = \frac{3}{8} R.$$

26. Odrediti centar mase dela rotacionog paraboloida kome je x -osa osa rotacije a koji je ograničen ravnima $x = a$, $y = z = 0$.

$$\text{Odgovor: } x_C = \frac{2}{3} a,$$

$$y_C = z_C = \frac{16\sqrt{2ap}}{15\pi}$$

27. Odrediti centar mase tela ograničenog koordinatnim ravnima sistema $Oxyz$ i ravni $x + y + z = a$ ($a = \text{const.}$) (sl. 122), ako je gustina tog tela proporcionalna kvadratu rastojanja od centra tj. $\sigma = \lambda(x^2 + y^2 + z^2)$, gde je λ neka konstanta.



Slika 122

$$\text{Odgovor: } x_C = y_C = z_C = \frac{5}{18} a.$$

28. Odrediti centar mase homogenog tela ograničenog ravnima xOy , xOz , sferom poluprečnika a čiji je centar u koordinatnom početku i kružnim cilindrom $x^2 + y^2 - ax = 0$.

$$\text{O d g o v o r: } \quad x_C = \frac{12a}{5(3\pi - 4)}; \quad y_C = \frac{3a(15\pi - 32)}{80(3\pi - 4)};$$

$$z_C = \frac{45\pi a}{64(3\pi - 4)}.$$

3.1.3. Momenti i proizvodi inercije. Definicije i veze

U odeljku (3.1.2) definisani su linearni polarni i planarni momenti masa za materijalni sistem. Ti momenti su linearne funkcije rastojanja tačaka sistema od pola odnosno od ravni u odnosu na koju se definišu. Kvadratni momenti masa su kvadratne funkcije rastojanja tačaka uočenog sistema od elemenata u odnosu na koje se definišu. Mogu se uvesti kvadratni polarni, kvadratni planarni i kvadratni aksijalni momenti masa.

Kvadratni polarni moment masa (I_O) ili *moment inercije sistema u odnosu na tačku (pol)* O je zbir proizvoda masa m_i ($i = 1, 2, \dots, N$) pojedinih tačaka sistema i kvadrata rastojanja r_i tih tačaka od pola, tj.

$$(1) \quad I_{(O)} = \sum_{i=1}^N m_i r_i^2.$$

U opštem slučaju neprekidno raspoređenih (ali i diskretnih masa kad se uzme u pomoć Dirakova funkcija) obrazac (1) ima oblik

$$(2) \quad I_{(O)} = \int_V \sigma r^2 dV,$$

gde je V oblast prostora koju zauzimaju tačke sistema. Za Dekartov pravougli koordinatni sistem sa početkom u tački O obrasci (1) i (2) imaju oblik

$$(3) \quad I_{(O)} = \sum_{i=1}^N m_i (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2),$$

odnosno

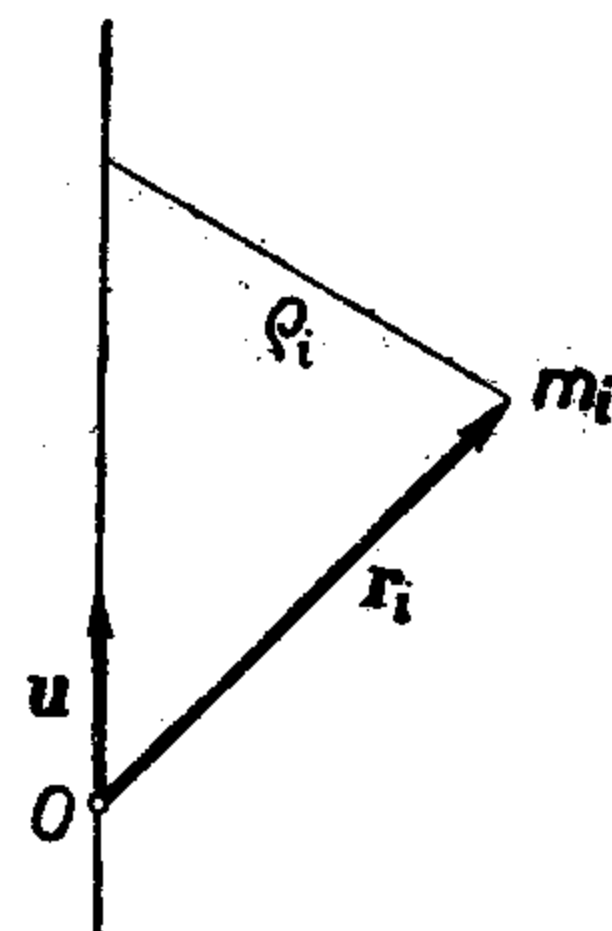
$$(4) \quad I_{(O)} = \int_V \sigma (x^2 + y^2 + z^2) dV.$$

Kvadratni aksijalni moment masa ili *moment inercije sistema u odnosu na osu u* koja prolazi kroz neku tačku O jeste zbir proizvoda masa m_i tačaka sistema i kvadrata rastojanja ρ_i tačaka od ose u (sl. 123)

$$(5) \quad I_{(u)} = \sum_{i=1}^N m_i \rho_i^2,$$

ili u opštem slučaju

$$(6) \quad I_{(u)} = \int_V \sigma \rho^2 dV.$$



Slika 123

Kvadratni planarni moment masa ili moment inercije $I_{(\Pi)}$ materijalnog sistema u odnosu na ravan Π je zbir proizvoda masa m_i tačaka sistema i kvadrata njihovih rastojanja d_i od uočene ravni Π ,

$$(7) \quad I_{(\Pi)} = \sum_{i=1}^N m_i d_i^2,$$

ili u opštem slučaju

$$(8) \quad I_{(\Pi)} = \int_V \sigma d^2 dV.$$

Sva tri kvadratna momenta masa imaju dimenziju

$$(9) \quad [I] = ML^2$$

i mogu se predstaviti kao proizvod ukupne mase sistema i kvadrata neke dužine. Dužina k u takvom izrazu

$$(10) \quad I = mk^2,$$

naziva se *krak inercije* sistema (tela) u odnosu na tačku, osu ili ravan.

Ako se na osi \mathbf{u} , u odnosu na koju se posmatra aksijalni moment inercije, nalazi pol O (sl. 123), rastojanje ρ_i neke tačke m_i sistema od ose \mathbf{u} može se izraziti pomoću vektora položaja \mathbf{r}_i te tačke

$$\rho_i = |\mathbf{r}_i| \sin(\mathbf{r}_i, \mathbf{u}) = |\mathbf{u} \times \mathbf{r}_i|,$$

pa je otuda

$$\rho_i^2 = (\mathbf{u} \times \mathbf{r}_i)^2,$$

tako da se za aksijalni moment inercije može napisati obrazac

$$(11) \quad I_{(u)} = \int_V \sigma (\mathbf{u} \times \mathbf{r})^2 dV = \int_V \sigma (\mathbf{u} \times \mathbf{r}) \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{r}) dV,$$

koji se za diskretne materijalne sisteme svodi na oblik

$$(12) \quad I_{(u)} = \sum_{i=1}^N m_i (\mathbf{u} \times \mathbf{r}_i)^2 = \sum_{i=1}^N m_i (\mathbf{u} \times \mathbf{r}_i) \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{r}_i).$$

U Dekartovom pravouglom sistemu $Oxyz$ mogu se definisati momenti inercije u odnosu na početak O , u odnosu na koordinatne ose i najzad u odnosu na koordinatne ravni. Polarni moment inercije u odnosu na početak O je dat obrascima (3) odn. (4). Za aksijalne momente inercije se iz obrasca (11) i (12), stavljanjem redom da je \mathbf{u} jednako \mathbf{i} , \mathbf{j} i \mathbf{k} dobiva

$$(13) \quad I_x = \sum_{i=1}^N m_i (y_i^2 + z_i^2), \quad I_y = \sum_{i=1}^N m_i (z_i^2 + x_i^2), \quad I_z = \sum_{i=1}^N m_i (x_i^2 + y_i^2),$$

odnosno

$$(14) \quad I_x = \int_V \sigma (y^2 + z^2) dV, \quad I_y = \int_V \sigma (z^2 + x^2) dV, \quad I_z = \int_V \sigma (x^2 + y^2) dV.$$

Rastojanja tačke m_i , čiji je vektor položaja \mathbf{r}_i , od koordinatnih ravni yOz , zOx i xOy jednaka su apsolutnim vrednostima koordinata x_i , y_i i z_i tačke; pa se za planarne momente inercije prema (6) i (7) može pisati

$$(15) \quad I_{yOz} = \sum_{i=1}^N m_i x_i^2, \quad I_{zOx} = \sum_{i=1}^N m_i y_i^2, \quad I_{xOy} = \sum_{i=1}^N m_i z_i^2,$$

odnosno

$$(16) \quad I_{yOz} = \int_V \sigma x^2 dV, \quad I_{zOx} = \int_V \sigma y^2 dV, \quad I_{xOy} = \int_V \sigma z^2 dV.$$

Upoređenjem obrazaca za polarne, aksijalne i planarne momente inercije u Dekartovom koordinatnom sistemu vidi se da između njih postoje jednostavne algebarske veze:

$$(17) \quad I_{(O)} = I_{yOz} + I_{zOx} + I_{xOy} = \frac{1}{2} (I_x + I_y + I_z);$$

$$(18) \quad \begin{aligned} I_x &= I_{zOx} + I_{xOy}, \\ I_y &= I_{xOy} + I_{yOz}, \\ I_z &= I_{yOz} + I_{zOx}; \end{aligned}$$

$$(19) \quad I_{zOx} = \frac{1}{2} (I_x - I_y + I_z),$$

$$(20) \quad I_{xOy} = \frac{1}{2} (I_x + I_y - I_z),$$

$$(21) \quad I_{yOz} = \frac{1}{2} (-I_x + I_y + I_z).$$

Pored navedenih momenata inercije, u odnosu na dve sticajne ose \mathbf{u} i \mathbf{v} , definiše se za materijalni sistem *proizvod inercije*

$$(22) \quad \Pi_{uv} = \sum_{i=1}^N m_i (\mathbf{u} \times \mathbf{r}_i) \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{r}_i),$$

ili u opštem slučaju

$$(23) \quad \Pi_{uv} = \int_V \sigma (\mathbf{u} \times \mathbf{r}_i) \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{r}_i) dV.$$

Kad se ose \mathbf{u} i \mathbf{v} poklapaju, proizvod inercije se svodi na aksijalni moment inercije. Ako su te dve ose uzajamno upravne, proizvod inercije u odnosu na njih naziva se *devijacioni ili centrifugalni moment* mase sistema. Za ose Dekartovog pravouglonog koordinatnog sistema biće

$$(\mathbf{i} \times \mathbf{r}) \cdot (\mathbf{j} \times \mathbf{r}) = -xy, \quad (\mathbf{j} \times \mathbf{r}) \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{r}) = -yz, \quad (\mathbf{k} \times \mathbf{r}) \cdot (\mathbf{i} \times \mathbf{r}) = -zx,$$

pa su odgovarajući proizvodi inercije

$$(24) \quad \begin{aligned} \Pi_{xy} &= \sum_{i=1}^N m_i (\mathbf{i} \times \mathbf{r}_i) \cdot (\mathbf{j} \times \mathbf{r}_i) = - \sum_{i=1}^N m_i x_i y_i, \\ \Pi_{yz} &= \sum_{i=1}^N m_i (\mathbf{j} \times \mathbf{r}_i) \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{r}_i) = - \sum_{i=1}^N m_i y_i z_i, \\ \Pi_{zx} &= \sum_{i=1}^N m_i (\mathbf{k} \times \mathbf{r}_i) \cdot (\mathbf{i} \times \mathbf{r}_i) = - \sum_{i=1}^N m_i z_i x_i. \end{aligned}$$

Za telo gustine σ ove relacije imaju oblik

$$(25) \quad \Pi_{xy} = - \int_V \sigma xy dV, \quad \Pi_{yz} = - \int_V \sigma yz dV, \quad \Pi_{zx} = - \int_V \sigma zx dV.$$

Za homogena tela je $\sigma = \text{const.}$, pa se u obrascima (2), (6) i (8) može σ izneti pred znak integrala. Veličine

$$I_{(O)} = \int_V r^2 dV, \quad I_{(u)} = \int_V \rho^2 dV, \quad I_{(\Pi)} = \int_V d^2 dV,$$

predstavljaju *geometrijske momente inercije*. Množenjem geometrijskih momenata sa $\sigma = m/V$ dobiće se odgovarajući momenti inercije masa. To isto važi i za proizvode inercije.

Iz obrasca (13) se sabiranjem dobiva

$$(26) \quad \begin{aligned} I_x + I_y &= I_z + 2 \sum_{i=1}^n m_i z_i^2, \\ I_y + I_z &= I_x + 2 \sum_{i=1}^n m_i x_i^2, \\ I_z + I_x &= I_y + 2 \sum_{i=1}^n m_i y_i^2, \end{aligned}$$

a kako je sigurno $\sum_{i=1}^N m_i x_i^2 \geq 0$, $\sum_{i=1}^N m_i y_i^2 \geq 0$, $\sum_{i=1}^N m_i z_i^2 \geq 0$, to između aksijalnih momenata inercije za ose Dekartovog pravouglog koordinatnog sistema postoje naredne nejednakosti

$$(27) \quad I_x + I_y > I_z, \quad I_y + I_z > I_x, \quad I_z + I_x > I_y.$$

Takođe iz (13) nalazi se oduzimanjem

$$I_x - I_y = \sum_{i=1}^N m_i (y_i^2 - x_i^2), \quad I_y - I_z = \sum_{i=1}^N m_i (z_i^2 - y_i^2), \quad I_z - I_x = \sum_{i=1}^N m_i (x_i^2 - z_i^2),$$

a kako je $y_i^2 - x_i^2 < y_i^2 + x_i^2$, to je $\sum_{i=1}^N m_i (y_i^2 - x_i^2) < \sum_{i=1}^N m_i (y_i^2 + x_i^2)$, što važi i za razliku i $x_i^2 - z_i^2$ pa se može napisati

$$(28) \quad I_x - I_y < I_z, \quad I_y - I_z < I_x, \quad I_z - I_x < I_y,$$

što uostalom odmah proističe i iz relacija (27).

Kad su \mathbf{u} i \mathbf{v} uzajamno upravne ose, mogu se odrediti druge dve ose, recimo ξ i η , tako da budu prema osama \mathbf{u} i \mathbf{v} zaokrenute za ugao $\alpha = \pi/4$ (\mathbf{u} , \mathbf{v} , ξ i η su jedinični vektori). Tada je (sl. 124 a)

$$\mathbf{u} = \frac{\sqrt{2}}{2} (\xi - \eta), \quad \mathbf{v} = \frac{\sqrt{2}}{2} (\xi + \eta).$$

Proizvod inercije (devijacioni moment) za ose \mathbf{u} i \mathbf{v} biće

$$\Pi_{uv} = \sum_{i=1}^N m_i (\mathbf{u} \times \mathbf{r}_i) \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{r}_i) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (\xi \times \mathbf{r}_i - \eta \times \mathbf{r}_i) \cdot (\xi \times \mathbf{r}_i + \eta \times \mathbf{r}_i),$$

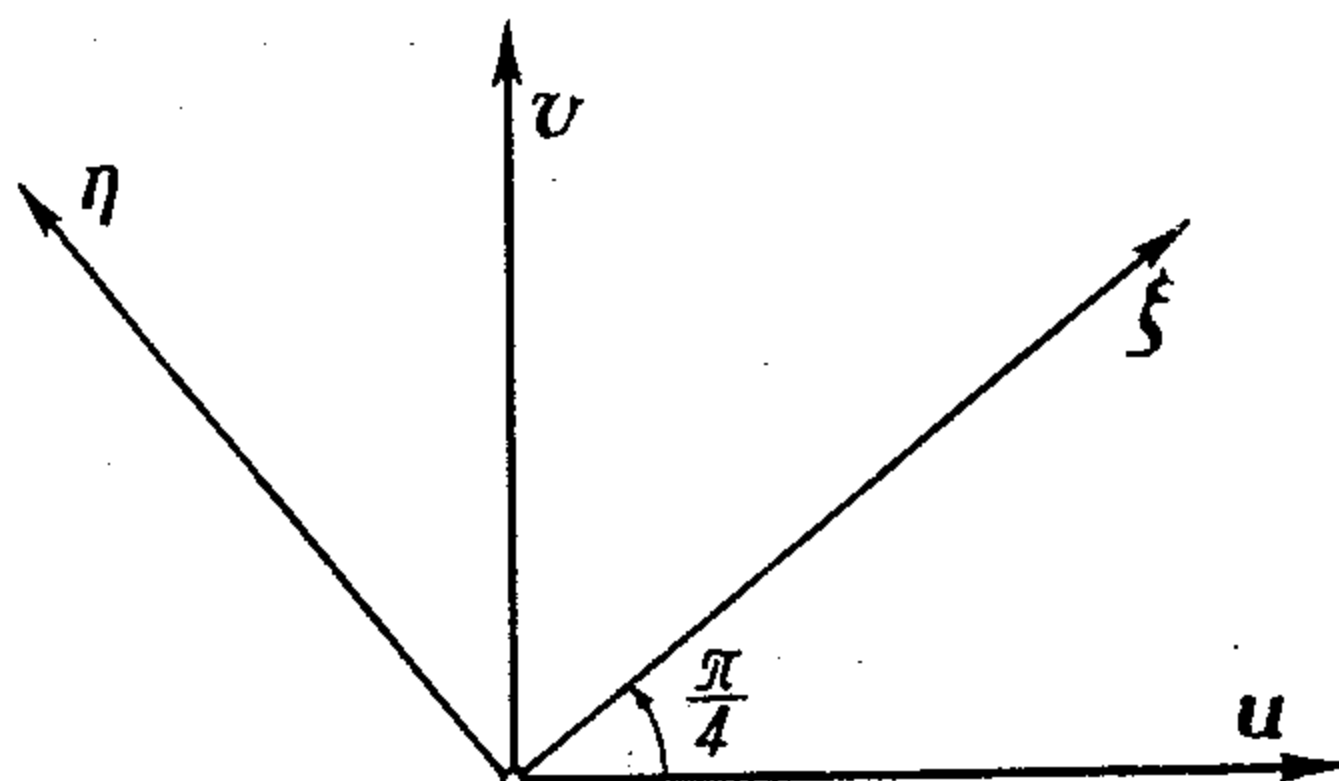
što se posle množenja svodi na relaciju

$$(29) \quad \Pi_{uv} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i [(\xi \times \mathbf{r}_i) \cdot (\xi \times \mathbf{r}_i) - (\eta \times \mathbf{r}_i) \cdot (\eta \times \mathbf{r}_i)],$$

odnosno

$$(29 a) \quad \Pi_{uv} = \frac{1}{2} (I_{\xi} - I_{\eta}).$$

Ako ose u i v nisu upravne one se mogu uvek rastaviti u po dve komponente u pravcima dveju ortogonalnih osa. Neka su ξ i η dve uzajamno upravne



Slika 124 a

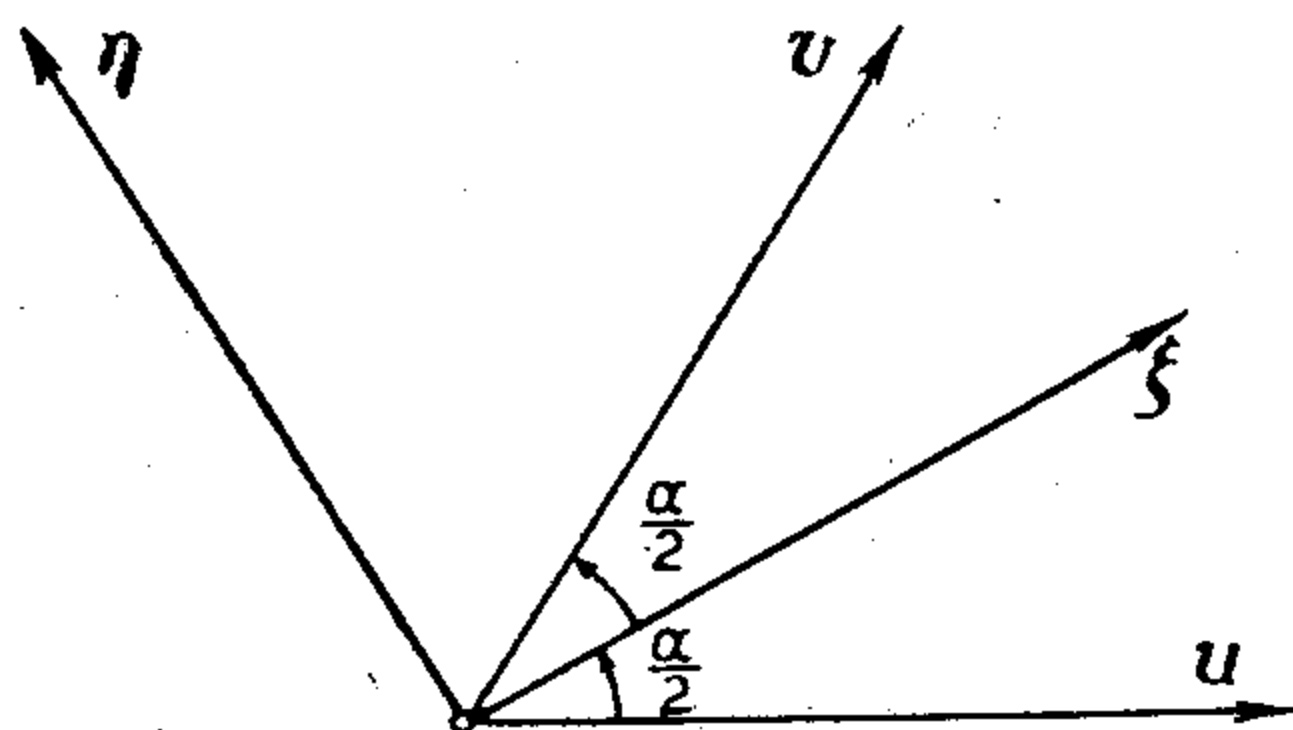
ose i neka je α ugao između osa u i v (sl. 124 b). Ako osa ξ polovi ugao između u i v može se pisati

$$\mathbf{u} = \xi \cos \frac{\alpha}{2} - \eta \sin \frac{\alpha}{2}; \quad \mathbf{v} = \xi \sin \frac{\alpha}{2} + \eta \cos \frac{\alpha}{2}.$$

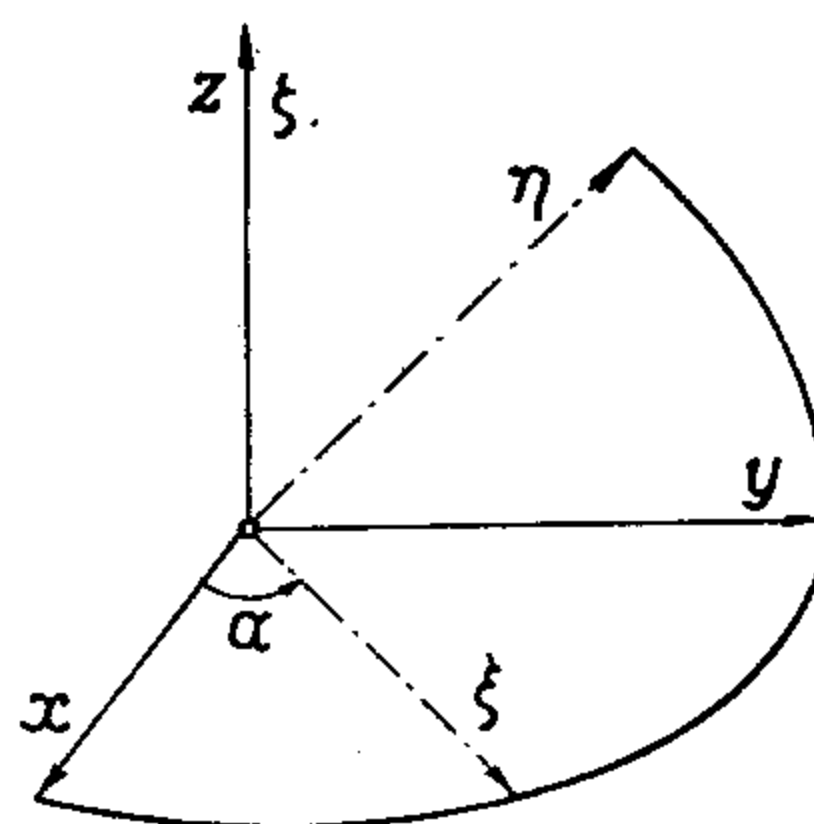
Unošenjem ovih izraza u (29) dobiće se za proizvod inercije obrazac

$$(30) \quad \Pi_{uv} = \frac{1}{2} (I_{\xi} - I_{\eta}) \sin \alpha + \Pi_{\xi\eta} \cos \alpha.$$

Za $\alpha = \pi/2$ ovaj se obrazac svodi na (29 a).



Slika 124 b



Slika 125

Ako su $Oxyz$ i $A\xi\eta\zeta$ ($O \equiv A$) dva Dekartova pravouglata koordinatna sistema takva da im se ose Oz i $O\zeta$ poklapaju, a ose Ox i $O\xi$ obrazuju neki ugao α (sl. 125), veze između koordinata neke tačke u ova dva koordinatna sistema biće

$$(31) \quad \begin{aligned} x &= \xi \cos \alpha - \eta \sin \alpha, \\ y &= \xi \sin \alpha + \eta \cos \alpha, \\ z &= \zeta. \end{aligned}$$

Proizvodi inercije Π_{yz} , Π_{zx} i $\Pi_{\eta\zeta}$, $\Pi_{\zeta\xi}$ za ose ova dva koordinatna sistema su

$$(32) \quad \Pi_{yz} = -\sum_{i=1}^N m_i y_i z_i, \quad \Pi_{zx} = -\sum_{i=1}^N m_i z_i x_i;$$

$$(33) \quad \Pi_{\eta\zeta} = -\sum_{i=1}^N m_i \eta_i \zeta_i, \quad \Pi_{\zeta\xi} = -\sum_{i=1}^N m_i \zeta_i \xi_i.$$

Ako se u obrasce (32) uvedu koordinatne transformacije (31) dobiće se

$$\Pi_{yz} = \Pi_{\zeta\xi} \sin \alpha + \Pi_{\eta\zeta} \cos \alpha,$$

$$\Pi_{zx} = \Pi_{\zeta\xi} \cos \alpha - \Pi_{\eta\zeta} \sin \alpha.$$

Određivanjem kvadrata ovih relacija i sabiranjem nalazi se da je zbir kvadrata proizvoda inercije za uočene ose invarijanta

$$(34) \quad \Pi_{yz}^2 + \Pi_{zx}^2 = \Pi_{\eta\zeta}^2 + \Pi_{\zeta\xi}^2$$

tj. ne menja se kad se koordinatni sistem obrće oko z -ose.

3.1.3.1. Osobine momenata i proizvoda inercije

Za dati materijalni sistem momenti i proizvodi inercije zavisi su samo od izbora pola i od pravaca osa za koje se određuju.

Neka su O i A dve tačke na \mathbf{u} osi, tako da je $\mathbf{r}_i = \overrightarrow{OA} + \mathbf{q}_i$, a $\overrightarrow{OA} = \overline{OA} \mathbf{u}$. Moment inercije nekog sistema u odnosu na osu \mathbf{u} , a za pol u tački O biće

$$(1) \quad I_u^O = \sum_{i=1}^N m_i (\mathbf{u} \times \mathbf{r}_i)^2 = \sum_{i=1}^N m_i (\mathbf{u} \times \overrightarrow{OA} + \mathbf{u} \times \mathbf{q}_i)^2 = \sum_{i=1}^N m_i (\mathbf{u} \times \mathbf{q}_i)^2,$$

jer je $\mathbf{u} \times \overrightarrow{OA} = \mathbf{0}$ zbog kolinearnosti vektora \mathbf{u} i \overrightarrow{OA} . Međutim je

$$(2) \quad \sum_{i=1}^N m_i (\mathbf{u} \times \mathbf{q}_i)^2 = I_u^A,$$

što predstavlja moment inercije za istu osu a za pol u tački A , pa se vidi da je

$$(3) \quad I_u^O = I_u^A,$$

tj. aksijalni moment inercije ne zavisi od izbora pola na toj osi.

Ako se polovi O i A ne nalaze na istoj osi, u tačkama O i A mogu se posmatrati dve paralelne ose \mathbf{u} . Odgovarajući momenti inercije biće

$$(4) \quad I_u^O = \sum_{i=1}^N m_i (\mathbf{u} \times \mathbf{r}_i)^2; \quad I_u^A = \sum_{i=1}^N m_i (\mathbf{u} \times \mathbf{q}_i)^2,$$

pri čemu je (sl. 126)

$$(5) \quad \mathbf{r}_i = \mathbf{r}_A + \mathbf{q}_i.$$

Unošenjem ove vrednosti u (4) dobiće se

$$(6) \quad \begin{aligned} I_u^O &= \sum_{i=1}^N m_i (\mathbf{u} \times \mathbf{r}_A + \mathbf{u} \times \mathbf{q}_i)^2 = \sum_{i=1}^N m_i (\mathbf{u} \times \mathbf{r}_A)^2 + \\ &+ 2 \sum_{i=1}^N m_i (\mathbf{u} \times \mathbf{r}_A) \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{q}_i) + \sum_{i=1}^N m_i (\mathbf{u} \times \mathbf{q}_i)^2. \end{aligned}$$

Ovde je

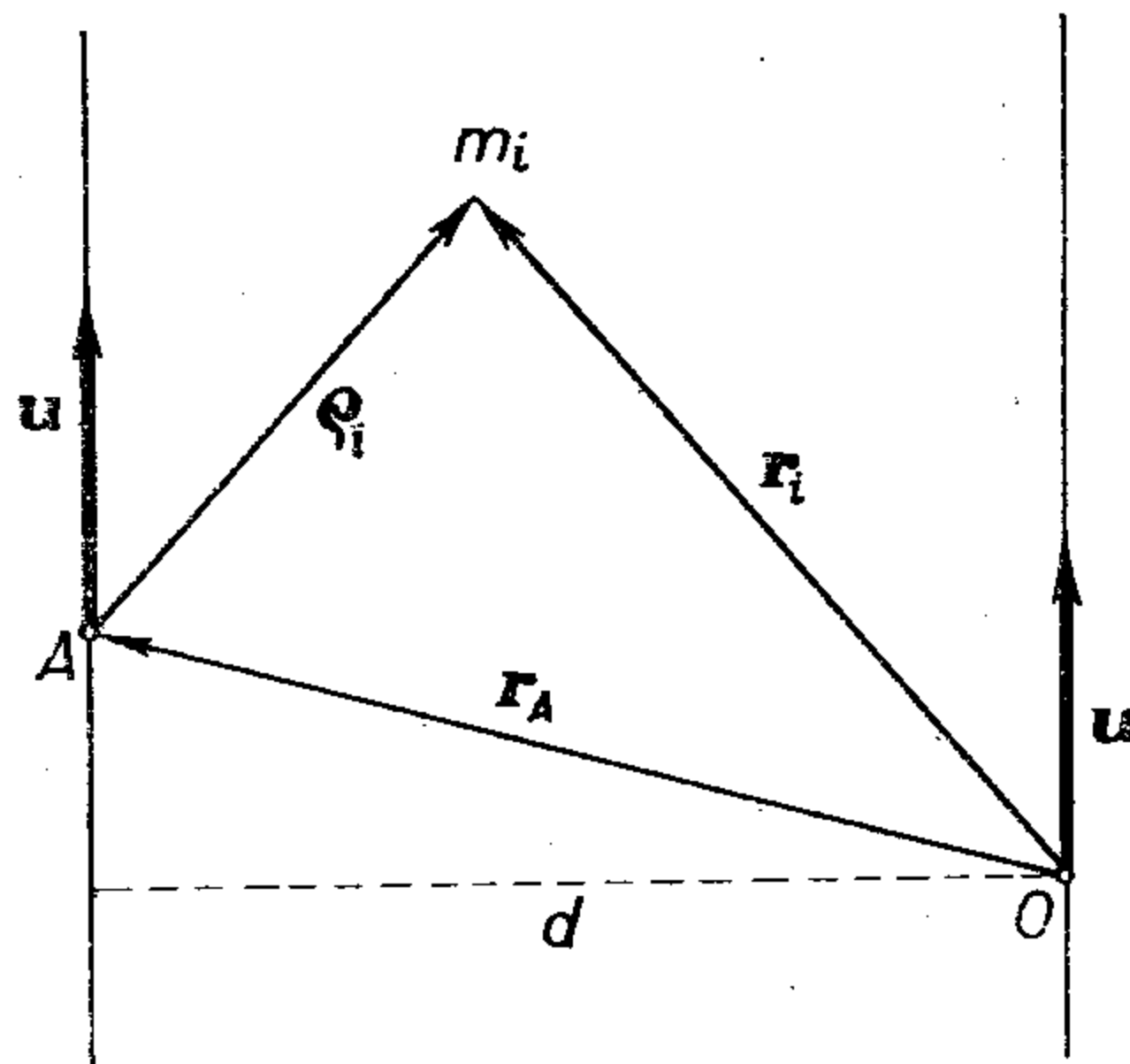
$$\sum_{i=1}^N m_i (\mathbf{u} \times \mathbf{r}_A)^2 = m (\mathbf{u} \times \mathbf{r}_A)^2,$$

jer se zbir odnosi samo na mase m_i ; sem toga je

$$\sum_{i=1}^N m_i (\mathbf{u} \times \mathbf{r}_A) \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{q}_i) = m (\mathbf{u} \times \mathbf{r}_A) \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{q}_C),$$

gde je \mathbf{q}_C vektor položaja centra inercije sistema prema polu A (3.1.2), a zbir se odnosi samo na proizvode $m_i \mathbf{q}_i$. S obzirom na to relacija (6) može se napisati u obliku

$$(7) \quad I_u^O = I_u^A + m (\mathbf{u} \times \mathbf{r}_A)^2 + 2 m (\mathbf{u} \times \mathbf{r}_A) \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{q}_C).$$



Slika 126

Kad se pol A poklapa sa centrom masa C sistema biće $\mathbf{q}_C = \mathbf{0}$ a veličina $(\mathbf{u} \times \mathbf{r}_C)^2$ predstavlja tada kvadrat rastojanja d^2 paralelnih osa \mathbf{u} koje prolaze kroz tačke O i C pa se relacija (7) svodi na jednostavan oblik

$$(8) \quad I_u^O = I_u^C + md^2.$$

Ovaj obrazac predstavlja *Hajgens (Huygens)-Štajnerovu (Steiner) teoremu* o vezi momenata inercije za dve paralelne ose.

Ose koje prolaze kroz cenatar masa nekog sistema zovu se *centralne ose* za taj sistem. Kako je uvek $md^2 > 0$, iz (8) proističe da je uvek $I_u^O > I_u^C$, pa je moment inercije za centralnu osu uvek manji od momenta inercije za paralelne ose koje nisu centralne.

Za ose Dekartovog koordinatnog sistema, ako su koordinate centra inercije x_C, y_C, z_C , obrazac (8) će glasiti

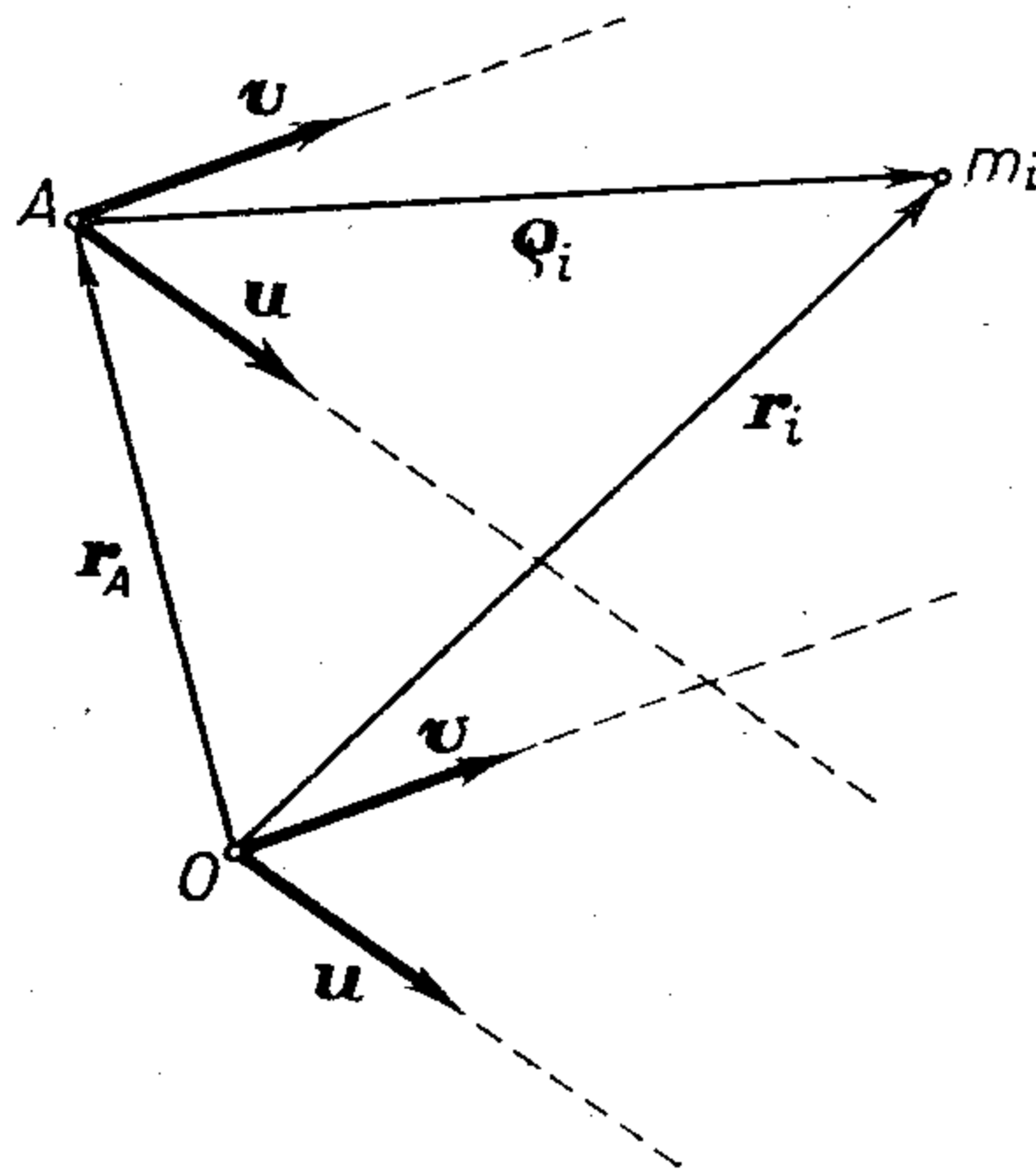
$$(9) \quad I_x^O = I_x^C + m(y_C^2 + z_C^2), \quad I_y^O = I_y^C + m(z_C^2 + x_C^2), \\ I_z^O = I_z^C + m(x_C^2 + y_C^2).$$

Proizvod inercije za ose paralelne osama \mathbf{u} i \mathbf{v} takođe će promeniti svoju vrednost kad se od pola O pređe na neki drugi pol A (sl. 127). Proizvodi inercije

za ose \mathbf{u} i \mathbf{v} jednom povučene kroz pol O a drugi put paralelno pomerene u pol A iznose

$$\Pi_{uv}^O = \sum_{i=1}^N m_i (\mathbf{u} \times \mathbf{r}_i) \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{r}_i), \quad (10)$$

$$\Pi_{uv}^A = \sum_{i=1}^N m_i (\mathbf{u} \times \mathbf{q}_i) \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{q}_i).$$



Slika 127

Ako se u prvu od ovih relacija unese za vektor položaja \mathbf{r}_i vrednost iz obrasca (5) dobiće se

$$(11) \quad \Pi_{uv}^O = \Pi_{uv}^A + m (\mathbf{u} \times \mathbf{r}_A) \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{r}_A) + m (\mathbf{u} \times \mathbf{r}_A) \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{q}_C) + m (\mathbf{u} \times \mathbf{q}_C) \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{r}_A).$$

Kad se tačka A poklapa sa centrom inercije sistema biće $\mathbf{q}_C = \mathbf{0}$ pa je

$$(12) \quad \Pi_{uv}^O = \Pi_{uv}^C + m (\mathbf{u} \times \mathbf{r}_C) \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{r}_C).$$

U Dekartovim koordinatama biće

$$(\mathbf{j} \times \mathbf{r}_C) \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{r}_C) = -y_C z_C; \quad (\mathbf{k} \times \mathbf{r}_C) \cdot (\mathbf{i} \times \mathbf{r}_C) = -z_C x_C; \quad (\mathbf{i} \times \mathbf{r}_C) \cdot (\mathbf{j} \times \mathbf{r}_C) = -x_C y_C,$$

pa relacija (12) za koordinatne ose Ox , Oy i Oz daje naredna tri obrasca

$$(13) \quad \begin{aligned} \Pi_{yz}^O &= \Pi_{yz}^C - m y_C z_C, \\ \Pi_{zx}^O &= \Pi_{zx}^C - m z_C x_C, \\ \Pi_{xy}^O &= \Pi_{xy}^C - m x_C y_C, \end{aligned}$$

gde su Π_{yz}^O , Π_{zx}^O , Π_{xy}^O proizvodi inercije u odnosu na ose Ox , Oy i Oz kroz tačku O , a Π_{yz}^C , Π_{zx}^C , Π_{xy}^C proizvodi inercija oko tih osa paralelno pomerenih u centar inercije C .

Ako su \mathbf{u} , \mathbf{v} i \mathbf{w} tri nekomplanarne ose u prostoru i za jednu od njih, recimo \mathbf{u} , proizvodi inercije su jednaki nuli, $\Pi_{uv} = \Pi_{uw} = 0$, tada se za osu \mathbf{u} kaže da je *glavna osa inercije* sistema. Kad glavna osa inercije prolazi kroz centar inercije, ona se naziva *glavna centralna osa inercije*.

Za svaki materijalni sistem i za svaki dati pol postoji bar jedna glavna osa inercije. Neka su α , β i γ kosinusi pravca ose \mathbf{u} prema osama Dekartovog pravouglog koordinatnog sistema $Oxyz$,

$$(14) \quad \mathbf{u} = \alpha \mathbf{i} + \beta \mathbf{j} + \gamma \mathbf{k}.$$

Ako su \mathbf{v} i \mathbf{w} dve nekolinearne ose, nekomplanarne sa \mathbf{u} , uslov da osa \mathbf{u} bude glavna osa inercije je da su istovremeno zadovoljene dve jednačine

$$(15) \quad \begin{aligned} \Pi_{uv} &= \alpha \Pi_{xv} + \beta \Pi_{yv} + \gamma \Pi_{zv} = 0; \\ \Pi_{uw} &= \alpha \Pi_{xw} + \beta \Pi_{yw} + \gamma \Pi_{zw} = 0, \end{aligned}$$

pri čemu koeficijenti pravca moraju zadovoljavati uslov

$$(16) \quad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1.$$

Prema tome, za određivanje ose \mathbf{u} treba rešiti sistem od tri jednačine (15) i (16). Iz dve jednačine (15) se lako nalazi

$$(17) \quad \alpha = \gamma \frac{\Pi_{yv} \Pi_{zw} - \Pi_{zv} \Pi_{yw}}{\Pi_{xv} \Pi_{yw} - \Pi_{yv} \Pi_{xw}}, \quad \beta = \gamma \frac{\Pi_{zv} \Pi_{xw} - \Pi_{xv} \Pi_{zw}}{\Pi_{xv} \Pi_{yw} - \Pi_{yv} \Pi_{xw}}$$

Zamenom ovih vrednosti u (16) dobiće se jedna jednačina za određivanje koeficijenta γ

$$(18) \quad \frac{\gamma^2}{(\Pi_{xv} \Pi_{yw} - \Pi_{yv} \Pi_{xw})^2} [(\Pi_{yv} \Pi_{zw} - \Pi_{zv} \Pi_{yw})^2 + (\Pi_{zv} \Pi_{xw} - \Pi_{xv} \Pi_{zw})^2] = 1.$$

Proizvodi inercije su realni brojevi pa je stoga koeficijent uz γ^2 nenegativan, što znači da postoje realna rešenja γ jednačine (18), a stoga su realna i rešenja α i β jednačine (17). Prema tome, uvek postoji za dati sistem i za dati pol glavna osa inercije sa koeficijentima pravca α , β , γ .

Kad neki homogeni materijalni sistem ima osu simetrije, ta osa je glavna osa inercije sistema. Neka je Oz osa simetrije nekog takvog sistema. Proizvodi inercije koji su vezani za osu Oz su

$$(19) \quad \Pi_{yz} = - \sum_{i=1}^N m_i y_i z_i, \quad \Pi_{zx} = - \sum_{i=1}^N m_i z_i x_i.$$

Za materijalni sistem simetričan u odnosu na z -osu karakteristično je što svakoj materijalnoj tački m_i sa koordinatama (x_i, y_i, z_i) mora odgovarati tačka iste mase ali sa koordinatama $(-x_i, -y_i, -z_i)$. U obrascima (19) svi sabirci mogu stoga da se grupišu u parove

$$m_i [y_i z_i + (-y_i) z_i] \quad \text{ili} \quad m_i [z_i x_i + z_i (-x_i)],$$

a oni se potiru pa je $\Pi_{yz} = 0$ i $\Pi_{zx} = 0$, što znači da je takva z -osa glavna osa inercije.

Kad neki materijalni sistem ima ravan simetrije, svaka osa upravna na toj ravni biće glavna osa inercije. Ako je xOy ravan simetrije nekog materijalnog sistema,

svakoj tački m_i sa koordinatama (x_i, y_i, z_i) odgovaraće tačka iste mase sa koordinatama $(x_i, y_i - z_i)$, pa se u obrascima (19) javljaju samo zbrojevi parova

$$m_i [y_i z_i + y_i (-z_i)] \quad \text{ili} \quad m_i [z_i x_i + (-z_i) x_i],$$

a sabirci u parovima se potiru pa je $\Pi_{yz} = 0$, $\Pi_{zx} = 0$ i z -osa, koja je upravna na ravan simetrije, jeste glavna osa inercije.

Kad su α , β , γ kosinusi pravca ose \mathbf{u} , moment inercije nekog sistema za tu osu može s obzirom na (14) da se izrazi kao funkcija tih kosinusa,

$$I_u = \sum_{i=1}^N m_i (\mathbf{u} \times \mathbf{r}_i)^2 = \sum_{i=1}^N m_i \rho_i^2 = \sum_{i=1}^N m_i (\alpha \mathbf{i} \times \mathbf{r}_i + \beta \mathbf{j} \times \mathbf{r}_i + \gamma \mathbf{k} \times \mathbf{r}_i)^2,$$

tako da je

$$I_u = \sum_{i=1}^N m_i [(\mathbf{i} \times \mathbf{r}_i)^2 \alpha^2 + (\mathbf{j} \times \mathbf{r}_i)^2 \beta^2 + (\mathbf{k} \times \mathbf{r}_i)^2 \gamma^2 + 2(\mathbf{j} \times \mathbf{r}_i)(\mathbf{k} \times \mathbf{r}_i) \beta \gamma + 2(\mathbf{k} \times \mathbf{r}_i)(\mathbf{i} \times \mathbf{r}_i) \gamma \alpha + 2(\mathbf{i} \times \mathbf{r}_i)(\mathbf{j} \times \mathbf{r}_i) \alpha \beta].$$

Prema (3.1.3—12 i 24) ovaj izraz može da se napiše u obliku

$$(20) \quad I_u = I_x \alpha^2 + I_y \beta^2 + I_z \gamma^2 + 2 \Pi_{yz} \beta \gamma + 2 \Pi_{zx} \gamma \alpha + 2 \Pi_{xy} \alpha \beta,$$

što predstavlja obrazac prema kome se može odrediti moment inercije ma za koju osu $\mathbf{u}(\alpha, \beta, \gamma)$ u nekoj tački kad su poznati momenti i proizvodi inercije za tu istu tačku u odnosu na sistem Dekartovih koordinatnih osa.

Slično tome, ako su date dve ose $\mathbf{u}(\alpha, \beta, \gamma)$ i $\mathbf{v}(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, proizvod inercije za njih je

$$\Pi_{uv} = \sum_{i=1}^N m_i (\alpha \mathbf{i} \times \mathbf{r}_i + \beta \mathbf{j} \times \mathbf{r}_i + \gamma \mathbf{k} \times \mathbf{r}_i) \cdot (\alpha_1 \mathbf{i} \times \mathbf{r}_i + \beta_1 \mathbf{j} \times \mathbf{r}_i + \gamma_1 \mathbf{k} \times \mathbf{r}_i),$$

što posle množenja dovodi do obrasca

$$(21) \quad \Pi_{uv} = \alpha \alpha_1 I_x + \beta \beta_1 I_y + \gamma \gamma_1 I_z + (\beta \gamma_1 + \beta_1 \gamma) \Pi_{yz} + (\gamma \alpha_1 + \gamma_1 \alpha) \Pi_{zx} + (\alpha \beta_1 + \alpha_1 \beta) \Pi_{xy}.$$

Prema obrascima (20) i (21), kad su poznati momenti i proizvodi inercije u odnosu na ose Dekartovog pravouglog koordinatnog sistema u nekoj tački prostora za dati materijalni sistem, momenti i proizvodi inercije za proizvoljne ose u istoj tački mogu se neposredno odrediti. Stoga se veličine I_x , I_y , I_z , Π_{yz} , Π_{zx} , Π_{xy} nazivaju i *koeficijenti inercije* za datu tačku. Kad su koeficijenti inercije poznati u nekoj tački, pomoću obrasca (7) i (11) mogu se oni odrediti i u proizvoljnoj tački prostora, što znači da je za neki materijalni sistem dovoljno odrediti koeficijente inercije u jednoj tački, pa se onda mogu naći momenti i proizvodi inercije za proizvoljne ose u proizvoljnoj datoj tački prostora.

3.1.3.2. Elipsoid inercije. Giracioni elipsoid. Matrica inercije

Raspored momenata inercije nekog materijalnog sistema za datu tačku O može se najbolje videti iz *elipsoida inercije*. Za proizvoljan pravac $\mathbf{u} = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ u datoj tački O (koordinatnom početku) moment inercije je određen obrascem (3.1.3.1—20). Ako se u pravcu jediničnog vektora \mathbf{u} od tačke O prenese duž

$$(1) \quad r = \overline{OP} = \frac{k}{\sqrt{I_u}},$$

gde je k proizvoljan faktor proporcionalnosti, vektor

$$(2) \quad \vec{r} = \overrightarrow{OP} = \frac{k \mathbf{u}}{\sqrt{I_u}}$$

određuje položaj tačke P čije su koordinate x, y, z . Kraj vektora \mathbf{r} određuje geometrijsko mesto tačaka P za sve moguće pravce \mathbf{u} kroz tačku O . Iz (2) se projiciranjem na koordinatne ose dobiva

$$(3) \quad \alpha = \frac{\sqrt{I_u}}{k} x, \quad \beta = \frac{\sqrt{I_u}}{k} y, \quad \gamma = \frac{\sqrt{I_u}}{k} z,$$

što se može uneti u relaciju (3.1.3.1—20), koja će tada dobiti oblik

$$(4) \quad I_x x^2 + I_y y^2 + I_z z^2 + 2 \Pi_{zx} zx + 2 \Pi_{xy} xy + 2 \Pi_{yz} yz = k^2.$$

Ova relacija predstavlja jednačinu *elipsoida inercije* čiji je centar u tački O . Za razne vrednosti k dobiva se porodica homotetičnih elipsoida. Obično se elipsoid inercije normira uzimanjem $k = 1$. Elipsoid inercije sistema materijalnih tačaka (tela) može se konstruisati za svaku tačku prostora, kad se uzme u obzir kako se menjaju momenti i proizvodi inercije pri paralelnom pomeranju osa.

Iz analitičke geometrije je poznato da se uvek može naći takav sistem koordinata $OXYZ$ da se jednačina elipsoida u odnosu na njega svede na kanon-ski oblik.

Za $k = 1$ biće tada

$$(5) \quad I_X X^2 + I_Y Y^2 + I_Z Z^2 = 1.$$

Za takav sistem koordinata su proizvodi inercije jednaki nuli pa su ose koordinatnog sistema $OXYZ$ *glavne ose inercije*, a odgovarajući momenti I_X, I_Y i I_Z su glavni momenti inercije za tačku O . Najzad, ako se elipsoid inercije konstruiše u centru inercije C , za *glavne centralne ose inercije* $C\xi\eta\zeta$, kome je početak u centru inercije C , normirana jednačina elipsoida inercije postaje

$$A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2 = 1,$$

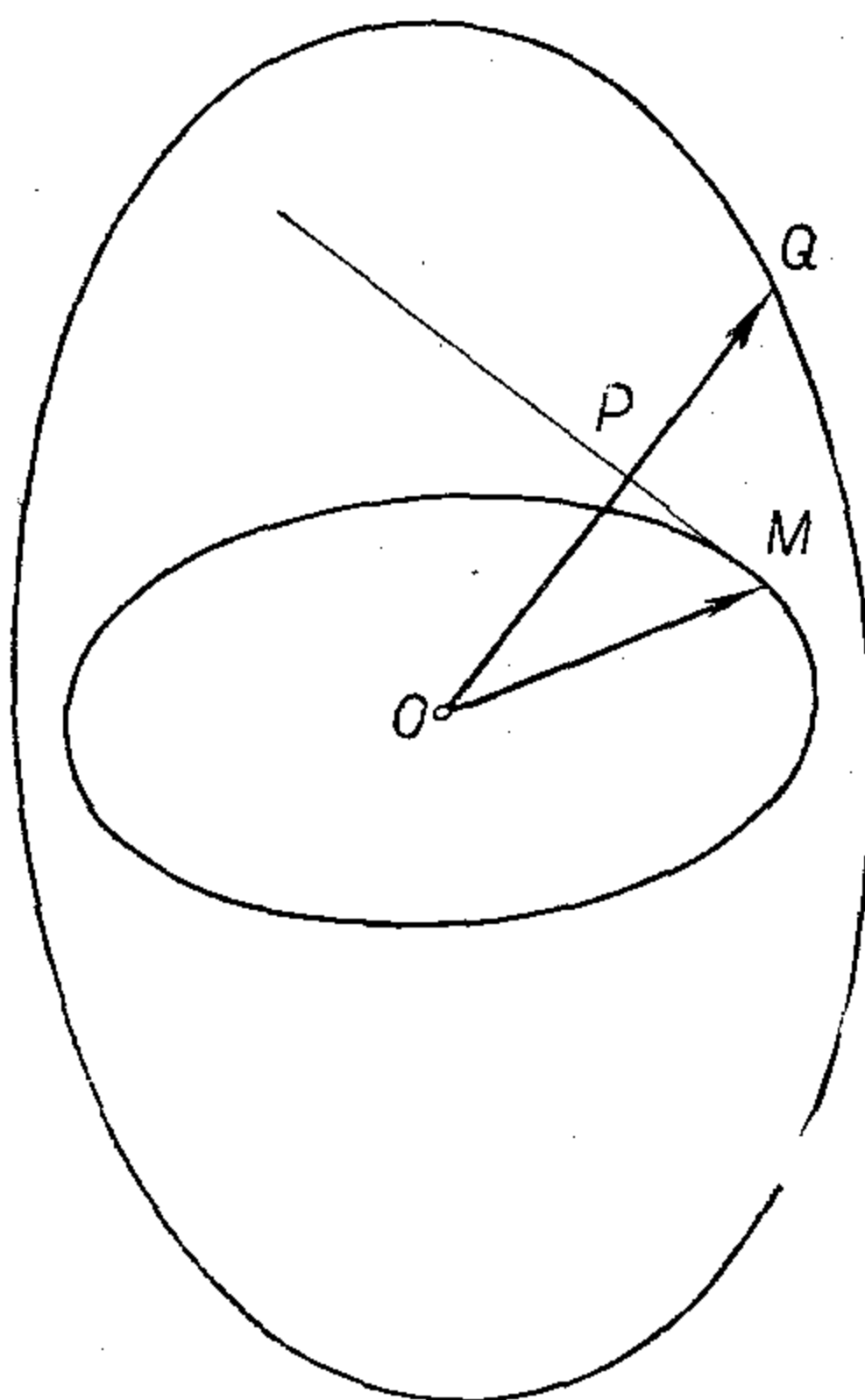
gde su A, B i C *glavni centralni momenti inercije*. Momenti inercije se mogu uvek izraziti u obliku proizvoda ukupne mase sistema i kvadrata kraka (3.3—10). Za glavne centralne momente inercije uobičajene oznake su

$$A = ma^2, \quad B = mb^2, \quad C = mc^2.$$

Osim elipsoida inercije za geometrijsku interpretaciju rasporeda momenata inercije za ose kroz određenu tačku prostora koristi se i *giracioni elipsoid*. On se dobiva geometrijskom inverzijom elipsoida inercije.

Da bi se dobio *Mek-Kalefov* (Mac-Cullagh) *giracioni elipsoid*, na elipsoidu inercije (sl. 128), čija je jednačina

$$(6) \quad f(X, Y, Z) \equiv I_X X^2 + I_Y Y^2 + I_Z Z^2 - 1 = 0$$



Slika 128

data u odnosu na glavne ose $OXYZ$ inercije, uoči se proizvoljna tačka M određena vektorom položaja \mathbf{r} i u njoj tangenta ravan elipsoida inercije. Na tu ravan se spusti normala $\overline{OP} = p$ iz centra O pa se onda tački P konstruiše inverzna tačka u odnosu na sferu proizvoljnog, npr. jediničnog, poluprečnika ($R = 1$). To znači na polupravu od centra O preko tačke P prenese se vektor \mathbf{q} čiji je modul $\rho = \overline{OQ}$ određen obrascem

$$(7) \quad \rho = \frac{1}{p}.$$

Tada geometrijsko mesto ovih tačaka Q koje odgovaraju tačkama elipsoida inercije obrazuju traženu površ.

Sama jednačina te površi dobiva se na ovaj način. Sa slike je

$$(8) \quad p = \mathbf{r} \cdot \frac{\text{grad } f}{|\text{grad } f|},$$

gde je $\text{grad } f / |\text{grad } f|$ jedinični vektor normale površi elipsoida inercije u tački M . Prema tome je, s obzirom na (7)

$$\rho = \frac{|\text{grad } f|}{\mathbf{r} \cdot \text{grad } f}$$

a sam vektor položaja tačke Q u odnosu na isti pol O biće

$$(9) \quad \mathbf{q} = \frac{\text{grad } f}{\mathbf{r} \cdot \text{grad } f}.$$

Neka Dekartove pravouglo koordinata u odnosu na sistem $OXYZ$ tačke Q budu X_Q, Y_Q, Z_Q , tada se iz (9) projiciranjem na ose, uzev još u obzir jednačinu elipsoida inercije (6), dobiva

$$X_Q = \frac{I_X X}{I_X X^2 + I_Y Y^2 + I_Z Z^2} = I_X X,$$

$$Y_Q = I_Y Y, \quad Z_Q = I_Z Z.$$

Kad se odavde izračuna X, Y i Z i unese u jednačinu elipsoida inercije (5) dobiva se (kad se izostavi indeks Q pojedinačne tačke) kao jednačina tražene površi naredna jednačina tzv. giracionog elipsoida

$$(10) \quad \frac{X^2}{I_X} + \frac{Y^2}{I_Y} + \frac{Z^2}{I_Z} = 1.$$

Potrebno je još podvući da ako se ista transformacija primeni sad na ovaj giracioni elipsoid, dobiće se polazni elipsoid inercije tj. ove dve površi su uzajamno recipročne.

Shema koeficijenata kvadratne forme na levoj strani jednačine elipsoida inercije, tj.

$$(11) \quad I = \begin{Bmatrix} I_x & \Pi_{xy} & \Pi_{xz} \\ \Pi_{yx} & I_y & \Pi_{yz} \\ \Pi_{zx} & \Pi_{zy} & I_z \end{Bmatrix} \equiv \begin{Bmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{Bmatrix}$$

predstavlja *matricu inercije* posmatranog sistema u datoj tački prostora. Ta matrica je *simetrična*, jer je $I_{ij} = I_{ji}$, tj. $\Pi_{xy} = \Pi_{yx}$, $\Pi_{yz} = \Pi_{zy}$, $\Pi_{zx} = \Pi_{xz}$. Ako se sa M^{ij} (M^x , M^y , M^z , M^{xy} , M^{yz} , M^{zx}) obeleže minori uz odnosne elemente matrice inercije i sa Δ determinanta matrice inercije,

$$(12) \quad \Delta = |I_{ij}| = \begin{vmatrix} I_x & \Pi_{xy} & \Pi_{xz} \\ \Pi_{yx} & I_y & \Pi_{yz} \\ \Pi_{zx} & \Pi_{zy} & I_z \end{vmatrix}$$

onda veličine $I^{ij} = M^{ij}/\Delta$, tj.

$$(13) \quad \begin{aligned} I_x &= \frac{M^x}{\Delta}, & I_y &= \frac{M^y}{\Delta}, & I_z &= \frac{M^z}{\Delta}, \\ \Pi_{xy} &= \frac{M^{xy}}{\Delta}, & \Pi_{yz} &= \frac{M^{yz}}{\Delta}, & \Pi_{zx} &= \frac{M^{zx}}{\Delta} \end{aligned}$$

sa svoje strane obrazuju *inverznu matricu inercije* $I^{-1} = \{I^{ij}\}$,

$$(14) \quad I^{-1} = \begin{pmatrix} I_x & \Pi_{xy} & \Pi_{xz} \\ \Pi_{yx} & I_y & \Pi_{yz} \\ \Pi_{zx} & \Pi_{zy} & I_z \end{pmatrix}.$$

Elipsoid (odn. porodica homotetičnih elipsoida) u čijoj jednačini su u odnosu na isti koordinatni sistem $Oxyz$ koeficijenti određeni inverznom matricom inercije, tj.

$$(15) \quad I_x x^2 + I_y y^2 + I_z z^2 + 2 \Pi_{yz} yz + 2 \Pi_{zx} zx + 2 \Pi_{xy} xy = k^2$$

je *giracioni elipsoid*. Npr. u odnosu na glavne ose inercije $OXYZ$ biće

$$I = \begin{pmatrix} I_X & 0 & 0 \\ 0 & I_Y & 0 \\ 0 & 0 & I_Z \end{pmatrix},$$

pa imamo

$$M^X = I_Y I_Z, \quad M^Y = I_Z I_X, \quad M^Z = I_X I_Y, \quad M^{YZ} = M^{ZX} = M^{XY} = 0.$$

Kako je s obzirom na (13)

$$I^X = \frac{1}{I_X}, \quad I^Y = \frac{1}{I_Y}, \quad I^Z = \frac{1}{I_Z}$$

jednačina (15) se za $k^2 = 1$ svodi na jednačinu giracionog elipsoida (10).

Za materijalni sistem kome odgovara rotacioni elipsoid inercije kaže se da je *dinamički simetričan* u odnosu na pravac ose rotacije elipsoida, a materijalni sistem kome odgovara sfera kao elipsoid inercije je potpuno dinamički simetričan (sferno simetričan).

Pri ravanskom rasporedu masa (ploče) osa upravna na ravan je glavna osa inercije. Ako je ta ravan $z = 0$ biće

$$(16) \quad \begin{aligned} I_x &= \sum_{i=1}^N m_i y_i^2, & I_y &= \sum_{i=1}^N m_i x_i^2, & I_z &= \sum_{i=1}^N m_i (x_i^2 + y_i^2), \\ \Pi_{xy} &= - \sum_{i=1}^N m_i x_i y_i, \end{aligned}$$

dok je $\Pi_{yz} = \Pi_{zx} = 0$. Normirani elipsoid inercije ima u tom slučaju oblik

$$I_x x^2 + I_y y^2 + I_z z^2 + 2 \Pi_{xy} xy = 1$$

i pošto je, s obzirom na (16), tada uvek

$$I_z = I_x + I_y,$$

dovoljno je posmatrati samo presek ovog elipsoida inercije sa ravni masa, t. elipsu

$$I_x x^2 + I_y y^2 + 2 \Pi_{xy} xy = 1,$$

koja se zove *elipsa inercije*. Njen kanonski oblik u odnosu na glavne ose inercije glas

$$(17) \quad I_X X^2 + I_Y Y^2 = 1.$$

Glavni pravci inercije u xOy ravni mogu se odrediti iz uslova da je za njih $\Pi_{XY} = 0$. Ako se onda uvede koordinatna transformacija

$$(18) \quad \begin{aligned} x_i &= X_i \cos \alpha + Y_i \sin \alpha; & X_i &= x_i \cos \alpha - y_i \sin \alpha; \\ y_i &= -X_i \sin \alpha + Y_i \cos \alpha; & Y_i &= x_i \sin \alpha + y_i \cos \alpha, \end{aligned}$$

proizvodi inercije će za nove koordinate biti

$$\begin{aligned} \Pi_{XY} &= - \sum_{i=1}^N m_i X_i Y_i = \sum_{i=1}^N m_i [(x_i^2 - y_i^2) \sin \alpha \cos \alpha + x_i y_i (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)] = \\ &= \frac{1}{2} (I_x - I_y) \sin 2\alpha + \Pi_{xy} \cos 2\alpha. \end{aligned}$$

Da bi ose X i Y bile glavne ose inercije u posmatranoj tački mora biti $\Pi_{XY} = 0$, a otuda proističe

$$(19) \quad \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \Pi_{xy}}{I_y - I_x}.$$

Za proizvoljni pravac u određen uglom α prema X -osi moment inercije biće

$$(20) \quad I_u = I_X \cos^2 \alpha + I_Y \sin^2 \alpha.$$

Ako se stavi identički

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{2} (1 + \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha), \quad \sin^2 \alpha = \frac{1}{2} (1 - \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha),$$

može se I_u izraziti u obliku

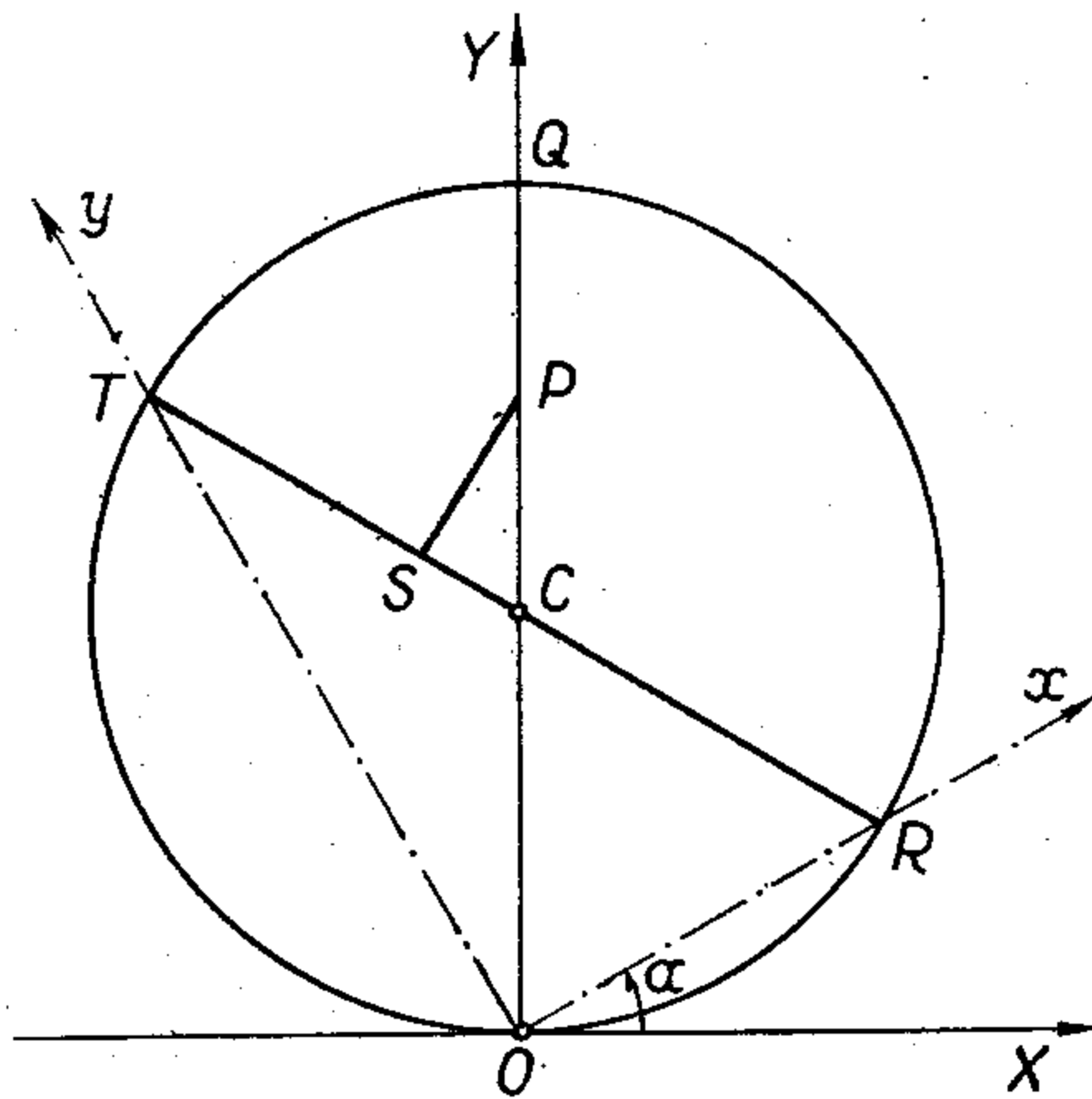
$$(21) \quad I_u = \frac{1}{2} (I_X + I_Y) + \frac{1}{2} (I_X - I_Y) \cos 2\alpha.$$

Najzad, kad se pri konstrukciji elipse inercije ne uzme da je faktor proporcionalnosti $k = 1$, već $k^2 = I_X I_Y / m$, dobiće se u odnosu na glavne ose jednačina

$$(22) \quad \frac{mX^2}{I_Y} + \frac{mY^2}{I_X} = 1,$$

koja određuje *normiranu* ili *Kulmanovu* (Culmann) *elipsu inercije*. Ona je sa elipsom inercije (17) homotetična, a dobiva se na naredni način. Za datu osu kroz O odredi se krak inercije k sistema; pa se onda na rastojanju k (u izabranoj razmeri) povuče paralela sa datom osom i tako za sve ose. Kulmanova elipsa je onda obvojnica ovih pravih.

U ravni se za proučavanje rasporeda momenata inercije za razne pravce kroz određenu tačku koristi *Morov* (Mohr) ili *Mor-Landov* (Land) *krug*. Pomoću njega se mogu geometrijski odrediti momenti inercije I_x i I_y i centrifugalni moment Π_{xy} , kad su dati pravci glavnih osa X i Y i glavni momenti inercije I_X i I_Y i obrnuto. Radi toga se nacrtaju glavne ose inercije OX i OY u ravni (sl. 129), zatim krug čiji je centar na osi OY , koji dodiruje OX -osu u početku



Slika 129

i ima kao poluprečnik $\overline{OQ} = \overline{OP} + \overline{PQ} = I_x + I_y$, naravno sve u izabranoj razmeri crtanja. Taj krug se zove *Morov krug*. Za drugi neki sistem osa Oxy zaokrenut za ugao α prema sistemu glavnih osa, pri čemu ose Ox i Oy seku *Morov krug* u tačkama R i T i kad se spusti normala PS na RT , biće

$$(23) \quad I_x = \overline{RS}, \quad I_y = \overline{ST}, \quad \Pi_{xy} = \overline{PS}.$$

Pri tome duž \overline{PS} daje samo apsolutnu vrednost centrifugalnog momenta. Njegov znak je isti kao znak $\sin 2\alpha$, kad su tačke P i Q sa raznih strana od prečnika \overline{RT} a inače je znak suprotan.

U slučaju kad je dat sistem Oxy i momenti inercije I_x i I_y i centrifugalni moment Π_{xy} , tada se prvo odredi ugao α prema obrascu (19) a to znači iz pravouglog trougla kome su katete $\overline{PS} = \Pi_{xy}$ i $\overline{SC} = (I_x - I_y)/2$ a ugao 2α kod temena C . Na taj način su onda određeni pravci glavnih osa OX i OY . Tek onda se konstruiše *Morov krug* sa centrom C na osi OY i prečnikom $I_x + I_y$. Njegove presečne tačke sa osama Ox i Oy određuju onda tačke R i T . Tačka S biće određena kad se prenese $\overline{RS} = I_x$, pa onda normala na RT u tački S određuje na OY -osi tačku P itd.

3.1.3.3. Određivanje glavnih momenata i glavnih osa inercije u prostoru

Kad je dat elipsoid inercije za datu tačku, on onda i nezavisno od ma kakvog koordinatnog sistema određuje momente inercije za sve ose kroz tačku u kojoj je konstruisan. Tako će moment inercije za neku osu \mathbf{u} koja elipsoid inercije prođire u tački P ($\overline{OP} = r$) u usvojenoj razmeri biti $I_u = k^2/r^2$, odn. $I_u = 1/r^2$ itd.

Otuda je geometrijski jasno da su pravci glavnih osa inercije istovremeno pravci u kojima potezi $\overline{OP} = k/\sqrt{I_u}$ od tačke O (centra) do tačke P na površi elipsoida inercije imaju ekstremnu vrednost. Prema tome problem određivanja glavnih osa inercije posmatranog materijalnog sistema za neku datu tačku O svodi se na problem određivanja pravca $\mathbf{u} = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ tako da moment inercije I_u u posmatranoj tački

$$(1) \quad I_u = I(\alpha, \beta, \gamma) = I_x \alpha^2 + I_y \beta^2 + I_z \gamma^2 + 2 \Pi_{yz} \beta \gamma + 2 \Pi_{zx} \gamma \alpha + 2 \Pi_{xy} \alpha \beta$$

ima ekstremnu vrednost. Promenljive veličine pri tome su α , β i γ . Te veličine, međutim, nisu međusobno nezavisne već moraju da zadovoljavaju uslov

$$(2) \quad \varphi(\alpha, \beta, \gamma) \equiv \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 1 = 0,$$

jer su to kosinusi uglova koje vektor \mathbf{u} obrazuje sa koordinatnim osama.

Traženje ekstremuma funkcije $I(\alpha, \beta, \gamma)$ pod uslovom da istovremeno mora biti zadovoljena neka druga relacija $\varphi(\alpha, \beta, \gamma) = 0$ je problem tzv. relativnog ekstremuma. Funkcija $\varphi(\alpha, \beta, \gamma) = 0$ određuje jediničnu sferu pa ekstremumi funkcije $I(\alpha, \beta, \gamma)$ moraju biti na sferi, a otuda proističe da se tangentne ravni površi φ i I moraju poklapati, odnosno da im normale moraju biti kolinearne. Uslov za kolinearnost normala može da se napiše u obliku

$$(3) \quad \text{grad } I = \lambda \text{ grad } \varphi,$$

ili

$$(4) \quad \frac{\partial I}{\partial \alpha} = \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}, \quad \frac{\partial I}{\partial \beta} = \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial \beta}, \quad \frac{\partial I}{\partial \gamma} = \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial \gamma}.$$

Za funkcije I i φ određene obrascima (1) i (2) jednačine (4) za određivanje ekstremuma glasiće

$$(5) \quad \begin{aligned} (I_x - \lambda) \alpha + \Pi_{xy} \beta + \Pi_{xz} \gamma &= 0, \\ \Pi_{yx} \alpha + (I_y - \lambda) \beta + \Pi_{yz} \gamma &= 0, \\ \Pi_{zx} \alpha + \Pi_{zy} \beta + (I_z - \lambda) \gamma &= 0. \end{aligned}$$

Iz sistema jednačina (5) treba odrediti α , β i γ . To je sistem linearnih homogenih jednačina i kao takav dopušta netrivialna rešenja (tj. rešenja $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$, $\gamma \neq 0$) samo pod uslovom da determinanta koeficijenta bude jednaka nuli, tj.

$$(6) \quad \begin{vmatrix} I_x - \lambda & \Pi_{xy} & \Pi_{xz} \\ \Pi_{yx} & I_y - \lambda & \Pi_{yz} \\ \Pi_{zx} & \Pi_{zy} & I_z - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Jednačine (5) sadrže neodređeni množilac λ . Taj množilac ne može imati proizvoljne vrednosti već samo one za koje je uslov (6) ispunjen. Na taj način se vidi da uslov da sistem jednačina (5) ima netrivialna rešenja u stvari predstavlja jednu jednačinu trećeg stepena za određivanje *karakterističnih vrednosti* λ .

matrice inercije. Za ove vrednosti množioca λ postojaće rešenja različita od nule sistema jednačina (5).

Može se dokazati da jednačina (6) ima samo realna rešenja λ_i ($i = 1, 2, 3$). Svakom od tih rešenja odgovara jedan sistem jednačina (5) sa odgovarajućim rešenjima $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ ($i = 1, 2, 3$), tako da postoje tri vektora $\mathbf{u}_i = \{\alpha_i, \beta_i, \gamma_i\}$ za koje momenti inercije I_{ui} imaju stacionarne (ekstremne) vrednosti. Momenti inercije $I_i = I_{ui}$ koji odgovaraju tim osama \mathbf{u}_i su glavni momenti inercije u uočenoj tački O .

Za svaku od karakterističnih vrednosti λ_i matrice inercije sistem jednačina (5) može se napisati u obliku

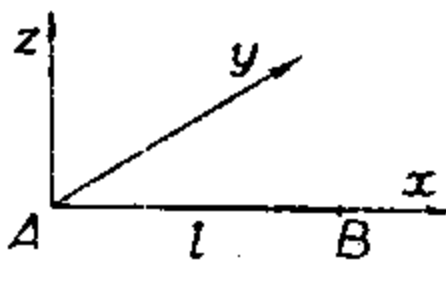
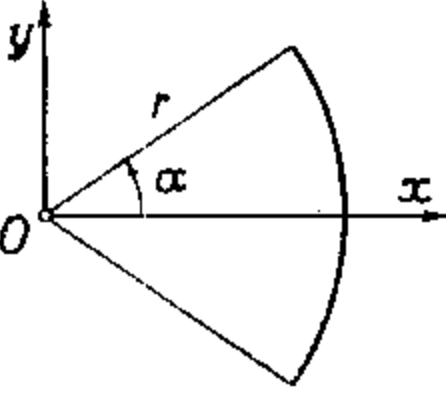
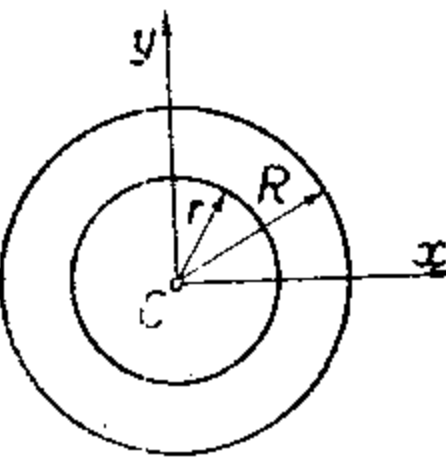
$$(7) \quad \begin{aligned} I_x \alpha_i + \Pi_{xy} \beta_i + \Pi_{xz} \gamma_i &= \lambda_i \alpha_i, \\ \Pi_{yx} \alpha_i + I_y \beta_i + \Pi_{yz} \gamma_i &= \lambda_i \beta_i, \\ \Pi_{zx} \alpha_i + \Pi_{zy} \beta_i + I_z \gamma_i &= \lambda_i \gamma_i. \end{aligned}$$

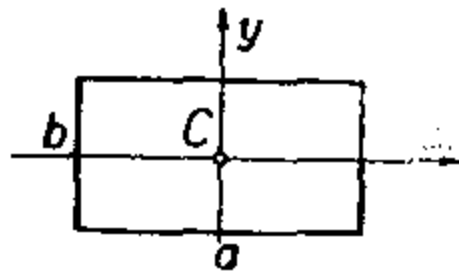
Ako se prva od ovih relacija pomnoži sa α_i , druga sa β_i i treća sa γ_i i sve tri tako dobivene jednačine sabere, zbog (2) dobiće se

$$(8) \quad I_x \alpha_i^2 + I_y \beta_i^2 + I_z \gamma_i^2 + 2 \Pi_{yz} \beta_i \gamma_i + 2 \Pi_{zx} \alpha_i \gamma_i + 2 \Pi_{xy} \alpha_i \beta_i = \lambda_i.$$

Leva strana ove relacije predstavlja, prema (1), moment inercije za osu \mathbf{u}_i , a to je glavni moment inercije. Prema tome *karakteristične vrednosti λ_i matrice inercije su glavni momenti inercije, $I_i = \lambda_i$.*

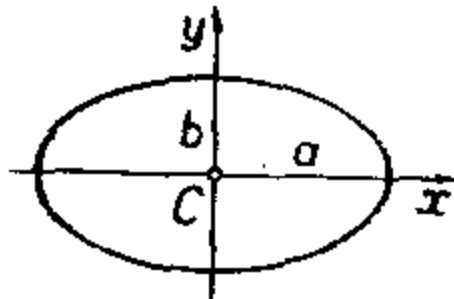
T a b l i c a V
Momenti inercije homogenih tela (C je centar inercije)

	<p><i>Tanak štap (materijalna duž):</i></p> $I_x = 0, \quad I_y = I_z = \frac{1}{3} ml^2;$ <p>U odnosu na osu upravnu na duži u sredini:</p> $I_y = I_z = \frac{1}{12} ml^2.$
	<p><i>Kružni luk:</i></p> $I_x = \frac{mr^2}{2} \left(1 - \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha} \right), \quad I_y = \frac{mr^2}{2} \left(1 + \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha} \right), \quad I_z = mr^2;$ <p>(α – ugao u radijanima) Cela kružna linija ($\alpha = \pi$):</p> $I_x = I_y = \frac{1}{2} mr^2, \quad I_z = mr^2.$
	<p><i>Kružni prsten:</i></p> $I_x = I_y = \frac{1}{4} m(R^2 + r^2), \quad I_z = \frac{1}{2} m(R^2 + r^2).$ <p><i>Kružna ploča (materijalna površina kruga) ($r=0$):</i></p> $I_x = I_y = \frac{1}{4} mR^2, \quad I_z = \frac{1}{2} mR^2.$



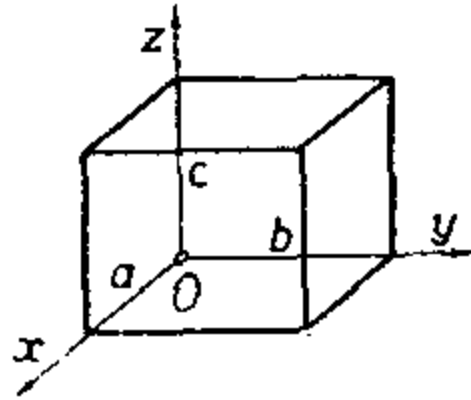
Pravougaonik:

$$I_x = \frac{1}{12} mb^2, \quad I_y = \frac{1}{12} ma^2, \quad I_z = \frac{1}{12} m(a^2 + b^2).$$



Elipsa:

$$I_x = \frac{1}{4} mb^2, \quad I_y = \frac{1}{4} ma^2, \quad I_z = \frac{1}{4} m(a^2 + b^2).$$

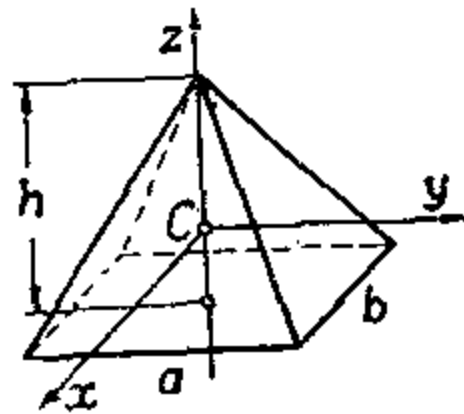


Pravougli paralelepiped u odnosu na ivice:

$$I_x = \frac{1}{3} m(b^2 + c^2), \quad I_y = \frac{1}{3} m(c^2 + a^2), \quad I_z = \frac{1}{3} m(a^2 + b^2).$$

Kocka ivice a (u odnosu na ivicu):

$$I_x = I_y = I_z = \frac{2}{3} ma^2.$$

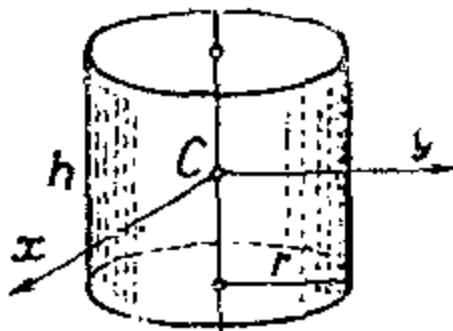


Piramida sa pravougaonom osnovom:

$$I_x = \frac{m}{80} (4a^2 + 3h^2), \quad I_y = \frac{m}{80} (4b^2 + 3h^2), \quad I_z = \frac{m}{20} (a^2 + b^2).$$

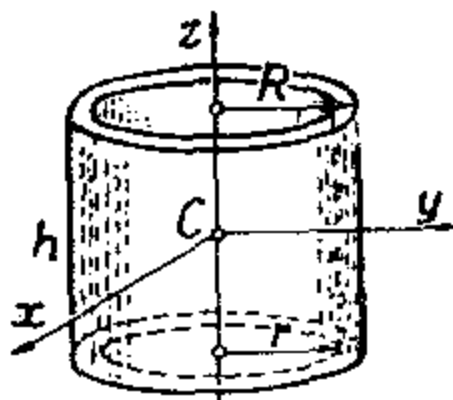
Pravilna četverostrana piramida ($a = b$):

$$I_x = I_y = \frac{m}{20} (4a^2 + 3h^2), \quad I_z = \frac{m}{10} a^2.$$



Prav kružni cilindar (prav valjak):

$$I_x = I_y = \frac{1}{12} m(3r^2 + h^2), \quad I_z = \frac{1}{2} mr^2.$$

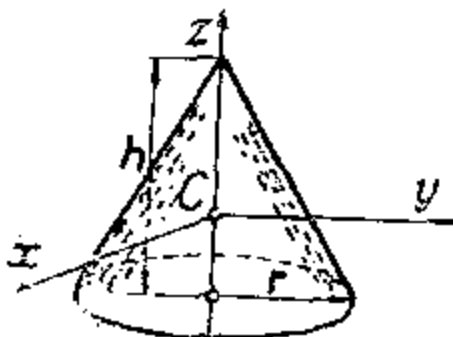


Cilindarska cev:

$$I_x = I_y = \frac{1}{12} m(3R^2 + 3r^2 + h^2), \quad I_z = \frac{1}{2} m(R^2 + r^2);$$

za $R \rightarrow r$ dobiva se omotač pravog valjka:

$$I_x = I_y = \frac{1}{12} m(6r^2 + h^2), \quad I_z = mr^2.$$

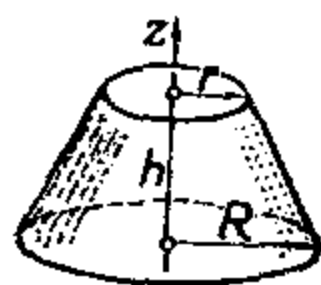


Prav kružni konus (prava kupa):

$$I_x = I_y = \frac{3}{80} m(4r^2 + h^2), \quad I_z = \frac{3}{10} mr^2.$$

Omotač prave kupe:

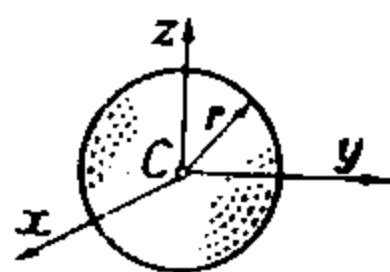
$$I_z = \frac{1}{2} mr^2.$$



Prava zarubljena kupa:

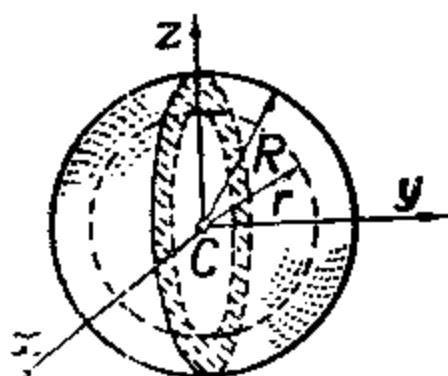
(z je osa te kupe)

$$I_z = \frac{3}{10} m \frac{R^5 - r^5}{R^3 - r^3}.$$



Lopta:

$$I_x = I_y = I_z = \frac{2}{5} mr^2.$$

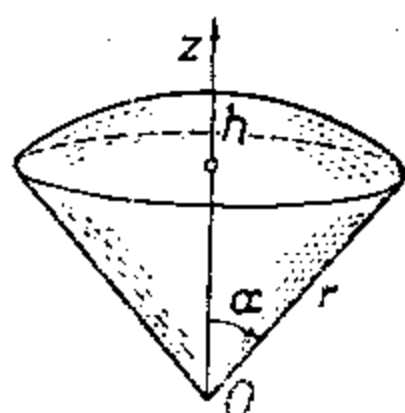


Sferna ljuska:

$$I_x = I_y = I_z = \frac{2}{5} m \frac{R^5 - r^5}{R^3 - r^3}.$$

Površina sfere (za $R \rightarrow r$):

$$I_x = I_y = I_z = \frac{2}{3} mR^2.$$



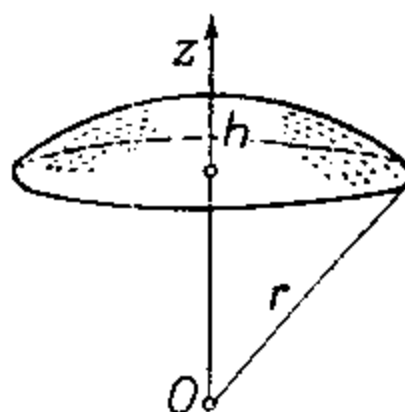
Loptin isečak:

(u odnosu na osu simetrije z)

$$I_z = \frac{1}{5} mh(3r - h) = \frac{1}{5} mr^2(1 - \cos \alpha)(2 + \cos \alpha);$$

u slučaju *polukugle* $\alpha = \pi/2$:

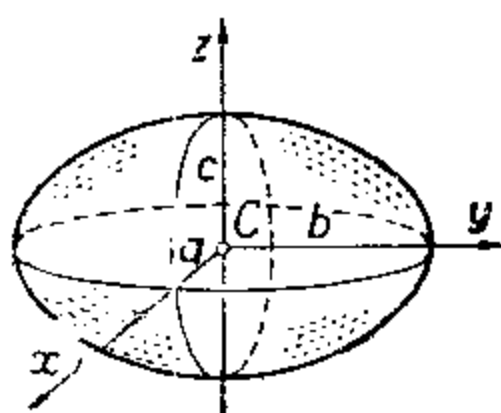
$$I_z = \frac{2}{5} mr^2.$$



Loptin odsečak:

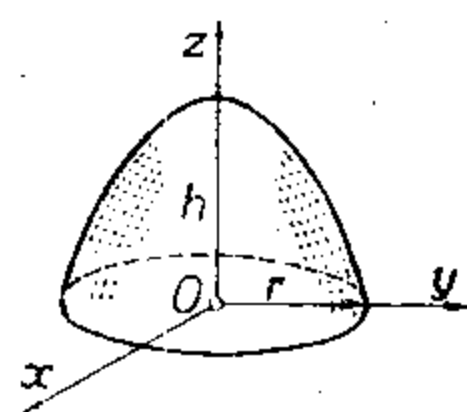
(u odnosu na osu simetrije z)

$$I_z = \frac{1}{10} mh \frac{20r^2 - 15rh + 3h^2}{3r - h}.$$



Troosni elipsoid:

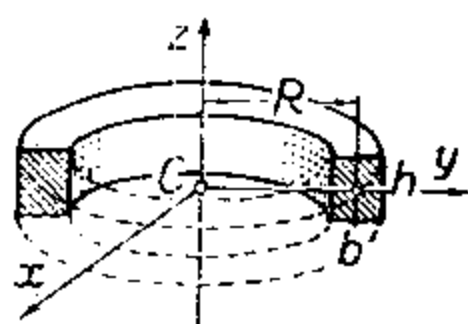
$$I_x = \frac{m}{5}(b^2 + c^2), \quad I_y = \frac{m}{5}(c^2 + a^2), \quad I_z = \frac{m}{5}(a^2 + b^2).$$



Obrtni paraboloid:

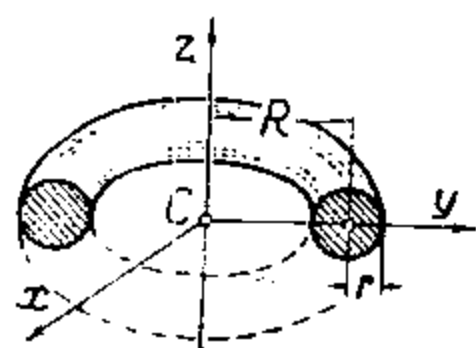
(z je osa rotacije)

$$I_x = I_y = \frac{m}{18}(3r^2 + h^2), \quad I_z = \frac{1}{5} mr^2.$$



Prsten pravougaonog preseka:

$$I_x = I_y = \frac{m}{24}(2R^2 + 3b^2 + 2h^2), \quad I_z = \frac{m}{4}(4R^2 + b^2).$$



Prsten kružnog preseka (torus):

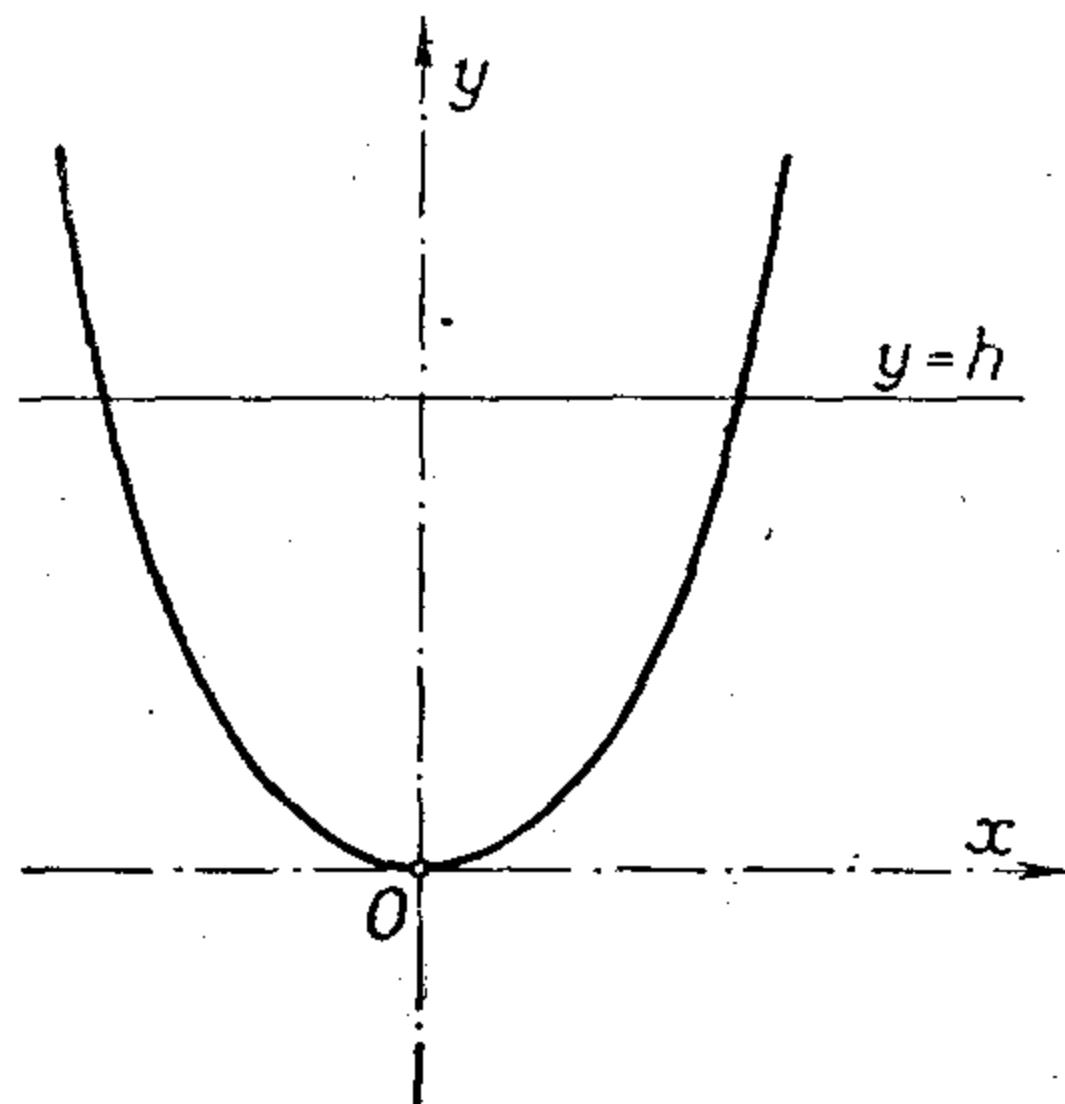
$$I_x = I_y = \frac{m}{8}(4R^2 + 5r^2), \quad I_z = \frac{m}{4}(4R^2 + 3r^2).$$

Primeri i zadaci

Naći moment inercije homogene ploče ograničene lukom parabole $y = 4ax$ i pravom $y = h$ u odnosu na tangentu u temenu parabole.

Tangenta u temenu parabole poklapa se sa x -osom a samo teme je u tački $O(0, 0)$ (sl. 130). Prava $y = h$ seče parabolu u tačkama $x = \pm \frac{1}{2} \sqrt{h/a}$. Mo-

ment inercije za x -osu u tački O je



Slika 130

$$I_x = \sigma \int_{x=-\frac{1}{2}\sqrt{h/a}}^{+\frac{1}{2}\sqrt{h/a}} \int_{y=4ax}^h y^2 dx dy =$$

$$= 2\sigma \int_0^{\frac{1}{2}\sqrt{h/a}} \int_{4ax}^h y^2 dx dy = \frac{2}{7} \sigma h^3 \sqrt{h/a}.$$

Masa ploče je

$$m = 2\sigma \int_0^{\frac{1}{2}\sqrt{h/a}} \int_{4ax}^h dx dy = \frac{2}{3} \sigma h \sqrt{h/a}.$$

Ako se stavi da je $I = mk^2$, gde je k krak inercije, dobiće se

$$I_x = \frac{3}{7} mh^2.$$

2. Koji odnos mora postojati između poluprečnika r i visine h homogenog kružnog cilindra pa da mu centralni elipsoid bude sfera?

Centar inercije se nalazi na sredini visine cilindra, jer je cilindar obrtno telo a osa cilindra je osa simetrije. Ako se osa cilindra uzme za z -osu a centar inercije za koordinatni početak, momenat inercije u odnosu na z -osu biće

$$I_z = \sigma \int_{z=-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{\rho=0}^r \int_{\varphi=0}^{2\pi} \rho^3 d\rho d\varphi dz = \frac{1}{2} \sigma r^4 \pi h.$$

Moment inercije u odnosu na ma koju osu upravnu na z -osu je

$$I_x = \sigma \int_{z=-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_0^r \int_0^{2\pi} (\rho^2 \sin^2 \varphi + z^2) \rho d\rho d\varphi dz = \frac{1}{12} \sigma r^2 \pi h (3r^2 + h^2).$$

Da bi se elipsoid inercije sveo na sferu mora biti $I_x = I_z$, a otuda imamo

$$h = r\sqrt{3}.$$

3. Odrediti uslov da centralni elipsoid inercije homogenog kružnog konusa bude sfera ($\sigma = 1$).

Centar inercije homogenog kružnog konusa poluprečnika osnove r nalazi se na osi simetrije konusa, na rastojanju (sl. 131)

$$z_C = \frac{\int_V z dV}{V}$$

od vrha konusa. Ovde je (zbog $\rho = z \operatorname{tg} \alpha = rz/h$)

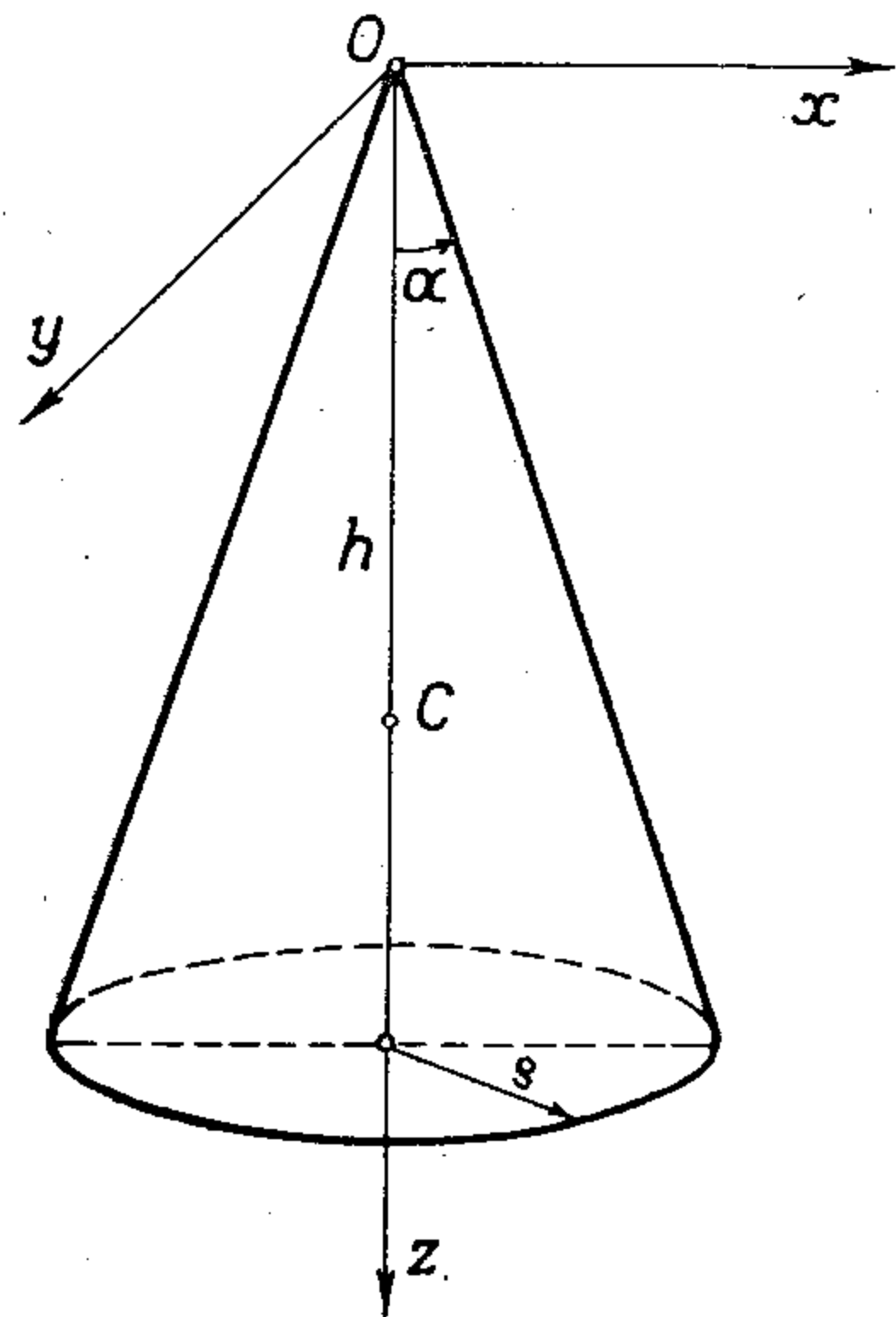
$$\int_V z dV = \int_0^{2\pi} \int_0^h \int_0^{rz/h} \rho z d\rho d\varphi dz = \frac{1}{4} \pi r^2 h^2,$$

a zapremina konusa je

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^h \int_0^{rz/h} \rho d\rho d\varphi dz = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

pa se za z_C dobiva

$$z_C = \frac{3}{4} h.$$



Slika 131

Da bi elipsoid inercije bio sfera potrebno je da svi glavni momenti inercije budu jednaki. Ako je z -osa simetrije konusa, momenti inercije u odnosu na x -osu i y -osu jednaki su među sobom zbog simetrije tela. Moment inercije (jedinična gustina) u odnosu na z -osu je

$$I_z = \int_0^{2\pi} \int_0^h \int_0^{rz/h} \rho^2 \cdot \rho d\rho d\varphi dz = \frac{1}{10} \pi r^4 h = \frac{3}{10} mr^2.$$

Moment inercije u odnosu na x -osu odnosno y -osu je u vrhu konusa

$$I_x^O = \int_0^{2\pi} \int_0^h \int_0^{rz/h} (z^2 + \rho^2 \sin^2 \varphi) \rho d\rho d\varphi dz = \frac{\pi}{5} r^2 h^3 + \frac{\pi}{20} r^4 h,$$

odakle se prema Hajgens-Štajnerovoj teoremi nalazi za moment inercije u centru inercije (vidi tablicu V)

$$I_x^C = I_x^O - m \overline{OC^2} = \frac{\pi}{80} r^2 h^3 + \frac{\pi}{20} r^4 h = \frac{3}{80} m(4r^2 + h^2).$$

Izjednačavanjem momenta inercije za x - i za z -osu dobiće se

$$h = 2r.$$

4. Glavni centralni momenti inercije nekog tela su A , B i C . Ako se mala koncentrisana masa m' , čiji su momenti inercije za iste ose A' , B' i C' doda telu, pokazati da će momenti inercije u odnosu na glavne centralne ose ovako sastavljenog sistema biti u prvoj aproksimaciji $A+A'$, $B+B'$, $C+C'$.

Moment inercije celog sistema za neku osu jednak je zbiru momenata inercije sastavnih delova tog sistema za istu osu. Prema tome, momenti inercije celog sistema za glavne centralne ose samog tela su $A + A'$, $B + B'$, $C + C'$. Kad se telu doda neka dopunska masa m' ose $OXYZ$ nisu više glavne ose inercije. Ako se mala masa m' nalazi u tački čije su koordinate X' , Y' , Z' , proizvodi inercije u odnosu na ose $OXYZ$ će biti

$$\Pi_{YZ} = -m'Y'Z', \quad \Pi_{ZX} = -m'Z'X', \quad \Pi_{XY} = -m'X'Y'.$$

Glavni momenti inercije celog sistema sada se mogu naći kao karakteristične vrednosti matrice inercije celog sistema, iz jednačine

$$\begin{vmatrix} A + A' - \lambda & -m'X'Y' & -m'X'Z' \\ -m'X'Y' & B + B' - \lambda & -m'Y'Z' \\ -m'X'Z' & -m'Y'Z' & C + C' - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Prema uslovima zadatka m' je mala masa pa ako se pri izračunavanju determinante zanemare članovi u kojima se javljaju m'^2 i m'^3 kao male veličine višeg reda u poređenju sa m' , dobiće se u prvoj aproksimaciji jednačina

$$(A + A' - \lambda)(B + B' - \lambda)(C + C' - \lambda) = 0,$$

odakle su karakteristične vrednosti u prvoj aproksimaciji

$$\lambda_1 = A + A', \quad \lambda_2 = B + B', \quad \lambda_3 = C + C'.$$

Ako je centar inercije tela u tački $O(0, 0, 0)$ a centar inercije celog sistema u tački $C(X_C, Y_C, Z_C)$, tačka C je određena obrascem

$$\mathbf{r}_C = \frac{m'}{m + m'} \mathbf{r}'.$$

Momenti inercije za ose X, Y, Z u tački C su prema Hajgens-Štajnerovoj teoremi

$$I_X^C = I_X^O - (m + m')(Y_C^2 + Z_C^2),$$

$$I_Y^C = I_Y^O - (m + m')(Z_C^2 + X_C^2),$$

$$I_Z^C = I_Z^O - (m + m')(X_C^2 + Y_C^2).$$

Međutim, kvadrati rastojanja osa X, Y, Z kroz O i C su male veličine višeg reda, jer je npr. $Y_C^2 + Z_C^2 = m'^2 / (m + m')^2 (Y'^2 + Z'^2)$ pa je zaista $I_X^C \approx I_X^O \approx \lambda_1$ itd.

5. Naći nagib glavnih pravaca inercije homogenog pravougaonika $ABCD$ prema stranici AB , u tački A , ako je $\overline{AB} = \overline{CD} = 2a$ i $\overline{BC} = \overline{DA} = 2b$.

Ako se stranica AB izabere za x -osu a stranica AD za y -osu biće (sl. 132)

$$I_x = \frac{4}{3} mb^2, \quad I_y = \frac{4}{3} ma^2, \quad \Pi_{xy} = -mab.$$

Neka su ose ξ i η u tački A glavne ose inercije. U odnosu na glavne ose inercije je proizvod inercije jednak nuli i to je uslovna jednačina. Proizvod inercije za ose ξ i η je

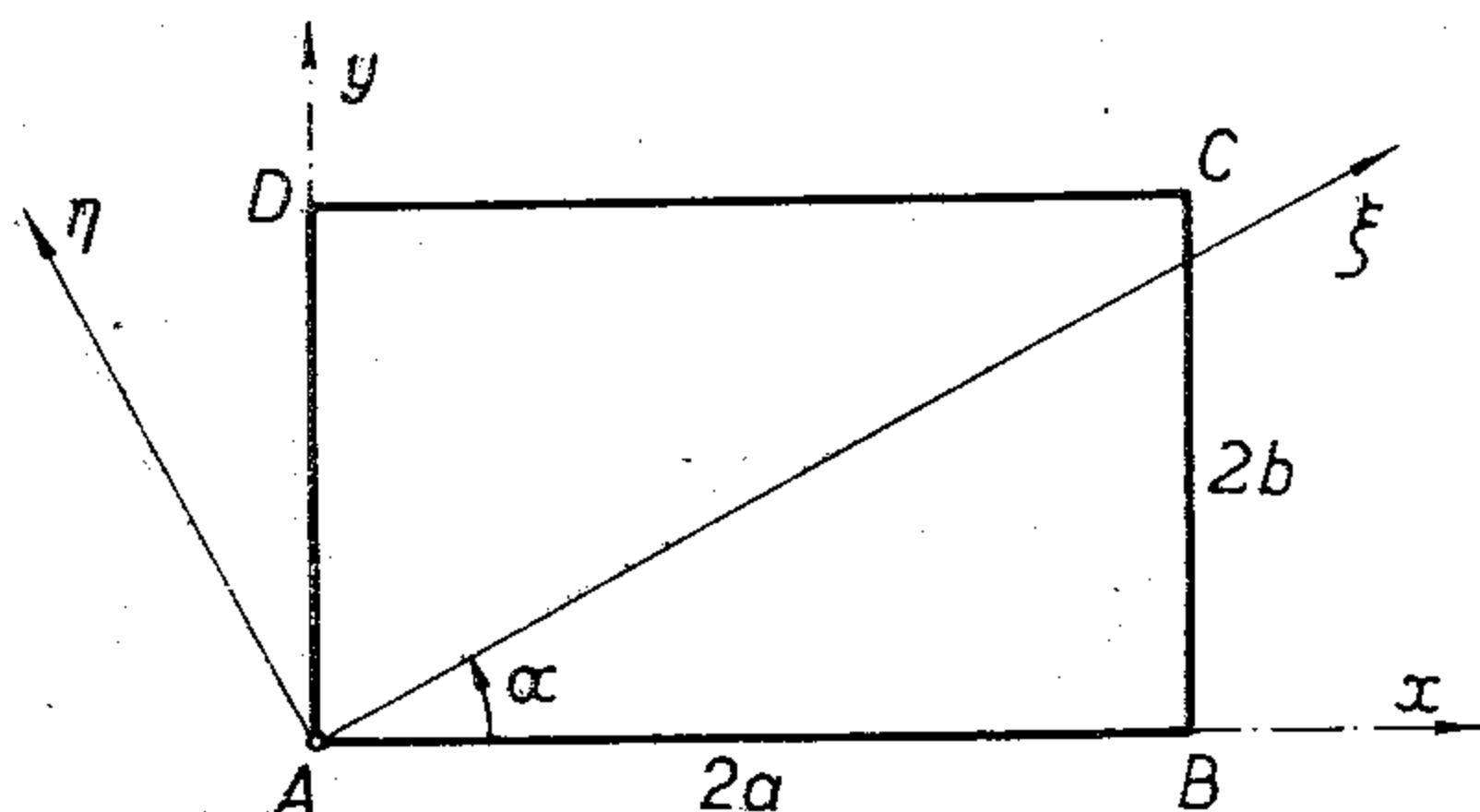
$$\Pi_{\xi\eta} = - \sum_{i=1}^N m_i \xi_i \eta_i,$$

pa kako je

$$\xi_i = x_i \cos \alpha + y_i \sin \alpha, \quad \eta_i = -x_i \sin \alpha + y_i \cos \alpha,$$

izraz za proizvod se svodi na

$$\begin{aligned} -\Pi_{\xi\eta} &= \sum_{i=1}^N m_i [-x_i^2 \sin \alpha \cos \alpha + y_i^2 \sin \alpha \cos \alpha + x_i y_i (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)] = \\ &= \frac{1}{2} (I_x - I_y) \sin 2\alpha - \Pi_{xy} \cos 2\alpha. \end{aligned}$$



Sl. 132

Pošto taj izraz treba da bude jednak nuli dobiće se

$$\frac{1}{2} (I_x - I_y) = \Pi_{xy} \operatorname{ctg} 2\alpha,$$

odakle je

$$\alpha = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{3ab}{2(a^2 - b^2)}.$$

Drugi način: Neka osa $A\xi$ obrazuje sa x - i y -osom uglove α i β . Traži se ugao α takav da moment inercije za ξ -osu bude stacionaran. Polazne jednačine za uslovljeni ekstremum su

$$\begin{aligned} I_\xi &= I_x \cos^2 \alpha + I_y \cos^2 \beta + 2 \Pi_{xy} \cos \alpha \cos \beta, \\ \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta - 1 &= 0. \end{aligned}$$

Momenti inercije moraju u slučaju ekstremuma da zadovoljavaju sistem jednačina (3.1.2. — 5)

$$\begin{aligned} (I_x - \lambda) \cos \alpha + \Pi_{xy} \cos \beta &= 0, \\ \Pi_{xy} \cos \alpha + (I_y - \lambda) \cos \beta &= 0. \end{aligned}$$

Glavni momenti inercije će se stoga dobiti kao rešenja jednačine

$$\begin{vmatrix} I_x - \lambda & \Pi_{xy} \\ \Pi_{xy} & I_y - \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{4}{3} mb^2 - \lambda & mab \\ mab & \frac{4}{3} ma^2 - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

pa su ti momenti

$$\lambda_1 = \frac{2}{3} m(a^2 + b^2) + \frac{1}{3} m \sqrt{4a^4 + 4b^4 + a^2 b^2},$$

$$\lambda_2 = \frac{2}{3} m(a^2 + b^2) - \frac{1}{3} m \sqrt{4a^4 + 4b^4 + a^2 b^2}.$$

Unošenjem recimo vrednosti λ_1 u prvu jednačinu dobiće se

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{1}{3} \frac{\sqrt{4a^4 + 4b^4 + a^2 b^2} + 2a^2 - 2b^2}{ab},$$

odakle je

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{3ab}{2(a^2 - b^2)}.$$

6. Tri štapa, \overline{AB} , \overline{BC} i \overline{CD} , svaki mase m i dužine $2a$ grade jedan sa drugim prave uglove. Pokazati da su glavni centralni momenti inercije tog sistema

$$ma^2, \quad \frac{11}{3} ma^2, \quad 4ma^2.$$

7. Pokazati da je jednačina elipsoida inercije kocke ivice $2a$ u odnosu na glavne ose inercije u jednom temenu kocke $2x^2 + 11(y^2 + z^2) = 1$.

8. Pokazati da su momenti i proizvodi inercije trougla (i trouglaste homogene ploče) za proizvoljnu osu jednaki momentima i proizvodima inercije za iste ose materijalnog sistema koji se sastoji od tri materijalne tačke sa masama jednakim $1/3$ mase trougla, a koje se nalaze na sredinama stranica trougla.

9. Pokazati da je moment inercije pravilnog n -tougla, kome je dužina stranice jednaka c , za osu koja je upravna na ravan tog poligona i prolazi kroz njegov centar

$$I = \frac{mc^2}{24} \frac{2 + \cos(2\pi/n)}{1 - \cos(2\pi/n)}.$$

10. Dokazati da je moment inercije obrtnog paraboloida u odnosu na osu obrtanja $I = \frac{1}{3} mR^2$ (vidi tablicu V), gde je m masa paraboloida a R poluprečnik osnove. Jednačina paraboloida je $x^2 + y^2 = 2pz$; za $z = Z$ je $x^2 + y^2 = R^2$.

11. Naći moment inercije pravog kružnog konusa poluprečnika osnove R i visine h za izvodnicu i za osu koja prolazi kroz centar masa a upravna je na osu konusa.

$$\text{Za izvodnicu konusa je } \frac{3mR^2}{20} \frac{6h^2 + R^2}{h^2 + R^2},$$

za centralnu osu upravnu na osu konusa je $\frac{3m}{80} (h^2 + 4R^2)$ (vidi tablicu V).

12. Zatvorena centralna kriva obrće se oko neke ose Ox koja se nalazi u ravni krive i sa kojom se ne seče. Pokazati da je moment inercije tako dobivenog tela u odnosu na osu Ox jednak $m(a^2 + 3k^2)$, gde je m masa tela, a je rastojanje centra krive C od ose Ox a k poluprečnik inercije posmatrane krive za osu paralelnu sa Ox , koja prolazi kroz C .

Dokazati sličan stav za moment inercije površine dobivene obrtanjem luka ravanske krive.

13. Odrediti centralni elipsoid inercije za troosni elipsoid

$$(x/a)^2 + (y/b)^2 + (z/c)^2 = 1.$$

Rešenje: $(b^2 + c^2)x^2 + (c^2 + a^2)y^2 + (a^2 + b^2)z^2 = 1.$

14. Naći jednačinu centralnog elipsoida inercije homogene eliptične ploče:

Rešenje:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + z^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) = 1.$$

15. Pokazati da u krajnjoj tački prečnika polukruga (poluprečnika a) glavne ose inercije luka polukruga obrazuju sa prečnikom uglove

$$\vartheta_1 = \frac{1}{2} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{4}{\pi}, \quad \vartheta_2 = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{4}{\pi}.$$

16. Ako su A i B momenti inercije homogene ravne ploče za dve uzajamno upravne ose Ox i Oy , koje se nalaze u ravni ploče, i ako je F proizvod inercije ploče za iste ose, pokazati da su glavni momenti inercije za tačku O

$$I = \frac{1}{2} [A + B \pm \sqrt{(A - B)^2 + 4F^2}].$$

17. Ako je gustina nehomogene lopte poluprečnika R na rastojanju r od centra lopte određena obrascem

$$\sigma = \sigma_0 \left(1 - \lambda \frac{r^2}{R^2}\right),$$

gde su σ_0 i λ konstante, odrediti krak inercije te lopte u odnosu na prečnik.

Odgovor:

$$k = R \sqrt{\frac{14 - 10\lambda}{35 - 21\lambda}}.$$

18. U jednom temenu homogenog pravouglog paralelepipeda odrediti glavne momente inercije i pravce glavnih osa inercije, kad su date ivice: $2a = 2$; $2b = 2\sqrt{3}$ i $2c = 2\sqrt{6}$.

Odgovor: Za krake inercije koji odgovaraju glavnim momentima inercije u temenu ovde se dobiva

$$k_1^2 = 12; \quad k_2^2 = \frac{22 - 3\sqrt{31}}{3}; \quad k_3^2 = \frac{22 + 3\sqrt{31}}{3},$$

a za koeficijente pravca glavne ose u odnosu npr. na ivicu $2a$ pravouglog paralelepipeda imaćemo

$$\left\{ \frac{1}{83} \sqrt{166}, \quad \frac{3}{83} \sqrt{418}, \quad -\frac{3}{83} \sqrt{249} \right\} \text{ itd.}$$

19. Odrediti vezu koja mora postojati između poluprečnika osnove i visine h kružnog konusa, ako elipsoid inercije konusa u odnosu na vrh konusa treba da bude sfera.

O d g o v o r: $R = 2h$.

20. Odrediti geometrijsko mesto tačaka za koje su elipsoidi inercije dat mase obrtni.

Uputstvo. Treba tražiti one tačke prostora u kojima su dva od glavnih momenata inercije jednaki.

O d g o v o r: Kao traženo geometrijsko mesto dobiva se jedna elipsa i jedna hiperbola koje leže u glavnim ravnima u odnosu na centar inercije.

3.2 Diferencijalne jednačine kretanja materijalnog sistema

3.2.1. Veze

Položaj materijalnih tačaka čije su mase $m_1, m_2, m_3, \dots, m_N$ koje obrazuju neki materijalni sistem određen je vektorima položaja $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \dots, \mathbf{r}_N$ u odnosu na neki proizvoljno izabrani pol. Položaj svih tačaka sistema u nekom trenutku je *konfiguracija* Σ tog sistema, jer je položajem materijalnih tačaka određen i izgled (oblik) sistema. Kad se tačke kreću vektori položaja su funkcije vremena i relacij

$$(1) \quad \mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(t), \quad (i = 1, 2, \dots, N)$$

predstavljaju *konačne vektorske jednačine kretanja sistema*; tih jednačina ima N tj. onoliko koliko materijalnih tačaka obrazuje posmatrani sistem. Kretanje materijalnih tačaka čije su mase m_i menja se i konfiguracija sistema, što se simbolički može napisati $\Sigma = \Sigma(t)$.

Skalarne jednačine kretanja materijalnog sistema zavise od izbora koordinatnog sistema. Svakoj tački u prostoru odgovaraju tri koordinate položaja, a celom sistemu stoga odgovara $3N = n$ koordinata. U odnosu na Dekartov pravougaoni koordinatni sistem je $\mathbf{r}_i = \{x_i, y_i, z_i\}$ i odgovarajuće konačne jednačine kretanja će biti

$$(2) \quad x_i = x_i(t), \quad y_i = y_i(t), \quad z_i = z_i(t). \quad (i = 1, 2, \dots, N)$$

Za neki sistem generalisanih koordinata q^1, q^2, q^3 položaj tačaka m_i sistema određen je koordinatama $q_{(i)}^1, q_{(i)}^2, q_{(i)}^3$, pri čemu je indeks i , koji označava redni broj materijalne tačke na koju se koordinate q^k odnose, stavljen u zagradu kako bi se istaklo da taj indeks nije koordinatnog karaktera. Konačne jednačine kretanja materijalnog sistema u generalisanim koordinatama će glasiti

$$(3) \quad q_{(i)}^1 = q_{(i)}^1(t), \quad q_{(i)}^2 = q_{(i)}^2(t), \quad q_{(i)}^3 = q_{(i)}^3(t),$$

ili jednostavnije

$$(4) \quad q_{(i)}^k = q_{(i)}^k(t). \quad \left(\begin{array}{l} k = 1, 2, 3 \\ i = 1, 2, \dots, N \end{array} \right)$$

Položaji i brzine tačaka materijalnog sistema mogu biti bez ikakvih ograničenja i tada se materijalne tačke m_i kreću potpuno slobodno u datom polju sil prema drugom Njutnovom zakonu. Za takav materijalni sistem kaže se da je *slobodan*. Konfiguracija Σ slobodnog sistema određena je sa $3N$ nezavisnih koordinata sistema, a broj nezavisnih koordinata sistema $n = 3N$ je broj *stepena slobode* sistema.

Položaji i brzine tačaka sistema mogu biti ograničeni izvesnim vezama (v. odeljak 2.10). Ove veze mogu biti kao i u slučaju jedne materijalne tačke *dva*

strane (bilateralne, zadržavajuće) ili jednostrane (unilateralne, nezadržavajuće), cele (holonomne, konačne) ili diferencijalne (neholonomne), stacionarne (skleronomne) ili nestacionarne (reonomne). Kad su položaj i brzina materijalnog sistema ograničeni izvesnim vezama, kaže se da je sistem *vezan* ili *neslobodan*. U narednim izlaganjima zadržavamo se samo na bilateralnim vezama.

U opštem slučaju položaj i brzine tačaka sistema mogu biti ograničeni sa k_1 holonomnih veza

$$(5) \quad f_\alpha(\mathbf{r}_i; t) \equiv f_\alpha(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \dots, \mathbf{r}_N; t) = 0, \quad (\alpha = 1, 2, \dots, k_1)$$

i k_2 neholonomnih veza

$$(6) \quad \varphi_\beta(\mathbf{r}_i, \mathbf{v}_i; t) \equiv \varphi_\beta(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N; \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_N; t) = 0, \quad (\beta = 1, 2, \dots, k_2)$$

ili u koordinatnom obliku

$$(7) \quad f_\alpha(x_1, y_1, z_1; \dots; x_N, y_N, z_N; t) = 0; \quad (\alpha = 1, 2, \dots, k_1)$$

$$(8) \quad \varphi_\beta(x_1, y_1, z_1; \dots; x_N, y_N, z_N; \dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1; \dots; \dot{x}_N, \dot{y}_N, \dot{z}_N; t) = 0, \\ (\beta = 1, 2, \dots, k_2)$$

Kad je sloboda nekog sistema ograničena pomoću $k_1 + k_2$ veza kaže se da sistem ima $n = 3N - (k_1 + k_2)$ stepena slobode. Broj nezavisnih veza mora biti manji od $3N$ jer bi u protivnom broj veza bio npr. jednak broju koordinata sistema, a tada kretanje sistema ne bi bilo moguće.

Neholonomne veze po svojoj prirodi predstavljaju uslov za brzine tačaka sistema. Međutim i holonomne veze nameću izvesne uslove brzini. Neka položaj tačaka sistema u trenutku t zadovoljava jednačine (5) odnosno (7) holonomnih veza. Kako su veze po pretpostavci bilateralne, i u trenutku $t + \Delta t$ tačke sistema posle pomeranja u nove položaje $\mathbf{r}_i + \Delta \mathbf{r}_i = \{x_i + \Delta x_i, y_i + \Delta y_i, z_i + \Delta z_i\}$ takođe moraju da zadovoljavaju jednačine veza

$$(9) \quad f_\alpha(\mathbf{r}_i; t) \equiv f_\alpha(x_i, y_i, z_i; t) = 0,$$

$$(10) \quad f_\alpha(\mathbf{r}_i + \Delta \mathbf{r}_i; t + \Delta t) \equiv f_\alpha(x_i + \Delta x_i, y_i + \Delta y_i, z_i + \Delta z_i; t + \Delta t) = 0.$$

Zbog neprekidnosti funkcija (1), (2) i (3), za dovoljno malo Δt relacije (10) mogu se aproksimirati prvim članovima Tejlorovog reda u kojima će priraštaji vremena i koordinata biti linearni, dok se ostali članovi reda u kojima se javljaju viši stepeni priraštaja mogu zanemariti kao male veličine višeg reda, pa je

$$(11) \quad f_\alpha(\mathbf{r}_i + \Delta \mathbf{r}_i; t + \Delta t) \approx f_\alpha(\mathbf{r}_i; t) + \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i} \Delta x_i + \frac{\partial f_\alpha}{\partial y_i} \Delta y_i + \frac{\partial f_\alpha}{\partial z_i} \Delta z_i \right) + \\ + \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} \Delta t = 0.$$

Zbog relacije (9) biće

$$(12) \quad \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i} \Delta x_i + \frac{\partial f_\alpha}{\partial y_i} \Delta y_i + \frac{\partial f_\alpha}{\partial z_i} \Delta z_i \right) + \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} \Delta t = 0.$$

Ako se ove relacije podele sa Δt i pusti da priraštaj vremena teži nuli, $\Delta t \rightarrow 0$, zbog $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x_i}{\Delta t} = \dot{x}_i$ itd. dobiće se

$$(13) \quad \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i} \dot{x}_i + \frac{\partial f_\alpha}{\partial y_i} \dot{y}_i + \frac{\partial f_\alpha}{\partial z_i} \dot{z}_i \right) + \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} = 0.$$

Izvodi koordinata po vremenu $\dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i$ su koordinate brzine \mathbf{v}_i i -te tačke m_i sistema. Parcijalni izvodi

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial f_\alpha}{\partial y_i}, \quad \frac{\partial f_\alpha}{\partial z_i}$$

predstavljaju koordinate *delimičnog gradijenta* skalarne funkcije f u odnosu na koordinate vektora položaja i -te tačke,

$$(14) \quad \text{grad}_i f_\alpha = \left\{ \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial f_\alpha}{\partial y_i}, \quad \frac{\partial f_\alpha}{\partial z_i} \right\}.$$

Ako je Φ neka skalarna funkcija više vektora, recimo $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_M$,

$$\Phi = \Phi(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_M),$$

delimični gradijent skalarne funkcije Φ po vektoru \mathbf{v}_l je vektor

$$(15) \quad \text{grad}_{\mathbf{v}_l} \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial V_{lx}} \mathbf{i} + \frac{\partial \Phi}{\partial V_{ly}} \mathbf{j} + \frac{\partial \Phi}{\partial V_{lz}} \mathbf{k}.$$

Ako je Φ skalarni proizvod dva vektora, recimo $\Phi = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$, iz (15) proizilazi da je

$$(16) \quad \text{grad}_{\mathbf{A}} \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial A_x} \mathbf{i} + \frac{\partial \Phi}{\partial A_y} \mathbf{j} + \frac{\partial \Phi}{\partial A_z} \mathbf{k} = B_x \mathbf{i} + B_y \mathbf{j} + B_z \mathbf{k} = \mathbf{B}$$

i slično tome

$$(17) \quad \text{grad}_{\mathbf{B}} \Phi = \mathbf{A},$$

a iz (16) i (17) neposredno se može videti da je

$$(18) \quad \mathbf{A} \cdot \text{grad}_{\mathbf{A}} \Phi = \mathbf{B} \cdot \text{grad}_{\mathbf{B}} \Phi = \Phi.$$

Relacija (13) se može onda napisati u obliku

$$(19) \quad \sum_{i=1}^N \mathbf{v}_i \cdot \text{grad}_i f_\alpha + \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} = 0. \quad (\alpha = 1, 2, \dots, k_1)$$

Brzine tačaka posmatranog sistema sad pri kretanju moraju da zadovoljavaju u opštem slučaju dva sistema *uslova za brzinu*, i to k_1 uslova (19) koji potiču od holonomnih veza i k_2 uslova (6) koje predstavljaju neholonomne veze. Ti uslovi zajedno napisani glase

$$(20) \quad \sum_{i=1}^N \mathbf{v}_i \cdot \text{grad}_i f_\alpha + \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} = 0, \quad (\alpha = 1, 2, \dots, k_1)$$

$$\varphi_\mu = \varphi_\mu(\mathbf{r}_i; \mathbf{v}_i; t) = 0. \quad (\mu = 1, 2, \dots, k_2)$$

Uslova za brzinu dakle ima tačno onoliko koliko ima i jednačina veza, tj. $k_1 + k_2$.

Uslovi za brzinu se mogu zajednički obeležiti simbolički recimo relacijom oblika

$$(21) \quad F_{\alpha'}(\mathbf{r}_i; \mathbf{v}_i; t) = 0. \quad (\alpha' = 1, 2, \dots, k_1 + k_2)$$

Kad vreme dobije priraštaj Δt vektori položaja će dobiti priraštaje $\Delta \mathbf{r}_i$ a vektori brzine priraštaje $\Delta \mathbf{v}_i$ pa će u trenutku $t + \Delta t$ uslovi za brzinu biti

$$(22) \quad F_{\alpha'}(\mathbf{r}_i + \Delta \mathbf{r}_i; \mathbf{v}_i + \Delta \mathbf{v}_i; t + \Delta t) = 0,$$

odnosno

$$(23) \quad F_{\alpha'}(x_i + \Delta x_i, y_i + \Delta y_i, z_i + \Delta z_i; \dot{x}_i + \Delta \dot{x}_i, \dot{y}_i + \Delta \dot{y}_i, \dot{z}_i + \Delta \dot{z}_i; t + \Delta t) = 0, \\ (\alpha' = 1, 2, \dots, k_1 + k_2).$$

Pod istim uslovima pod kojima su izvedeni uslovi za brzinu mogu se i relacije (22) aproksimirati Tejlorovim redom linearnim po koordinatama priraštaja pa će u prvoj aproksimaciji biti

$$\sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial F_{\alpha'}}{\partial x_i} \Delta x_i + \frac{\partial F_{\alpha'}}{\partial y_i} \Delta y_i + \frac{\partial F_{\alpha'}}{\partial z_i} \Delta z_i + \frac{\partial F_{\alpha'}}{\partial \dot{x}_i} \Delta \dot{x}_i + \frac{\partial F_{\alpha'}}{\partial \dot{y}_i} \Delta \dot{y}_i + \frac{\partial F_{\alpha'}}{\partial \dot{z}_i} \Delta \dot{z}_i \right) + \frac{\partial F_{\alpha'}}{\partial t} \Delta t = 0.$$

Kad se ova relacija podeli sa Δt i pusti da $\Delta t \rightarrow 0$, dobiće se

$$(24) \quad \frac{dF_{\alpha'}}{dt} = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial F_{\alpha'}}{\partial x_i} \dot{x}_i + \frac{\partial F_{\alpha'}}{\partial y_i} \dot{y}_i + \frac{\partial F_{\alpha'}}{\partial z_i} \dot{z}_i + \frac{\partial F_{\alpha'}}{\partial \dot{x}_i} \ddot{x}_i + \right. \\ \left. + \frac{\partial F_{\alpha'}}{\partial \dot{y}_i} \ddot{y}_i + \frac{\partial F_{\alpha'}}{\partial \dot{z}_i} \ddot{z}_i \right) + \frac{\partial F_{\alpha'}}{\partial t} = 0.$$

Za holonomne veze je

$$F_{\alpha} = \sum_{i=1}^N \mathbf{v}_i \cdot \text{grad}_i f_{\alpha} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial t} = 0,$$

pa je otuda

$$(25) \quad \frac{\partial F_{\alpha}}{\partial x_i} = \mathbf{v}_i \cdot \frac{\partial \text{grad}_i f_{\alpha}}{\partial x_i} + \frac{\partial^2 f_{\alpha}}{\partial x_i \partial t}$$

$$\frac{\partial F_{\alpha}}{\partial y_i} = \mathbf{v}_i \cdot \frac{\partial \text{grad}_i f_{\alpha}}{\partial y_i} + \frac{\partial^2 f_{\alpha}}{\partial y_i \partial t},$$

$$\frac{\partial F_{\alpha}}{\partial z_i} = \mathbf{v}_i \cdot \frac{\partial \text{grad}_i f_{\alpha}}{\partial z_i} + \frac{\partial^2 f_{\alpha}}{\partial z_i \partial t},$$

(26)

$$\frac{\partial F_{\alpha}}{\partial t} = \sum_{i=1}^N \mathbf{v}_i \cdot \frac{\partial \text{grad}_i f_{\alpha}}{\partial t} + \frac{\partial^2 f_{\alpha}}{\partial t^2}.$$

Od koordinata brzine zavise samo vektori \mathbf{v}_i brzine pa će biti

$$\frac{\partial F_\alpha}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{x}_i} \text{grad}_i f_\alpha = \mathbf{i} \cdot \text{grad}_i f_\alpha = \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i},$$

a slično tome je i

$$\frac{\partial F_\alpha}{\partial \dot{y}_i} = \frac{\partial f_\alpha}{\partial y_i}, \quad \frac{\partial F_\alpha}{\partial \dot{z}_i} = \frac{\partial f_\alpha}{\partial z_i},$$

tako da se dobiva

$$(27) \quad \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial F_\alpha}{\partial \dot{x}_i} \ddot{x}_i + \frac{\partial F_\alpha}{\partial \dot{y}_i} \ddot{y}_i + \frac{\partial F_\alpha}{\partial \dot{z}_i} \ddot{z}_i \right) = \sum_{i=1}^N \text{grad}_i f_\alpha \cdot \mathbf{w}_i.$$

Ako se uvede simbolična oznaka

$$(28) \quad D_2 f_\alpha \equiv \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial F_\alpha}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i + \frac{\partial F_\alpha}{\partial \dot{y}_i} \dot{y}_i + \frac{\partial F_\alpha}{\partial \dot{z}_i} \dot{z}_i \right) + \frac{\partial F_\alpha}{\partial t},$$

s obzirom na (24) uslovi za ubrzanje koji potiču od holonomnih veza mogu se napisati u obliku

$$(29) \quad \sum_{i=1}^N \mathbf{w}_i \cdot \text{grad}_i f_\alpha + D_2 f_\alpha = 0, \quad (\alpha = 1, 2, \dots, k_1)$$

pri čemu su veličine $D_2 f_\alpha$ određene relacijama (28).

Za neholonomne veze je

$$F_\beta = \varphi_\beta = \varphi_\beta(\mathbf{r}_i; \mathbf{v}_i; t) = 0, \quad (\beta = 1, 2, \dots, k_2)$$

pa je

$$\frac{\partial F_\beta}{\partial x_i} = \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial F_\beta}{\partial y_i} = \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial y_i}, \quad \frac{\partial F_\beta}{\partial z_i} = \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial z_i}, \quad \frac{\partial F_\beta}{\partial t} = \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial t},$$

$$\frac{\partial F_\beta}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial \dot{x}_i}, \quad \frac{\partial F_\beta}{\partial \dot{y}_i} = \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial \dot{y}_i}, \quad \frac{\partial F_\beta}{\partial \dot{z}_i} = \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial \dot{z}_i}.$$

Ako se vektor čije su koordinate

$$\frac{\partial \varphi_\beta}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial y_i}, \quad \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial z_i},$$

obeleži sa $\text{grad}_{\mathbf{v}_i} \varphi_\beta$ što predstavlja delimični gradijent skalara u odnosu na vektor \mathbf{v}_i , očigledno je

$$(30) \quad \frac{\partial F_\beta}{\partial \dot{x}_i} \ddot{x}_i + \frac{\partial F_\beta}{\partial \dot{y}_i} \ddot{y}_i + \frac{\partial F_\beta}{\partial \dot{z}_i} \ddot{z}_i = \mathbf{w}_i \cdot \text{grad}_{\mathbf{v}_i} \varphi_\beta.$$

Kako je sem toga

$$(31) \quad \frac{\partial F_\beta}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i + \frac{\partial F_\beta}{\partial \dot{y}_i} \dot{y}_i + \frac{\partial F_\beta}{\partial \dot{z}_i} \dot{z}_i = \mathbf{v}_i \cdot \text{grad}_i \varphi_\beta.$$

uslovi (24) koji potiču od neholonomnih veza mogu se napisati u obliku

$$(32) \quad \frac{d\varphi_\beta}{dt} = \sum_{i=1}^N (\text{grad}_{\mathbf{v}_i} \varphi_\beta \cdot \mathbf{w}_i + \text{grad}_i \varphi_\beta \cdot \mathbf{v}_i) + \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial t} = 0.$$

I za neholonomne veze može se uvesti simbol D_2 ,

$$(33) \quad D_2 \varphi_\beta = \sum_{i=1}^N \text{grad}_i \varphi_\beta \cdot \mathbf{v}_i + \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial t}$$

tako da se definitivno uslovi za ubrzanje koji proističu iz neholonomnih veza mogu napisati u uobičajenom obliku

$$(34) \quad \sum_{i=1}^N \text{grad}_{\mathbf{v}_i} \cdot \mathbf{w}_i + D_2 \varphi_\beta = 0. \quad (\beta = 1, 2, \dots, k_2)$$

Prema tome, u najopštijem slučaju sistema čija sloboda je ograničena pomoću k_1 holonomnih i k_2 neholonomnih veza vektori brzine moraju da zadovoljavaju $k_1 + k_2$ uslova (6) i (19);

$$(35) \quad \sum_{i=1}^N \text{grad}_i f_\alpha \cdot \mathbf{v}_i + \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} = 0, \quad (\alpha = 1, 2, \dots, k_1)$$

$$(36) \quad \varphi_\beta(\mathbf{r}_i; \mathbf{v}_i; t) = 0, \quad (\beta = 1, 2, \dots, k_2)$$

a vektori ubrzanja isto toliko uslova (29) i (34),

$$(37) \quad \sum_{i=1}^N \text{grad}_i f_\alpha \cdot \mathbf{w}_i + D_2 f_\alpha = 0, \quad (\alpha = 1, 2, \dots, k_1)$$

$$(38) \quad \sum_{i=1}^N \text{grad}_{\mathbf{v}_i} \varphi_\beta \cdot \mathbf{w}_i + D_2 \varphi_\beta = 0. \quad (\beta = 1, 2, \dots, k_2)$$

Važan specijalan slučaj neholonomnih veza jesu veze linearne u pogledu brzina,

$$(39) \quad \varphi_\beta \equiv \sum_{i=1}^N \mathbf{l}_{i\beta} \cdot \mathbf{v}_i + D_\beta = 0,$$

gde je

$$\mathbf{l}_{i\beta} = \{A_{i\beta}, B_{i\beta}, C_{i\beta}\}.$$

Koordinate vektora $\mathbf{l}_{i\beta}$, kao i slobodni članovi D_β u relacijama (39) u opštem slučaju zavise od položaja i vremena.

Za linearne neholonomne veze oblika (39) je

$$\text{grad}_{\mathbf{v}_i} \varphi_\beta = \mathbf{l}_{i\beta}$$

pa se uslovi za ubrzanje (34) mogu napisati u jednostavnom obliku

$$(40) \quad \sum_{i=1}^N \mathbf{w}_i \cdot \mathbf{l}_{i\beta} + D_2 \varphi_\beta = 0.$$

Naročito je važan specijalan slučaj kad su linearne neholonomne veze još skleronomne i homogene, tj. kad $\mathbf{l}_{i\beta}$ ne zavisi eksplicitno od vremena i kad je $D_\beta = 0$. Tada je $\frac{d\varphi_\beta}{dt} = 0$, pa se iz (33) dobiva

$$(41) \quad D_2 \varphi_\beta = \sum_{i=1}^N \mathbf{v}_i \cdot \text{grad}_i \varphi_\beta.$$

U daljim izlaganjima zadržavaćemo se samo na linearnim neholonomnim vezama.

Moguća pomeranja $d\mathbf{r}_i$ tačaka posmatranog materijalnog sistema koji se kreće pri holonomnim vezama i neholonomnim vezama zadovoljavaju uslove koji se dobivaju iz uslova za brzinu kad se stavi $d\mathbf{r}_i = \mathbf{v}_i dt$. Na osnovu (19) i (39) biće uslovi za moguća pomeranja

$$(42) \quad \sum_{i=1}^N \text{grad}_i f_\alpha \cdot d\mathbf{r}_i + \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} dt = 0,$$

$$(43) \quad \sum_{i=1}^N \mathbf{l}_{i\beta} \cdot d\mathbf{r}_i + D_\beta dt = 0.$$

Virtualna pomeranja (moguće varijacije) $\delta\mathbf{r}_i$ sistema su razlike dva moguća pomeranja (odeljak 2.12), $\delta\mathbf{r}_i = d_1\mathbf{r}_i - d_2\mathbf{r}_i$, i zadovoljavaju uslove

$$(44) \quad \sum_{i=1}^N \text{grad}_i f_\alpha \cdot \delta\mathbf{r}_i = 0, \quad (\alpha = 1, 2, \dots, k_1)$$

$$(45) \quad \sum_{i=1}^N \mathbf{l}_{i\beta} \cdot \delta\mathbf{r}_i = 0. \quad (\beta = 1, 2, \dots, k_2)$$

Za neki sistem generalisanih koordinata q^i jednačine veza (7) i (8) imaće oblik

$$(46) \quad f_\alpha(q_{(1)}^1, q_{(1)}^2, q_{(1)}^3; \dots; q_{(N)}^1, q_{(N)}^2, q_{(N)}^3; t) = 0,$$

$$(47) \quad \varphi_\beta(q_{(1)}^1, q_{(1)}^2, q_{(1)}^3; \dots, \dot{q}_{(1)}^1, \dot{q}_{(1)}^2, \dot{q}_{(1)}^3, \dots; \dot{q}_{(N)}^1, \dot{q}_{(N)}^2, \dot{q}_{(N)}^3; t) = 0.$$

Za opisivanje konfiguracije materijalnog sistema mesto generalisanih koordinata $q_{(i)}^k$ sa dva indeksa ($i = 1, 2, \dots, N; k = 1, 2, 3$) zgodnije je uvesti sistem obeležavanja u kome će uz generalisane koordinate da se javlja samo jedan indeks npr. q^l ($l = 1, 2, \dots, 3N$). To se može učiniti na taj način što se piše

$$\begin{aligned} q_{(1)}^1 &= q^1, & q_{(1)}^2 &= q^2, & q_{(1)}^3 &= q^3, \\ q_{(2)}^1 &= q^4, & q_{(2)}^2 &= q^5, & q_{(2)}^3 &= q^6, \\ &\vdots & & & & \vdots \\ q_{(N)}^1 &= q^{3N-2}, & q_{(N)}^2 &= q^{3N-1}, & q_{(N)}^3 &= q^{3N}. \end{aligned}$$

Opšta formula za ovaj način obeležavanja koordinata je

$$(48) \quad q_{(i)}^k = q^{3(i-1)+k} \equiv q^l. \quad \left(\begin{array}{l} k = 1, 2, 3 \\ i = 1, 2, \dots, N \\ l = 1, 2, \dots, 3N \end{array} \right)$$

Sa ovim oznakama jednačine veza (46) i (47) mogu se napisati u veoma jednostavnom obliku,

$$(49) \quad f_\alpha(q^l; t) = 0$$

$$(50) \quad \varphi_\beta(q^l; \dot{q}^l; t) = 0. \quad \left(\begin{array}{l} l = 1, 2, \dots, 3N \\ \alpha = 1, 2, \dots, k_1 \\ \beta = 1, 2, \dots, k_2 \end{array} \right)$$

Kad su neholonomne veze linearne, relacije (50) će biti

$$(51) \quad \varphi_\beta \equiv \Phi_{\beta l} \dot{q}^l + D_\beta = 0 \quad \left(\begin{array}{l} \beta = 1, 2, \dots, k_2 \\ l = 1, 2, \dots, 3N \end{array} \right)$$

gde su $\Phi_{\beta l}$ i D_β funkcije generalisanih koordinata q^l ($i = 1, 2, \dots, 3N$) i vremena.

Pored neholonomnih veza (51) brzinu ograničavaju i holonomne veze (49); odgovarajući uslovi za brzinu nalaze se na potpuno isti način kao što se to radi u Dekartovim koordinatama i glase

$$(52) \quad \frac{df_\alpha}{dt} = \frac{\partial f_\alpha}{\partial q^l} \dot{q}^l + \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} = 0.$$

$3N$ generalisanih koordinata q^l mogu se interpretirati kao koordinate jedne reprezentativne tačke u nekom $3N$ -dimenzionom prostoru V_{3N} koji se naziva *konfiguracioni prostor* posmatranog sistema. U tom prostoru holonomne veze (49) predstavljaju jednačine *hiperpovršni*, a parcijalni izvodi su koordinate gradijenata tih hiperpovršni i definišu normale na njih. Kako su \dot{q}^l generalisane koordinate brzina tačaka sistema, to se onda mogu interpretirati i kao generalisane koordinate brzine (1.4.1.1 — 2) reprezentativne tačke u V_{3N} . U ovakvoj interpretaciji postoji potpuna analogija između kretanja tačke u trodimenzionom prostoru i kretanja reprezentativne tačke u V_{3N} , odn. kretanja sistema od N materijalnih tačaka u trodimenzionom prostoru. Razlika je jedino formalnog karaktera i sastoji se u različitom broju dimenzija prostora u kome se kretanje posmatra.

Uslovi za ubrzanje (37) i (38) mogu se takođe jednostavno izraziti u generalisanim koordinatama u konfiguracionom prostoru V_{3N} . Brzina te i -te tačke m_i materijalnog sistema u generalisanim koordinatama je vektor (1.4.1.1 — 1)

$$(53) \quad \mathbf{v}_i = \dot{q}^{(i)l} \mathbf{g}^{(i)l}, \quad (l = 1, 2, 3; i = 1, 2, \dots, N)$$

gde je $\mathbf{g}^{(i)l} = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^{(i)l}}$ osnovni vektor u tački $m_i(\mathbf{r}_i)$ a ubrzanje je vektor (1.6.3 — 3,14 i 15)

$$(54) \quad \mathbf{w} = w^{(i)l} \mathbf{g}^{(i)l} = \frac{Dv^{(i)l}}{Dt} \mathbf{g}^{(i)l} = \frac{D\dot{q}^{(i)l}}{Dt} \mathbf{g}^{(i)l}.$$

Ako se u (37) i (38) stavi

$$(55) \quad \text{grad}_i f_\alpha = \frac{\partial f_\alpha}{\partial q^{(i)k}} \mathbf{g}^{(i)k}; \quad \text{grad}_{\mathbf{v}_i} \varphi_\beta = \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial \dot{q}^{(i)k}} \mathbf{g}^{(i)k},$$

onda je

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{w}_i \cdot \text{grad}_i f_\alpha = \sum_{i=1}^N w^{(i)l} \frac{\partial f_\alpha}{\partial q^{(i)k}} \delta_l^k = \sum_{i=1}^N w^{(i)l} \frac{\partial f_\alpha}{\partial q^{(i)l}} = \sum_{i=1}^N \frac{D\dot{q}^{(i)l}}{Dt} \frac{\partial f_\alpha}{\partial q^{(i)l}},$$

(56)

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{w}_i \cdot \text{grad}_{\mathbf{v}_i} \varphi_\beta = \sum_{i=1}^N w^{(i)l} \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial \dot{q}^{(i)k}} \delta_l^k = \sum_{i=1}^N w^{(i)l} \frac{\partial \varphi_{i\beta}}{\partial \dot{q}^{(i)l}} = \sum_{i=1}^N \frac{D\dot{q}^{(i)l}}{Dt} \frac{\partial \varphi_{i\beta}}{\partial \dot{q}^{(i)l}}.$$

Kad se uvedu jednostavne oznake (48) moći će se napisati

$$(57) \quad w_{(i)l} = \frac{D\dot{q}_{(i)l}}{Dt} = \frac{D\dot{q}^{3(i-1)+l}}{Dt} = w^k, \quad k = 3(i-1) + l$$

Sem toga u linearnim neholonomnim vezama (51) je

$$\frac{\partial \varphi_\beta}{\partial \dot{q}_{(i)l}} = \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial \dot{q}^k} = \Phi_{\beta k}, \quad \left(\begin{array}{l} i = 1, 2, \dots, N \\ l = 1, 2, 3 \\ k = 1, 2, \dots, 3N \end{array} \right)$$

pa se uslovi za ubrzanje (37) i (38) mogu iskazati u obliku

$$(58) \quad \frac{\partial f_\alpha}{\partial \dot{q}^k} w^k + D_2 f_\alpha = 0, \quad \left(\begin{array}{l} \alpha = 1, 2, \dots, k_1 \\ \beta = 1, 2, \dots, k_2 \\ k = 1, 2, \dots, 3N \end{array} \right)$$

$$(59) \quad \Phi_{\beta k} w^k + D_2 \varphi_\beta = 0.$$

Kad je sloboda nekog materijalnog sistema ograničena samo holonomnim vezama, kaže se da je sam sistem holoman, a kada postoje i neholonomne veze (ili samo neholonomne veze) sistem je neholoman.

Kruto telo je poseban slučaj sistema u kome se međusobna rastojanja tačaka ne menjaju za vreme kretanja. Taj sistem ima (ako ne deluju veze) šest stepena slobode kretanja a koordinate krutog tela $x_A, y_A, z_A, \varphi, \psi, \vartheta$ (1.8.1.1.) predstavljaju sa stanovišta mehanike sistema upravo koordinate sistema pa i za njih važi sve ono što je uopšte rečeno za koordinate sistema i za veze.

Primeri i zadaci

1. Tri tačke m_i ($i = 1, 2, 3$) kreću se tako da su rastojanja između njih stalna. Naći jednačine veza i uslove za brzinu i ubrzanje.

Postoje tri nezavisne veze,

$$|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3| = l_{23} = \text{const.}$$

$$|\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1| = l_{31} = \text{const.}$$

$$|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| = l_{12} = \text{const.}$$

U Dekartovim pravouglim koordinatama te veze će biti

$$f_1 \equiv (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3)^2 = (x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2 + (z_2 - z_3)^2 - l_{23}^2 = 0,$$

$$f_2 \equiv (\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1)^2 = (x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2 + (z_3 - z_1)^2 - l_{31}^2 = 0,$$

$$f_3 \equiv (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 - l_{12}^2 = 0.$$

Uslovi za brzinu $\frac{df_\alpha}{dt} = 0$ mogu se izvesti neposredno diferencijacijom iz $f_\alpha = 0$

i glase

$$\frac{1}{2} \dot{f}_1 = (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3) \cdot (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3) = 0,$$

$$\frac{1}{2} \dot{f}_2 = (\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1) \cdot (\mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_1) = 0,$$

$$\frac{1}{2} \dot{f}_3 = (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \cdot (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) = 0.$$

Uslovi za ubrzanje $\frac{d^2 f_\alpha}{dt^2} = 0$ takođe se mogu izvesti neposredno diferencijacijom iz uslova za brzinu,

$$(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3)^2 + (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3) \cdot (\mathbf{w}_2 - \mathbf{w}_3) = 0,$$

$$(\mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_1)^2 + (\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1) \cdot (\mathbf{w}_3 - \mathbf{w}_1) = 0,$$

$$(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)^2 + (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \cdot (\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2) = 0.$$

2. Materijalni sistem od četiri tačke M_i , $i = 1, 2, 3, 4$, kreće se tako da zapremina tetraedra u čijim su temenima ove tačke raste proporcionalno vremenu, $V = at + b$. Naći veze i uslov za brzinu.

Ako su \mathbf{r}_i vektori položaja tačaka M_i sistema ($i = 1, 2, 3, 4$), zapremina tetraedra biće određena obrascem

$$V = \frac{1}{6} [\overrightarrow{M_1 M_2}, \overrightarrow{M_1 M_3}, \overrightarrow{M_1 M_4}] = \frac{1}{6} [\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_4 - \mathbf{r}_1],$$

gde uglasta zagrada označava mešoviti proizvod. Jednačine veze će biti

$$f \equiv [\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_4 - \mathbf{r}_1] - 6at - 6b = 0.$$

Kretanje sistema ograničeno je samo jednom holonomnom reonomnom vezom.

Ako se mešoviti proizvod razvije jednačina veze moći će da se napiše u obliku

$$f \equiv [\mathbf{r}_2 \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_4] - [\mathbf{r}_2 \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_1] + [\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2 \mathbf{r}_3] - [\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_4] - 6at - 6b = 0.$$

Delimični gradijenti funkcije f u odnosu na koordinate tačaka sistema biće

$$\text{grad}_1 f = (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3) \times (\mathbf{r}_4 - \mathbf{r}_3) = 2 \mathbf{S}_1,$$

$$\text{grad}_2 f = (\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1) \times (\mathbf{r}_4 - \mathbf{r}_1) = 2 \mathbf{S}_2,$$

$$\text{grad}_3 f = (\mathbf{r}_4 - \mathbf{r}_1) \times (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) = 2 \mathbf{S}_3,$$

$$\text{grad}_4 f = (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \times (\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1) = 2 \mathbf{S}_4,$$

gde \mathbf{S}_i predstavlja površinu trougla određenog trima tačkama M_j , ($j = i$). Kako je $\frac{\partial f}{\partial t} = -6a$, uslov za brzinu

$$\sum_{i=1}^N \text{grad}_i f \cdot \mathbf{v}_i + \frac{\partial f}{\partial t} = 0$$

će biti

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{v}_i - 3a = 0.$$

3. Sfera poluprečnika a kotrlja se po ravni bez klizanja. Naći jednačine veza.

Ako je ravan po kojoj se sfera kotrlja xOy -ravan, a z -osa je upravna na nju, koordinate centra C sfere će biti x_C, y_C, z_C . Uslov da je kotrljanje bez klizanja predstavlja zahtev da dodirna tačka sfere u ravni nema brzine. Ako bi brzina te tačke bila različita od nule, to bi bila brzina klizanja. U stvari, kroz tu tačku

treba da prolazi trenutna osa rotacije. Ako je M dodirna tačka sfere i ravni kotrljanja, uslov da je kotrljanje bez klizanja glasi

$$\mathbf{v}_M = \mathbf{v}_C + \boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{CM} = 0.$$

Ovde je $\mathbf{v}_C = \{\dot{x}_C, \dot{y}_C, \dot{z}_C\}$, $\boldsymbol{\omega} = \{P, Q, R\}$, $\overrightarrow{CM} = \{x_C, y_C, -a\}$, pa se dobiva

$$\begin{aligned}\dot{x}_C - aQ &= 0, \\ \dot{y}_C + aP &= 0, \\ \dot{z}_C &= 0.\end{aligned}$$

Prve dve veze su neholonomne a treća je prividno neholonomna, jer ima integrala $z_C = a$, tj. centar sfere je stalno u ravni $z = a$.

4. Sistem materijalnih tačaka kreće se tako da je stalno zbir kinetičkih momenata tačaka sistema u odnosu na z -osu konstantan. Pokazati da je veza neholonomna i da je $f = \sum_{i=1}^N m_i S_i = \text{const.}$, gde su m_i mase tačaka sistema a S_i veličine sektorskih brzina tačaka sistema.

5. Na sistem materijalnih tačaka dejstvuju veze $x_i \dot{y}_i - y_i \dot{x}_i = 0$. Pokazati da su veze prividno neholonomne.

3.2.2. Diferencijalne jednačine kretanja slobodnog materijalnog sistema

Na materijalne tačke m_i nekog materijalnog sistema mogu dejstvovati dve vrste sila, spoljašnje \mathbf{F}_i sa izvorima van masa samoga sistema i unutrašnje F_{ij} kojima tačke sistema dejstvuju jedna na drugu, recimo tačka m_i na tačku m_j . Prema trećem Njutnovom zakonu dve tačke dejstvuju jedna na drugu silama iste veličine ali suprotnog smera; stoga rezultanta svih unutrašnjih sila datog materijalnog sistema mora biti jednaka nuli, $\sum_{i,j=1}^N \mathbf{F}_{ij} = \mathbf{0}$.

Ako su sve tačke m_1, m_2, \dots, m_N nekog materijalnog sistema slobodne, one će se pod dejstvom datih sila svaka za sebe kretati po drugom Njutnovom zakonu. Neka je \mathbf{F}_i rezultanta svih spoljašnjih sila koje dejstvuju na tačku m_i ($i = 1, 2, \dots, N$). Osnovne vektorske diferencijalne jednačine slobodnog materijalnog sistema glase

$$(1) \quad m_i \mathbf{w}_i = \mathbf{F}_i. \quad (i = 1, 2, \dots, N)$$

Za neki sistem generalisanih koordinata q^k ($k = 1, 2, 3$) prema (3.2.1 — 54) biće

$$(2) \quad \mathbf{w}_i = \frac{D \dot{q}^{(i)k}}{Dt} \mathbf{g}^{(i)k},$$

a prema (1.6.3 — 8, 11, 14 i 18)

$$\frac{D \dot{q}^{(i)k}}{Dt} = g^{(i)kl} \frac{D \dot{q}^{(i)l}}{Dt} = g^{(i)kl} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{B}^{(i)}}{\partial \dot{q}^{(i)l}} - \frac{\partial \mathcal{B}^{(i)}}{\partial q^{(i)l}} \right),$$

gde je

$$2 \mathcal{B}_{(i)} = v_i^2 = \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i = g_{kl} \dot{q}_{(i)}^k \dot{q}_{(i)}^l$$

— kvadrat brzine tačke m_i . Vektor ubrzanja i -te tačke m_i može se sad izraziti u jednom od narednih oblika,

$$(3) \quad \mathbf{w}_i = \frac{D \dot{q}_{(i)}^k}{Dt} \mathbf{g}_{(i)k} = g_{(i)kl} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{B}_{(i)}}{\partial \dot{q}_{(i)}^l} - \frac{\partial \mathcal{B}_{(i)}}{\partial q_{(i)}^l} \right) \mathbf{g}_{(i)k} = \\ = \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{B}_{(i)}}{\partial \dot{q}_{(i)}^l} - \frac{\partial \mathcal{B}_{(i)}}{\partial q_{(i)}^l} \right) \mathbf{g}_{(i)l}.$$

Pri tome je iskorišćena relacija (1.2.1 — 13),

$$g_{(i)kl} \mathbf{g}_{(i)k} = \mathbf{g}_{(i)l}. \quad \begin{pmatrix} k, l = 1, 2, 3 \\ i = 1, 2, \dots, N \end{pmatrix}$$

Veličine

$$(4) \quad w_{(i)l} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{B}_{(i)}}{\partial \dot{q}_{(i)}^l} - \frac{\partial \mathcal{B}_{(i)}}{\partial q_{(i)}^l}$$

predstavljaju kovarijantne koordinate ubrzanja tačke m_i .

Sila \mathbf{F}_i koja dejstvuje na tačku m_i može se u generalisanim koordinatama izraziti pomoću obrasca

$$(5) \quad \mathbf{F}_i = Q_{(i)l} \mathbf{g}_{(i)l}.$$

Koristeći relacije (3), (4) i (5) osnovne vektorske diferencijalne jednačine kretanja (1) mogu se sada napisati u obliku

$$(6) \quad m_i w_{(i)l} \mathbf{g}_{(i)l} = m_i \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{B}_{(i)}}{\partial \dot{q}_{(i)}^l} - \frac{\partial \mathcal{B}_{(i)}}{\partial q_{(i)}^l} \right) \mathbf{g}_{(i)l} = Q_{(i)l} \mathbf{g}_{(i)l}. \quad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \dots, N \\ l = 1, 2, 3 \end{pmatrix}$$

Skalarnim množenjem ovih jednačina osnovnim vektorima $\mathbf{g}_{(i)k}$, ($i = 1, 2, \dots, N$; $k = 1, 2, 3$) i koristeći pri tome obrazac $\mathbf{g}_{(i)l} \cdot \mathbf{g}_{(i)k} = \delta_k^l$ dobiće se sistem skalarnih diferencijalnih jednačina kretanja datog materijalnog sistema

$$(7) \quad m_i w_{(i)k} = m_i \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{B}_{(i)}}{\partial \dot{q}_{(i)}^k} - \frac{\partial \mathcal{B}_{(i)}}{\partial q_{(i)}^k} \right) = Q_{(i)k}.$$

Tih jednačina ima ukupno $3N$. Mase m_i sistema su nepromenljive pa se mesto kvadrata brzina pojedinačnih tačaka sistema mogu u jednačine uvesti kinetičke energije tačaka

$$(8) \quad T_{(i)} = m_i \mathcal{B}_{(i)} = \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

tako da jednačine kretanja dobiju oblik

$$(9) \quad m_i w_{(i)k} = \frac{d}{dt} \frac{\partial T_{(i)}}{\partial \dot{q}_{(i)}^k} - \frac{\partial T_{(i)}}{\partial q_{(i)}^k} = Q_{(i)k}.$$

Pošto u skalarnim diferencijalnim jednačinama (7) odn. (9) figurišu kovarijantne koordinate ubrzanja, za same diferencijalne jednačine se kaže da su kovarijantne.

U Dekartovim pravouglim koordinatama je

$$(10) \quad \begin{aligned} q_{(i)}^1 &= x_i, & q_{(i)}^2 &= y_i, & q_{(i)}^3 &= z_i \\ Q_{(i)1} &= X_i, & Q_{(i)2} &= Y_i, & Q_{(i)3} &= Z_i \\ T_{(i)} &= \frac{1}{2} m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2), \end{aligned}$$

pa će jednačine (9) za taj sistem glasiti

$$(11) \quad m_i \ddot{x}_i = X_i, \quad m_i \ddot{y}_i = Y_i, \quad m_i \ddot{z}_i = Z_i.$$

U opštem slučaju zgodnije je mesto generalisanih koordinata $q_{(i)}^k$ sa dva indeksa i ovde prema (3.2.1 — 48) uvesti $3N$ generalisanih koordinata sa jednim indeksom. Za generalisane sile $Q_{(i)k}$ može se tada pisati

$$(12) \quad Q_{(i)k} = Q_{3(i-1)+k} = Q_l, \quad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \dots, N \\ k = 1, 2, 3 \\ l = 1, 2, 3, \dots, 3N \end{pmatrix}$$

Kinetička energija sistema jednaka je zbiru kinetičkih energija pojedinih tačaka sistema,

$$(13) \quad T = \sum_{i=1}^N T_{(i)} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i v_i^2.$$

U slučaju neprekidnog rasporeda mase u prostoru izraz za kinetičku energiju sistema postaje

$$(13a) \quad T = \frac{1}{2} \iiint_V v^2 dm = \frac{1}{2} \iiint_V \sigma v^2 dV,$$

gde je σ gustina mase u uočenom telu čija je zapremina V . Za svaku pojedinačnu tačku sistema je

$$(14) \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{(i)}^k} = \frac{\partial T_{(i)}}{\partial \dot{q}_{(i)}^k}, \quad \frac{\partial T}{\partial q_{(i)}^k} = \frac{\partial T_{(i)}}{\partial q_{(i)}^k},$$

jer kinetička energija ma koje tačke m_j , ($j = i$) ne zavisi od koordinata $q_{(i)}^k$ i brzina $\dot{q}_{(i)}^k$ ostalih tačaka m_i . Stoga se u diferencijalne jednačine kretanja (9) mesto kinetičke energije T_i pojedinih tačaka sistema može uvesti ukupna kinetička energija T ,

$$(15) \quad m_i w_{(i)k} = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{(i)}^k} - \frac{\partial T}{\partial q_{(i)}^k} = Q_{(i)k}.$$

Ako se sada iskoriste oznake (3.2.1 — 48 i 57) i (12), diferencijalne jednačine kretanja slobodnog sistema (9) mogu se izraziti u obliku

$$(16) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^l} - \frac{\partial T}{\partial q^l} = Q_l, \quad (l = 1, 2, \dots, 3N)$$

Struktura ovih jednačina istovetna je sa strukturom diferencijalnih jednačina kretanja jedne materijalne tačke, koja ima kinetičku energiju T i na koju dejstvuje

sila sa generalisanim kovarijantnim koordinatama Q_i , ali u $3N$ -dimenzionom prostoru V_{3N} .

Ukupna kinetička energija sistema sad je funkcija $3N$ generalisanih koordinata tačaka sistema $q_{(i)}^k$ i $3N$ generalisanih brzina tačaka sistema $\dot{q}_{(i)}^k$. U opštem slučaju stoga se može za kinetičku energiju celog sistema napisati

$$(17) \quad 2T = g_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j,$$

pri čemu indeksi i i j uzimaju vrednosti $1, 2, \dots, 3N$.

3.2.2.1. Njutnova sila kojom homogena sferna ljuska i homogena lopta privlače materijalnu tačku. Problem dva tela

Ovde ćemo kao primer određivanja rezultante dejstva prikazati kako se može odrediti Njutnova sila kojom neprekidno raspoređena masa u obliku sferne ljuske poluprečnika a ili kao lopta poluprečnika a privlači materijalnu tačku jedinične mase ($m = 1$).

Neka se data jedinična masa nalazi u tački P (sl. 133) i neka ΔS_i bude tipski element površine sferne ljuske koja ima konstantnu površinsku gustinu σ_1 . Tada je elementarna sila ΔF_i Njutnovog privlačenja u tački P koja potiče od elementarne mase $\sigma_1 \Delta S_i$ u tački Q kao centru privlačenja s obzirom na (2.9 — 3)

$$\Delta F_i = - \frac{k^2 \sigma_1 \Delta S_i}{r_i^2} = - \frac{k^2 \sigma_1 \Delta S_i}{a^2 + z^2 - 2az \cos \vartheta_i},$$

pri čemu je ϑ_i ugao koji obrazuje poteg \overline{OQ} sa z -osom, $\overline{OP} = z$, $\overline{PQ} = r_i$. Ova sila je orijentisana duž \overline{PQ} od P ka Q . Međutim, zbog simetrije, sila kojom sferna ljuska privlači uočenu jediničnu masu neće imati komponentu u pravcu normalnom na osu Oz , pa se možemo ograničiti samo na elementarnu komponentu ΔZ_i , odn. ukupnu komponentu Z sile u pravcu z -ose. Kako je kosinus ugla kod P u ΔOPQ određen obrascem

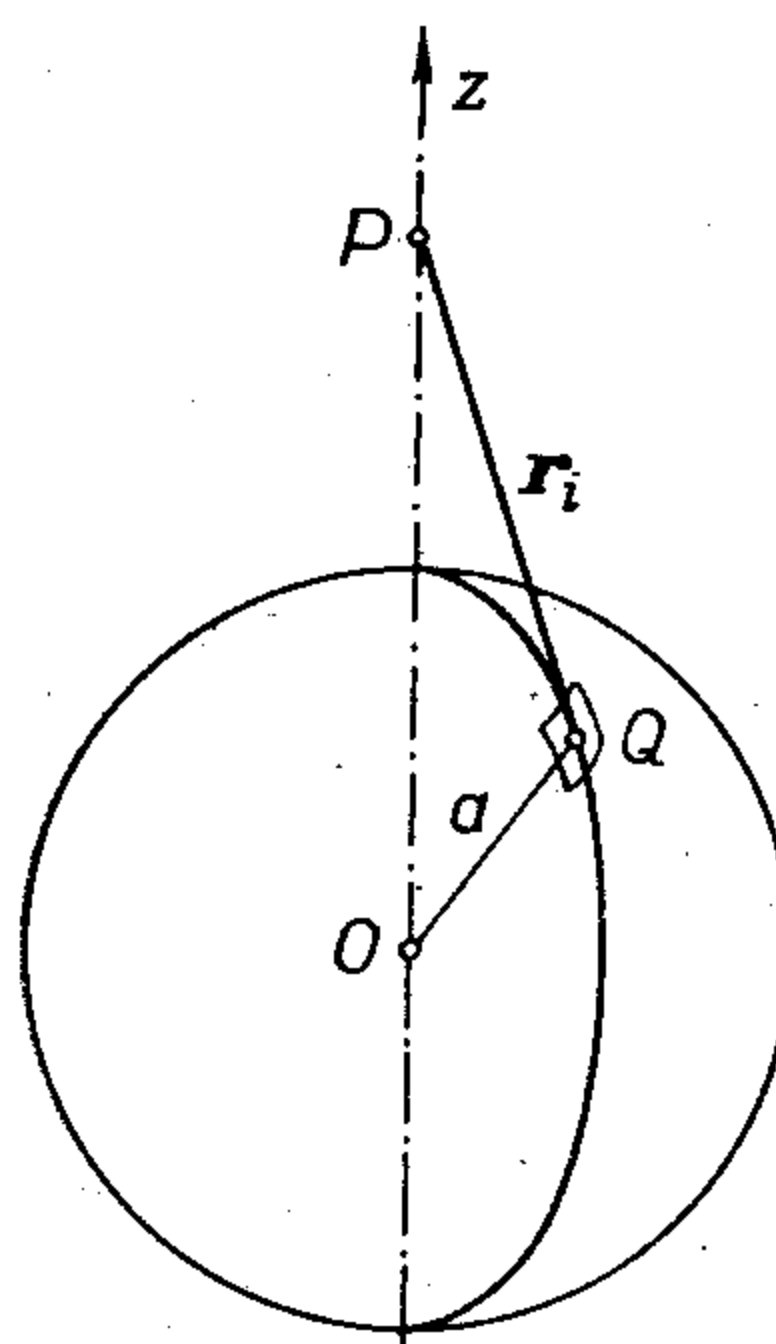
$$\frac{z - a \cos \vartheta_i}{r_i},$$

bice elementarna sila privlačenja

$$\Delta Z_i = - \frac{k^2 \sigma_1 (z - a \cos \vartheta_i) \Delta S_i}{(a^2 + z^2 - 2az \cos \vartheta_i)^{3/2}} = \frac{k^2 \sigma_1 (a \cos \vartheta_i - z) \Delta S_i}{(a^2 + z^2 - 2az \cos \vartheta_i)^{3/2}}.$$

Ukupna sila privlačenja dobiće se, kad se integrali po čitavoj površini S sferne ljuske, tj. kad se izračuna

$$Z = k^2 \sigma_1 \int_S \int \frac{(a \cos \vartheta - z) dS}{(a^2 + z^2 - 2az \cos \vartheta)^{3/2}}.$$



Slika 133

Ako se, radi izračunavanja ovog integrala, element dS površine sfere poluprečnika izrazi u sfernim polarnim koordinatama φ i ϑ , pri čemu je ϑ , kako se vidi, tzv. polarno ugaono rastojanje, biće

$$dS = a^2 \sin \vartheta d\varphi d\vartheta,$$

pa se dobiva

$$\begin{aligned} Z &= k^2 \sigma_1 a^2 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{(a \cos \vartheta - z) \sin \vartheta d\varphi d\vartheta}{(a^2 + z^2 - 2az \cos \vartheta)^{3/2}} \\ &= 2 k^2 \pi \sigma_1 a^2 \int_0^\pi \frac{(a \cos \vartheta - z) \sin \vartheta d\vartheta}{(a^2 + z^2 - 2az \cos \vartheta)^{3/2}}. \end{aligned}$$

Preostalu integraciju najlakše je izvesti, ako se kao promenljiva uvede (z je ovde nepromenljivo) i napiše

$$r^2 = a^2 + z^2 - 2az \cos \vartheta = (a \cos \vartheta - z)^2 + (a \sin \vartheta)^2,$$

odakle je

$$r dr = az \sin \vartheta d\vartheta$$

i

$$a \cos \vartheta - z = -\frac{r^2 + z^2 - a^2}{2z},$$

pa se može napisati

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \frac{(a \cos \vartheta - z) \sin \vartheta d\vartheta}{(a^2 + z^2 - 2az \cos \vartheta)^{3/2}} &= -\frac{1}{2az^2} \int_{|z-a|}^{z+a} \left(1 + \frac{z^2 - a^2}{r^2}\right) dr \\ &= -\frac{1}{2az^2} \left[r - \frac{z^2 - a^2}{r} \right]_{|z-a|}^{z+a}, \end{aligned}$$

jer za $\vartheta = 0$ imamo $r = |z - a|$ pošto je r kao rastojanje bitno pozitivna veličina.

Na taj način se za $z > a$ ($|z - a| = z - a$) dobiva najzad

$$Z = -\frac{k^2 \cdot 4\pi a^2 \sigma_1}{z^2} = -\frac{k^2 m_1}{z^2},$$

gde je $4\pi a^2 \sigma_1 = m_1$ celokupna masa ljuske.

Za $z < a$ ($|z - a| = a - z$) dobiva se

$$Z = 0.$$

To znači, *homogena sferna ljuska privlači materijalnu tačku u nekoj spoljnoj tački kao da je čitava njena masa u njenom centru, a uopšte ne privlači materijalnu tačku koja se nalazi u njenoj unutrašnjosti.*

Njutnova sila, kojom homogena lopta poluprečnika a privlači jediničnu masu na rastojanju $z \neq a$ od centra lopte, može se odrediti na naredni način.

Neka elementarna masa $\sigma \Delta V$ u tački $Q(\rho, \varphi, \vartheta)$ privlači jediničnu masu u tački $P(z, 0, 0)$, gde su tačke određene u sfernim polarnim koordinatama, pri čemu je $z = \text{const.}$, tada je

$$\Delta F = -\frac{k^2 \sigma \Delta V}{\rho^2 + z^2 - 2\rho z \cos \vartheta}$$

i

$$\Delta Z = -\frac{k^2 \sigma (z - \rho \cos \vartheta) \Delta V}{(\rho^2 + z^2 - 2\rho z \cos \vartheta)^{3/2}} = \frac{k^2 \sigma (\rho \cos \vartheta - z) \Delta V}{(\rho^2 + z^2 - 2\rho z \cos \vartheta)^{3/2}}.$$

Tako se najzad za silu privlačenja dobiva

$$\begin{aligned} Z &= k^2 \sigma \int_0^a \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{(\rho \cos \vartheta - z) \rho^2 \sin \vartheta d\rho d\varphi d\vartheta}{(\rho^2 + z^2 - 2\rho z \cos \vartheta)^{3/2}} = \\ &= k^2 \sigma \int_0^a \rho^2 d\rho \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{(\rho \cos \vartheta - z) \sin \vartheta d\varphi d\vartheta}{(\rho^2 + z^2 - 2\rho z \cos \vartheta)^{3/2}}. \end{aligned}$$

Kad se ovde izvrši integracija po φ i ϑ na isti način kao u prethodnom zadatku za ljusku, dobiva se

$$(1) \quad \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{(\rho \cos \vartheta - z) \sin \vartheta d\varphi d\vartheta}{(\rho^2 + z^2 - 2\rho z \cos \vartheta)^{3/2}} = -\frac{\pi}{\rho z^2} \left[u - \frac{z^2 - \rho^2}{u} \right]_{|z-\rho|}^{z+\rho},$$

gde smo sad obeležili

$$u^2 = \rho^2 + z^2 - 2\rho z \cos \vartheta,$$

da bismo istakli da je ρ promenljivo u granicama od 0 do a .

Za $z > a$, dakle, $|z - \rho| = z - \rho$, dobiva se

$$(2) \quad -\frac{\pi}{\rho z^2} \left[u - \frac{z^2 - \rho^2}{u} \right]_{z-\rho}^{z+\rho} = -\frac{4\pi}{z^2},$$

pa ostaje još samo integracija po ρ što daje

$$Z = -\frac{k^2}{z^2} 4\pi\sigma \int_0^a \rho^2 d\rho = -\frac{k^2}{z^2} \cdot \frac{4}{3} \pi a^3 \sigma = -\frac{k^2 m_1}{z^2},$$

gde je sad $m_1 = \frac{4}{3} \pi a^3 \sigma$ celokupna masa lopte. Prema tome i *masivna homogena lopta privlači spoljašnju materijalnu tačku kao da je njena celokupna masa smeštena u centru lopte.*

Međutim, ako se traži Njutново privlačenje materijalne tačke koja se nalazi unutra u lopti u tački P ($0 < z < a$), rastavićemo određivanje integrala (1), pošto ρ nije konstantno već se menja od 0 do a , na dva dela — na integraciju od 0 do $z - \varepsilon$ i na integraciju od $z + \varepsilon$ do a pri čemu je ε proizvoljno mali pozitivni broj. Tada je za sve vrednosti $\rho < z - \varepsilon$ sigurno $|z - \rho| = z - \rho$ pa se za taj deo integrala (1) dobiva opet vrednost (2).

Sa druge strane za $\rho > z + \varepsilon$ biće $|z - \rho| = \rho - z$ i integral (1) se svodi na nulu. Prema tome biće sad

$$Z(\varepsilon) = -\frac{k^2}{z^2} 4\pi\sigma \int_0^{z-\varepsilon} \rho^2 d\rho = -\frac{k^2}{z^2} \frac{4\pi}{3} (z - \varepsilon)^3 \sigma,$$

što za $\varepsilon \rightarrow 0$ daje

$$Z = -\frac{k^2}{z^2} \cdot \frac{4}{3} \pi z^3 \sigma = -\frac{k^2 m_2}{z^2},$$

gde je $m_2 = \frac{4}{3} \pi z^3 \sigma$ masa lopte poluprečnika z . To znači, da na neku unutrašnju materijalnu tačku homogene lopte opet deluje sila iz centra lopte, ali ovoga puta kao da je u njoj koncentrisana masa samo one unutrašnje lopte koja ne obuhvata datu materijalnu tačku.

Ako je m_1 masa celokupne homogene lopte poluprečnika a , može se masa m_2 lopte poluprečnika $z < a$ izraziti obrascem

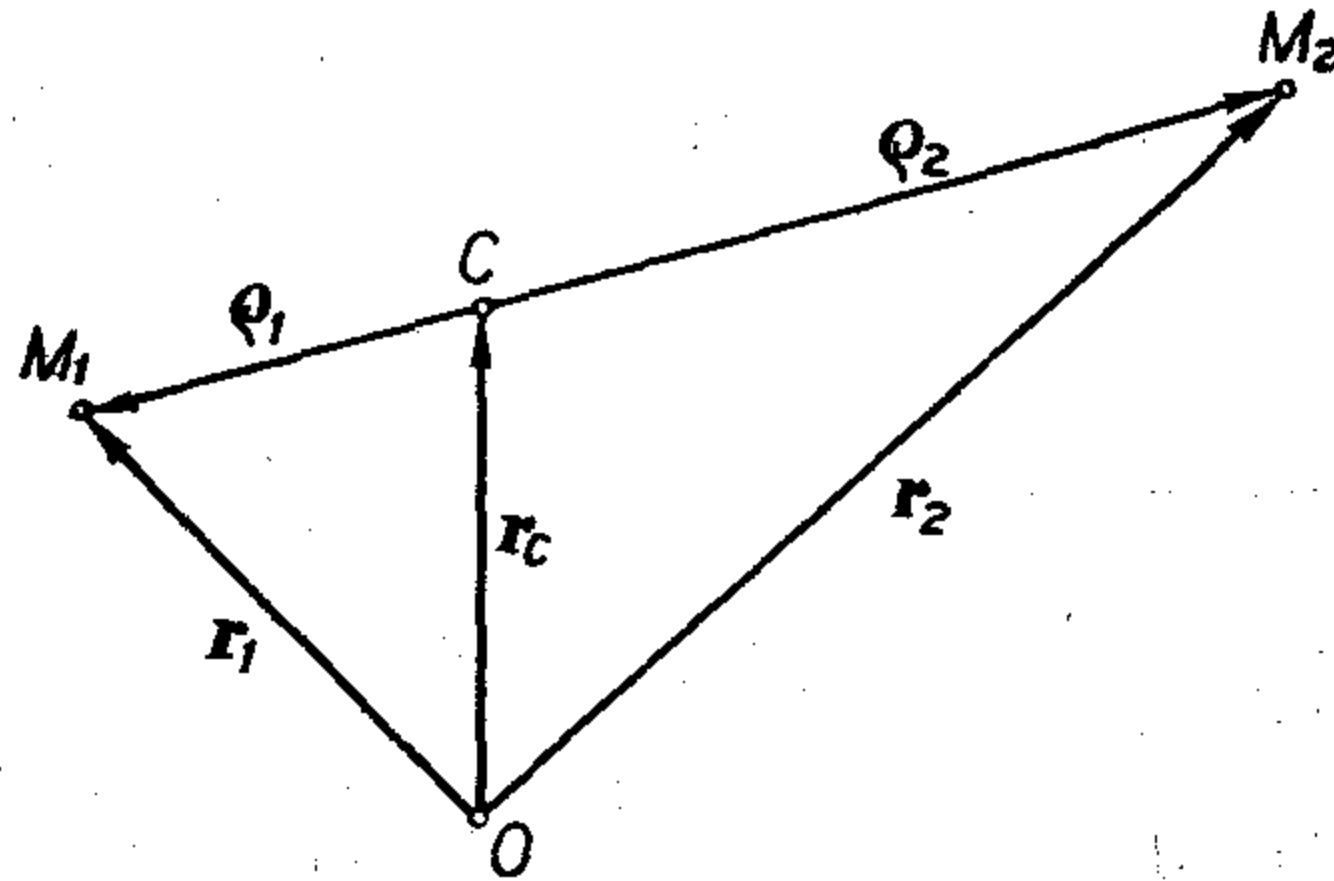
$$m_2 = \frac{z^3}{a^3} m_1,$$

pa će Njutnova sila privlačenja unutrašnje tačke homogene lopte biti

$$Z = -\frac{k^2}{a^3} m_1 z = \lambda z,$$

kad se stavi $\lambda = -\frac{k^2}{a^3} m_1$. Pošto je $\lambda = \text{const.}$ vidi se da je *privlačenje homogene lopte u unutrašnjoj tački proporcionalno rastojanju tačke od centra lopte.*

Kao primer rešavanja problema o kretanju slobodnog materijalnog sistema navešćemo klasični *problem dva tela* iz nebeske mehanike koji je danas posle izbacivanja veštačkih satelita i kosmičkih projektila postao i tehnički interesantan. Tu se radi o sistemu od dve slobodne materijalne tačke M_1 i M_2 čije su mase m_1 i m_2 (npr. Zemlja i Mesec) koje se privlače uzajamno po Njutnovom zakonu gravitacije (sl. 134).



Slika 134

Ako su položaji tih dvaju tačaka određeni u odnosu na neki nepokretni pol O vektorima položaja \mathbf{r}_1 i \mathbf{r}_2 , sila kojom tačka M_2 deluje na tačku M_1 biće

$$(1) \quad \mathbf{F}_1 = k^2 \frac{m_1 m_2}{r^3} (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1),$$

a sila kojom tačka M_1 djeluje na tačku M_2 biće

$$(2) \quad \mathbf{F}_2 = k^2 \frac{m_1 m_2}{r^3} (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2),$$

gde je r rastojanje između tačaka, $r = \overline{M_1 M_2} = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$, a k^2 gravitaciona konstanta. Vektorske diferencijalne jednačine kretanja tačaka ovoga sistema su

$$(3) \quad m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 = k^2 \frac{m_1 m_2}{r^3} (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1),$$

$$(4) \quad m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = k^2 \frac{m_1 m_2}{r^3} (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2).$$

Zbir sila \mathbf{F}_1 i \mathbf{F}_2 mora prema trećem Njutnovom zakonu biti jednak nuli i zaista je prema (1) i (2) $\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = \mathbf{0}$. Stoga će se sabiranjem jednačina kretanja (3) i (4) dobiti

$$(5) \quad m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 + m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = \mathbf{0}.$$

Međutim je

$$(6) \quad m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 = (m_1 + m_2) \mathbf{r}_C = m \mathbf{r}_C,$$

gde je $m = m_1 + m_2$ ukupna masa sistema a \mathbf{r}_C je vektor položaja centra inercije (3.1.2 — 11). Zbog nepromenljivosti masa diferencijaljenjem relacije (6) dva puta po vremenu dobiće se s obzirom na (5) da centar inercije nema ubrzanja

$$(7) \quad \ddot{\mathbf{r}}_C = \mathbf{0}.$$

Dakle, centar inercije ovog sistema kreće se po inerciji jednoliko po pravoj liniji

$$(8) \quad \mathbf{r}_C = \mathbf{A}t + \mathbf{B}.$$

Vektori \mathbf{A} i \mathbf{B} su integracione konstante i određuju se iz početnih uslova t_0 , \mathbf{r}_{C_0} i $\dot{\mathbf{r}}_{C_0}$,

$$(9) \quad \mathbf{A} = \dot{\mathbf{r}}_{C_0}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{r}_{C_0} - \dot{\mathbf{r}}_{C_0} t_0.$$

Ako se centar inercije C uzme za pol, vektori položaja tačaka M_1 i M_2 za ovaj pol mogu se obeležiti sa \mathbf{q}_1 i \mathbf{q}_2 pa je onda

$$(10) \quad \mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_C + \mathbf{q}_1, \quad \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_C + \mathbf{q}_2.$$

Zbog (7) će vektori ubrzanja biti

$$(11) \quad \ddot{\mathbf{r}}_1 = \ddot{\mathbf{q}}_1, \quad \ddot{\mathbf{r}}_2 = \ddot{\mathbf{q}}_2.$$

Linearni moment masa za centar inercije je jednak nuli (3.1.2 — 18) pa je stoga

$$(12) \quad m_1 \mathbf{q}_1 + m_2 \mathbf{q}_2 = \mathbf{0},$$

odakle proističe

$$(13) \quad \mathbf{q}_1 = -\frac{m_2}{m_1} \mathbf{q}_2, \quad \mathbf{q}_2 = -\frac{m_1}{m_2} \mathbf{q}_1.$$

S obzirom na (13) međusobno rastojanje $r = \overline{M_1 M_2}$ tačaka sistema može se izraziti pomoću samo jednog od dva vektora položaja,

$$\mathbf{r} = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| = |\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2| = \left| \mathbf{q}_1 + \frac{m_1}{m_2} \mathbf{q}_1 \right| = \left| -\frac{m_2}{m_1} \mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_2 \right|,$$

tako da je

$$(14) \quad r = \frac{m}{m_2} \rho_1 = \frac{m}{m_1} \rho_2, \quad (\rho_1 = |\mathbf{Q}_1|, \rho_2 = |\mathbf{Q}_2|)$$

Kad se relacije (10), (11), (13) i (14) unesu u jednačine kretanja (3) i (4) ove će postati

$$(15) \quad m_1 \ddot{\mathbf{Q}}_1 = -k^2 \frac{m_1 \mu}{\rho_1^3} \mathbf{Q}_1, \quad \left(\mu = \frac{m_2^3}{m^2} \right)$$

$$(16) \quad m_2 \ddot{\mathbf{Q}}_2 = -k^2 \frac{m_2 \nu}{\rho_2^3} \mathbf{Q}_2, \quad \left(\nu = \frac{m_1^3}{m^2} \right)$$

To su jednačine kretanja obe materijalne tačke u odnosu na njihov centar inercij

Ako se sa $\mathbf{r} = \overrightarrow{M_1 M_2}$ obeleži vektor položaja jedne tačke sistema u odnosu na drugu, oduzimanjem diferencijalne jednačine kretanja (3) od jednačine (4) dobiće se diferencijalna jednačina kretanja jedne tačke (M_2) sistema prema drugoj (M_1)

$$(17) \quad \ddot{\mathbf{r}} = -k^2 \frac{m}{r^3} \mathbf{r} = -k^2 \frac{m_1 + m_2}{r^3} \mathbf{r}.$$

Struktura jednačina (15), (16) i (17) je potpuno istovetna. Prema odeljku (2.9.1.1) vidi se da su integrali sve tri jednačine konusni preseki. Iz jednačina (15) i (16) se stoga zaključuje da se materijalne tačke M_1 i M_2 kreću po konusnim presecima oko zajedničkog centra masa C , a iz jednačine (17) i da se one kreću po konusnim presecima i jedna oko druge.

Prema tome, ako se uoče dva tela (npr. Sunce i planeta ili Zemlja i Mesec) koja su oba pokretna a dovoljno izolovana od dejstva ostalih tela, tada tačna diferencijalna jednačina kretanja tela mase m_1 oko tela mase M nije, prema (2.9.1.1 — 1a)

$$(18) \quad \ddot{\mathbf{r}} = -k^2 \frac{M}{r^3} \mathbf{r},$$

već s obzirom na (17) vektorska diferencijalna jednačina

$$(19) \quad \ddot{\mathbf{r}} = -k^2 \frac{M + m_1}{r^3} \mathbf{r},$$

ako \mathbf{r} označava vektor položaja tela (planete, satelita) mase m_1 u odnosu na telo mase M (Sunce, Zemlja). Stoga, ako se uoče dve planete, čije su mase m_1 i m_2 koje se kreću oko Sunca po zakonu (17) po eliptičnim putanjama koje imaju velike poluose a_1 i a_2 , biće vremena obilaženja ovih planeta oko Sunca, s obzirom na (2.9.1.2 — 40)

$$T_1^2 = \frac{4\pi}{\lambda_1} a_1^3, \quad T_2^2 = \frac{4\pi}{\lambda_2} a_2^3.$$

Pri tome je $\lambda_1 = k^2(M + m_1)$ i $\lambda_2 = k^2(M + m_2)$ što se odmah uvida ako se, na način koji je prikazan u odeljku (2.9.1.2), vreme obilaženja odredi ne na osnovu jednačine (18) već na osnovu jednačine (19). Deobom T_1^2 sa T_2^2 dobiva se

$$(20) \quad \frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{M + m_2}{M + m_1} \frac{a_1^3}{a_2^3},$$

i to je tzv. *poboljšani treći Keplerov zakon* koji važi kad centralno telo nije nepokretno. Očigledno je, međutim, kad su mase m_1 i m_2 male u odnosu na masu M (kao što je to po pravilu slučaj za planete i Sunce) ovaj poboljšani zakon se svodi na uobičajenu formulaciju trećeg Keplerovog zakona. U slučaju Zemlja i Mesec mora se koristiti ovaj poboljšani zakon.

3.2.3. Diferencijalne jednačine kretanja sa multiplikatorima veza (Lagranževe jednačine prve vrste)

Kad je sloboda nekog materijalnog sistema ograničena holonomnim vezama (3.2.1 — 5) i neholonomnim vezama (3.2.1 — 34), ubrzanja \mathbf{w}_i pojedinih materijalnih tačaka sistema moraju zadovoljavati uslove za ubrzanje (3.2.1 — 32 i 35),

$$(1) \quad \sum_{i=1}^N \text{grad}_i f_\alpha \cdot \mathbf{w}_i + D_2 f_\alpha = 0, \quad (\alpha = 1, 2, \dots, k_1)$$

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{l}_{i\beta} \cdot \mathbf{w}_i + D_2 \varphi_\beta = 0. \quad (\beta = 1, 2, \dots, k_2)$$

Kad se tačke sistema kreću samo pod dejstvom aktivnih sila \mathbf{F}_i , ubrzanja su određena prema drugom Njutnovom zakonu relacijama (3.2.2 — 1),

$$(2) \quad \mathbf{w}_i = \frac{1}{m_i} \mathbf{F}_i$$

i u opštem slučaju neće zadovoljavati uslove za ubrzanje (1). Ako ih zadovoljavaju biće

$$(3) \quad \sum_{i=1}^N \text{grad}_i f_\alpha \cdot \frac{\mathbf{F}_i}{m_i} + D_2 f_\alpha = 0,$$

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{l}_{i\beta} \cdot \frac{\mathbf{F}_i}{m_i} + D_2 \varphi_\beta = 0,$$

pa su veze trivijalne, jer ne nameću sistemu u stvari nikakva ograničenja. Ako sile \mathbf{F}_i ne zadovoljavaju uslove (3) postoji kontradikcija između drugog Njutnovog zakona i uslova za ubrzanje. Da bi se ta kontradikcija izbegla i da bi se mogao primeniti drugi Njutnov zakon i na kretanje neslobodnog sistema neophodno je uvesti u razmatranja pored aktivne sile i neku dopunsku silu koja zavisi od veze, *silu reakcije veze* \mathbf{R}_i , tako da vektorske diferencijalne jednačine kretanja sistema budu saglasne sa drugim Njutnovim zakonom,

$$(4) \quad m_i \mathbf{w}_i = \mathbf{F}_i + \mathbf{R}_i$$

a da istovremeno budu zadovoljeni i uslovi za ubrzanje (1). Unošenjem \mathbf{w}_i iz (4) u (1) dobiće se $k_1 + k_2$ relacija

$$(5) \quad \sum_{i=1}^N \text{grad}_i f_\alpha \cdot \frac{1}{m_i} \mathbf{F}_i + D_2 f_\alpha = - \sum_{i=1}^N \text{grad}_i f_\alpha \cdot \frac{1}{m_i} \mathbf{R}_i, \quad (\alpha = 1, 2, \dots, k_1)$$

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{l}_{i\beta} \cdot \frac{\mathbf{F}_i}{m_i} + D_2 \varphi_\beta = - \sum_{i=1}^N \mathbf{l}_{i\beta} \cdot \frac{\mathbf{R}_i}{m_i}, \quad (\beta = 1, 2, \dots, k_2)$$

iz kojih treba odrediti N vektora \mathbf{R}_i reakcije veza, odn. $3N$ koordinata tih vektora.

Ukupan broj veza je manji od $3N$, broja koordinata reakcija, pa su jedne (5) nedovoljne za njihovo potpuno određivanje.

Sile reakcije \mathbf{R}_i mogu se uvek rastaviti u po dve komponente \mathbf{R}_i' i

$$(6) \quad \mathbf{R}_i = \mathbf{R}_i' + \mathbf{R}_i''$$

tako da ukupan rad sila reakcija \mathbf{R}_i' na virtualnim pomeranjima $\delta \mathbf{r}_i$ bude jednak nuli,

$$(7) \quad \sum_{i=1}^N \mathbf{R}_i' \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0.$$

Ako su sve reakcije takve, da je $\mathbf{R}_i'' = \mathbf{0}$ pa ukupne reakcije veza zadovoljavaju prethodnu relaciju (7), prema kojoj je rad sila reakcija na virtualnom pomeranju (njihov virtualni rad) jednak nuli, veze su *idealne* (uporedi odeljak 2. (kriterijum idealnosti veza).

Da bismo odredili oblik idealnih veza u takvom opštem slučaju iskoristićemo Lagranževu metodu neodređenih multiplikatora, koja se sastoji u ovome.

Kad je uočeni sistem slobodan sva virtualna pomeranja su potpuno proizvoljna, pa iz relacije (7) proističe ono što već znamo da je tada $\mathbf{R}_i' = \mathbf{0}$.

Međutim, kad uočeni materijalni sistem nije slobodan već postoje holonomne veze (3.2.1—5) i neholonomne veze oblika (3.2.1—34), tada sva virtualna pomeranja sistema nisu proizvoljna pa moraju zadovoljavati $k_1 + k_2$ uslova (3.2.1—44 i 45). Da bismo u ovom slučaju postigli da se uvođenjem nekih dopunskih sila sistem ponaša kao slobodan, pomnožićemo k_1 holonomnih uslova redom proizvoljnim multiplikatorima λ_α ($\alpha = 1, 2, \dots, k_1$), a k_2 neholonomnih uslova multiplikatorima μ_β ($\beta = 1, 2, \dots, k_2$) pa ih oduzeti od (7). Tako se onda dobije

$$(8) \quad \sum_{i=1}^N (\mathbf{R}_i' - \sum_{\alpha=1}^{k_1} \lambda_\alpha \text{grad}_i f_\alpha - \sum_{\beta=1}^{k_2} \mu_\beta \mathbf{l}_{i\beta}) \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0.$$

U ovom se izrazu sad onih $k_1 + k_2$ neodređenih multiplikatora mogu tako izabrati da se $k_1 + k_2$ virtualnih pomeranja, onih koji su određeni uslovima (3.2.1—44 i 45) i nisu proizvoljni eliminišu iz relacija (8) na taj način što se podesnim izborom multiplikatora λ_α i μ_β anuliraju one zagrade koje stoje pred tim virtualnim pomeranjima. Ostalih $N - (k_1 + k_2)$ virtualnih pomeranja su onda potpuno proizvoljna, pa će stoga relacija (8) pri ovim zahtevima biti zadovoljena samo, ako bude

$$\mathbf{R}_i' - \sum_{\alpha=1}^{k_1} \lambda_\alpha \text{grad}_i f_\alpha - \sum_{\beta=1}^{k_2} \mu_\beta \mathbf{l}_{i\beta} = 0,$$

za sve vrednosti $i = 1, 2, \dots, N$, odn. kad je

$$(9) \quad \mathbf{R}_i' = \sum_{\alpha=1}^{k_1} \lambda_\alpha \text{grad}_i f_\alpha + \sum_{\beta=1}^{k_2} \mu_\beta \mathbf{l}_{i\beta},$$

i to je traženi oblik reakcija idealnih veza.

Ukoliko je $\mathbf{R}'' \neq \mathbf{0}$, veze nisu idealne i reakcije \mathbf{R}'' mogu se odrediti samo ako se za njih uvedu naknadne pretpostavke. Reakcije \mathbf{R}'' predstavljaju i u dinamičkom sistemu, kao što je to bio slučaj i u dinamici materijalne tačke, *sile trenja*.

Izrazi (9) sadrže $k_1 + k_2$ multiplikatora veza, tačno onoliko koliko je raspoloživih relacija (5) za njihovo određivanje. Za idealne veze se unošenjem izrazi

za $\mathbf{R}_i = \mathbf{R}_i'$ iz (9) u (5) dobiva sistem od $k_1 + k_2$ linearnih algebarskih jednačina po množiocima veza i ovi se iz tog sistema mogu potpuno odrediti.

Osnovne vektorske diferencijalne jednačine kretanja neslobodnog sistema sa množiocima veza sad glase

$$(10) \quad m_i \mathbf{w}_i = \mathbf{F}_i + \sum_{\alpha=1}^{k_1} \lambda_{\alpha} \text{grad}_i f_{\alpha} + \sum_{\beta=1}^{k_2} \mu_{\beta} \text{grad}_{\mathbf{v}_i} \varphi_{\beta}. \quad (i = 1, 2, \dots, N)$$

Za neki sistem generalisanih koordinata q^k ($k = 1, 2, 3$) prema (3.2.1—55) biće

$$(11) \quad \sum_{\alpha=1}^{k_1} \lambda_{\alpha} \text{grad}_i f_{\alpha} = \sum_{\alpha=1}^{k_1} \lambda_{\alpha} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial q^{(i)k}} \mathbf{g}^{(i)k},$$

$$\sum_{\beta=1}^{k_2} \mu_{\beta} \text{grad}_{\mathbf{v}_i} \varphi_{\beta} = \sum_{\beta=1}^{k_2} \mu_{\beta} \frac{\partial \varphi_{\beta}}{\partial q^{(i)k}} \mathbf{g}^{(i)k},$$

pa se za silu reakcije može napisati

$$(12) \quad \mathbf{R}_i = \sum_{\alpha=1}^{k_1} \lambda_{\alpha} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial q^{(i)k}} \mathbf{g}^{(i)k} + \sum_{\beta=1}^{k_2} \mu_{\beta} \frac{\partial \varphi_{\beta}}{\partial q^{(i)k}} \mathbf{g}^{(i)k}.$$

Ako se za ubrzanja \mathbf{w}_i i silu \mathbf{F}_i iskoriste obrasci (3.2.2—3 i 5), vektorska diferencijalna jednačina kretanja tačke m_i biće

$$(13) \quad m_i \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{B}^{(i)}}{\partial \dot{q}^{(i)k}} - \frac{\partial \mathcal{B}^{(i)}}{\partial q^{(i)k}} \right) \mathbf{g}^{(i)k} = Q_{(i)k} \mathbf{g}^{(i)k} + \left(\sum_{\alpha=1}^{k_1} \lambda_{\alpha} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial q^{(i)k}} + \sum_{\beta=1}^{k_2} \mu_{\beta} \frac{\partial \varphi_{\beta}}{\partial q^{(i)k}} \right) \mathbf{g}^{(i)k}.$$

Skalarnim množenjem jednačine (13) osnovnim vektorima $\mathbf{g}^{(i)j}$ zbog $\mathbf{g}^{(i)k} \mathbf{g}^{(i)j} = \delta_j^k$ dobiće se sistem od $3N$ skalarnih diferencijalnih jednačina kretanja

$$(14) \quad m_i \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{B}^{(i)}}{\partial \dot{q}^{(i)j}} - \frac{\partial \mathcal{B}^{(i)}}{\partial q^{(i)j}} \right) = Q_{(i)j} + \sum_{\alpha=1}^{k_1} \lambda_{\alpha} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial q^{(i)j}} + \sum_{\beta=1}^{k_2} \mu_{\beta} \frac{\partial \varphi_{\beta}}{\partial q^{(i)j}}.$$

$$\left. \begin{array}{l} (i = 1, 2, \dots, N) \\ (j = 1, 2, 3) \end{array} \right\}$$

Umesto generalisanih koordinata sa dvostrukim indeksima može se prema (3.2.1—43) pisati

$$(15) \quad q^{(i)j} = q^{3(i-1)+j} = q^l, \quad \dot{q}^{(i)j} = \dot{q}^{3(i-1)+j} = \dot{q}^l$$

$$Q_{(i)j} = Q_{3(i-1)+j} = Q_l.$$

Ako se sem toga iskoriste i jednakosti (3.2.1—8 i 14), skalarnu diferencijalnu jednačinu kretanja (14) mogu se najzad napisati u obliku u kome se više ne ističu pojedinačne tačke posmatranog materijalnog sistema već su sve koordinate sistema ravnopravne ($m_i \mathcal{B}^{(i)} = T^{(i)}$),

$$(16) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^l} - \frac{\partial T}{\partial q^l} = Q_l + \sum_{\alpha=1}^{k_1} \lambda_{\alpha} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial q^l} + \sum_{\beta=1}^{k_2} \mu_{\beta} \frac{\partial \varphi_{\beta}}{\partial q^l}. \quad (l = 1, 2, \dots, 3N)$$

Diferencijalne jednačine kretanja neslobodnog materijalnog sistema sa idealnim vezama u obliku (14) ili (16) nazivaju se *diferencijalne jednačine kretanja sa množiocima veza* ili *Lagranževe jednačine prve vrste*.

U obliku (16) te se jednačine mogu neposredno interpretirati kao diferencijalne jednačine kretanja reprezentativne tačke u konfiguracionom prostoru V_{3N} sa k_1 holonomnih i k_2 neholonomnih idealnih veza. Osnovni vektori $\mathbf{g}_{(i)k} = \mathbf{g}_{3(i-1)+k} = \mathbf{g}_i$ jesu u V_{3N} i osnovni vektori za koordinatni sistem q^l ($l = 1, 2, \dots, 3N$).

Za linearne neholonomne veze je

$$(17) \quad \varphi_\beta = \sum_{i=1}^N \mathbf{l}_{i\beta} \cdot \mathbf{v}_i + D_\beta = \sum_{i=1}^N (A_{i\beta} \dot{x}_i + B_{i\beta} \dot{y}_i + C_{i\beta} \dot{z}_i) + D_\beta = \\ = \sum_{l=1}^{3N} \Phi_{\beta l} \dot{q}^l + D_\beta = 0 \quad (\beta = 1, 2, \dots, k_2)$$

pa vektorske diferencijalne jednačine kretanja glase

$$(18) \quad m_i \mathbf{w}_i = \mathbf{F}_i + \sum_{\alpha=1}^{k_1} \lambda_\alpha \text{grad}_i f_\alpha + \sum_{\beta=1}^{k_2} \mu_\beta \Phi_{\beta i},$$

a skalarne jednačine (15) dobiće oblik

$$(19) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^l} - \frac{\partial T}{\partial q^l} = Q_l + \sum_{\alpha=1}^{k_1} \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial q^l} + \sum_{\beta=1}^{k_2} \mu_\beta \Phi_{\beta l}.$$

Projiciranjem na ose Dekartovog pravouglog koordinatnog sistema, ili stavljajući u jednačinama (19) da je

$$\begin{aligned} q^1 &= x_1, & q^2 &= y_1, & q^3 &= z_1, \\ q^4 &= x_2, & q^5 &= y_2, & q^6 &= z_2, \\ &\dots & & & & \\ q^{3N-2} &= x_N, & q^{3N-1} &= y_N, & q^{3N} &= z_N, \end{aligned}$$

dobiće se Lagranževe jednačine prve vrste u Dekartovim koordinatama

$$(20) \quad \begin{aligned} m_1 \ddot{x}_i &= X_i + \sum_{\alpha=1}^{k_1} \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i} + \sum_{\beta=1}^{k_2} \mu_\beta A_{i\beta}, \\ m_i \ddot{y}_i &= Y_i + \sum_{\alpha=1}^{k_1} \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial y_i} + \sum_{\beta=1}^{k_2} \mu_\beta B_{i\beta}, & (i = 1, 2, \dots, N) \\ m_i \ddot{z}_i &= Z_i + \sum_{\alpha=1}^{k_1} \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial z_i} + \sum_{\beta=1}^{k_2} \mu_\beta C_{i\beta}. \end{aligned}$$

Generalisane sile $Q_{(i)k}$ ili Q_l najlakše mogu da se odrede pomoću izraza za virtualni rad sistema. Ukupan virtualni rad aktivnih sila jednak je zbiru virtualnih radova tačaka sistema,

$$(21) \quad \delta A = \sum_{i=1}^N \delta A_i = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i.$$

Za neki sistem generalisanih koordinata biće $\mathbf{F}_i = Q_{(i)k} \mathbf{g}_{(i)k}$ ($i = 1, 2, \dots, N$; $k = 1, 2, 3$) dok je virtualno pomeranje

$$(22) \quad \delta \mathbf{r}_i = d_1 \mathbf{r}_i - d_2 \mathbf{r}_i = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_{(i)k}} d_1 q_{(i)k} - \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_{(i)k}} d_2 q_{(i)k} = \\ = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_{(i)k}} \delta q_{(i)k} = \mathbf{g}_{(i)k} \delta q_{(i)k},$$

gde su $d_1 q_{(i)k}$ i $d_2 q_{(i)k}$ dva moguća pomeranja (3.2.1—42 i 43), pa je

$$\delta A = \sum_{i=1}^N \sum_{m=1}^3 \sum_{k=1}^3 Q_{(i)k} \left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_{(i)m}} \cdot \mathbf{g}_{(i)k} \right) \delta q_{(i)m}.$$

Kako je

$$\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_{(i)m}} \cdot \mathbf{g}_{(i)k} = \mathbf{g}_{(i)m} \cdot \mathbf{g}_{(i)k} = \delta_m^k.$$

gde su $\mathbf{g}_{(i)m}$ osnovni vektori za sistem generalisanih koordinata $q_{(i)m}$ u tački m_i , biće

$$(23) \quad \delta A = \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^3 Q_{(i)k} \delta q_{(i)k} = \sum_{l=1}^{3N} Q_l \delta q^l.$$

Generalisane sile $Q_{(i)k}$ ili Q_l su u izrazu za virtualan rad množiocu uz generalisane koordinate virtualnih pomeranja $\delta q_{(i)k}$ odn. δq^l .

Za određivanje kretanja materijalnog sistema od N materijalnih tačaka sa k_1 holonomnih i k_2 neholonomnih idealnih veza same Lagranževe jednačine prve vrste su nedovoljne, jer ih ima ukupno $3N$, dok je nepoznatih funkcija $3N + k_1 + k_2$ (tj. $3N$ koordinata sistema, k_1 multiplikatora holonomnih i k_2 multiplikatora neholonomnih veza). Stoga za određivanje kretanja moraju se jednovremeno posmatrati pored diferencijalnih jednačina kretanja i $k_1 + k_2$ jednačina veza, što zajedno čini potpuni sistem jednačina za određivanje kretanja. Pri tome treba prvo iz $k_1 + k_2$ jednačina (5) odrediti multiplikatore veza λ_α i μ_β i uneti ih npr. u jednačine (19).

3.2.4. Lagranževe jednačine druge vrste

Neka se neki materijalni sistem kreće samo pod uticajem k_1 holonomnih veza, broj stepena slobode biće tada $n = 3N - k_1$, pri čemu je N broj materijalnih tačaka sistema i neka su jednačine holonomnih veza

$$(1) \quad f_\alpha(\mathbf{r}_i; t) = 0. \quad (\alpha = 1, 2, \dots, k_1; i = 1, 2, \dots, N)$$

Za dalja razmatranja biće pogodnije da se izvrši prenumeracija jednačina veza na taj način što će se za sistem sa $3N - k_1$ stepena slobode jednačine veze numerisati od $n + 1$ do $3N$, gde je $n = 3N - k_1$.

Vektorske diferencijalne jednačine kretanja holonomnog sistema sa idealnim vezama su

$$(2) \quad m_i \mathbf{w}_i = \mathbf{F}_i + \sum_{\alpha=1}^{k_1} \lambda_\alpha \text{grad}_i f_\alpha \quad (i = 1, 2, \dots, N)$$

ili

$$(3) \quad \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^l} - \frac{\partial T}{\partial q^l} \right) \mathbf{g}^l = Q_l \mathbf{g}^l + \sum_{\alpha=1}^{k_1} \lambda_{\alpha} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial q^l} \mathbf{g}^l, \quad (l=1, 2, \dots, 3N)$$

pri čemu su q^l proizvoljne generalisane koordinate, pa jednačine kretanja (3) moraju biti u važnosti uvek, kakav god sistem generalisanih koordinata bio izabran

Uvek se može naći takav sistem od $3N$ generalisanih koordinata q^l da prvih n koordinata q^r ($r=1, 2, \dots, n$) budu proizvoljne funkcije položaja i vremena,

$$(4) \quad q^r = q^r(\mathbf{r}_i; t) \quad (r=1, 2, \dots, n)$$

a da preostalih k_1 budu funkcije položaja i vremena određene jednačinama veza (1),

$$(5) \quad q^{\alpha} = f_{\alpha}(\mathbf{r}_i; t) = 0. \quad (\alpha = n+1, n+2, \dots, 3N)$$

Svih $3N$ generalisanih koordinata q^l izabrano je tako da su sve relacije (4) i (5) međusobno funkcionalno nezavisne. Tada se mogu $3N$ koordinata položaja izraziti kao funkcije $3N$ novo uvedenih generalisanih koordinata q^l . Zbog jednačina veza, međutim, k_1 tih koordinata je stalno jednako nuli pa se može pisati

$$(6) \quad \mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q^1, q^2, \dots, q^n; t). \quad (i=1, 2, \dots, N)$$

Koordinate q^l moraju, sem toga, biti tako izabrane da jednačine veza budu identički zadovoljene,

$$(7) \quad f_{\alpha}[\mathbf{r}_i(q^1, q^2, \dots, q^n; t); t] \equiv 0. \quad (\alpha = n+1, n+2, \dots, 3N)$$

S obzirom na (5) jednačine veza za ovde izabrani sistem generalisanih koordinata biće

$$(8) \quad f_{\alpha} = q^{\alpha} = 0, \quad (\alpha = n+1, n+2, \dots, 3N)$$

stoga su parcijalni izvodi funkcija f_{α} po generalisanim koordinatama q^l jednaki Kronekerovim simbolima,

$$(9) \quad \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial q^l} = \delta_{\alpha l}.$$

Diferencijalne jednačine kretanja (3) za ovako izabrane generalisane koordinate dobivaju onda oblik

$$(10) \quad \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^l} - \frac{\partial T}{\partial q^l} \right) \mathbf{g}^l = Q_l \mathbf{g}^l + \sum_{\alpha=1}^{k_1} \lambda_{\alpha} \delta_{\alpha l} \mathbf{g}^l. \quad (l=1, 2, \dots, 3N)$$

Pri tome kinetička energija sistema ne zavisi uopšte od k_1 koordinata q^{α} i k_1 generalisanih brzina \dot{q}^{α} jer je prema (5) stalno $q^{\alpha} = 0$ ($\alpha = n+1, \dots, 3N$) a otuda je stalno i $\dot{q}^{\alpha} = 0$.

Skalarnim množenjem vektorskih jednačina (10) osnovnim kovarijantnim vektorima \mathbf{g}_r ($r=1, 2, \dots, n$) dobiće se n skalarnih diferencijalnih jednačina kretanja

$$(11) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^r} - \frac{\partial T}{\partial q^r} = Q_r + \sum_{\alpha=1}^{k_1} \lambda_{\alpha} \delta_{\alpha l} \delta_r^l.$$

Kako je međutim

$$\delta_{\alpha l} = \delta_{r^l} = \delta_{\alpha r} = 0,$$

jer je $\alpha = n+1, \dots, 3N$, a $r = 1, \dots, n$ pa nikada ne može biti $\alpha = r$, diferencijalne jednačine (10) ne sadrže množioce veza i definitivno se mogu napisati u obliku

$$(12) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^r} - \frac{\partial T}{\partial q^r} = Q_r. \quad \begin{matrix} (r = 1, 2, \dots, n) \\ (n = 3N - k_1) \end{matrix}$$

Jednačine (12) nazivaju se *Lagranževe jednačine druge vrste* za materijalni sistem sa n stepena slobode. Lagranževe jednačine druge vrste definisane su samo za holonomne sisteme. U njima se javlja samo onoliko koordinata q^r ($r = 1, 2, \dots, n$) koliko sistem ima stepena slobode i ne sadrže množioce veza. Između koordinata q^r nema nikakvih veza pa se stoga te koordinate nazivaju *nezavisne Lagranževe koordinate* sistema. Za neki dati sistem nezavisne koordinate se mogu izabrati na proizvoljno mnogo načina sa jednim ograničenjem da ne smeju biti u suprotnosti sa vezama. Opet ističemo da su q^l ($l = 1, 2, \dots, 3N$) sistem proizvoljnih generalisanih koordinata a ne samo onaj najmanji broj nezavisnih parametara (Lagranževe promenljive) koji određuju konfiguraciju uočenog sistema.

Osobina Lagranževih jednačina druge vrste da ne sadrže reakcije veza i da ih ima tačno onoliko koliko sistem ima stepena slobode čini ih najpogodnijim za rešavanje većine problema dinamike holonomnih sistema. Za određivanje sila reakcije potrebno je posle integracije Lagranževih jednačina druge vrste preći na neki sistem u kome ima i zavisnih koordinata i reakcije odrediti iz odgovarajućih Lagranževih jednačina prve vrste. Kad se odrede konačne jednačine kretanja za nezavisne koordinate

$$(13) \quad q^r = q^r(t),$$

konačne vektorske jednačine kretanja određene su relacijama (6) iz kojih se neposredno diferencijacijom mogu odrediti ubrzanja \mathbf{w}_i tako da se zamenom u relacijama (2)

$$m_i \mathbf{w}_i = \mathbf{F}_i + \mathbf{R}_i$$

neposredno nalaze sile reakcije.

Konačne vektorske jednačine kretanja će biti oblika

$$(14) \quad \mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i[q^1(t), q^2(t), \dots, q^n(t); t]. \quad (i = 1, 2, \dots, N)$$

Holonomne veze u obliku (8) ili uopšte u obliku

$$(15) \quad f_\alpha(q^1, q^2, \dots, q^{3N}; t) = 0 \quad (\alpha = n+1, \dots, 3N)$$

predstavljaju u konfiguracionom prostoru V_{3N} sistem od k_1 hiperpovrši. Reprezentativna tačka može da se kreće samo u n -dimenzionom prostoru V_n prostora V_{3N} određenom jednačinama veza (15). Nezavisne koordinate q_1, \dots, q^n su dopustive koordinate u prostoru V_n , dok su generalisane sile Q_1, \dots, Q_n upravo one sile koje dejstvuju u samom potprostoru V_n . Npr. ako se sistem materijalnih tačaka kreće po nekoj nepokretnoj sfernoj površi dopustive Lagranževe koordinate za sferu su recimo sferne koordinate (φ, ϑ) sa $r = \text{const.}$ dok Dekartove koordinate to ne mogu biti jer ne leže uvek na sferi. U Lagranževim jednačinama druge vrste pojavice se samo komponente aktivnih sila koje se nalaze u tangentskoj ravni sfere u tačkama sfere u kojima se u datom trenutku nalaze materijalne

tačke. Pošto u tim jednačinama nema komponenta aktivnih sila upravni na sferu a koordinate (φ, ϑ) pripadaju sfernoj površi (jer su tako definisane), neće se pomoću tih jednačina moći naći sile reakcije, jer (za idealne veze) sile reakcije ne pripadaju sferi već *obvojnem prostoru* u kome se nalazi sfera.

Prema tome Lagranževe jednačine druge vrste predstavljaju diferencijalne jednačine kretanja jedne slobodne tačke — reprezentativne tačke sistema — u prostoru V_n pod dejstvom sila Q_r ($r = 1, 2, \dots, n$) a broj dimenzija prostora V_n poklapa se sa brojem stepena slobode kretanja sistema.

I u opštem slučaju sistema sa holonomnim i neholonomnim vezama mogu se koristiti nezavisne koordinate, ali se one na navedeni način mogu uvesti samo u odnosu na holonomne veze. Ako se u diferencijalne jednačine kretanja sa multiplikatorima veza sistema sa k_1 holonomnih i k_2 neholonomnih veza uvedu nezavisne koordinate prema (4) i (5), određene u odnosu na holonomne veze $f_\alpha = 0$ ($\alpha = 1, 2, \dots, k_1$), dobiće se sistem diferencijalnih jednačina (10) dopunjen reakcijama neholonomnih veza,

$$(16) \quad \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^l} - \frac{\partial T}{\partial q^l} \right) \mathbf{g}^l = Q_l \mathbf{g}^l + \sum_{\alpha=1}^{k_1} \lambda_\alpha \delta_{\alpha l} \mathbf{g}^l + \sum_{\beta=1}^{k_2} \mu_\beta \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial \dot{q}^l} \mathbf{g}^l. \quad (l = 1, 2, \dots, n)$$

Skalarnim množenjem ovih jednačina osnovnim vektorima \mathbf{g}^m ($m = 1, \dots, n = 3N - k_1$) nezavisnih koordinata q^m dobiće se sistem od n skalarnih diferencijalnih jednačina

$$(17) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^m} - \frac{\partial T}{\partial q^m} = Q_m + \sum_{\beta=1}^{k_2} \mu_\beta \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial \dot{q}^m}. \quad (m = 1, 2, \dots, n)$$

Ovaj sistem sadrži $n + k_2$ nepoznatih funkcija q^m i μ_β , pa je pored n diferencijalnih jednačina kretanja potrebno uzeti u obzir i k_2 jednačina neholonomnih veza $\varphi_\beta = 0$. Na taj način za rešavanje problema imamo $n + k_2$ jednačina za određivanje tolikog istog broja nepoznatih funkcija. Pri tome treba jednačine neholonomnih veza izraziti samo u odnosu na nezavisne koordinate.

3.2.5. Konfiguracioni prostor sa kinematičkim linijskim elementom

U prethodnom odeljku je rečeno da se diferencijalne jednačine kretanja materijalnog sistema mogu tumačiti kao diferencijalne jednačine kretanja jedne reprezentativne tačke u konfiguracionom prostoru. Kad sistem nije slobodan ali je holoman, reprezentativna tačka se kreće u potprostoru V_n prostora V_{3N} , a broj dimenzija prostora V_n je $n = 3N - k_1$, pri čemu je k_1 broj holonomnih veza.

U kinematici tačke pokazano je (1.4—3; 1.4.1—5) da je kvadrat brzine tačke vezan sa kvadratom elementa luka (linijskog elementa) obrascem

$$v^2 = \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 = g_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j. \quad (i, j = 1, 2, 3)$$

Kinetička energija materijalne tačke mase m se može na sličan način dovesti u vezu sa metričkom formom

$$T = \frac{1}{2} m \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 = \frac{1}{2} m g_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j.$$

Ako se masa shvati kao konstantni množilac koji suštinski ne utiče na metričku formu, može se definisati linijski element $d\sigma = \sqrt{m} ds$ tako da odgovarajući metrički tenzor bude

$$\bar{g}_{ij} = m g_{ij}.$$

Na taj način se formalno ne vodi više računa o masi tačke i kinetička energija je neposredno vezana za kvadrat brzine modifikovane metričke forme

$$d\sigma^2 = \bar{g}_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j,$$

tj.

$$(1) \quad 2T = \left(\frac{d\sigma}{dt} \right)^2.$$

Kad je poznata kinetička energija, element luka je potpuno određen obrascem

$$(2) \quad d\sigma^2 = 2T dt^2 = \bar{g}_{ij} dq^i dq^j, \quad (i, j = 1, 2, 3)$$

jer je

$$(3) \quad \dot{q}^i dt = dq^i.$$

Analogno tački može se i za materijalni sistem definisati element luka $d\sigma$ pomoću kinetičke energije u konfiguracionom prostoru V_n ,

$$(4) \quad d\sigma^2 = 2T dt^2 = \bar{g}_{ij} dq^i dq^j, \quad (i, j = 1, 2, \dots, n)$$

pri čemu ovaj obrazac važi samo za skleronomne sisteme, jer za reonomne sisteme kinetička energija neće biti homogena kvadratna funkcija generalisanih brzina (vidi kasnije 3.2.10—14). Naime, u slučaju reonomnih veza pri uvođenju nezavisnih parametara u relacijama između prvobitnih i novih koordinata pojavljuje se i vreme kao promenljiva eksplicitno o čemu se mora voditi računa. Ako bi se element luka za reonomne sisteme definisao obrascem (4), $d\sigma^2 = 2T dt^2$, pored n nezavisnih koordinata q^r i vreme t bi se javilo kao koordinata sistema. Prostori sa takvim linijskim elementom nazivaju se *reonomni prostori*. Ovde se ograničavamo samo na skleronomne sisteme. Element luka definisan obrascem (4) naziva se *kinematički linijski element* prostora V_n .

S obzirom na izraz za kinetičku energiju

$$(5) \quad T = \frac{1}{2} \bar{g}_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j \quad (i, j = 1, 2, \dots, n = 3N - k_1)$$

diferenciranjem po generalisanim brzinama \dot{q}^r i generalisanim koordinatama q^r dobiće se

$$(6) \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^r} = \bar{q}_{ir} \dot{q}^i, \quad \frac{\partial T}{\partial q^r} = \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{g}_{ij}}{\partial q^r} \dot{q}^i \dot{q}^j.$$

Unošenjem ovoga u levu stranu jednačina kretanja (3.2.4—17) dobiva se

$$(7) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^r} - \frac{\partial T}{\partial q^r} = \frac{d}{dt} (\bar{g}_{ij} \dot{q}^i) - \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{g}_{ij}}{\partial q^r} \dot{q}^i \dot{q}^j.$$

U analogiji sa obrascima iz kinematike tačke (1.4.1.1—3, 4, 5) može se reći da su $v^i = \dot{q}^i$ generalisane brzine reprezentativne tačke u V_n , ili kontravarijantne

koordinate brzine, a $v_r = \bar{g}_{ir} v^i$ su kovarijantne koordinate brzine reprezentativne tačke u V_n , pri čemu je

$$(8) \quad \begin{aligned} v_m &= \bar{g}_{im} \dot{q}^i = \bar{g}_{im} v^i, \\ v^i &= \dot{q}^i = \bar{g}^{ir} v_r. \end{aligned}$$

Tenzor \bar{g}_{ij} je kovarijantni metrički tenzor konfiguracionog prostora V_n sa kinematičkim linijskim elementom, a tenzor \bar{g}^{ij} je kontravarijantni metrički tenzor u V_n sa istim linijskim elementom. Koordinate tenzora \bar{g}^{ij} obrazuju se pomoću kovarijantnih koordinata \bar{g}_{ij} na isti način kao što je to urađeno u (1.2.1—11), samo što je sada determinanta $|\bar{g}_{ij}|$ reda n .

Ako se iskoristi identičnost

$$\frac{\partial \bar{g}_{ij}}{\partial q^r} v^i v^j \equiv \left(\frac{\partial \bar{g}_{ij}}{\partial q^r} + \frac{\partial \bar{g}_{ir}}{\partial q^j} - \frac{\partial \bar{g}_{jr}}{\partial q^i} \right) v^i v^j,$$

pri čemu je

$$\frac{\partial \bar{g}_{ir}}{\partial q^j} v^i v^j - \frac{\partial \bar{g}_{jr}}{\partial q^i} v^i v^j \equiv 0;$$

može se u V_n definisati Kristofelov simbol prve vrste za tenzor g_{ij} ,

$$[j r, i] = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{g}_{ij}}{\partial q^r} + \frac{\partial \bar{g}_{ir}}{\partial q^j} - \frac{\partial \bar{g}_{jr}}{\partial q^i} \right). \quad (i, j, r = 1, 2, \dots, n)$$

Prema tome, relacija (7) može se napisati u obliku

$$(9) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^r} - \frac{\partial T}{\partial q^r} = \frac{dv_r}{dt} - \overline{[j r, i]} v^i v^j.$$

Ako se još prema (8) stavi da je $v^i = \bar{g}^{ik} v_k$ i definiše Kristofelov simbol druge vrste u V_n obrascem

$$(10) \quad \left\{ \begin{matrix} k \\ j \quad r \end{matrix} \right\} = \bar{g}^{ik} \overline{[j r, i]},$$

relacija (9) postaje

$$(11) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^r} - \frac{\partial T}{\partial q^r} = \frac{dv_r}{dt} - \left\{ \begin{matrix} k \\ j \quad r \end{matrix} \right\} v_k v^j.$$

Izraz

$$(12) \quad \frac{Dv_r}{Dt} \equiv \frac{dv_r}{dt} - \left\{ \begin{matrix} k \\ j \quad r \end{matrix} \right\} v_k v^j$$

predstavlja apsolutni izvod po vremenu kovarijantnog vektora brzine u V_n .

Diferencijalne jednačine kretanja (3.2.4—17) mogu se sada napisati u obliku

$$(13) \quad \frac{Dv_r}{Dt} \equiv w_r = Q_r + R_r,$$

gde je R_r reakcija neholonomnih veza.

Ako je $w_r = \frac{Dv_r}{Dt}$ kovarijantni vektor ubrzanja reprezentativne tačke u konfiguracionom prostoru V_n , diferencijalne jednačine kretanja materijalnog sistema u obliku (13) neposredno izražavaju drugi Njutnov zakon, pri čemu je on sad formulisan u n -dimenzionom prostoru V_n , a ne u euklidskom 3-dimenzionom prostoru E_3 , u kome je bio postuliran.

Iz kovarijantnih jednačina (13) lako se mogu dobiti kontravarijantne jednačine kretanja u V_n . Prema (8) i (12) može se pisati

$$\frac{Dv_r}{Dt} = \frac{d}{dt} (\overline{g_{ir}} v^i) - \left\{ \begin{matrix} k \\ j \quad r \end{matrix} \right\} \overline{g_{ik}} v^i v^j = \frac{dv^i}{dt} \overline{g_{ir}} + \frac{d\overline{g_{ir}}}{dt} v^i - \overline{[j r, i]} v^i v^j.$$

Kako tenzor g_{ij} zavisi od vremena posredno preko koordinata q^j , biće

$$\frac{d\overline{g_{ir}}}{dt} = \frac{\partial \overline{g_{ir}}}{\partial q^j} \dot{q}^j = \frac{\partial \overline{g_{ir}}}{\partial q^j} v^j,$$

pa je

$$(14) \quad \frac{Dv_r}{Dt} = \overline{g_{ir}} \frac{dv^i}{dt} + \left(\frac{\partial \overline{g_{ir}}}{\partial q^j} - \overline{[j r, i]} \right) v^i v^j,$$

a prema definiciji Kristofelovog simbola prve vrste biće

$$\frac{\partial \overline{g_{ir}}}{\partial q^j} - \overline{[j r, i]} = \frac{1}{2} \left(2 \frac{\partial \overline{g_{ir}}}{\partial q^j} - \frac{\partial \overline{g_{ij}}}{\partial q^r} - \frac{\partial \overline{g_{ir}}}{\partial q^i} + \frac{\partial \overline{g_{jr}}}{\partial q^i} \right) = \overline{[i j, r]}.$$

Tada se relacija (14) može napisati u obliku

$$(15) \quad \frac{Dv_r}{Dt} = \overline{g_{ir}} \frac{dv^i}{dt} + \overline{[i j, r]} v^i v^j,$$

pa se diferencijalne jednačine kretanja (13) mogu napisati u obliku

$$(16) \quad \overline{g_{ir}} \frac{dv^i}{dt} + \overline{[i j, r]} v^i v^j = \underline{Q}_r + R_r.$$

Ako se sad jednačina (16) pomnoži sa g^{rk} , izvrši sabiranje po indeksu k i iskoristi obrazac (10) dobiće se

$$\delta_i^k \frac{dv^i}{dt} + \left\{ \begin{matrix} k \\ i \quad j \end{matrix} \right\} v^i v^j = \underline{Q}^k + R^k,$$

odnosno

$$(17) \quad \frac{Dv^k}{Dt} \equiv \frac{dv^k}{dt} + \left\{ \begin{matrix} k \\ i \quad j \end{matrix} \right\} v^i v^j = \underline{Q}^k + R^k.$$

Ovde je

$$(18) \quad \frac{Dv^k}{Dt} \equiv \frac{dv^k}{dt} + \left\{ \begin{matrix} k \\ i \quad j \end{matrix} \right\} v^i v^j \equiv w^k$$

apsolutni izvod kontravarijantnog vektora brzine v^k po vremenu, w^k je kontravarijantni vektor ubrzanja reprezentativne tačke a

$$\underline{Q}^k = \overline{g^{rk}} \underline{Q}_k, \quad R^k = \overline{g^{rk}} R_r$$

su kontravarijantne koordinate sile i reakcije u V_n .

Relacije (17) predstavljaju kontravarijantne jednačine kretanja materijalnog sistema.

Pomoću relacija (14) i (17) može se dokazati da je $\frac{D\bar{g}_{ir}}{Dt} = 0$, kao i da $\frac{D\bar{g}^{rk}}{Dt} = 0$, tj. da je metrički tenzor kovarijantno konstantan. Kako je

$$\frac{Dv_r}{Dt} = \frac{D}{Dt} (\bar{g}_{ir} v^i) = \frac{D\bar{g}_{ir}}{Dt} v^i + \bar{g}_{ir} \frac{Dv^i}{Dt},$$

a prema (16) je

$$\frac{Dv_r}{Dt} = \bar{g}_{ir} \frac{Dv^i}{Dt}$$

proističe da je zaista $\frac{Dg_{im}}{Dt} = 0$. Na sličan način se dokazuje da je i $\frac{D\bar{g}^{rk}}{Dt} = 0$.

3.2.6. Opšte teoreme o kretanju materijalnog sistema i prvi integrali diferencijalnih jednačina kretanja

Diferencijalne jednačine kretanja materijalnog sistema izvedene su u prethodnim odeljcima polazeći od Njutnovih zakona. Njutnovi zakoni su formulisani za materijalnu tačku a ne za sistem materijalnih tačaka pa su jednačine kretanja sistema izvedene na osnovu posmatranja individualnih tačaka sistema. Tako napisane diferencijalne jednačine kretanja su tek pogodno izabranim načinom obilježavanja koordinata dobile karakter globalnih jednačina (Lagranževe jednačine prve i druge vrste) u kojima se ne ističu koordinate pojedinačnih tačaka sistema već se sve koordinate posmatraju kao koordinate sistema, dakle kao veličine koje određuju konfiguraciju sistema kao celine.

Za kretanje materijalnog sistema kao celine postoje tri opšte teoreme: teoremi količine kretanja, teorema kinetičkog momenta i teorema kinetičke energije. Te teoreme igraju i značajnu ulogu za rešavanje konkretnih problema i to sa jedne strane stoga što obuhvataju sistem kao celinu, a sa druge strane što pod određenim uslovima dovode do izvesnih prvih integrala diferencijalnih jednačina kretanja koji se mogu neposredno napisati bez integracije tih jednačina.

Sve tri teoreme su u stvari specijalni slučajevi opštijeg fizičkog zakona konzervacije (održanja—uravnoteženosti) koji se za sistem sa konačnim brojem stepena slobode može na naredni način formulisati. Ako su m_i mase materijalnih tačaka nekog materijalnog sistema, ψ_i neke (skalarne ili vektorske) veličine koje su vezane za tačke sistema i koje karakterišu kinetičko stanje u tačkama sistema, a θ_i neke veličine takođe vezane za tačke sistema ali usled kojih se menjaju veličine ψ_i onda opšti zakon konzervacije tvrdi

$$(1) \quad \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^N m_i \psi_i \right) = \sum_{i=1}^N \theta_i$$

pri čemu veličine θ_i uravnotežuju veličine ψ_i .

Kad posmatrani materijalni sistem obrazuje telo gustine ρ koje obuhvata neku oblast (zapreminu) V prostora, masa m_i u pojedinim tačkama prostora

masa sadržana u zapreminskom elementu dV u odnosnoj tački, $m_i = \rho dV$, a veličine θ_i odnose se na elementarnu zapreminu, $\theta_i = \theta dV$, pa se zakon konzervacije može formulirati u integralnom obliku,

$$(2) \quad \frac{d}{dt} \int_V \rho \psi dV = \int_V \theta dV.$$

Oblik (2) zakona konzervacije opštiji je od oblika (1), jer obuhvata i slučaj diskretno raspoređenih masa. Ako je sistem diskretan i \mathbf{r}_i su vektori položaja materijalnih tačaka, može se pisati

$$(3) \quad \rho = \sum_{i=1}^N m_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i), \quad \theta = \sum_{i=1}^N \theta(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i),$$

gde je $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)$ Dirakova delta-funkcija (3.1.1—6). Prema (3.1.1—14) biće onda

$$\int_V \rho \psi(\mathbf{r}) dV = \sum_{i=1}^N m_i \int_V \psi(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) dV = \sum_{i=1}^N m_i \psi(\mathbf{r}_i) = \sum_{i=1}^N m_i \psi_i;$$

$$(4) \quad \int_V \theta(\mathbf{r}) dV = \sum_{i=1}^N \int_V \theta(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) dV = \sum_{i=1}^N \theta(\mathbf{r}_i) = \sum_{i=1}^N \theta_i,$$

pa kad se ove relacije unesu u (2) dobiće se relacija (1).

Prema tome šta ψ predstavlja, pojedini specijalni oblici zakona konzervacije dobivaju posebna imena. U mehanici je ψ obično brzina, moment brzine za neki pol i kvadrat brzine, a promenu tih veličina uravnotežavaju sila, moment sile i rad sile.

3.2.7. Zakon količine kretanja. Integral količine kretanja

Količina kretanja materijalnog sistema jednaka je zbiru količina kretanja svih tačaka tog sistema

$$(1) \quad \mathbf{K} = \sum_{i=1}^N \mathbf{K}_i = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i, \quad \text{odn.} \quad \mathbf{K} = \int_V \rho \mathbf{v} dV$$

za neprekidni raspored mase. Za sisteme u kojima se mase tačaka ne menjaju može se pisati

$$(2) \quad m_i \mathbf{v}_i = m_i \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \frac{d}{dt} (m_i \mathbf{r}_i)$$

pa tako da se za količinu kretanja sistema dobiva

$$(3) \quad \mathbf{K} = \sum_{i=1}^N \frac{d}{dt} (m_i \mathbf{r}_i) = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i.$$

Prema definiciji centra inercije materijalnog sistema (3.1.2—11) biće $\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i = m \mathbf{r}_C$, pa se iz (3) dobiva da je količina kretanja nekog materijalnog sistema

jednaka količini kretanja materijalne tačke mase jednake ukupnoj masi sistema a koja se nalazi u centru inercije sistema,

$$(4) \quad \mathbf{K} = \frac{d}{dt} (m \mathbf{r}_C) = m \mathbf{v}_C.$$

Diferencijaljenjem količine kretanja \mathbf{K} po vremenu iz obrasca (1) dobiće se

$$(5) \quad \dot{\mathbf{K}} = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{v}}_i = \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\mathbf{r}}_i, \quad \text{odn.} \quad \dot{\mathbf{K}} = \int_V \rho \dot{\mathbf{v}} dV.$$

Ako na uočeni materijalni sistem dejstvuju aktivne sile \mathbf{F}_i i sile reakcije \mathbf{R}_i prema (3.2.3—4) diferencijalne jednačine kretanja tačaka sistema biće

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{F}_i + \mathbf{R}_i$$

što se može uneti u (5) pa će se dobiti

$$(6) \quad \dot{\mathbf{K}} = \sum_{i=1}^N (\mathbf{F}_i + \mathbf{R}_i).$$

Zbir

$$(7) \quad \mathbf{F} = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i$$

predstavlja rezultantu svih aktivnih sila koje dejstvuju na sistem. Pri tome se rezultanta svih aktivnih sila svodi na rezultantu svih spoljašnjih sila, jer je zbog trećeg Njutnovog zakona rezultanta svih unutrašnjih sila jednaka nuli. Takođe je zbir

$$(8) \quad \mathbf{R} = \sum_{i=1}^N \mathbf{R}_i$$

rezultanta samo svih spoljašnjih sila reakcije, ako su sve unutrašnje reakcije idealne

Prema (6), (7) i (8) može se najzad napisati

$$(9) \quad \dot{\mathbf{K}} = \mathbf{F} + \mathbf{R}$$

što predstavlja zakon količine kretanja za materijalni sistem: Izvod po vremenu količine kretanja materijalnog sistema jednak je rezultanti svih sila (aktivnih i reakcija) koje dejstvuju na sistem.

Kad se za količinu kretanja iskoristi obrazac (4) dobiće se iz zakona količine kretanja (9) zakon o kretanju centra masa,

$$(10) \quad m \dot{\mathbf{v}}_C = \mathbf{F} + \mathbf{R}.$$

To znači da se centar masa materijalnog sistema kreće kao da se u njemu nalazi koncentrisana celokupna masa sistema a na njega deluje rezultanta svih aktivnih sila i sila reakcije.

Zakon o kretanju centra masa predstavlja dokaz da je opravdano u nekim problemima posmatrati kretanje samo materijalne tačke i ne voditi računa o veličini i obliku tela (sistema).

Iz (9) može se napisati

$$(11) \quad d\mathbf{K} = (\mathbf{F} + \mathbf{R}) dt,$$

gde je $\mathbf{F} dt$ elementarni impuls rezultante \mathbf{F} spoljašnjih sila, a $\mathbf{R} dt$ je elementarni impuls rezultante reakcije.

Integraljenjem u nekom vremenskom intervalu (t_0, t) dobiva se *zakon konačnog priraštaja količine kretanja*

$$(12) \quad \mathbf{K} - \mathbf{K}_0 = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i - \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_{i0} = \int_{t_0}^t (\mathbf{F} + \mathbf{R}) dt,$$

gde se na desnoj strani nalazi *impuls* aktivnih sila i reakcija u intervalu (t_0, t) .

Kad je na neki stalan pravac \mathbf{a} projekcija vektora $\mathbf{F} + \mathbf{R}$ jednaka nuli

$$(\mathbf{F} + \mathbf{R}) \cdot \mathbf{a} = 0,$$

iz (9) se dobiva

$$(13) \quad \dot{\mathbf{K}} \cdot \mathbf{a} = 0,$$

pa za taj pravac postoji *integral količine kretanja*. Iz (13) je

$$\dot{\mathbf{K}} \cdot \mathbf{a} = \frac{d\mathbf{K}}{dt} \cdot \mathbf{a} = \frac{d}{dt} (\mathbf{K} \cdot \mathbf{a}) = 0,$$

pa je integral

$$(14) \quad \mathbf{K} \cdot \mathbf{a} = C = \text{const.}$$

Ako na neki sistem ne dejstvuju nikakve spoljašnje aktivne sile i reakcije kaže se da je sistem *izolovan*, $\mathbf{F} + \mathbf{R} = \mathbf{0}$. Tada je prema (9) $\dot{\mathbf{K}} = \mathbf{0}$ pa je količina kretanja stalan vektor

$$(15) \quad \mathbf{K} = \mathbf{K}_0 = \text{const.}$$

Za izolovan sistem važi *zakon o održanju (konzervaciji) količine kretanja*, sadržan u relaciji (15).

Za neizolovani sistem mogu postojati dva integrala količine kretanja, za dva stalna pravca, recimo \mathbf{a}_1 i \mathbf{a}_2 ,

$$(16) \quad \mathbf{K} \cdot \mathbf{a}_1 = C_1, \quad \mathbf{K} \cdot \mathbf{a}_2 = C_2.$$

Dva pravca \mathbf{a}_1 i \mathbf{a}_2 određuju u prostoru neku ravan. Prema (10) biće

$$(17) \quad \mathbf{v}_C \cdot \mathbf{a}_1 = \frac{1}{m} C_1, \quad \mathbf{v}_C \cdot \mathbf{a}_2 = \frac{1}{m} C_2,$$

tj. projekcije brzine centra inercije sistema na tu ravan su konstantne. Ako se koordinatni sistem $Oxyz$ izabere tako da se ravan xOy poklapa sa ravni $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$, iz (17) se dobiva

$$\mathbf{v}_C \cdot \mathbf{i} = \dot{x}_C = \frac{1}{m} C_1, \quad \mathbf{v}_C \cdot \mathbf{j} = \dot{y}_C = \frac{1}{m} C_2,$$

pa se vidi da se centar inercije sistema u odnosu na tu ravan kreće jednoliko.

Ako su projekcije sila \mathbf{F} i \mathbf{R} na tri nekomplanarna pravca jednake nuli, onda je sigurno $\mathbf{F} + \mathbf{R} = \mathbf{0}$, pa je sistem izolovan.

U Dekartovim pravouglim koordinatama zakon količine kretanja (9), (10) projiciranjem na koordinatne ose svodi se na tri skalarne jednačine

$$(18) \quad \begin{aligned} \sum_{i=1}^N m_i \ddot{x}_i &= m \ddot{x}_C = X + R_x, \\ \sum_{i=1}^N m_i \ddot{y}_i &= m \ddot{y}_C = Y + R_y, \\ \sum_{i=1}^N m_i \ddot{z}_i &= m \ddot{z}_C = Z + R_z. \end{aligned}$$

Za neprekidno raspoređene mase količina kretanja sistema je vektor

$$(19) \quad \mathbf{K} = \int_V \rho \mathbf{v} dV,$$

a rezultanta svih aktivnih sila i sila reakcije koje djeluju na sistem je

$$(20) \quad \mathbf{F} + \mathbf{R} = \int_V (\mathbf{f} + \mathbf{r}) dV.$$

Sile \mathbf{f} i \mathbf{r} date su u odnosu na jedinicu zapremine i nazivaju se *zapreminske sile*. Zakon količine kretanja za neprekidno raspoređene mase sada glasi

$$(21) \quad \dot{\mathbf{K}} = \frac{d}{dt} \int_V \rho \mathbf{v} dV = \mathbf{F} + \mathbf{R}.$$

Obrazac (21) je opšti; iz njega se dobiva obrazac za diskretne sisteme kad se prema (3.1.1—20) stavi

$$\rho(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^N m_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)$$

i iskoriste obrasci (3.1.1) za delta-funkciju.

3.2.8. Zakon konzervacije mase (jednačina neprekidnosti)

Ako se ne uvede unapred pretpostavka da je gustina ρ nezavisna od vremena, izvod količine kretanja (3.2.7—19) po vremenu biće

$$(1) \quad \dot{\mathbf{K}} = \int_V (\dot{\rho} \mathbf{v} dV + \rho \mathbf{v} \frac{d}{dt} dV) + \int_V \rho \dot{\mathbf{v}} dV.$$

Zbog pretpostavke o konstantnosti mase $dm = \rho dV = \text{const.}$, u nekom zapreminskom elementu mora biti

$$(2) \quad \dot{\rho} dV + \rho \frac{d}{dt} dV = 0,$$

pa izvod količine kretanja po vremenu ima oblik izveden u (3.2.7—5). Pretpostavka da je $dm = \text{const.}$ je vezana za dve ranije pretpostavke da je masa neuništiva i da se za vreme kretanja ne menja; te dve pretpostavke leže u osnovi mehanike zasnovane na Njutnovim zakonima.

Iz relacije (2) ne proističe da je $\dot{\rho} = 0$, jer element zapremine dV ne mora biti konstantan (npr. kad sistem obrazuje kruto telo je $\frac{d}{dt} dV = 0$).

U Dekartovim pravouglim koordinatama je $dV = dx dy dz$ pa se diferenciranjem po vremenu dobiva

$$(3) \quad \frac{d}{dt} (dV) = \frac{d(dx)}{dt} dy dz + dx \frac{d(dy)}{dt} dz + dx dy \frac{d(dz)}{dt}.$$

Neka su M_1 i M_2 dve bliske tačke nekog materijalnog sistema čiji su vektori položaja $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}$ i $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r} + d\mathbf{r}$. Pri kretanju materijalnog sistema relativni položaj tačaka M_1 i M_2 određen vektorom $d\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ menjaće se tako da bude

$$(4) \quad \frac{d}{dt} \overrightarrow{M_1 M_2} = \frac{d}{dt} d\mathbf{r} = \dot{\mathbf{r}}_2 - \dot{\mathbf{r}}_1 = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$$

pri čemu su \mathbf{v}_2 i \mathbf{v}_1 brzine tačaka M_1 i M_2 ,

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}(\mathbf{r} + d\mathbf{r}).$$

Za dovoljno malo rastojanje $d\mathbf{r}$ uočenih tačaka brzina \mathbf{v}_2 može se aproksimirati Tejlorovim redom pri čemu je dovoljno zadržati se samo na prvoj aproksimaciji, tj.

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}(\mathbf{r} + d\mathbf{r}) = \mathbf{v}(x + dx, y + dy, z + dz) \approx \mathbf{v}(x, y, z) + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} dx + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} dy + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} dz,$$

odnosno

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}(\mathbf{r}) + d\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + d\mathbf{v}.$$

Unošenjem ovoga u (4) dobiće se

$$(5) \quad \frac{d}{dt} d\mathbf{r} = d\mathbf{v} = d \frac{d\mathbf{r}}{dt}.$$

U Dekartovim pravouglim koordinatama dobiće se projiciranjem obrasca (5) na koordinatne ose

$$(6) \quad \frac{d}{dt} dx = \dot{dx}, \quad \frac{d}{dt} dy = \dot{dy}, \quad \frac{d}{dt} dz = \dot{dz}.$$

Kad se iskoriste relacije (6), obrazac (3) za brzinu promene zapreminskog elementa pri kretanju materijalnog sistema dobiće oblik

$$(7) \quad \frac{d}{dt} (dV) = \dot{dx} dy dz + dx \dot{dy} dz + dx dy \dot{dz}.$$

Za diferencijale koordinata brzine može se napisati

$$\dot{dx} = \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} dx + \frac{\partial \dot{x}}{\partial y} dy + \frac{\partial \dot{x}}{\partial z} dz; \quad \dot{dy} = \dots, \quad \dot{dz} = \dots$$

Međutim, koordinate x , y i z međusobno su nezavisne pa je $\frac{\partial x}{\partial y} = \frac{\partial y}{\partial z} = 0$ itd.

Ako se onda u (7) unese

$$\dot{dx} = \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} dx, \quad \dot{dy} = \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} dy, \quad \dot{dz} = \frac{\partial \dot{z}}{\partial z} dz,$$

dobiće se

$$(8) \quad \frac{d}{dt} (dV) = \left(\frac{\partial \dot{x}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{z}}{\partial z} \right) dx dy dz = \left(\frac{\partial \dot{x}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{z}}{\partial z} \right) dV.$$

Veličina u zagradi je divergencija brzine,

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{z}}{\partial z},$$

pa se (8) može napisati u obliku

$$(9) \quad \frac{d}{dt} (dV) = \operatorname{div} \mathbf{v} dV.$$

Unošenjem ove relacije u (2) dobiće se

$$(\dot{\rho} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v}) dV = 0,$$

a kako je $dV \neq 0$ proističe da između gustine i brzine tačkica sistema mora da postoji veza

$$(10) \quad \dot{\rho} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0.$$

Relacija (10) predstavlja *zakon konzervacije (održavanja) mase* a u mehanici neprekidnih sredina (mehanika fluida, teorija elastičnosti itd.) naziva se i *jednačina neprekidnosti (kontinuum)*.

3.2.9. Zakon kinetičkog momenta. Integral kinetičkog momenta

Kinetički moment (moment količinâ kretanja) materijalnog sistema u odnosu na neki stalni pol O jednak je zbiru kinetičkih momenata pojedinih tačkica sistema u odnosu na isti pol,

$$(1) \quad \mathbf{I} = \sum_{i=1}^N \mathbf{I}_i = \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \times \mathbf{K}_i = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i.$$

Diferencijacijom relacije (1) po vremenu dobiće se

$$(2) \quad \dot{\mathbf{I}} = \sum_{i=1}^N m_i (\dot{\mathbf{r}}_i \times \mathbf{v}_i + \mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{v}}_i).$$

Vektorski proizvod kolinearnih vektora jednak je nuli pa je stoga $\dot{\mathbf{r}}_i \times \mathbf{v}_i = \mathbf{v}_i \times \mathbf{v}_i = \mathbf{0}$ i (2) se svodi na izraz

$$(3) \quad \dot{\mathbf{I}} = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{w}_i.$$

Prema osnovnim vektorskim jednačinama kretanja sistema (3.2.3—4) je $m_i \mathbf{w}_i = \mathbf{F}_i + \mathbf{R}_i$ pa se izraz (3) za izvod kinetičkog momenta po vremenu svodi na

$$(4) \quad \dot{\mathbf{I}} = \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i + \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \times \mathbf{R}_i.$$

Vektor

$$(5) \quad \dot{\mathbf{L}} = \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i + \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \times \mathbf{R}_i$$

je *rezultantni moment svih aktivnih sila i sila reakcije* koje dejstvuju na uočeni sistem, a u odnosu na pol O . Na taj način se relacija (4) može napisati u obliku

$$(6) \quad \dot{\mathbf{I}} = \dot{\mathbf{L}},$$

u kome predstavlja *zakon kinetičkog momenta (momenta količinâ kretanja)* za materijalni sistem: *Izvod po vremenu kinetičkog momenta nekog materijalnog sistema jednak je glavnom momentu svih aktivnih sila i sila reakcije koje dejstvuju na taj sistem, kad se ovi momenti odrede na isti pol.*

Za date aktivne sile \mathbf{F}_i momenti \mathbf{L}_i u odnosu na pol O su određeni relacijama

$$\mathbf{L}_i = \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i.$$

Međutim, na sistem mogu dejstvovati sile čija je rezultanta jednaka nuli ali njihov moment nije nula. Takve sile obrazuju *spregove*. Ako su sile \mathbf{F}_1 i \mathbf{F}_2

koje djeluju na materijalne tačke nekog sistema kolinearne i jednake veličine, ali suprotnih smerova rezultanta je $\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = \mathbf{0}$. Momenti tih sila u odnosu na pol O biće

$$\mathbf{L}_1 = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1, \quad \mathbf{L}_2 = \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2.$$

Rezultantni moment će biti zbir ova dva momenta,

$$(7) \quad \mathbf{L} = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2 = (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \times \mathbf{F}_1 = \mathbf{q} \times \mathbf{F}_1,$$

gde je $\mathbf{q} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ vektor položaja napadne tačke jedne sile u odnosu na drugu. U relaciji (7) za dati moment \mathbf{L} nisu na jedinstven način određeni ni vektori položaja tačaka na koje djeluju sile koje obrazuju spreg, niti vektor relativnog položaja \mathbf{q} niti sile \mathbf{F}_1 i $\mathbf{F}_2 = -\mathbf{F}_1$.

Ako postoji neka stalna osa \mathbf{a} takva da moment u odnosu na tu osu bude jednak nuli, $\mathbf{L} \cdot \mathbf{a} = 0$, iz zakona kinetičkog momenta (6) dobiće se skalarnim množenjem vektorom \mathbf{a} ,

$$\dot{\mathbf{l}} \cdot \mathbf{a} = 0,$$

što se može napisati

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{l} \cdot \mathbf{a}) = 0,$$

pa će biti

$$(8) \quad \mathbf{l} \cdot \mathbf{a} = C = \text{const.}$$

Relacija (8) predstavlja jedan prvi integral diferencijalnih jednačina kretanja sistema, to je *integral kinetičkog momenta* za osu \mathbf{a} .

Mogu postojati i dve nekolinearne ose \mathbf{a}_1 i \mathbf{a}_2 za koje važi

$$\dot{\mathbf{l}} \cdot \mathbf{a}_1 = 0, \quad \dot{\mathbf{l}} \cdot \mathbf{a}_2 = 0;$$

njima odgovaraju dva integrala kinetičkog momenta,

$$(9) \quad \mathbf{l} \cdot \mathbf{a}_1 = C_1, \quad \mathbf{l} \cdot \mathbf{a}_2 = C_2.$$

Ako je moment sila za tri nekomplanarne ose jednak nuli,

$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{a}_1 = \mathbf{L} \cdot \mathbf{a}_2 = \mathbf{L} \cdot \mathbf{a}_3 = 0,$$

onda je i sam vektor \mathbf{L} jednak nuli, $\mathbf{L} = \mathbf{0}$, pa se iz (6) dobiva $\dot{\mathbf{l}} = \mathbf{0}$ i

$$(10) \quad \mathbf{l} = \mathbf{\Gamma} = \text{const.}$$

Stalni vektor $\mathbf{\Gamma}$ određuje u prostoru neku stalnu ravan koja je upravna na $\mathbf{\Gamma}$, tzv. *Laplasovu (Laplace) invarijabilnu ravan*. To je uvek slučaj, kad je materijalni sistem izolovan pa na njega ne djeluju nikakve spoljašnje sile (naravno ni spregovi). Takav je npr. slučaj sa Sunčevim sistemom ukoliko se on može smatrati kao izolovan zbog svoje udaljenosti od ostalih sistema.

Prema (1.5—6) vektorski proizvod

$$\mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i = 2 \mathbf{S}_i$$

predstavlja dvostruku sektorsku brzinu tačke m_i , pa se za kinetički moment može napisati

$$\mathbf{l} = 2 \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{S}_i.$$

Unošenjem ovoga u (10) dobiće se za integral kinetičkog momenta izraz

$$2 \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{S}_i = \mathbf{\Gamma}$$

koji predstavlja *integral površine* za materijalni sistem.

Projiciranjem na ose Dekartovog pravouglog koordinatnog sistema dobiće se iz zakona kinetičkog momenta tri skalarne jednačine

$$\dot{L}_x = \sum_{i=1}^N m_i (y_i \dot{z}_i - \dot{y}_i z_i) = L_x,$$

$$\dot{L}_y = \sum_{i=1}^N m_i (z_i \dot{x}_i - \dot{z}_i x_i) = L_y,$$

$$\dot{L}_z = \sum_{i=1}^N m_i (x_i \dot{y}_i - \dot{x}_i y_i) = L_z,$$

gde je

$$L_x = \sum_{i=1}^N [y_i (Z_i + R_{zi}) - z_i (Y_i + R_{yi})], \quad L_y = \sum_{i=1}^N [z_i (X_i + R_{xi}) - x_i (Z_i + R_{zi})],$$

$$L_z = \sum_{i=1}^N [x_i (Y_i + R_{yi}) - y_i (X_i + R_{xi})].$$

Neka je A neka pokretna tačka u prostoru sa vektorom položaja $\overrightarrow{OA} = \mathbf{r}_A$ u odnosu na pol O . Ako su \mathbf{q}_i vektori položaja tačaka uočenog materijalnog sistema u odnosu na pol A , biće

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_A + \mathbf{q}_i.$$

Moment količine kretanja sistema u odnosu na pol O može se onda izraziti relacijom

$$(11) \quad \dot{\mathbf{l}} = \sum_{i=1}^N m_i (\mathbf{r}_A + \mathbf{q}_i) \times \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_A \times \mathbf{v}_i + \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{q}_i \times \mathbf{v}_i.$$

U prvom članu sa desne strane znak sabiranja se ne odnosi na vektor \mathbf{r}_A pa je stoga

$$(12) \quad \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_A \times \mathbf{v}_i = \mathbf{r}_A \times \left(\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i \right) = \mathbf{r}_A \times \mathbf{K},$$

gde je \mathbf{K} količina kretanja sistema (3.2.7—1). Drugi član sa desne strane relacije (11) je kinetički moment za pol A

$$(13) \quad \mathbf{l}^A = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{q}_i \times \mathbf{v}_i,$$

tako da je sad

$$(14) \quad \mathbf{l}^O = \mathbf{r}_A \times \mathbf{K} + \mathbf{l}^A$$

što predstavlja vezu između kinetičkih momenata za dva pola koji se ne poklapaju.

Diferencijaljenjem relacije (14) po vremenu dobiće se

$$(15) \quad \dot{\mathbf{l}}^O = \mathbf{v}_A \times \mathbf{K} + \mathbf{r}_A \times \dot{\mathbf{K}} + \dot{\mathbf{l}}^A.$$

Prema zakonu količine kretanja (3.2.7—9) je $\dot{\mathbf{K}} = \mathbf{F} + \mathbf{R}$ pa je stoga

$$(16) \quad \dot{\mathbf{l}}^O = \mathbf{v}_A \times \mathbf{K} + \mathbf{r}_A \times (\mathbf{F} + \mathbf{R}) + \dot{\mathbf{l}}^A.$$

Kad se relacija (16) unese u zakon kinetičkog momenta (6) dobiće se

$$(17) \quad \mathbf{v} \times \mathbf{K} + \dot{\mathbf{l}}^A = \mathbf{L}^O - \mathbf{r}_A \times (\mathbf{F} + \mathbf{R}).$$

Prema (5) i (3.2.7—7 i 8) je

$$\mathbf{L}^O - \mathbf{r}_A \times (\mathbf{F} + \mathbf{R}) = \sum_{i=1}^N (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_A) \times (\mathbf{F} + \mathbf{R}) = \sum_{i=1}^N \mathbf{q}_i \times (\mathbf{F} + \mathbf{R}) = \mathbf{L}^A,$$

što predstavlja moment sila u odnosu na pol A . Na taj način se iz (17) može napisati

$$(18) \quad \dot{\mathbf{l}}^A + \mathbf{v}_A \times \mathbf{K} = \mathbf{L}^A,$$

a to je zakon kinetičkog momenta za pokretni pol A .

Za neprekidno raspoređene mase materijalnog sistema biće

$$\mathbf{l} = \int_V \rho \mathbf{r} \times \mathbf{v} dV; \quad \mathbf{L} = \int_V \mathbf{r} \times (\mathbf{f} + \mathbf{r}) dV$$

pa se zakon kinetičkog momenta može napisati u obliku

$$(19) \quad \frac{d}{dt} \int_V \rho \mathbf{r} \times \mathbf{v} dV = \mathbf{L}.$$

Za diskretni sistem se ovaj izraz zbog $\rho = \sum_{i=1}^N m_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)$ svodi na (6) a moment \mathbf{l} biće dat obrascem (1).

3.2.10. Zakon kinetičke energije. Integral energije

Kinetička energija T nekog materijalnog sistema jednaka je zbiru kinetičkih energija T_i pojedinačnih materijalnih tačaka m_i tog sistema

$$(1) \quad T = \sum_{i=1}^N T_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i v_i^2.$$

Za kvadrat brzine tačaka sistema može se pisati $v_i^2 = \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i$ pa je kinetička energija sistema

$$(2) \quad T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i).$$

Diferencijacijom relacije (2) dobiva se

$$(3) \quad dT = \sum_{i=1}^N m_i (\mathbf{v}_i \cdot d\mathbf{v}_i).$$

Ako se za diferencijal brzine iskoristi relacija

$$d\mathbf{v}_i = \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} dt = \mathbf{w}_i dt,$$

relacija (3) svodi se na oblik

$$(4) \quad dT = \sum_{i=1}^N m_i (\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{w}_i) dt.$$

Prema vektorskim jednačinama kretanja tačka sistema (3.2.3—4) je $m\mathbf{w}_i = \mathbf{F}_i + \mathbf{R}_i$. Sem toga se u (4) može staviti

$$\mathbf{v}_i dt = \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} dt = d\mathbf{r}_i,$$

pa relacija (4) dobiva oblik

$$(5) \quad dT = \sum_{i=1}^N (\mathbf{F}_i + \mathbf{R}_i) \cdot d\mathbf{r}_i.$$

Zbir

$$\sum_{i=1}^N (\mathbf{F}_i + \mathbf{R}_i) \cdot d\mathbf{r}_i$$

predstavlja *ukupan elementarni rad* aktivnih sila i sila reakcije na elementarnom pomeranju $d\mathbf{r}_i$. Relacija (5), koja može sad da se napiše i u obliku

$$(6) \quad dT = dA$$

predstavlja *zakon kinetičke energije* za materijalni sistem: *Priraštaj (uopšte promena) kinetičke energije nekog materijalnog sistema na elementarnom pomeranju jednak je radu aktivnih sila i sila reakcije na tom istom pomeranju.*

U Dekartovim pravouglim koordinatama biće

$$(7) \quad T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2),$$

$$dA = \sum_{i=1}^N [(X_i + R_{xi}) dx_i + (Y_i + R_{yi}) dy_i + (Z_i + R_{zi}) dz_i].$$

Ako bi se mesto Dekartovih uveo neki sistem generalisanih koordinata q^k transformacijama koje u opštem slučaju (tj. u slučaju reonomnih sistema) mogu eksplicitno zavisiti i od vremena,

$$(8) \quad \begin{aligned} x_i &= x_i(q_{(i)}^1, q_{(i)}^2, q_{(i)}^3; t), \\ y_i &= y_i(q_{(i)}^1, q_{(i)}^2, q_{(i)}^3; t), \\ z_i &= z_i(q_{(i)}^1, q_{(i)}^2, q_{(i)}^3; t). \end{aligned} \quad (i = 1, 2, \dots, N)$$

Dekartove koordinate brzine tačka sistema bile bi

$$(9) \quad \begin{aligned} \dot{x}_i &= \frac{\partial x_i}{\partial q_{(i)}^k} \dot{q}_{(i)}^k + \frac{\partial x_i}{\partial t}, \\ \dot{y}_i &= \frac{\partial y_i}{\partial q_{(i)}^k} \dot{q}_{(i)}^k + \frac{\partial y_i}{\partial t}, \\ \dot{z}_i &= \frac{\partial z_i}{\partial q_{(i)}^k} \dot{q}_{(i)}^k + \frac{\partial z_i}{\partial t}. \end{aligned}$$

Kvadrat brzine neke tačke m_i s obzirom na (9) i (1.4.1—5) biće određen obrascem

$$\begin{aligned}
 v_i^2 = & \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_{(i)}^k} \frac{\partial x_i}{\partial q_{(i)}^l} + \frac{\partial y_i}{\partial q_{(i)}^k} \frac{\partial y_i}{\partial q_{(i)}^l} + \frac{\partial z_i}{\partial q_{(i)}^k} \frac{\partial z_i}{\partial q_{(i)}^l} \right) \dot{q}_{(i)}^k \dot{q}_{(i)}^l + \\
 (10) \quad & + 2 \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_{(i)}^k} \frac{\partial x_i}{\partial t} + \frac{\partial y_i}{\partial q_{(i)}^k} \frac{\partial y_i}{\partial t} + \frac{\partial z_i}{\partial q_{(i)}^k} \frac{\partial z_i}{\partial t} \right) \dot{q}_{(i)}^k + \\
 & + \left(\frac{\partial x_i}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial y_i}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial z_i}{\partial t} \right)^2, \\
 & (i = 1, 2, \dots, N; \quad k, l = 1, 2, 3)
 \end{aligned}$$

Ako se još uvedu oznake

$$\begin{aligned}
 g_{(i)kl} &= \frac{\partial x_i}{\partial q_{(i)}^k} \frac{\partial x_i}{\partial q_{(i)}^l} + \frac{\partial y_i}{\partial q_{(i)}^k} \frac{\partial y_i}{\partial q_{(i)}^l} + \frac{\partial z_i}{\partial q_{(i)}^k} \frac{\partial z_i}{\partial q_{(i)}^l}, \\
 g_{(i)ok} &= \frac{\partial x_i}{\partial q_{(i)}^k} \frac{\partial x_i}{\partial t} + \frac{\partial y_i}{\partial q_{(i)}^k} \frac{\partial y_i}{\partial t} + \frac{\partial z_i}{\partial q_{(i)}^k} \frac{\partial z_i}{\partial t}, \\
 g_{(i)o} &= \left(\frac{\partial x_i}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial y_i}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial z_i}{\partial t} \right)^2,
 \end{aligned}$$

kinetička energija tačke m_i biće

$$(11) \quad T_{(i)} = \frac{1}{2} m_i (g_{(i)kl} \dot{q}_{(i)}^k \dot{q}_{(i)}^l + 2 g_{(i)ok} \dot{q}_{(i)}^k + g_{(i)o}).$$

Kinetička energija sistema kao zbir kinetičkih energija tačaka sistema biće onda

$$(12) \quad T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i g_{(i)kl} \dot{q}_{(i)}^k \dot{q}_{(i)}^l + \sum_{i=1}^N m_i g_{(i)ok} \dot{q}_{(i)}^k + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i g_{(i)o}.$$

Prema (3.2.1—43) mogu se uvesti oznake

$$\begin{aligned}
 \dot{q}_{(i)}^k &= \dot{q}^{3(i-1)+k} = \dot{q}^p, \quad \dot{q}_{(i)}^l = \dot{q}^{3(i-1)+l} = \dot{q}^q, \\
 (13) \quad m_i g_{(i)kl} &= g_{3(i-1)+k, 3(i-1)+l} = g_{pq}, \\
 m_i g_{(i)ok} &= g_{3(i-1)+k} = g_{op}; \quad \sum_{i=1}^N m_i g_{(i)o} = g_o,
 \end{aligned}$$

tako da se obrazac (12) za kinetičku energiju sistema svodi najzad na

$$(14) \quad T = \frac{1}{2} g_{pq} \dot{q}^p \dot{q}^q + g_{op} \dot{q}^p + \frac{1}{2} g_o. \quad (p, q = 1, 2, \dots, 3N)$$

Za stacionarne (skleronomne) sisteme transformacije (8) ne zavise eksplicitno od vremena pa je

$$\frac{\partial x_i}{\partial t} = \frac{\partial y_i}{\partial t} = \frac{\partial z_i}{\partial t} = 0$$

i kinetička energija sistema je tada homogena kvadratna funkcija generalisani brzina

$$(15) \quad T = \frac{1}{2} g_{pq} \dot{q}^p \dot{q}^q. \quad (p, q = 1, 2, \dots, 3N)$$

Ako su q^p nezavisne koordinate sistema za neholonomne veze $f_\alpha = 0$ ($\alpha = n+1, n+2, \dots, 3N$), (3.2.2.3—4 i 5), kinetička energija sistema će zavistiti samo od n nezavisnih koordinata q^p i toliko isto generalisanih brzina \dot{q}^p

Elementarni rad aktivnih sila i sila reakcije idealnih veza (3.2.3—9) dat je relacijom

$$(16) \quad dA = \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^3 Q_{(i)k} dq_{(i)k} + \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^3 \left[\sum_{\alpha=1}^{k_1} \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial q_{(i)k}} dq_{(i)k} + \sum_{\beta=1}^{k_2} \mu_\beta \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial q_{(i)k}} dq_{(i)k} \right].$$

Ako se uvedu oznake za generalisane koordinate sa jednim indeksom izraz (16) za elementarni rad sistema može se napisati u obliku

$$(17) \quad dA = Q_l dq^l + \sum_{\alpha=1}^{k_1} \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial q^l} dq^l + \sum_{\beta=1}^{k_2} \mu_\beta \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial q^l} dq^l.$$

Za linearne neholonomne veze je prema (3.2.3—17) $\frac{\partial \varphi_\beta}{\partial q^l} = \Phi_{\beta l}$ pa imamo

$$(18) \quad dA = Q_l dq^l + \sum_{\alpha=1}^{k_1} \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial q^l} dq^l + \sum_{\beta=1}^{k_2} \mu_\beta \Phi_{\beta l} dq^l.$$

Elementarna pomeranja dq^l moraju zadovoljavati uslove (3.2.1—42 i 43) da bi bila moguća. Prema (3.2.1—51 i 58) ti se uslovi mogu izraziti i na naredni način

$$(19) \quad \frac{\partial f_\alpha}{\partial q^l} dq^l = - \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} dt$$

$$\Phi_{\beta l} dq^l = - D_\beta dt.$$

Unošenjem ovih relacija u (18) dobiće se za elementarni rad

$$(20) \quad dA = Q_l dq^l - \sum_{\alpha=1}^{k_1} \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} dt - \sum_{\beta=1}^{k_2} \mu_\beta D_\beta dt.$$

Zakon kinetičke energije (16) se zbog (20) može napisati u obliku

$$(21) \quad dT = Q_l dq^l - \sum_{\alpha=1}^{k_1} \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} dt - \sum_{\beta=1}^{k_2} \mu_\beta D_\beta dt.$$

Ukupni rad sila (aktivnih i reakcija) koje djeluju na neki materijalni sistem zavisi od početne i krajnje konfiguracije sistema, Σ_0 i Σ i od putanje tačaka sistema

$$(22) \quad A = \int_{\Sigma_0}^{\Sigma} (Q_l + R_l) dq^l, \quad (l = 1, 2, \dots, 3N)$$

gde su R_l generalisane koordinate sile reakcije idealnih veza

$$(23) \quad R_l = \sum_{\alpha=1}^{k_1} \lambda_{\alpha} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial q^l} + \sum_{\beta=1}^{k_2} \mu_{\beta} \frac{\partial \varphi_{\beta}}{\partial q^l}.$$

Integral (22) može se posmatrati kao krivolinijski integral u konfiguracionom prostoru V_{3N} od početnog položaja $\Sigma_0 (q_0^1, q_0^2, \dots, q_0^{3N})$ reprezentativne tačke do nekog njenog krajnjeg položaja $\Sigma (q^1, q^2, \dots, q^{3N})$. Prema (18) elementarni rad sile reakcije (za linearne neholonomne veze) zavisi i od vremena, tj.

$$(24) \quad R_l dq^l = - \sum_{\alpha=1}^{k_1} \lambda_{\alpha} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial t} dt - \sum_{\beta=1}^{k_2} \mu_{\beta} D_{\beta} dt.$$

Ako su holonomne veze stacionarne $\frac{\partial f_{\alpha}}{\partial t} = 0$ i ako su (linearne) neholonomne veze homogene, $D_{\beta} = 0$, sile reakcije idealnih veza ne vrše rad na mogućim pomeranjima sistema. Tada pri pomeranju materijalnog sistema rad vrše samo aktivne sile

$$(25) \quad A = \int_{\Sigma_0}^{\Sigma} Q_l dq^l.$$

Kad je elementarni rad aktivnih sila na mogućim pomeranjima totalni diferencijal neke skalarne funkcije $U(q^1, q^2, \dots, q^{3N})$, koja zavisi samo od položaja, rad će na konačnom pomeranju zavistiti samo od početne i krajnje konfiguracije sistema

$$(26) \quad A = \int_{\Sigma_0}^{\Sigma} Q_l dq^l = \int_{\Sigma_0}^{\Sigma} dU = U(q^1, \dots, q^{3N}) - U(q_0^1, \dots, q_0^{3N}).$$

Skalarna funkcija U naziva se *funkcija sile*. S obzirom na (26) zakon kinetičke energije (6) može se onda napisati u obliku

$$(27) \quad dT = dU,$$

pa kako su obe strane totalni diferencijali, relacija (27) može se neposredno integraliti

$$(28) \quad T = U + h, \quad h = \text{const.} = T_0 - U_0.$$

Izraz (28) predstavlja *integral energije* uočenog materijalnog sistema.

Da bi elementarni rad aktivnih sila bio totalni diferencijal neke skalarne funkcije U koja zavisi samo od položaja, $U = U(q^1, q^2, \dots, q^{3N})$, mora biti

$$Q_l dq^l = \frac{\partial U}{\partial q^l} dq^l,$$

odn.

$$(29) \quad Q_l = \frac{\partial U}{\partial q^l}.$$

Uslov da se generalisane sile mogu predstaviti u obliku parcijalnih izvoda (29) neke skalarne funkcije zahteva da parcijalni izvodi višeg reda funkcije sile po koordinatama ne zavise od reda diferenciranja nego da bude

$$\frac{\partial}{\partial q^k} \frac{\partial U}{\partial q^l} = \frac{\partial}{\partial q^l} \frac{\partial U}{\partial q^k}.$$

Primenjeno na relaciji (29) ovo daje uslov da aktivne sile dopuštaju funkciju sile

$$(30) \quad \frac{\partial Q_l}{\partial q^k} = \frac{\partial Q_k}{\partial q^l}.$$

Ako koordinate aktivnih sila zadovoljavaju uslov (30) kaže se da je sila *konzervativna* i da važi relacija (29). Skalarna funkcija $\Pi = -U$ naziva se *potencijal* (*potencijalna energija*) sistema.

Prema svemu napred izloženom, *ako na neki materijalni sistem deluju konzervativne aktivne sile i ako su holonomne veze stacionarne a neholonomne veze linearne i homogene, tada postoji integral energije za uočeni sistem.*

Za materijalni sistem za koji postoji integral energije kaže se da je *konzervativan*.

Zbir kinetičke i potencijalne energije se naziva *totalna mehanička energija* sistema. Za konzervativne sisteme je, dakle, totalna energija konstantna

$$(31) \quad E = T - U = T + \Pi = h = \text{const.}$$

pa stoga za konzervativne sisteme važi *zakon održanja mehaničke energije*, kako se još naziva integral energije.

Ako se mesto generalisanih koordinata q^l sa jednim indeksom uvedu koordinate sa dva indeksa $q_{(i)}^m$,

$$q_{(i)}^m = q^{3(i-1)+m} = q^l, \quad (l = 1, 2, \dots, 3N; i = 1, 2, \dots, N; m = 1, 2, 3)$$

generalisane sile Q_l su

$$Q_l = Q_{3(i-1)+m} = Q_{(i)m}$$

pa se relacija (29) može napisati

$$(32) \quad Q_{(i)m} = \frac{\partial U}{\partial q_{(i)}^m}, \quad (m = 1, 2, 3; i = 1, 2, \dots, N)$$

U Dekartovim koordinatama $Oxyz$ relacije (29) imaju oblik

$$X_i = \frac{\partial U}{\partial x_i}, \quad Y_i = \frac{\partial U}{\partial y_i}, \quad Z_i = \frac{\partial U}{\partial z_i}$$

te se vidi da su koordinate sile koja deluje na tačku m_i u stvari koordinate gradjenata skalarne funkcije U u odnosu na koordinate tačke m_i (koordinate delimičnog gradijenta),

$$(33) \quad \mathbf{F}_i = \text{grad}_i U.$$

Kad su aktivne sile konzervativne diferencijalne jednačine kretanja materijalnog sistema biće

$$(34) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^l} - \frac{dT}{\partial q^l} = \frac{\partial U}{\partial q^l} + R_l, \quad (l = 1, 2, \dots, 3N)$$

gde je R_l reakcija idealne veze. Funkcija sile U je funkcija isključivo položaja i ne zavisi od generalisanih brzina \dot{q}^l pa se stoga može pisati

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^l} - \frac{\partial T}{\partial q^l} - \frac{\partial U}{\partial q^l} = \frac{d}{dt} \frac{\partial (T+U)}{\partial \dot{q}^l} - \frac{\partial (T+U)}{\partial q^l}$$

Razlika kinetičke i potencijalne energije

$$(35) \quad L = T - \Pi = T + U$$

naziva se *slobodna energija*, *kinetički potencijal* ili *Lagranževa funkcija*. Pomoću Lagranževe funkcije diferencijalne jednačine kretanja konzervativnog sistema mogu se napisati u obliku

$$(36) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^l} - \frac{\partial L}{\partial q^l} = R_l. \quad (l = 1, 2, \dots, 3N)$$

Ako je posmatrani materijalni sistem holonoman i ako su izabrane nezavisne generalisane koordinate, Lagranževe jednačine druge vrste (3.2.4—12) neće imati sile reakcije. Tada se diferencijalne jednačine kretanja, prema (36) svode na oblik

$$(37) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^l} - \frac{\partial L}{\partial q^l} = 0. \quad (l = 1, 2, \dots, n = 3N - k_1)$$

Ako funkcija sile U zavisi eksplicitno od vremena, tj. u slučaju $U = U(q^1, q^2, \dots, q^n, t)$, sila koja zadovoljava uslov (29) zove se *potencijalna*, ali onda ne mora biti i konzervativna.

3.2.11. Ciklički integrali

Pod određenim uslovima iz opštih teorema mehanike proističu izvesni prvi integrali diferencijalnih jednačina kretanja. Iz zakona količine kretanja i zakona kinetičkog momenta mogu se odrediti tzv. linearni prvi integrali, tj. prvi integrali koji su linearni u pogledu brzina. Iz zakona kinetičke energije može se dobiti jedan integral koji je kvadratan po brzinama sistema.

Postoji još jedna vrsta integrala koji su linearni u pogledu brzina. Ti integrali za razliku od navedenih zavise od izbora koordinatnog sistema a ne od samog materijalnog sistema, veza i aktivnih sila. Ako su za neku koordinatu q^k odgovarajuće koordinate aktivne sile Q_k i sile reakcije R_k jednake nuli i ako kinetička energija sistema ne zavisi eksplicitno od te koordinate,

$$(1) \quad \frac{\partial T}{\partial q^k} = 0,$$

tada iz diferencijalnih jednačina kretanja (3.2.3—16)

$$(2) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^l} - \frac{\partial T}{\partial q^l} = Q_l + R_l \quad (l = 1, 2, 3, \dots, 3N)$$

za $l = k$ proističe

$$(3) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^k} = 0$$

i

$$(4) \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^k} = \text{const.} = C_k.$$

Prvi integral obllka (4) naziva se *ciklički integral*, a odgovarajuće koordina q^k u odnosu na koje postoje ciklički integrali su *cikličke koordinate*.

Parcijalni izvodi kinetičke energije po generalisanim brzinama

$$(5) \quad p_l = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^l} \quad (l = 1, 2, \dots, 3N)$$

nazivaju se *generalisani impulsi*. U Dekartovim pravouglim koordinatama je kinetička energija

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2),$$

pa su odgovarajući impulsi

$$p_{ix} = m_i \dot{x}_i, \quad p_{iy} = m_i \dot{y}_i, \quad p_{iz} = m_i \dot{z}_i,$$

a to su u stvari koordinate vektora \mathbf{K}_i količine kretanja tačke m_i , $\mathbf{K}_i = m_i \mathbf{v}_i$ (3.2.7—1).

Prema definiciji cikličkih koordinata sad se može reći da svakoj cikličkoj koordinati q^k odgovara konstantan generalisani impuls $p_k = C_k = \text{const.}$

Generalisani impulsi su zaista linearne funkcije generalisanih brzina. Prem (3.2.10—14) je

$$(6) \quad p_l = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^l} = g_{lp} \dot{q}^p + g_{ol}. \quad (p, l = 1, 2, \dots, 3N)$$

Iz relacija (4) i (6) vidi se da ako je q^k ciklička koordinata, odgovarajući ciklički integral je

$$(7) \quad g_{kp} \dot{q}^p + g_{ok} = C_k,$$

a to je linearna funkcija generalisanih brzina.

Ako posmatrani materijalni sistem ima izvestan broj, recimo n_1 cikličkih integrala, onda postoji n_1 relacija (7) iz kojih se n_1 generalisanih brzina može izraziti kao funkcija preostalih $3N - n_1$. Neka su cikličke koordinate $q^{3N-n_1+1}, q^{3N-n_1+2}, \dots, q^{3N}$, uopšte q^{l_1} ($l_1 = 3N - n_1 + 1, 3N - n_1 + 2, \dots, 3N$). Odgovarajući ciklički integrali su

$$(8) \quad g_{l_1 p} \dot{q}^p + g_{ol_1} = C_{l_1} \quad \left(\begin{array}{l} p = 1, 2, \dots, 3N \\ l_1 = 3N - n_1 + 1, \dots, 3N \end{array} \right)$$

Iz n_1 relacija (8) može se odrediti n_1 generalisanih brzina \dot{q}^{l_1} koje odgovaraju cikličkim koordinatama kao funkcije preostalih necikličkih koordinata i generalisanih brzina

$$(9) \quad \dot{q}^{l_1} = \dot{q}^{l_1}(q^1, \dots, q^{3N-n_1}; \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^{3N-n_1}).$$

Ako se te vrednosti unesu u izraz za kinetičku energiju, kinetička energija će sadržati svega $3N - n_1$ generalisanih koordinata i generalisanih brzina i to

onih u odnosu na koje ne postoje ciklički integrali, pa će stoga postojati svega još $3N - n_1$ diferencijalnih jednačina kretanja koje preostaju za integraljenje,

$$(10) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^l} - \frac{\partial T}{\partial q^l} = Q_l + R_l. \quad (l = 1, 2, \dots, 3N - n_1)$$

Time je broj koordinata sistema i broj diferencijalnih jednačina kretanja smanjen, a time je i problem određivanja kretanja nekog materijalnog sistema koji dopušta cikličke integrale uprošćen.

Za holonomne sisteme, kad su koordinate nezavisne, ima Lagranževih jednačina druge vrste tačno onoliko, tj. n , koliko sistem ima stepena slobode. Ako sistem dopušta n_1 cikličkih integrala, na osnovu prethodnog za integraciju će preostati svega $n - n_1$ Lagranževih jednačina druge vrste, koje će sadržati toliko isto nezavisnih generalisanih koordinata i generalisanih brzina. To znači da će se holonomni sistem sa cikličkim koordinatama svesti na neki sistem koji ima onoliko stepena slobode manje koliko je dati sistem imao cikličkih integrala.

Smanjenje broja nezavisnih koordinata materijalnog sistema a time i broja diferencijalnih jednačina kretanja koje treba integraliti pomoću prvih integrala naziva se *redukcija sistema*.

3.2.12. Kanonske (Hamiltonove) jednačine

Za kretanje holonomnih sistema sa n stepena slobode Lagranževe jednačine druge vrste (3.2.4—12)

$$(1) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^m} - \frac{\partial T}{\partial q^m} = Q_m \quad (m = 1, 2, \dots, n = 3N - k_1)$$

sadrže kao promenljive veličine n nezavisnih koordinata q^m sistema, n odgovarajućih generalisanih brzina \dot{q}^m i vreme t . Te promenljive nazivaju se, kako smo naveli, *Lagranževe promenljive*.

Ako se uvedu generalisani impulsi p_m (3.2.11—5) obrascima

$$(2) \quad p_m = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^m} \quad (m = 1, 2, \dots, n)$$

u opštem slučaju će to biti n linearnih jednačina po generalisanim brzinama iz kojih se generalisane brzine \dot{q}^m mogu izraziti kao linearne funkcije generalisanih impulsa,

$$(3) \quad \dot{q}^m = \dot{q}^m(p_1, \dots, p_n; q^1, \dots, q^n; t), \quad (m = 1, 2, \dots, n)$$

pa se u izrazu za kinetičku energiju mesto generalisanih brzina mogu uvesti generalisani impulsi.

Kinetička energija je, u opštem slučaju reonomnog sistema, funkcija generalisanih koordinata, generalisanih brzina i vremena,

$$(4) \quad T = T(q^1, \dots, q^n; \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n; t),$$

a posle smene (3) postaje funkcija generalisanih koordinata, generalisanih impulsa i vremena,

$$(5) \quad T = T(q^1, \dots, q^n; p_1, \dots, p_n; t).$$

Promenljive q^m, p_n, t nazivaju se *Hamiltonove promenljive* ili *kanonske promenljive*.

Za konzervativne aktivne sile sa funkcijom sile U Lagranževe jednači druge vrste (1) mogu se napisati u obliku (3.2.10—37),

$$(6) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^m} - \frac{\partial L}{\partial q^m} = 0,$$

gde je $L = T + U$ Lagranževa funkcija (kinetički potencijal). Pošto funkcija sile ne zavisi od generalisanih brzina za generalisane impulse se mesto (2) može napisati obrazac

$$(7) \quad p_m = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^m} \quad (m = 1, 2, \dots, n)$$

Sama Lagranževa funkcija L je funkcija Lagranževih promenljivih,

$$(8) \quad L = L(q^1, \dots, q^n; \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n; t).$$

Lagranževe jednačine druge vrste (6) predstavljaju sistem od n diferencijalnih jednačina drugog reda sa n nepoznatih funkcija vremena $q^m = q^m(t)$.

Mesto takvog sistema jednačina može se uvesti sistem od $2n$ diferencijalnih jednačina prvoga reda sa $2n$ nepoznatih funkcija vremena q^m i p_m . Pri tome se generalisane koordinate i generalisani impulsi posmatraju kao međusobno nezavisne veličine, a u nekom $2n$ -dimenzionom prostoru to su koordinate jedne tačke koja karakteriše kinematičko stanje sistema. Prostor sa koordinatama q^m i p_m naziva se *fazni prostor*.

Funkcija H definisana obrascem

$$(9) \quad H = p_m \dot{q}^m - L$$

zove se *Hamiltonova funkcija*. Nasuprot Lagranževoj funkciji L , koja zavisi od Lagranževih promenljivih, Hamiltonova funkcija je funkcija Hamiltonovih promenljivih i u relaciji (9) treba, kad se izračunava funkcija H , generalisane brzine izraziti preko generalisanih impulsa, tako da bude

$$(10) \quad H = H(q^1, \dots, q^n; p_1, \dots, p_n; t).$$

S obzirom na (8) i (10) parcijalni izvodi relacije (9) po kanonskim promenljivim biće

$$(11) \quad \frac{\partial H}{\partial q^m} = - \frac{\partial L}{\partial q^m},$$

$$(12) \quad \frac{\partial H}{\partial p_m} = \dot{q}^m, \quad (m = 1, 2, \dots, n)$$

$$(13) \quad \frac{\partial H}{\partial t} = - \frac{\partial L}{\partial t}$$

Pomoću relacija (7) i (11) mogu se u Lagranževim jednačinama (6) eliminisati generalisane brzine. Zbog (7) jednačina (6) može se napisati u obliku

$$\frac{dp_m}{dt} = - \frac{\partial L}{\partial q^m},$$

a prema (11) biće

$$(14) \quad \frac{dp_m}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q^m}$$

Ove relacije (14) zajedno sa relacijom (12) obrazuju sistem od $2n$ kanonskih (Hamiltonovih) diferencijalnih jednačina kretanja (koje su prvoga reda)

$$(15) \quad \frac{dp_m}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q^m}, \quad \frac{dq^m}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_m}$$

sa $2n$ nepoznatih funkcija q^m i p_m .

Hamiltonove jednačine su ovde obrazovane za holonomni sistem na koji dejstvuju konzervativne sile; međutim, taj sistem ne mora biti konzervativan, jer veze ne moraju biti stacionarne. U opštem slučaju Hamiltonova funkcija se menja sa vremenom, pa se dobiva

$$(16) \quad \frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial q^m} \dot{q}^m + \frac{\partial H}{\partial p_m} \dot{p}_m + \frac{\partial H}{\partial t}$$

Ako se ovde izvodi po vremenu kanonskih promenljivih izraze pomoću kanonskih jednačina (15) dobiće se identičnost

$$\frac{dH}{dt} = \sum_{m=1}^n \left(\frac{\partial H}{\partial q^m} \dot{q}^m - \frac{\partial H}{\partial p_m} \dot{p}_m \right) + \frac{\partial H}{\partial t},$$

odnosno, pošto se uzme u obzir relacija (13),

$$(17) \quad \frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}$$

Za skleronomne (stacionarne) sisteme kinetička energija, pa prema tome i Lagranževa funkcija, ne zavisi eksplicitno od vremena a otuda je

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} = 0, \quad \frac{dH}{dt} = 0,$$

i

$$(18) \quad H = h = \text{const.}$$

Za konzervativne sisteme je, osim toga, kinetička energija kvadratna forma (3.2.10—15) generalisanih brzina,

$$2T = g_{lm} \dot{q}^l \dot{q}^m,$$

a kako je prema (7)

$$p_l = g_{lm} \dot{q}^m$$

to će biti

$$(19) \quad 2T = p_l \dot{q}^l.$$

S obzirom na ovu relaciju, u slučaju konzervativnog sistema Hamiltonova funkcija (9) postaje

$$(20) \quad H = 2T - L = 2T - (T + U) = T - U,$$

a to je totalna mehanička energija konzervativnog sistema; relacija (18) predstavlja stoga integral energije.

Hamiltonove (kanonske) jednačine (15) igraju u teorijskim istraživanjima veoma značajnu ulogu kako u mehanici tako i u teorijskoj fizici, ali nisu od neposrednog praktičnog značaja za rešavanje konkretnih problema dinamike. Pri rešavanju konkretnih problema obično se svode na Lagranževe jednačine.

3.12.13. Rautove jednačine

Mesto da se, kao pri formiranju Hamiltonovih jednačina, svih n generalisanih brzina \dot{q}^m izrazi pomoću n generalisanih impulsa p_m može se to učiniti i samo delimično, recimo za s generalisanih brzina,

$$(1) \quad p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}, \quad (i = 1, 2, \dots, s < t)$$

gde je L Lagranževa funkcija

$$(2) \quad L = L(q^1, \dots, q^n; \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n; t).$$

Funkcija

$$(3) \quad R = p_i \dot{q}^i - L$$

naziva se *Rautova* (Routh) *funkcija* i zavisi od n generalisanih koordinata, s generalisanih impulsa, $n - s$ generalisanih brzina i vremena t , tj.

$$(4) \quad R = R(q^1, \dots, q^n; p_1, \dots, p_s; \dot{q}^{s+1}, \dots, \dot{q}^n; t).$$

Izvodi relacije (3) po promenljivima q^i, p_i ($i = 1, 2, \dots, s$) i po promenljivima q^j i \dot{q}^j ($j = s+1, s+2, \dots, n$), kad L ima oblik (2) biće

$$(5) \quad \frac{\partial R}{\partial q^i} = -\frac{\partial L}{\partial q^i}, \quad (i = 1, 2, \dots, s)$$

$$(6) \quad \frac{\partial R}{\partial p_i} = \dot{q}^i; \quad (i = 1, 2, \dots, s)$$

$$(7) \quad \frac{\partial R}{\partial q^j} = -\frac{\partial L}{\partial q^j}, \quad (j = s+1, s+2, \dots, n)$$

$$(8) \quad \frac{\partial R}{\partial \dot{q}^j} = -\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j}.$$

Kako za kretanje sistema na koji dejstvuju konzervativne sile važe Lagranževе jednačine druge vrste

$$(9) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^m} - \frac{\partial L}{\partial q^m} = 0, \quad (m = 1, 2, \dots, n)$$

za $m = 1, 2, \dots, s$ prema (1) može se pisati

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} = \frac{d}{dt} p_i = \dot{p}_i \quad (i = 1, 2, \dots, s)$$

pa je prema (5)

$$(10) \quad \frac{\partial R}{\partial \dot{q}^i} = -\dot{p}_i \quad (i = 1, 2, \dots, s)$$

Takođe upoređujući (7) i (8) sa (9) vidi se da se za $m = s+1, s+2, \dots, n$ diferencijalne jednačine kretanja mogu napisati tako što će mesto Lagranževe sadržati Rautovu funkciju.

Jednačine (6), (10) i (9) sa funkcijom R umesto funkcije L

$$(11) \quad \dot{q}^i = \frac{\partial R}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial R}{\partial q^i}, \quad (i = 1, 2, \dots, s)$$

$$(12) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial R}{\partial \dot{q}^j} - \frac{\partial R}{\partial q^j} = 0, \quad (j = s+1, \dots, n)$$

nazivaju se *Rautove jednačine kretanja*. Te su jednačine naročito pogodne za redukciju i razdvajanje jednačina, kad postoji izvestan broj cikličkih koordinata sistema.

Neka su cikličke koordinate q^i ($i = 1, 2, \dots, s$). Odgovarajući ciklički integrali su

$$(13) \quad p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} = C_i,$$

pa je Rautova funkcija (3)

$$(14) \quad R = C_i \dot{q}^i - L,$$

a Lagranževa funkcija (2) ne zavisi od s cikličkih koordinata q^i ,

$$(15) \quad L = L(q^{s+1}, q^{s+2}, \dots, q^n; \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n; t).$$

Iz s jednačina (13) generalisane brzine $\dot{q}^1, \dot{q}^2, \dots, \dot{q}^s$ mogu se izraziti pomoću s generalisanih impulsa $p_i = C_i$, pa se Rautova funkcija svodi na

$$(16) \quad R = R(q^{s+1}, \dots, q^n; \dot{q}^{s+1}, \dots, \dot{q}^n; C_1, C_2, \dots, C_s; t).$$

Premá tome Rautove jednačine kretanja (11) svode se na

$$(17) \quad \dot{p}_i = C_i, \quad \dot{q}^i = \frac{\partial R}{\partial C_i}, \quad (i = 1, 2, \dots, s)$$

a jednačine (12) ne sadrže više uopšte ni cikličke koordinate niti odgovarajuće generalisane brzine, čime je za slučaj cikličkih koordinata broj diferencijalnih jednačina drugog reda sveden na $n-s$, sa isto toliko nepoznatih funkcija vremena. Jednačine (12) obrazuju tzv. *autonomni sistem* diferencijalnih jednačina u kome nema izlišnih nepoznatih funkcija.

Primeri i zadaci

1. Dva tega čije su mase m i $2m$ vise na užetu preko jednog kotura koji može slobodno da se okreće i čija je masa m . Taj kotur visi na užetu koje je prebačeno preko jednog drugog nepomičnog kotura i na drugom kraju tog užeta visi teg mase $4m$. Naći ubrzanje tega mase $4m$, ako su užad nerastegljiva, ako im je masa zanemarljiva i ako se zanemari otpor trenja prilikom obrtanja koturova.

Sistem se sastoji od četiri teške materijalne tačke, tri tega M_1, M_2 i M_4 sa masama $m, 2m$ i $4m$ i kotura M_3 mase m (sl. 135). Ako je x -osa orijentisana

vertikalno naniže, sve četiri tačke će se kretati po putanjama kolinearnim x -os a na njih će dejstvovati aktivne sile

$$F_1 = X_1 = mg, \quad F_2 = X_2 = 2mg, \quad F_3 = X_3 = mg, \quad F_4 = X_4 = 4mg.$$

Ako su x_i rastojanja tačaka m_i od nepomičnog kotura O a ξ_1 i ξ_2 rastojanja tačak M_1 i M_2 od kotura M_3 , zbog nerasteljivosti užadi jednačine veza biće

$$f_1 \equiv \xi_1 + \xi_2 - l = 0,$$

$$f_2 \equiv x_3 + x_4 - L = 0,$$

gde su l i L nepromenljive dužine užad. Kako je

$$x_1 = x_3 + \xi_1, \quad x_2 = x_3 + \xi_2,$$

može se za f_1 pisati

$$f_1 \equiv x_1 + x_2 - 2x_3 - l = 0.$$

Pošto postoje dve veze, uočeni sistem od četiri materijalne tačke imaće svega dva stepena slobode. Veze su skleronomne i holonomne.

Lagranževe jednačine prve vrste. — Iz vektorske diferencijalne jednačine kretanja sa multiplikatorima veza

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{F}_i + \sum_{\alpha=1}^{k_1} \lambda_{\alpha} \text{grad}_i f_{\alpha}$$

Lagranževe jednačine prve vrste dobiće se projiciranjem na koordinatne ose. Pošto je kretanje tačaka sistema pravolinijsko, može se uzeti da je kolinearno sa x -osom, pa se dobiva

$$m_i \ddot{x}_i = X_i + \sum_{\alpha=1}^2 \lambda_{\alpha} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial x_i}.$$

Za uočeni sistem ove jednačine će biti

$$m\ddot{x}_1 = mg + \lambda_1,$$

$$2m\ddot{x}_2 = 2mg + \lambda_1,$$

$$m\ddot{x}_3 = mg - 2\lambda_1 + \lambda_2,$$

$$4m\ddot{x}_4 = 4mg + \lambda_2.$$

Ove četiri jednačine sadrže 6 nepoznatih funkcija, četiri koordinate x_i i dva množioca veza λ_{α} . Ako se jednačine veza diferencijale dva puta po vremenu dobiće se

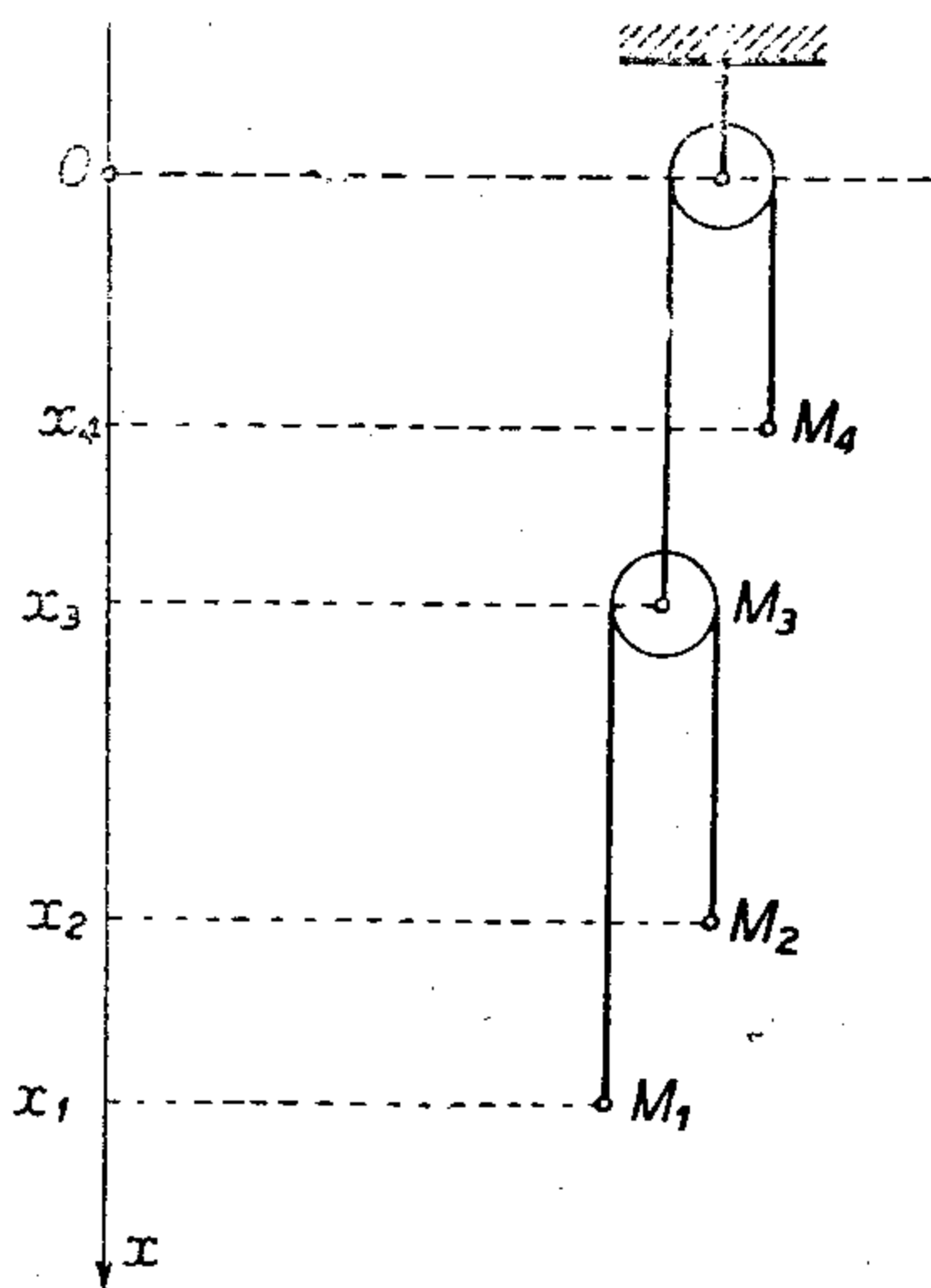
$$\ddot{f}_1 = \ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 - 2\ddot{x}_3 = 0,$$

$$\ddot{f}_2 = \ddot{x}_3 + \ddot{x}_4 = 0,$$

pa kad se ubrzanja \ddot{x}_i ovde zamene iz diferencijalnih jednačina kretanja dobiće se dve jednačine za određivanje množilaca veza,

$$11\lambda_1 - 4\lambda_2 = 0;$$

$$8\lambda_1 - 5\lambda_2 = 8g,$$



Slika 135

a odatle se nalazi

$$\lambda_1 = -\frac{32}{23}mg, \quad \lambda_2 = -\frac{88}{23}mg.$$

Ubrzanje tega M_4 biće prema tome

$$\ddot{x}_4 = g + \frac{1}{4m}\lambda_2 = \frac{1}{23}g.$$

Lagranževe jednačine druge vrste. — Pošto sistem ima dva stepena slobode, dve od četiri koordinate x_i mogu se izraziti da budu nezavisne, a ostale će biti funkcije ovih. Ako se za nezavisne koordinate izaberu x_1 i x_4 iz jednačina veza dobiće se

$$x_2 = -x_1 - 2x_4 + 2L - l,$$

$$x_3 = -x_4 + L.$$

Kinetička energija T sistema je određena obrascem

$$2T = m_1 \dot{x}_1^2 + m_2 \dot{x}_2^2 + m_3 \dot{x}_3^2 + m_4 \dot{x}_4^2,$$

a kako je

$$\dot{x}_2 = -\dot{x}_1 - 2\dot{x}_4, \quad \dot{x}_3 = -\dot{x}_4,$$

biće najzad

$$2T = m(3\dot{x}_1^2 + 8\dot{x}_1\dot{x}_4 + 13\dot{x}_4^2).$$

Generalisane sile Q_1 i Q_2 mogu se odrediti iz izraza za elementarni rad,

$$dA = g(m_1 dx_1 + m_2 dx_2 + m_3 dx_3 + m_4 dx_4) = Q_1 dx_1 + Q_4 dx_4.$$

Zbog

$$dx_2 = -dx_1 - 2dx_4, \quad dx_3 = -dx_4,$$

biće

$$dA = -mg(dx_1 + dx_4),$$

pa je

$$Q_1 = -mg, \quad Q_2 = -mg.$$

Lagranževe jednačine druge vrste za nezavisne koordinate x_1 i x_4 biće

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} - \frac{\partial T}{\partial x_1} = Q_1,$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_4} - \frac{\partial T}{\partial x_4} = Q_4,$$

odnosno

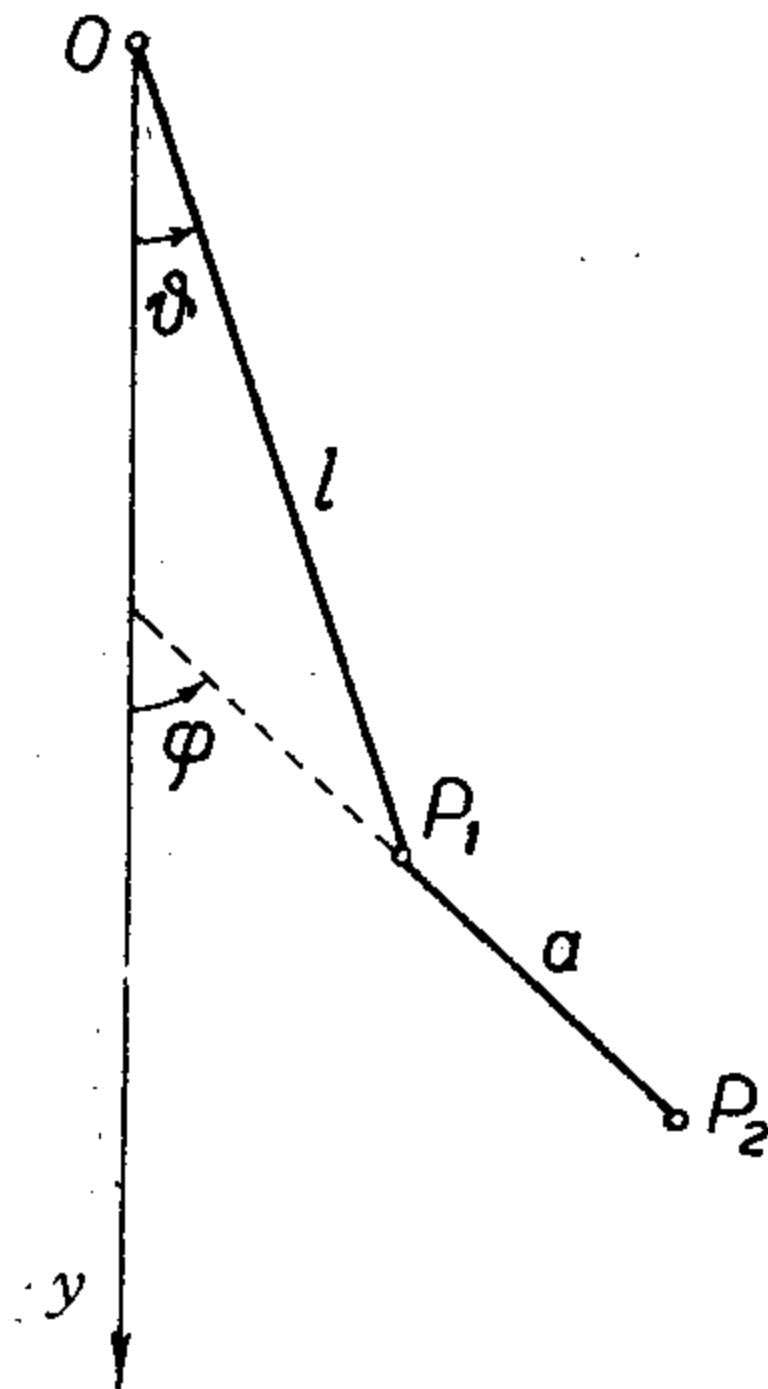
$$3\ddot{x}_1 + 4\ddot{x}_4 = -g;$$

$$4\ddot{x}_1 + 13\ddot{x}_4 = -g.$$

Eliminacijom \ddot{x}_1 iz ovih jednačina dobiće se

$$\ddot{x}_4 = \frac{1}{23}g.$$

2. Dvojno klatno obrazovano od dve teške materijalne tačke P_1 i P_2 jednak mase m kreće se u vertikalnoj ravni. Materijalna tačka P_1 vezana je za nepokretnu tačku O nepromenljivom dužinom l , a materijalna tačka P_2 je vezana za P_1 sa svoje strane nepromenljivom dužinom a .



Slika 136

Odrediti male oscilacije ovog dvojnog klatna oko položaja ravnoteže.

Ovaj sistem (sl. 136) ima dva stepena slobode a kao nezavisni parametri za određivanje položaja sistema mogu se uzeti uglovi ϑ i φ koje obrazuju prave OP_1 i P_1P_2 sa vertikalnom osom y orijentisanom naniže.

Da bismo odredili Lagranževu funkciju $L = T + U$, treba odrediti kinetičku energiju T sistema i funkciju sile U . Pri tome je

$$T = \frac{1}{2} m \left\{ l^2 \dot{\vartheta}^2 + \left[\frac{d}{dt} (l \cos \vartheta + a \cos \varphi) \right]^2 + \left[\frac{d}{dt} (l \sin \vartheta + a \sin \varphi) \right]^2 \right\},$$

$$U = mgl \cos \vartheta + mg(l \cos \vartheta + a \cos \varphi) = mg(2l \cos \vartheta + a \cos \varphi).$$

Ako se u izraz za L unesu ove vrednosti i zanemare članovi mali višeg reda s obzirom da se radi samo o malim oscilacijama, dobiće se

$$L = \frac{1}{2} m (2l^2 \dot{\vartheta}^2 + a^2 \dot{\varphi}^2 + 2al \dot{\vartheta} \dot{\varphi}) - mg(l \vartheta + \frac{a}{2} \varphi^2).$$

Lagranževe jednačine kretanja druge vrste glase onda

$$(a) \quad 2l \ddot{\vartheta} + a \ddot{\varphi} = -2g \vartheta,$$

$$l \ddot{\vartheta} + a \ddot{\varphi} = -g \varphi$$

a njihovo rešenje je

$$\vartheta = C_1 a \lambda_1^2 \cos(\lambda_1 t + \alpha_1) + C_2 a \lambda_2^2 \cos(\lambda_2 t + \alpha_2),$$

$$\varphi = C_1 (2g - 2l \lambda_1^2) \cos(\lambda_1 t + \alpha_1) + C_2 (2g - 2l \lambda_2^2) \cos(\lambda_2 t + \alpha_2),$$

gde su C_1 i C_2 , α_1 i α_2 integracione konstante koje se određuju iz početnih uslova.

Što se tiče veličina λ_1^2 i λ_2^2 , one se određuju na ovaj način. U jednačine (a) stavi se kad klatno izvodi jednu glavnu oscilaciju,

$$\vartheta = A \cos(\lambda t + \alpha); \quad \varphi = B \cos(\lambda t + \alpha)$$

gde su A , B i α konstante, pa se dolazi do uslovnih jednačina za ove konstante

$$(2l \lambda^2 - 2g) A + a \lambda^2 B = 0,$$

$$l \lambda^2 A + (a \lambda^2 - g) B = 0.$$

Da traženo rešenje ne bi bilo trivijalno mora determinanta prethodnog sistema biti jednaka nuli, tj.

$$al \lambda^4 - 2g(l+a) \lambda^2 + 2g^2 = 0,$$

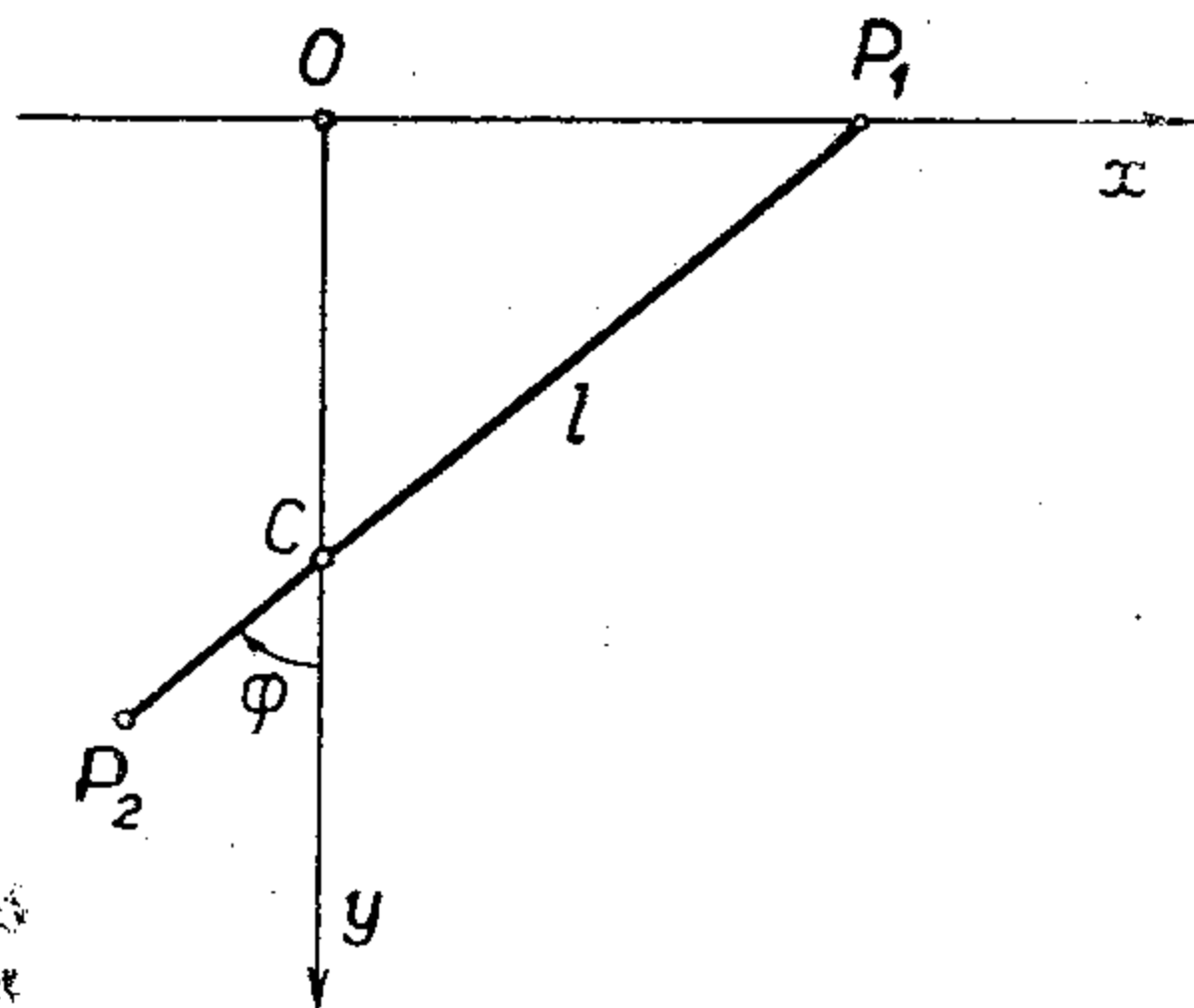
a odatle se dobiva

$$\lambda_1^2 = g \frac{l + a + \sqrt{l^2 + a^2}}{al}; \quad \lambda_2^2 = g \frac{l + a - \sqrt{l^2 + a^2}}{al}.$$

3. Dve teške materijalne tačke P_1 i P_2 , čije su mase m_1 i m_2 vezane su nerastegljivom dužinom l . Jedna od njih P_1 može da klizi bez trenja po horizontalnoj duži, a druga se klata u vertikalnoj ravni (*eliptičko klatno*).

Odrediti kretanje ovog klatna.

Ako se koordinatni sistem izabere tako da x -osa bude postavljena po onoj horizontalnoj duži po kojoj klizi masa m_1 , a da y -osa bude vertikalna i orijentisana



Slika 137

naniže (sl. 137), tada u proizvoljnom trenutku vremena imamo kao koordinate tih materijalnih tačaka $P_1(x_1, 0)$ i $P_2(x_2, y_2)$, pri čemu je

$$(a) \quad \begin{aligned} x_2 &= x_1 - l \sin \varphi, \\ y_2 &= l \cos \varphi, \end{aligned}$$

gde je φ ugao koji spojna duž materijalnih tačaka obrazuje sa vertikalom. Prema tome sistem ima dva stepena slobode, jer će mu položaj biti određen sa x_1 i φ .

Kinetička energija tačke P_1 biće

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2,$$

a kinetička energija tačke P_2 je

$$T_2 = \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) = \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_1^2 - 2l\dot{x}_1\dot{\varphi}\cos\varphi + l^2\dot{\varphi}^2),$$

pa će ukupna kinetička energija ovog sistema iznositi

$$T = T_1 + T_2 = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l^2 \dot{\varphi}^2 - m_2 l \dot{x}_1 \dot{\varphi} \cos \varphi.$$

Funkcija sile je u ovom slučaju

$$U = m_2 g y_2 = m_2 g l \cos \varphi,$$

i Lagranževa funkcija u nezavisnim koordinatama x_1 i φ je

$$L = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2l^2\dot{\varphi}^2 - m_2l\dot{x}_1\dot{\varphi}\cos\varphi + m_2gl\cos\varphi.$$

Ovde je koordinata x_1 ciklička i njen integral je

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = (m_1 + m_2)\dot{x}_1 - m_2l\dot{\varphi}\cos\varphi = C_1,$$

a odatle se lako dobiva

$$(b) \quad (m_1 + m_2)x_1 - m_2l\sin\varphi = C_1t + C_2.$$

Kad je početna brzina jednaka nuli (tj. $\dot{x}_{10} = \dot{\varphi}_0 = 0$) biće $C_1 = 0$, pa s obzirom na veze (a) može napisati

$$m_1x_1 + m_2x_2 = (m_1 + m_2)x_C = C_2,$$

a to znači da se težište sistema C nalazi stalno na određenoj vertikali (što je jasno pošto nema horizontalnih sila). Ako se uzme da je y -osa postavljena tačno po vertikali po kojoj se težište kreće, biće i $C_2 = 0$, pa se onda iz (b) nalazi da je

$$(c) \quad x_1 = \frac{m_2l}{m_1 + m_2}\sin\varphi,$$

tj. tačka P_1 pravi pravolinijske harmonijske oscilacije oko početnog položaja C po x -osi.

Lagranževa jednačina za koordinatu φ glasi

$$\frac{d}{dt}(m_2l^2\dot{\varphi} - m_2l\dot{x}_1\cos\varphi) - m_2l\dot{x}_1\dot{\varphi}\sin\varphi + m_2lg\sin\varphi = 0.$$

Kad se u ovu jednačinu za x_1 unese njegova vrednost (c) i ako se ograniči samo na male oscilacije ovog klatna, tj. svuda u jednačini stavi $\cos\varphi \approx 1$, $\sin\varphi \approx 0$, dobiće se diferencijalna jednačina

$$\ddot{\varphi} + \frac{m_1 + m_2}{m_1} \frac{g}{l} \varphi = 0,$$

a ona određuje harmonijske oscilacije oko ravnotežnog položaja čiji je period

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{m_1}{m_1 + m_2}} \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Oдавde je jasno da će u slučaju $m_1 \gg m_2$ pomeranje tačke P_1 biti vrlo malo, pa se period ovog klaćenja približava periodu klaćenja običnog matematičkog klatna. Period klaćenja ovog klatna može se menjati prostom promenom razmere masa materijalnih tačaka i bez promene same dužine klatna. Eliptičkim se ovo klatno naziva zbog toga što tačka P_2 opisuje elipsu

$$\frac{x_2^2}{\left(\frac{m_1l}{m_1 + m_2}\right)^2} + \frac{y_2^2}{l^2} = 1.$$

4. Pokazati da su kanonske jednačine kretanja matematičkog klatna

$$\dot{p} = -mga \sin \vartheta,$$

$$\dot{\vartheta} = \frac{1}{ma^2} p,$$

gde je $p = \frac{\partial T}{\partial \dot{\vartheta}}$.

Pošto je kretanje matematičkog klatna konzervativno, Hamiltonova funkcija može da se odredi neposredno iz izraza za totalnu energiju

$$H = T - U = (ma^2 \dot{\vartheta}^2)/2 - mga \cos \vartheta.$$

Kad se ugaona brzina $\dot{\vartheta}$ zameni odgovarajućim impulsom p dobiće se za Hamiltonovu funkciju izraz

$$H = \frac{p^2}{2ma^2} - mgl \cos \vartheta,$$

odakle neposredno diferencijaljenjem proističu kanonske jednačine.

5. Holonomni konzervativni materijalni sistem sa dva stepena slobode (nezavisne koordinate su $q^1 = u$ i $q^2 = v$) ima kinetičku energiju

$$T = \frac{1}{2} \frac{\dot{u}^2}{a+bv} + \frac{1}{2} \dot{v}^2$$

i potencijalnu energiju

$$\Pi = c + d v^2,$$

gde su a , b , c , i d pozitivne konstante. Naći konačne jednačine kretanja sistema pomoću kanonskih (Hamiltonovih) i pomoću Rautovih jednačina kretanja.

Lagranževa funkcija sistema je

$$(1) \quad L = T - \Pi = \frac{1}{2} \frac{\dot{u}^2}{a+bv} + \frac{1}{2} \dot{v}^2 - c - d v^2,$$

odakle je $\frac{\partial L}{\partial u} = 0$ pa je u ciklička koordinata.

Generalisani impulsi su

$$(2) \quad p_1 \equiv p = \frac{\partial L}{\partial \dot{u}} = \frac{\dot{u}}{a+bv}, \quad p_2 \equiv q = \frac{\partial L}{\partial \dot{v}} = \dot{v},$$

odakle se generalisane brzine mogu izraziti kao linearne funkcije generalisanih impulsa,

$$(3) \quad \dot{u} = (a+bv) p, \quad \dot{v} = q.$$

Hamiltonove jednačine. — Hamiltonova funkcija je $H = p_i \dot{q}^i - L$, a pošto je sistem konzervativan biće $H = T + \Pi$, pri čemu generalisane brzine treba izraziti pomoću generalisanih impulsa. Dakle, biće

$$H = \frac{1}{2} (a+bv) p^2 + \frac{1}{2} q^2 + c + d v^2.$$

Kanonske jednačine kretanja su onda

$$(4) \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial u} = 0,$$

$$(5) \quad \dot{u} = \frac{\partial H}{\partial p} = (a + bv)p,$$

$$(6) \quad \dot{q} = -\frac{\partial H}{\partial v} = -\left(\frac{1}{2}bp^2 + 2dv\right),$$

$$(7) \quad \dot{v} = \frac{\partial H}{\partial q} = q.$$

Dakle, sistemu sa dva stepena slobode odgovaraju četiri obične diferencijalne jednačine prvog reda.

Iz (4) je

$$(8) \quad p = \alpha = \text{const.}$$

što predstavlja ciklički integral. Iz (5) se nalazi

$$(9) \quad v = \frac{1}{\alpha b} \dot{u} - \frac{a}{b},$$

što zamenom u (6) daje

$$\dot{q} = -\frac{2d}{\alpha} \left(\frac{\dot{u}}{\alpha} - a\right) - \frac{1}{2}\alpha^2 b,$$

a odatle se integracijom za početne uslove $u_0, v_0, p_0, q_0, t_0 = 0$ dobiva

$$(10) \quad q - q_0 = -\frac{2d}{\alpha b} (u - u_0) + \left(\frac{2ad}{b} - \frac{1}{2}\alpha^2 b\right)t.$$

Relacije (8) i (10) predstavljaju prve integrale problema jer su p i q generalisani impulsi. Diferenciranjem po vremenu relacije (7) i smenom \dot{q} iz jednačine (6) dobiće se

$$(11) \quad \ddot{v} + 2dv = -\frac{b\alpha^2}{2},$$

odakle se dobiva jedna konačna jednačina kretanja

$$v = A \sin(t\sqrt{2d}) - \frac{b\alpha^2}{4d} + C_1. \quad (C_1 = \text{const.})$$

Unošenjem ove vrednosti u jednačinu (4) dobiće se i druga konačna jednačina kretanja

$$(12) \quad u = -\frac{\alpha Ab}{\sqrt{2d}} \cos(t\sqrt{2d}) - \left(\frac{\alpha^3 b^2}{8d} - \alpha a\right)t + C_2. \quad (C_2 = \text{const.})$$

Rautove jednačine. — Koordinata u je ciklička pa se Rautova funkcija R može formirati smenom generalisane brzine \dot{u} odgovarajućim impulsom p što s obzirom na obrazac (3) daje

$$(13) \quad R = p\dot{u} - L = \frac{1}{2}(a + bv)p^2 - \frac{1}{2}v^2 + c + dv^2.$$

Odgovarajuće Rautove jednačine glase

$$\dot{p} = -\frac{\partial R}{\partial u}, \quad \dot{u} = \frac{\partial R}{\partial p};$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial R}{\partial \dot{v}} - \frac{\partial R}{\partial v} = 0.$$

Ove se jednačine s obzirom na obrazac (13) za Rautovu funkciju svode na naredne tri diferencijalne jednačine

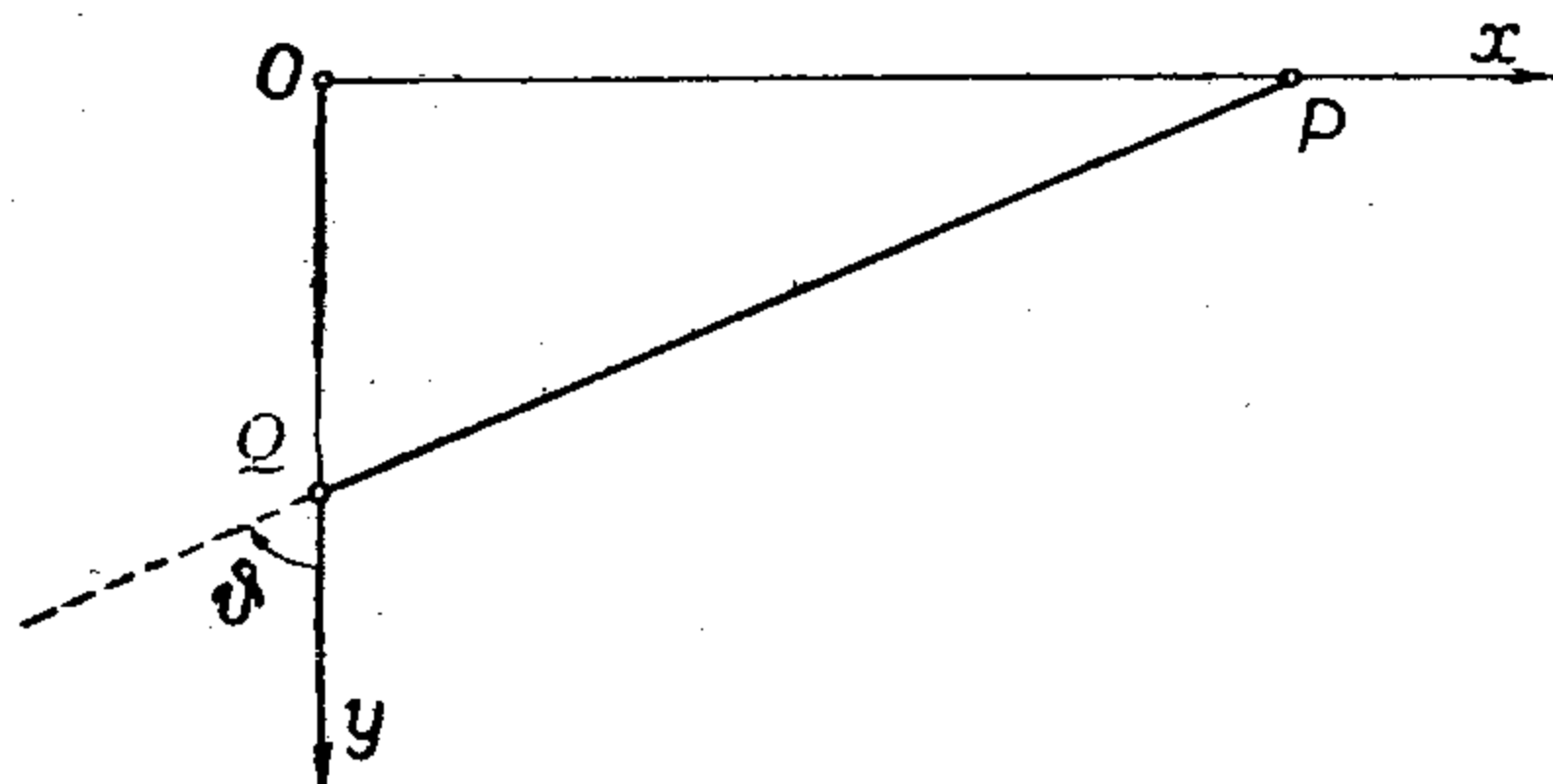
$$(14) \quad \dot{p} = 0, \quad \dot{u} = (a + bv) p;$$

$$\ddot{v} + 2dv + \frac{bp^2}{2} = 0.$$

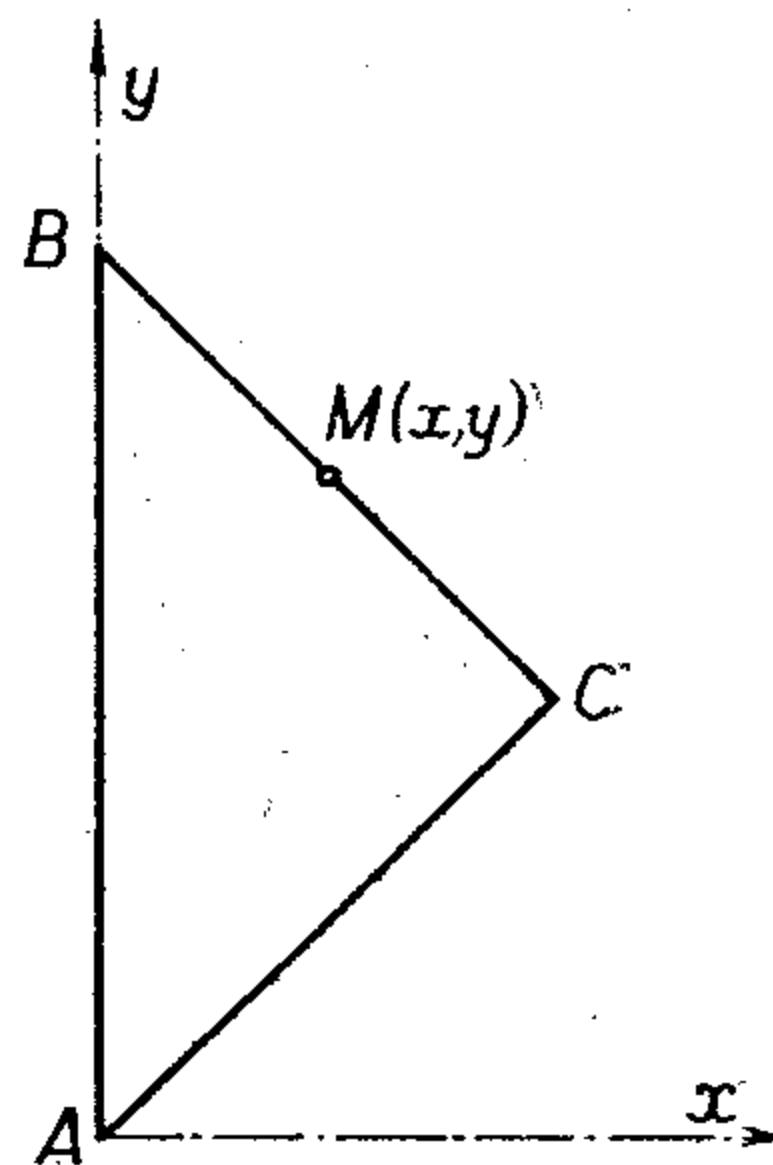
Jednačine (14) odgovaraju kanonskim jednačinama (4—7). Međutim treća jednačina (14) se poklapa sa jednačinom (11) koja je dobivena iz kanonskih jednačina, pa se može zaključiti da Rautove jednačine brže dovode do rešenja ako uočeni sistem ima cikličke koordinate.

6. Dve teške materijalne tačke P i Q jednakih masa m , spojene nepromenljivom dužinom l , kreću se bez trenja po osama x i y Dekartovog pravouglonog koordinatnog sistema od kojih je prva horizontalna, a druga vertikalna i orijentisana naniže. Odrediti kretanje sistema.

Uputstvo: Sistem ima jedan stepen slobode i položaj mu je određen uglom ϑ koji duž l obrazuje sa y -osom (sl. 138).



Slika 138



Slika 139

O d g o v o r : Lagranževa jednačina za kretanje ovog sistema glasi

$$\ddot{\vartheta} + \frac{g}{l} \sin \vartheta = 0,$$

a to je diferencijalna jednačina kretanja matematičkog klatna.

7. Tanka ploča oblika jednakokrako pravouglonog trougla čija je hipotenuza $AB = 12$ cm postavljena je vrhom A (sl. 139) na apsolutno glatku horizontalnu ravan tako da u početnom trenutku hipotenuza AB bude vertikalna. Ako se po-

četni položaj hipotenuze uzme za y -osu i orijentiše naviše, a x -osa uzme u horizontalnoj ravni i ravni ploče, odrediti putanju tačke M , sredine katete AC .

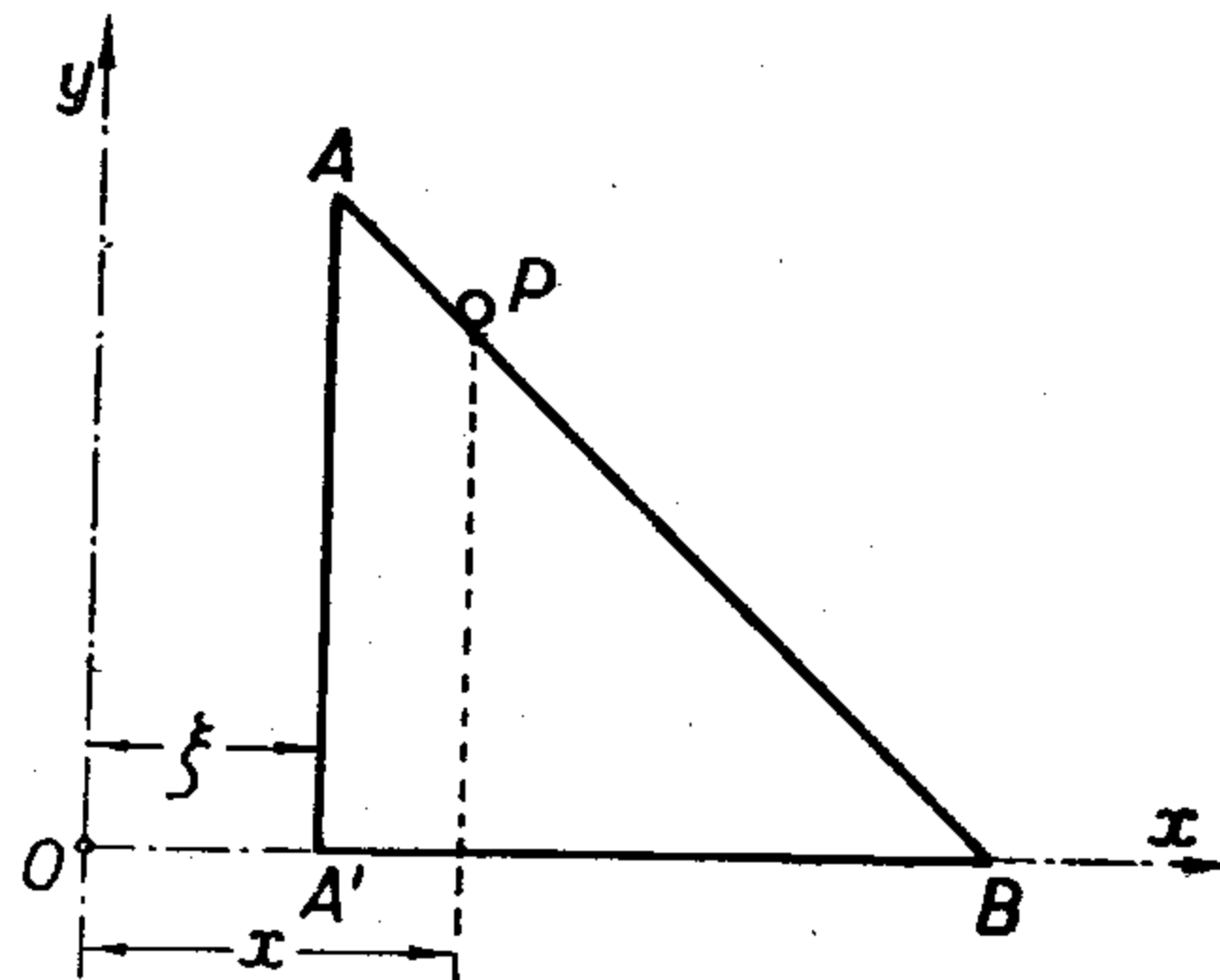
O d g o v o r. Elipsa čija je jednačina

$$\frac{(x-2)^2}{10} + \frac{y^2}{90} = 1.$$

8. Jednakokrako pravougli trougao mase m može da klizi bez trenja u vertikalnoj ravni po horizontalnoj duži na koju se oslanja jednom katetom. Teška materijalna tačka dvostruke mase $2m$ pada niz hipotenuzu trougla bez trenja.

Odrediti kretanje sistema, ako se teška tačka u početku kretanja nalazila u najvišem temenu trougla u miru.

Uputstvo: x -osa se postavi duž prave na koju se trougao oslanja (sl. 140) a y -osa duž početnog položaja vertikalne katete. Sistem ima dva stepena slobode



Slika 140

jer se njegov položaj može odrediti pomoću koordinata x i ξ koji određuju apscise teške tačke P i najvišeg temena A trougla.

O d g o v o r: Iz Lagranževih jednačina kretanja druge vrste dobiva se

$$\ddot{x} = \frac{1}{4}g, \quad \ddot{\xi} = -\frac{1}{2}g,$$

a odatle posle integracije s obzirom na usvojene početne uslove sledi

$$x = \frac{1}{8}gt^2, \quad \xi = -\frac{1}{4}gt^2.$$

9. Dve slobodne teške tačke A i B jednakih masa m nalaze se u početnom trenutku na istoj vertikali. Tačka A se u početnom položaju nalazi iznad tačke B i dobila je horizontalnu početnu brzinu v_0 dok je početna brzina tačke B jednaka nuli.

Odrediti trajektoriju centra mase ovog sistema i njegovu brzinu.

O d g o v o r: Trajektorija težišta biće određena jednačinama

$$x_C = \frac{1}{2}v_0 t; \quad y_C = -\frac{1}{2}gt^2 + y_{C_0},$$

gde je y_C , ordinata težišta u početnom trenutku. Brzina težišta biće određena jednačinama

$$\dot{x}_C = \frac{1}{2} v_0; \quad \dot{y}_C = -gt.$$

10. U vertikalnoj ravni xOy dve teške materijalne tačke jednakih masa m kreću se po osama x odnosno y bez trenja. Ove dve tačke se privlače proporcionalno rastojanju. Odrediti kretanje sistema ako je on u početnom trenutku bio u miru i nalazio se u tačkama $A(x_0, 0)$ i $B(0, y_0)$.

O d g o v o r : Diferencijalne jednačine kretanja biće

$$\ddot{x} = -k^2x; \quad \ddot{y} = -k^2y - g,$$

ako se kao faktor proporcionalnosti sile privlačenja uzme kao obično mk^2 i ako se y -osa orijentiše naviše.

Tražene jednačine kretanja glase

$$x = x_0 \cos kt; \quad y = \left(y_0 + \frac{1}{k^2} g \right) \cos kt - \frac{1}{k^2} g.$$

3.3. Opšti principi mehanike

Polazeći od osnovnih aksioma (Njutnovih zakona) mogu se izvesti diferencijalne jednačine kretanja i dokazati niz stavova opšteg karaktera. Pomoću takvih stavova mogu se sagledati globalne osobine dinamičkih sistema kao celine i napisati diferencijalne jednačine vezane za neke određene osobine sistema. Takvi stavovi su izvedeni u odeljku (3.2).

Pored navedenih opštih teorema mehanike postoje i stavovi mnogo opštijeg karaktera koji u potpunosti karakterišu kretanje materijalnih sistema uopšte ili neke posebne klase sistema. Takvi stavovi mogu da važe za materijalne sisteme sa ma kakvim vezama i ma kakvim aktivnim silama, ili samo za neke ograničene slučajeve (npr. samo za holonomne ili samo za konzervativne sisteme). Ako se pođe od Njutnovih zakona i iz njih izvedenih diferencijalnih jednačina kretanja, takvi se stavovi mogu dokazati, a ako se pođe od tih stavova pa se iz njih mogu izvesti diferencijalne jednačine kretanja, odnosno Njutnovi zakoni, ti se stavovi nazivaju *principi*.

Prema tome, principi mogu pod određenim uslovima da zamene osnovne aksiome mehanike. Da bi neki stav bio princip potrebno je da se on može dokazati polazeći od osnovnih aksioma i diferencijalnih jednačina kretanja, a zatim da se mogu polazeći od samog stava kao aksiome izvesti diferencijalne jednačine kretanja svih ili samo nekih kategorija materijalnih sistema.

Prema matematičkoj formulaciji, principi se dele na *diferencijalne* i *integralne*. Diferencijalni principi su vezani za jednu uočenu ali proizvoljnu konfiguraciju sistema u nekom uočenom ali proizvoljnom trenutku vremena, pa se posmatraju elementarna pomeranja sistema u odnosu na tu konfiguraciju. Integralni principi obuhvataju konačne promene konfiguracije u konačnim vremenskim razmacima. Diferencijalni principi su po svojoj primenljivosti opštiji od integralnih, jer integralni principi ne obuhvataju u svojoj klasičnoj formulaciji neholonomne sisteme i teško mogu da se dovoljno uopšte da ih obuhvate. Integralni principi se nazivaju i *varijacioni* ili *ekstremalni*, jer se njima obično izražavaju ekstremalna svojstva sistema, što se postiže sredstvima varijacionog računa.

3.3.1. Diferencijalni principi

3.3.1.1. D'alamberov princip

Neka se materijalni sistem sastoji od N materijalnih tačaka M_i , ($i = 1, 2, \dots$), sa masama m_i i vektorima položaja \mathbf{r}_i . Neka na tačke tog sistema dejstvuju aktivne sile \mathbf{F}_i i neka je sloboda sistema ograničena sa k_1 holonomnih zadržavajućih v

$$(1) \quad f_\alpha(\mathbf{r}_i; t) = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \dots,$$

i k_2 linearnih neholonomnih zadržavajućih veza

$$(2) \quad \varphi_\beta \equiv \sum_{i=1}^N \mathbf{l}_{\beta i} \cdot \mathbf{v}_i + D_\beta = 0. \quad (\beta = 1, 2, \dots,$$

Kad postoje ovakve veze jednačine kretanja sistema (3.2.3 — 10) mogu napisati u obliku

$$(3) \quad \mathbf{F}_i - m_i \mathbf{w}_i + \sum_{\alpha=1}^{k_1} \lambda_\alpha \text{grad}_i f_\alpha + \sum_{\beta=1}^{k_2} \mu_\beta \mathbf{l}_{\beta i} = \mathbf{0}.$$

Neka su $\delta \mathbf{r}_i$ virtualna pomeranja (moguće varijacije) sistema. Prema (3.2.1 39, 40) sile reakcije idealnih veza ne vrše rad na virtualnim pomeranjima. A su veze (1) i (2) idealne, skalarnim množenjem relacije (3) vektorom virtualnih pomeranja i sabiranjem po svim tačkama sistema dobiće se za ukupni rad na virtualnim pomeranjima izraz

$$(4) \quad \sum_{i=1}^N (\mathbf{F}_i - m_i \mathbf{w}_i) \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0.$$

Izraz

$$(5) \quad \mathbf{F}_i - m_i \mathbf{w}_i = \mathbf{P}_i$$

naziva se *izgubljena sila*.

Prema (4) u najopštijem slučaju idealnih veza važi stav: *Rad izgubljene sile materijalnog sistema na virtualnim pomeranjima jednak je nuli*. Ovaj stav naziva se *D'alamberov (D'Alembert) princip*.

Iz D'alamberovog principa (4) mogu se izvesti diferencijalne jednačine kretanja (3). U slobodnom sistemu varijacije $\delta \mathbf{r}_i$ su potpuno proizvoljne, tj. mogu uzimati po volji i ne podležu nikakvim naknadnim ograničenjima. Stoga se u varijacije mogu izabrati tako da sve sem jedne, recimo $\delta \mathbf{r}_1$ budu jednake nuli a $\delta \mathbf{r}_1$ može da ima potpuno proizvoljnu vrednost. Tada se (4) svodi na

$$(\mathbf{F}_1 - m_1 \mathbf{w}_1) \cdot \delta \mathbf{r}_1 = 0,$$

a kako $\delta \mathbf{r}_1$ može biti potpuno proizvoljno, mora biti

$$\mathbf{F}_1 - m_1 \mathbf{w}_1 = \mathbf{0}.$$

Međutim, varijacije $\delta \mathbf{r}_i$ se mogu izabrati tako da bude $\delta \mathbf{r}_2$ proizvoljno a sve ostale da budu jednake nuli pa će biti

$$\mathbf{F}_2 - m_2 \mathbf{w}_2 = \mathbf{0}$$

itd. za sve varijacije. Dakle, zbog proizvoljnosti virtualnih pomeranja iz D'alamberovog principa proističe da mora biti u slučaju slobodnog sistema

$$(6) \quad \mathbf{F}_i - m_i \mathbf{w}_i = \mathbf{0}$$

za sve $i = 1, 2, \dots, N$.

U slučaju neslobodnog sistema sa bilateralnim vezama varijacije $\delta \mathbf{r}_i$ nisu slobodne i ne mogu imati proizvoljne vrednosti već moraju zadovoljavati $k_1 + k_2$ uslova

$$(7) \quad \sum_{i=1}^N \text{grad}_i f_\alpha \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0, \quad (\alpha = 1, 2, \dots, k_1)$$

$$(8) \quad \sum_{i=1}^N \mathbf{l}_{\beta i} \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0 \quad (\beta = 1, 2, \dots, k_2)$$

jednovremeno sa

$$(9) \quad \sum_{i=1}^N (\mathbf{F}_i - m_i \mathbf{w}_i) \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0.$$

Ako se sad po Lagranževoj metodi neodređenih multiplikatora uvede $k_1 + k_2$ nezavisnih multiplikatora λ_α i μ_β , njima pomnože redom relacije (7) i (8) i zbir tako dobivenih izraza doda relaciji (9) dobiće se

$$(10) \quad \sum_{i=1}^N (\mathbf{F}_i - m_i \mathbf{w}_i + \sum_{\alpha=1}^{k_1} \lambda_\alpha \text{grad}_i f_\alpha + \sum_{\beta=1}^{k_2} \mu_\beta \mathbf{l}_{\beta i}) \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0.$$

Podesnim izborom vrednosti uvedenih množilaca veza, $k_1 + k_2$ koeficijenata uz zavisne varijacije mogu se izjednačiti sa nulom, dok koeficijenti uz nezavisne varijacije moraju biti jednaki nuli iz istih razloga kao i u slučaju slobodnog sistema, tj. zbog potpune slobode nezavisnih varijacija, pa otuda proističe da svi koeficijenti uz varijacije u (10) moraju biti jednaki nuli

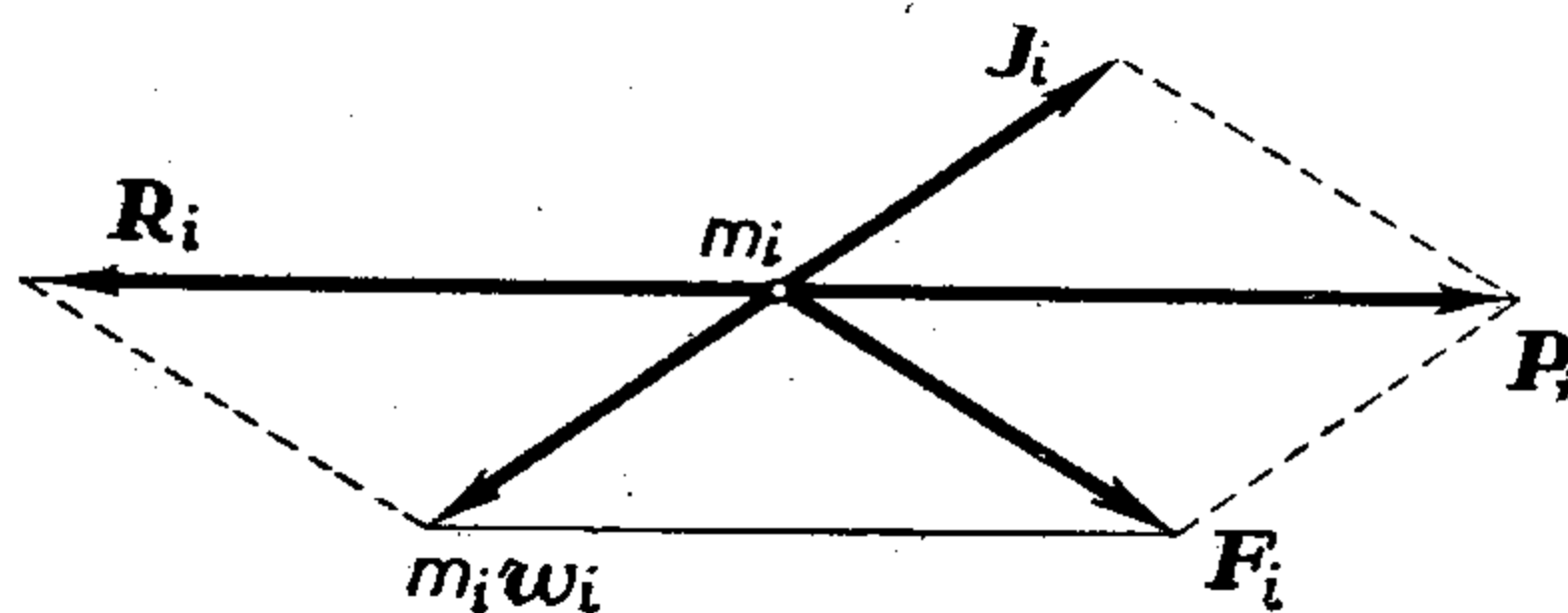
$$\mathbf{F}_i - m_i \mathbf{w}_i + \sum_{\alpha=1}^{k_1} \lambda_\alpha \text{grad}_i f_\alpha + \sum_{\beta=1}^{k_2} \mu_\beta \mathbf{l}_{\beta i} = \mathbf{0},$$

a to su upravo vektorske jednačine kretanja sistema sa idealnim vezama.

U izrazu za Dalamberov princip javljaju se izgubljene sile \mathbf{P}_i koje su, prema diferencijalnim jednačinama kretanja, jednake ali suprotno orijentisane silama reakcije \mathbf{R} , tj.

$$(11) \quad \mathbf{P}_i = \mathbf{F}_i - m_i \mathbf{w}_i = \mathbf{F}_i + \mathbf{J}_i = -\mathbf{R}_i.$$

Sila $\mathbf{J}_i \triangleq -m_i \mathbf{w}_i$ zove se *fiktivna sila inercije*. Sila inercije se zove *fiktivna* samo zato što nije moguće ukazati na njen izvor. Prema (11) u svakoj materijalnoj tački



Slika 141

m_i sistema nalaze se stalno za vreme kretanja tri sile u ravnoteži, aktivna sila \mathbf{F}_i , sila inercije \mathbf{J}_i i sila reakcije \mathbf{R}_i (sl. 141). Zbog toga se relacija (9) naziva i *opšta jednačina kinetostatike*.

3.3.1.2. Princip virtualnih pomeranja

Iz D'alambertovog principa može se neposredno izvesti princip virtualnih pomeranja koji se odnosi na ravnotežu sistema u odsustvu sila inercije. Tada u ravnoteži aktivne sile i sile reakcije veza pa je ubrzanje sistema jednako nuli.

Ako je ubrzanje jednako nuli, brzina ne mora biti jednaka nuli već može biti ma kakav konstantan vektor a kretanje sistema je tada jednoliko pravolinijsko. Međutim, tada se uvek može naći neki koordinatni sistem koji će se kretati jednoliko pravolinijski (translatorno, inercioni koordinatni sistem, odeljak (2.14)) u odnosu na njega uočeni materijalni sistem bude u relativnom miru. Stoga ne gubi ništa u opštosti, ako se pored ubrzanja stavi da je u slučaju ravnoteže sistema i brzina jednaka nuli.

Ako je prema nekom sistemu referencije uočeni materijalni sistem u mi ($\mathbf{w}_i = \mathbf{0}$), iz D'alambertovog principa se dobiva

$$(1) \quad \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0.$$

Relacija (1) predstavlja *Lagranžev princip virtualnog rada (virtualnih pomeranja)*: U položaju ravnoteže ukupni rad na proizvoljnim virtualnim pomeranjima (virtualni rad) sistema jednak je nuli.

U slučaju slobodnog sistema, kad virtualna pomeranja nisu ničim ograničena, iz (1) se dobivaju poznate uslovne jednačine ravnoteže slobodnog sistema

$$(2) \quad \mathbf{F}_i = \mathbf{0}.$$

Međutim, ako je uočeni sistem podložen idealnim dvostranim holonomnim i neholonomnim vezama, tada se iz principa virtualnih pomeranja Lagranževom metodom neodređenih multiplikatora, na isti način, kao što se iz D'alambertovog principa izvode jednačine kretanja vezanog sistema, dobivaju jednačine ravnoteže takvog sistema u obliku

$$(3) \quad \mathbf{F}_i + \sum_{\alpha=1}^{k_1} \lambda_{\alpha} \text{grad}_i f_{\alpha} + \sum_{\beta=1}^{k_2} \mu_{\beta} \mathbf{l}_{\beta i} = \mathbf{0}. \quad (i = 1, 2, \dots, l)$$

U polju Zemljine teže princip virtualnih pomeranja svodi se na jedan specijalan oblik koji se često koristi u statici. Neka su sve aktivne sile koje dejstvu na tačke uočenog materijalnog sistema kolinearne sa z -osom orijentisanom naniže, $\mathbf{F}_i = m_i g \mathbf{k}$. Tada je virtualni rad tih sila

$$(4) \quad \sum_{i=1}^N m_i g \delta z_i = 0.$$

Međutim, kako je $g = \text{const.}$ a $\sum_{i=1}^N m_i z_i = m z_C$, gde je m celokupna masa sistema a C težište sistema, izraz (4) se svodi na

$$(5) \quad \delta z_C = 0,$$

što predstavlja *Toričelijev (Torricelli) princip*: Virtualno pomeranje težišta sistema u ravnoteži jednako je nuli.

3.3.1.3. Gausov princip najmanje prinude

Neka na neki materijalni sistem m_i dejstvuju aktivne sile \mathbf{F}_i , holonomne i neholonomne veze i neka se u nekom trenutku t materijalne tačke sistema nalaze u položaju M_i čiji su vektori položaja \mathbf{r}_i i neka su im brzine \mathbf{v}_i i ubrzanja \mathbf{w}_i .

Kad na tačku m_i u položaju M_i ne bi dejstvovala sila \mathbf{F}_i , za neko beskonačno malo vreme Δt ona bi prešla put (sl. 142)

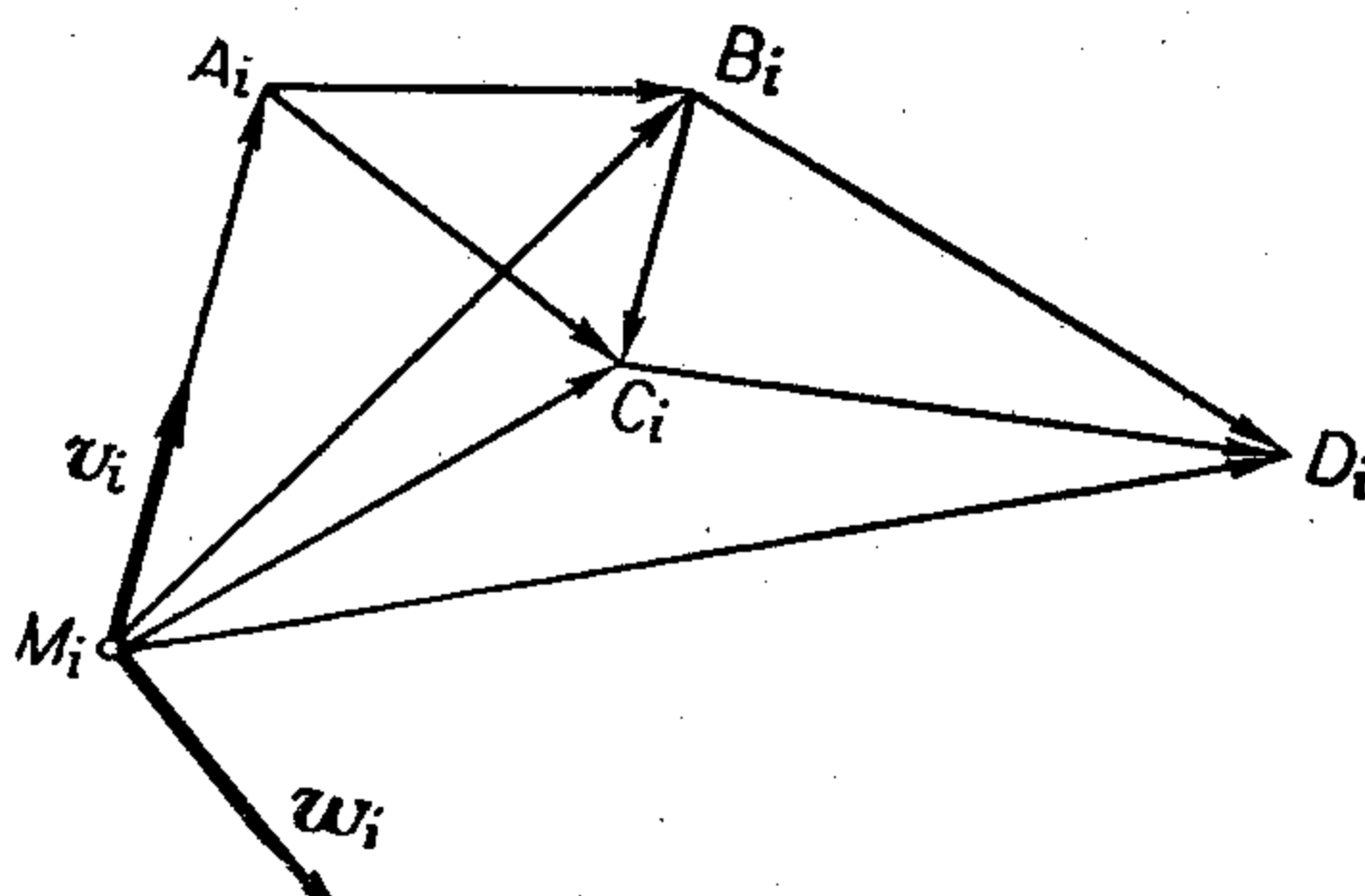
$$(1) \quad \overrightarrow{M_i A_i} = \mathbf{v}_i \Delta t = \dot{\mathbf{r}}_i \Delta t.$$

Ako bi na istu tačku dejstvovala samo aktivna sila \mathbf{F}_i , ona bi prešla put $\overrightarrow{M_i B_i}$ sa ubrzanjem

$$(2) \quad \mathbf{w}_i = \ddot{\mathbf{r}}_i = \frac{\mathbf{F}_i}{m_i},$$

pošto je tada $m_i \mathbf{w}_i = \mathbf{F}_i$. Ako je $\dot{\mathbf{r}}_i = \dot{\mathbf{r}}_i(t)$ konačna vektorska jednačina kretanja uočene tačke, tačka će u trenutku $t + \Delta t$ biti u položaju $\mathbf{r}_i(t + \Delta t)$. Za dovoljno mali priraštaj Δt vremena vektor položaja se može aproksimirati Tejlorovim redom

$$(3) \quad \mathbf{r}_i(t + \Delta t) = \mathbf{r}_i(t) + \dot{\mathbf{r}}_i \Delta t + \frac{1}{2} \ddot{\mathbf{r}}_i \Delta t^2 + \dots$$



Slika 142

Pomeranje tačke pod dejstvom samo aktivne sile biće stoga

$$(4) \quad \overrightarrow{M_i B_i} = \mathbf{r}_i(t + \Delta t) - \mathbf{r}_i(t) = \dot{\mathbf{r}}_i \Delta t + \frac{1}{2} \ddot{\mathbf{r}}_i \Delta t^2,$$

pri čemu se zanemaruju članovi reda koji sadrže više stepene priraštaja vremena kao male veličine višeg reda. Prema (1) i (2) za pomeranje $\overrightarrow{M_i B_i}$ može se onda napisati

$$(5) \quad \overrightarrow{M_i B_i} = \mathbf{v}_i \Delta t + \frac{1}{2} \frac{\mathbf{F}_i}{m_i} \Delta t^2.$$

Odstupanje slobodne tačke pri kretanju pod dejstvom aktivne sile od kretanja po inerciji iznosi

$$(6) \quad \overrightarrow{A_i B_i} = \overrightarrow{M_i B_i} - \overrightarrow{M_i A_i} = \frac{1}{2} \frac{\mathbf{F}_i}{m_i} \Delta t^2,$$

sa tačnošću od beskonačno malih veličina drugog reda.

Pod uticajem aktivne sile \mathbf{F}_i i sile reakcije \mathbf{R}_i tačka m_i kreće se stvarnim ubrzanjem \mathbf{w}_i koje je sad određeno jednačinom kretanja

$$(7) \quad m_i \mathbf{w}_i = \mathbf{F}_i + \mathbf{R}_i$$

i koje se naravno razlikuje od onoga koje izaziva samo aktivna sila \mathbf{F}_i . U trenutku $t + \Delta t$ dospeće onda tačka m_i u položaj C_i određen vektorskom jednačinom kretanja (7). Prema (3) to će pomeranje onda u prvoj aproksimaciji biti određeno obrascem

$$(8) \quad \overrightarrow{M_i C_i} = \dot{\mathbf{r}}_i \Delta t + \frac{1}{2} \mathbf{w}_i \Delta t^2.$$

Odstupanje $\overrightarrow{B_i C_i}$ stvarnog kretanja vezane materijalne tačke od kretanja slobodne tačke na koju dejstvuje ista aktivna sila biće

$$(9) \quad d\mathbf{r}_i^* = \overrightarrow{B_i C_i} = \overrightarrow{M_i C_i} - \overrightarrow{M_i B_i} = \frac{1}{2} \left(\mathbf{w}_i - \frac{\mathbf{F}_i}{m_i} \right) \Delta t^2.$$

Gaus (Gauss) naziva *prinudom* zbir proizvoda mase svake tačke sistema i kvadrata odstupanja $d\mathbf{r}_i^*$ stvarnog položaja tačke od položaja koji bi ona zauzela kao slobodna za beskonačno malo vreme Δt . Prinuda se obično obeležava sa Z (od nemačkog Zwang = prinuda). Ako se stavi

$$Z_1 = \frac{1}{4} (\Delta t)^4 \sum_{i=1}^N m_i \left(\mathbf{w}_i - \frac{\mathbf{F}_i}{m_i} \right)^2$$

pošto konstantni množilac $\frac{1}{4} (\Delta t)^4$ ne utiče na strukturu prinude, usvaja se za prinudu Gausov izraz

$$(10) \quad Z = \frac{4}{(\Delta t)^4} Z_1 = \sum_{i=1}^N m_i \left(\mathbf{w}_i - \frac{\mathbf{F}_i}{m_i} \right)^2 = \sum_{i=1}^N \frac{1}{m_i} \left(\mathbf{F}_i - m_i \mathbf{w}_i \right)^2.$$

U Dekartovim pravouglim koordinatama prinuda Z data je relacijom

$$(11) \quad Z = \sum_{i=1}^N \frac{1}{m_i} [(X_i - m_i \ddot{x}_i)^2 + (Y_i - m_i \ddot{y}_i)^2 + (Z_i - m_i \ddot{z}_i)^2].$$

Gausov princip najmanje prinude tvrdi da među svim mogućim kretanjima vezanog sistema pri stvarnom kretanju prinuda ima najmanju vrednost.

Neka $\overrightarrow{M_i D_i}$ bude neko moguće elementarno pomeranje koje je saglasno sa vezama ali se razlikuje od stvarnog pomeranja $\overrightarrow{M_i C_i}$, koje je takođe saglasno sa vezama. Odstupanje $\overrightarrow{M_i B_i}$ slobodne tačke od mogućeg pomeranja $\overrightarrow{M_i D_i}$ određeno je vektorom

$$\overrightarrow{B_i D_i} = \overrightarrow{M_i D_i} - \overrightarrow{M_i B_i}.$$

Taj se vektor može izraziti kao zbir dva pomeranja

$$\overrightarrow{B_i D_i} = \overrightarrow{B_i C_i} + \overrightarrow{C_i D_i},$$

pri čemu je $\overrightarrow{C_i D_i} = \delta \mathbf{r}_i$ moguća varijacija uočenog sistema, jer su C_i i D_i položaji tačke m_i koji su saglasni sa vezama. Prema (9) biće onda

$$(12) \quad \overrightarrow{B_i D_i} = d\mathbf{r}_i^* + \delta \mathbf{r}_i.$$

Kvadrat intenziteta vektora $\overrightarrow{B_i D_i}$ je onda

$$\overline{B_i D_i}^2 = (dr_i^*)^2 + (\delta r_i)^2 + 2 d\mathbf{r}_i^* \cdot \delta \mathbf{r}_i.$$

Ako se ova relacija pomnoži masama m_i i izvrši sabiranje za sve tačke sistema dobiće se

$$(13) \quad \sum_{i=1}^N m_i \overline{B_i D_i}^2 = \sum_{i=1}^N m_i (dr_i^*)^2 + \sum_{i=1}^N m_i (\delta r_i)^2 + 2 \sum_{i=1}^N m_i d\mathbf{r}_i^* \cdot \delta \mathbf{r}_i.$$

Veličina $\sum_{i=1}^N m_i d\mathbf{r}_i^* \cdot \delta \mathbf{r}_i$ može se prema (9) napisati u obliku

$$\sum_{i=1}^N m_i d\mathbf{r}_i^* \cdot \delta \mathbf{r}_i = \frac{(\Delta t)^2}{2} \sum_{i=1}^N m_i \left(\mathbf{w}_i - \frac{\mathbf{F}_i}{m_i} \right) \cdot \delta \mathbf{r}_i,$$

a prema Dalamberovom principu (3.3.1.1 — 9), pri dejstvu idealnih veza, biće

$$\sum_{i=1}^N m_i d\mathbf{r}_i^* \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0.$$

Prema tome, relacija (13) može se napisati u obliku

$$(14) \quad \sum_{i=1}^N m_i \overline{B_i D_i}^2 = \frac{(\Delta t)^4}{4} \sum_{i=1}^N m_i \left(\mathbf{w}_i - \frac{\mathbf{F}_i}{m_i} \right)^2 + \sum_{i=1}^N m_i (\delta r_i)^2,$$

a kako je $(\delta \mathbf{r}_i \neq 0)$, mora biti

$$\sum_{i=1}^N m_i (\delta r_i)^2 > 0,$$

jer je to zbir pozitivnih brojeva, pa se dobiva

$$(15) \quad \sum_{i=1}^N m_i \overline{B_i D_i}^2 > \frac{(\Delta t)^2}{4} \sum_{i=1}^N m_i \left(\mathbf{w}_i - \frac{\mathbf{F}_i}{m_i} \right)^2 = \frac{(\Delta t)^4}{4} Z.$$

Dakle prinuda $\sum_{i=1}^N m_i \overline{B_i D_i}^2$ pri proizvoljnom mogućem pomeranju sistema veća je od prinude na stvarnom pomeranju, čime je Gausov princip dokazan.

Iz prethodnih izlaganja jasno je da se u Gausovom principu radi samo o onim mogućim pomeranjima koja imaju iste početne uslove kao i stvarno pomeranje. Drugim rečima prinuda se posmatra samo kao funkcija ubrzanja pa se položaj (\mathbf{r}) i brzina (\mathbf{v}) ne variraju.

Ubrzanja \mathbf{w}_i mogu biti proizvoljna, ali za stvarno kretanje moraju biti takvi da Z bude minimalno. Uslov minimalnosti odnosno stacionarnosti prinude jest da varijacija prinude koja odgovara varijaciji ubrzanja bude jednaka nuli, tj.

$$(16) \quad \delta Z = 2 \sum_{i=1}^N [(X_i - m_i \ddot{x}_i) \delta \ddot{x}_i + (Y_i - m_i \ddot{y}_i) \delta \ddot{y}_i + (Z_i - m_i \ddot{z}_i) \delta \ddot{z}_i] = 0,$$

odnosno

$$(17) \quad \delta Z = 2 \sum_{i=1}^N (\mathbf{F}_i - m_i \mathbf{w}_i) \cdot \delta \mathbf{w}_i = 0.$$

Za slobodan sistem su varijacije $\delta \mathbf{w}_i$ ubrzanja potpuno slobodne pa je uslov (17) zadovoljen, ako je

$$m_i \mathbf{w}_i = \mathbf{F}_i,$$

a to su jednačine kretanja slobodnog sistema.

Gausov princip najmanje prinude je opštiji od D'alambertovog, jer iz njega se mogu izvesti diferencijalne jednačine kretanja sistema i sa nelinearnim nehomonomnim vezama, što iz D'alambertovog principa nije moguće.

Za neslobodni sistem ubrzanja moraju zadovoljavati uslove (3.2.1 — 32, 33)

$$(18) \quad \sum_{i=1}^N \text{grad}_i f_\alpha \cdot \mathbf{w}_i + D_2 f_\alpha = 0, \quad (\alpha = 1, 2, \dots, k_1)$$

$$\sum_{i=1}^N \text{grad}_{\mathbf{v}_i} \varphi_\beta \cdot \mathbf{w}_i + D_2 \varphi_\beta = 0. \quad (\beta = 1, 2, \dots, k_2)$$

Ako su \mathbf{w}_{1i} i \mathbf{w}_{2i} dva ubrzanja koja zadovoljavaju ove uslove i ako je $\mathbf{w}_{1i} - \mathbf{w}_{2i} = \delta \mathbf{w}_i$ varijacija ubrzanja, iz (18) se dobiva da varijacije ubrzanja moraju da zadovoljavaju uslove

$$(19) \quad \sum_{i=1}^N \text{grad}_i f_\alpha \cdot \delta \mathbf{w}_i = 0,$$

$$\sum_{i=1}^N \text{grad}_{\mathbf{v}_i} \varphi_\beta \cdot \delta \mathbf{w}_i = 0.$$

Na taj način između $3N$ koordinata vektora $\delta \mathbf{w}_i$ postoje $k_1 + k_2$ veza iz kojih se $k_1 + k_2$ koordinata tih varijacija mogu izraziti kao linearne funkcije preostalih $3N - k_1 - k_2$ koordinata varijacija ubrzanja. Potpuno analogno postupku kod D'alambertovog principa i ovde se mogu uvesti neodređeni množioc λ_α i μ_β relacija (19). Dodavanjem izrazu (17) zbir relacija (19) pomnoženih odgovarajućim množiocima λ_α i μ_β dobiće se

$$(20) \quad \sum_{i=1}^N (\mathbf{F}_i - m_i \mathbf{w}_i + \sum_{\alpha=1}^{k_1} \lambda_\alpha \text{grad}_i f_\alpha + \sum_{\beta=1}^{k_2} \mu_\beta \text{grad}_{\mathbf{v}_i} \varphi_\beta) \cdot \delta \mathbf{w}_i = 0.$$

Davanjem množiocima λ_α i μ_β posebnih vrednosti mogu se u (20) izjednačiti s nulom koeficijenti uz zavisne koordinate varijacija ubrzanja, a preostali koeficijenti moraju biti jednaki nuli, jer su preostale koordinate varijacija ubrzanja potpuno slobodne. Stoga su u stvari svi koeficijenti uz varijacije ubrzanja u (20) jednaki nuli

$$(21) \quad m_i \mathbf{w}_i = \mathbf{F}_i + \sum_{\alpha=1}^{k_1} \lambda_\alpha \text{grad}_i f_\alpha + \sum_{\beta=1}^{k_2} \mu_\beta \text{grad}_{\mathbf{v}_i} \varphi_\beta,$$

a to su diferencijalne jednačine kretanja neslobodnog sistema.

Na taj način su iz Gausovog principa izvedene diferencijalne jednačine kretanja materijalnog sistema u najopštijem slučaju, čime je i dokazano da je Gausov princip najmanje prinude sasvim opšti princip.

3.3.2. Integralni principi

Za diferencijalne principe je karakteristično da su formulisani lokalno, tj. za određeni trenutak vremena posmatraju se razne moguće konfiguracije sistema koje su bliske stvarnoj konfiguraciji i tvrdi da stvarna konfiguracija, uslovljena aktivnim silama i vezama, mora da ispunjava određene uslove. Ti uslovi predstavljaju sadržinu principa. Npr. D'alamberov princip tvrdi da je rad izgubljenih sila na virtualnim pomeranjima u slučaju idealnih bilateralnih veza jednak nuli a Gausov princip tvrdi da pri stvarnom kretanju prinuda mora biti minimalna. Razne bliske konfiguracije se upoređuju pomoću varijacija, tj. virtualnih pomeranja.

Integralni principi se u osnovi razlikuju od diferencijalnih time što se u njima upoređuju konačna pomeranja za konačne vremenske razmake a ne konfiguracije u datom trenutku. Ako su koordinate nekog sistema u trenutku t_0 date sa

$$(1) \quad q^i = q^i(t_0), \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

skup koordinata $q_0^1, q_0^2, \dots, q_0^n$ određuje početnu konfiguraciju Σ_0 sistema. U nekom trenutku $t > t_0$ konfiguracija $\Sigma(t)$ biće određena skupom koordinata sistema

$$(2) \quad q^i = q^i(t). \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

Kad se u relacijama (2) vreme menja, te jednačine određuju tzv. putanju sistema koju čini skup putanja svih materijalnih tačaka sistema. U konfiguracionom prostoru to je putanja reprezentativne tačke.

Ako se kretanje posmatra u nekom konačnom vremenskom razmaku (t_1, t_2) tako da je početna konfiguracija $\Sigma_1 = \Sigma(t_1)$ a krajnja $\Sigma_2 = \Sigma(t_2)$, te konfiguracije biće određene koordinatama sistema

$$(3) \quad \begin{aligned} \Sigma_1 &: q_1^1, \dots, q_1^n; \\ \Sigma_2 &: q_2^1, \dots, q_2^n. \end{aligned}$$

Iz početne konfiguracije Σ_1 sistem može da pređe u krajnju Σ_2 po beskonačno mnogo puteva. Samo jedan od njih, recimo onaj određen jednačinama (2) predstavlja stvarnu putanju sistema i zove se *direktni* (ili *stvarni*) put. Ostali mogući putevi su određeni recimo relacijama

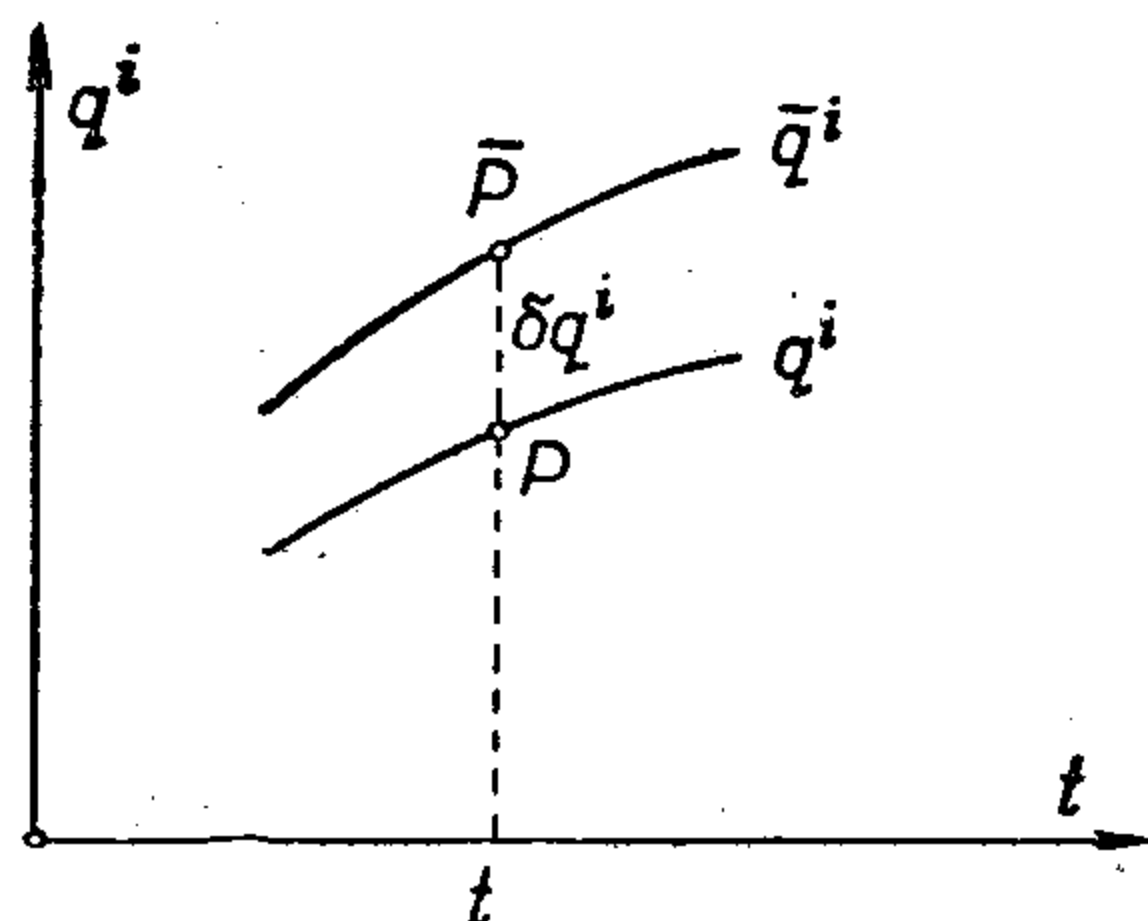
$$(4) \quad \bar{q}^i = \bar{q}^i(t)$$

i nazivaju se *zaobilazni putevi*. Razlika koordinata sistema δq^i na direktnom i zaobilaznom putu u istom trenutku t , $t_1 \leq t \leq t_2$ (sl. 143)

$$(5) \quad \delta q^i = \bar{q}^i - q^i$$

naziva se *varijacija generalisanih koordinata*. Ta razlika je funkcija vremena, tako da je

$$(6) \quad \delta q^i = \bar{q}^i(t) - q^i(t) = \eta^i(t).$$



Slika 143

Kad je varijacija neka data funkcija vremena, koordinate sistema na zaobilaznom putu biće

$$(7) \quad \bar{q}^i = q^i + \delta q^i = q^i + \eta^i(t).$$

I brzine sistema na raznim putevima se razlikuju. Diferencijacijom po vremenu relacije (6) dobiće se

$$(8) \quad \frac{d}{dt} \delta q^i = \dot{\bar{q}}^i - \dot{q}^i = \dot{\eta}^i.$$

Međutim je $\dot{\bar{q}}^i - \dot{q}^i = \delta \dot{q}^i$ razlika brzina na direktnom i zaobilaznom putu i naziva se *varijacija brzine* pa se prema (8) može pisati

$$(9) \quad \frac{d}{dt} \delta q^i = \delta \dot{q}^i.$$

Iz konfiguracije Σ_1 u konfiguraciju Σ_2 sistem ne mora da dospe po direktnom i po zaobilaznim putevima za isto vreme. Ako iz jedne konfiguracije pređe u drugu za isto vreme po svim putevima, direktnom i zaobilaznim, kaže se da je *kretanje izohrono (jednakovremeno)*. Međutim, ako je u toku kretanja svakoj konfiguraciji sistema na stvarnom putu uvek *istovremeno* koordinirana konfiguracija na zaobilaznom putu (sl. 143), tj. vreme se ne varira, kretanje je *sinhrono (istovremeno)*. Sinhrona kretanja su uvek izohrona, a izohrona mogu biti i asinhrona.

Kad je neka veličina F vezana za kretanje sistema, svakako će njena vrednost biti zavisna od puta. Neka F bude funkcija položaja i brzine, tako da je na direktnom putu

$$F = F(q^i; \dot{q}^i; t).$$

Na zaobilaznom putu vrednost funkcije F biće

$$\bar{F} = F(\bar{q}^i; \dot{\bar{q}}^i; t) = F(q^i + \eta^i; \dot{q}^i + \dot{\eta}^i; t).$$

Za dovoljno mala odstupanja zaobilaznog puta od direktnog funkcija F može se razviti u Tejlorov red u nekom trenutku t , pri čemu su q^i i \dot{q}^i nezavisne promenljive,

$$\begin{aligned} \bar{F} = & F(q^i; \dot{q}^i; t) + \frac{\partial F}{\partial q^i} \eta^i + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}^i} \dot{\eta}^i + \\ & + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial q^i \partial q^j} \eta^i \eta^j + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial q^i \partial \dot{q}^j} \eta^i \dot{\eta}^j + \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j} \dot{\eta}^i \dot{\eta}^j \right) + \\ & + \frac{1}{3!} \left(\frac{\partial^3 F}{\partial q^i \partial q^j \partial q^k} \eta^i \eta^j \eta^k + \dots \right) + \dots \end{aligned}$$

Razlika vrednosti funkcije F na direktnom i na zaobilaznom putu je *varijacija* te funkcije,

$$(10) \quad \begin{aligned} \Delta F = \bar{F} - F = & \frac{\partial F}{\partial q^i} \eta^i + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}^i} \dot{\eta}^i + \\ & + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial q^i \partial q^j} \eta^i \eta^j + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial q^i \partial \dot{q}^j} \eta^i \dot{\eta}^j + \dots \right) + \dots \end{aligned}$$

Kad su odstupanja koordinata q^i i generalisanih brzina \dot{q}^i po direktnom i indirektnom putu *infinitesimalna*, može se uvesti neki infinitesimalni konstantni množilac ε , takav da ε^2 bude mala veličina drugog reda u poređenju sa ε , ε^3 će biti trećeg reda itd. Tada se u (6) i (8) mesto η^i , $\dot{\eta}^i$ može uvesti $\varepsilon\eta^i$ i $\varepsilon\dot{\eta}^i$ tj. pisati

$$(11) \quad \delta q^i = \varepsilon \eta^i, \quad \delta \dot{q}^i = \varepsilon \dot{\eta}^i,$$

kako bi se naznačio red odstupanja.

Ako se uvedu i oznake

$$(12) \quad \delta F \equiv \frac{\partial F}{\partial q^i} \eta^i + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}^i} \dot{\eta}^i$$

$$\delta^2 F = \frac{\partial^2 F}{\partial q^i \partial q^j} \eta^i \eta^j + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial q^i \partial \dot{q}^j} \eta^i \dot{\eta}^j + \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j} \dot{\eta}^i \dot{\eta}^j,$$

.

varijacija funkcije F može se onda izraziti u obliku reda

$$(13) \quad \Delta F = \varepsilon \delta F + \frac{1}{2!} \varepsilon^2 \delta^2 F + \dots$$

Veličine δF , $\delta^2 F$, ... su za dato odstupanje η^i određene, pa (13) predstavlja stepeni red po ε ; za $\varepsilon = 0$ indirektna putanja se poklapa sa direktnom. Veličine δF , $\delta^2 F$, ... nazivaju se *prva varijacija*, *druga varijacija* itd. funkcije F .

Kad je zaobilazni put vrlo blizak direktnom u redu (13) može se zadržati samo na članovima linearnim po ε , dok se ostali članovi zanemaruju kao infinitesimalne veličine višeg reda pa je s obzirom na (11)

$$(14) \quad \Delta F = \varepsilon \delta F = \frac{\partial F}{\partial q^i} \delta q^i + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}^i} \delta \dot{q}^i.$$

Tada se pod varijacijom podrazumeva prva varijacija i nije potrebno da se posebno naglašava da se radi o prvoj aproksimaciji varirane funkcije. U narednim razmatranjima biće tretirana samo infinitesimalna odstupanja zaobilazne putanje od direktne.

3.3.2.1. Hamiltonov princip

Neka je neki uočeni materijalni sistem sa n stepena slobode holonoman i neka na njega dejstvuju konzervativne aktivne sile sa funkcijom sile U (sistem sam ne mora biti konzervativan). Kinetički potencijal (Lagranževa funkcija)

$$(1) \quad L = T + U$$

je tada u opštem slučaju funkcija položaja, brzine i vremena

$$(2) \quad L = L(q^i; \dot{q}^i; t) = L(q^1, \dots, q^n; \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n; t).$$

Skalar

$$(3) \quad dW = L dt$$

je definisan u svakoj tački putanje sistema i naziva se *element dejstva*, a

$$(4) \quad W = \int_{t_1}^{t_2} L dt$$

je veličina određena ukupnim kretanjem sistema u vremenskom razmaku (t_1, t_2) i naziva se *dejstvo u Hamiltonovom smislu*.

Neka je neki materijalni sistem podvrgnut narednim ograničenjima:

- 1) Sistem je holonoman i na njega dejstvuju konzervativne aktivne sile.
- 2) Odstupanja zaobilaznih puteva od direktnog su infinitezimalna ($\delta q^i = \varepsilon \eta^i$).
- 3) Kretanje je sinhrono. Sistem polazi iz početne konfiguracije u trenutku t_1 i stiže u krajnju konfiguraciju po direktnoj i po zaobilaznim putanjama u isto vreme t_2 .

Pod navedenim uslovima za kretanje sistema važi *Hamiltonov princip*: Svaki holonomni sistem na koji dejstvuju konzervativne aktivne sile kreće se tako da Hamiltonovo dejstvo ima stacionarnu vrednost na stvarnom putu u poređenju sa vrednostima na zaobilaznim putevima.

Ovo tvrđenje može se dokazati ako se pođe od Njutnovih zakona odnosno Lagranževih jednačina druge vrste koje važe za posmatrani sistem (3.2.10 — 36), u ovakvom slučaju

$$(5) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0. \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

Naime, određivanje kretanja prema Hamiltonovom principu svodi se na određivanje funkcija $q^i = q^i(t)$ takvih da dejstvo dato integralom (4) bude stacionarno. Prema varijacionom računu uslov za to je da varijacija integrala (4) bude jednaka nuli

$$(6) \quad \delta W = \delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0.$$

Granice integracije su nepromenljive za kretanja na stvarnom i na zaobilaznim putevima pa se može napisati

$$(7) \quad \delta W = \int_{t_1}^{t_2} \delta L dt = 0.$$

Prema (3.2.10 — 35) i (3.3.2 — 14) biće

$$(7a) \quad \delta L = \delta T + \delta U = \frac{\partial L}{\partial q^i} \delta q^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \delta \dot{q}^i,$$

tako da se za varijaciju dejstva dobiva obrazac

$$(8) \quad \delta W = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q^i} \delta q^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \delta \dot{q}^i \right) dt.$$

Podintegralna funkcija δL sadrži varijaciju koordinata i generalisanih brzina. Delimičnim integraljenjem varijacije generalisanih brzina mogu se eliminisati. S obzirom na (3.3.2 — 9) može se napisati

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \delta \dot{q}^i dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} d \delta q^i,$$

pa će delimično integraljenje dati

$$(9) \quad \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \delta \dot{q}^i dt = \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \delta q^i \right)_{t_2} - \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \delta q^i \right)_{t_1} - \int_{t_1}^{t_2} \delta q^i \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) dt.$$

Prema pretpostavci (3) o izohronosti kretanja, u trenucima t_1 i t_2 konfiguracije sistema se poklapaju pa je stoga

$$(\delta q^i)_{t_2} = (\delta q^i)_{t_1} = 0$$

i relacija (9) se svodi na

$$(10) \quad \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \delta \dot{q}^i dt = - \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) \delta q^i dt.$$

Unošenjem ovoga u (8) dobiće se za varijaciju dejstva izraz

$$(11) \quad \delta \mathcal{W} = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) \delta q^i dt.$$

Ako se pretpostavi važenje Lagranževih jednačina kretanja (5), neposredno se dobiva

$$\delta \mathcal{W} = 0,$$

jer je podintegralna funkcija jednaka nuli, i time je dokazano da je pri stvarnom kretanju Hamiltonovo dejstvo stacionarno.

Obrnuto, ako se pretpostavi da je dejstvo stacionarno, prema (11) imamo

$$(12) \quad \delta \mathcal{W} = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) \delta q^i dt = 0.$$

Varijacije $\delta q^i = \varepsilon \eta^i(t)$ su potpuno slobodne, proizvoljne funkcije vremena, jer sem pretpostavke o veličini ne moraju zadovoljavati nikakve naknadne uslove.

Ako se radi kratkoće pisanja pri tom stavi

$$\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \equiv f_i.$$

može se (12) napisati u obliku

$$\delta \mathcal{W} = \int_{t_1}^{t_2} f_i \delta q^i dt = 0.$$

Zbog potpune proizvoljnosti funkcija η^i mogu se varijacije izabrati tako da bude $\delta q^1 \neq 0$ a $\delta q^2 = \dots = \delta q^n = 0$. Tada se izraz za varijaciju dejstva svodi na

$$\delta \mathcal{W} = \int_{t_1}^{t_2} f_1 \delta q^1 dt.$$

Pretpostavimo sad da f_1 nije jednako nuli u čitavom intervalu (t_1, t_2) , već da postoji neki podinterval (τ_1, τ_2) tog intervala ($t_1 < \tau_1 < \tau_2 < t_2$) u kome je $f_1 > 0$. Ako se onda proizvoljna funkcija $\eta^1(t)$ izabere tako da taj podinterval (τ_1, τ_2) bude

sinhron za direktni i zaobilazne puteve, tj. da bude $\eta^1(\tau_1) = \eta^1(\tau_2) = 0$ a osim toga da je $\delta q^1 = \varepsilon \eta^1(t) > 0$ u tom podintervalu a van njega u intervalu (t_1, t_2) da bude $\eta^1 = 0$, bila bi varijacija dejstva pozitivna, tj.

$$\delta W = \int_{t_1}^{t_2} f_1 \delta q^1 dt = \int_{\tau_1}^{\tau_2} f_1 \delta q^1 dt > 0,$$

a to protivreči pretpostavci. Na sličan način pretpostavka da postoji neki podinterval intervala (t_1, t_2) u kome je $f_1 < 0$, zbog proizvoljnosti izbora δq^1 dovodi do toga da je $\delta W < 0$, a i to protivreči pretpostavci. Prema tome, u čitavom intervalu (t_1, t_2) mora biti $f_1 = 0$. Na isti način se može dokazati da je $f_2 = 0, \dots, f_n = 0$ a to znači da se iz (12) dobivaju Lagranževe jednačine kretanja holonomnog sistema na koji dejstvuju konzervativne sile, što je i trebalo dokazati.

Na taj način je pokazano da iz Njutnovih zakona zaista proizilazi da je na stvarnom putu za holonomne sisteme sa konzervativnim aktivnim silama Hamiltonovo dejstvo stacionarno i da se iz stacionarnosti Hamiltonovog dejstva dobivaju Lagranževe jednačine kretanja. Iz Hamiltonovog principa se takođe mogu neposredno izvesti i kanonske jednačine.

Važnost Hamiltonovog principa može se proširiti i na nekonzervativne aktivne sile. Tada u obrascu (7a) za varijaciju Lagranževe funkcije treba pisati

$$(13) \quad \delta L = \delta T + \delta A = \delta T + Q_i \delta q^i,$$

gde su Q_i generalisane sile a $\delta A = Q_i \delta q^i$ je rad aktivnih nepotencijalnih sila na virtualnim pomeranjima (virtualni rad), pa se Hamiltonov princip svodi na oblik

$$(14) \quad \delta W = \int_{t_1}^{t_2} (\delta T + Q_i \delta q^i) dt = 0.$$

Oдавde se na isti način kao i u slučaju konzervativnih sila dobiva

$$(15) \quad \delta W = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial T}{\partial q^i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} + Q_i \right) \delta q^i dt = 0.$$

Ako se postuliraju Lagranževe jednačine druge vrste dobiće se $\delta W = 0$ i obrnuto, ako se postulira relacija (15) zbog nezavisnosti varijacija dobiće se Lagranževe jednačine druge vrste za nekonzervativne sisteme.

Proširenje Hamiltonovog principa na neholonomne sisteme u gornjem obliku nije moguće, jer varijacije δq^i moraju zadovoljavati i naknadne uslove nametnute neholonomnim vezama, ali je i pri kretanju neholonomnih sistema dejstvo u Hamiltonovom smislu stacionarno na stvarnom putu, i ako se obrnuto ne može izvesti sredstvima koja u ovim izlaganjima stoje na raspolaganju.

3.3.2.2. Mopertiji-Lagranžev princip najmanjeg dejstva

Za holonomne konzervativne sisteme postoji integral energije (3.2.10 — 28)

$$(1) \quad T - U = h = \text{const.}$$

Lagranževa funkcija L se stoga za konzervativne sisteme može izraziti obrascem

$$(2) \quad L = T + U = 2T - h.$$

S obzirom na (2) dejstvo u Hamiltonovom smislu za konzervativne sisteme može se izraziti obrascem

$$(3) \quad W = \int_{t_1}^{t_2} L dt = \int_{t_1}^{t_2} (2T - h) dt,$$

odnosno

$$(4) \quad W = \int_{t_1}^{t_2} 2T dt - h(t_2 - t_1).$$

Veličina

$$(5) \quad S = \int_{t_1}^{t_2} 2T dt$$

predstavlja *dejstvo u Lagranževom smislu* ili *karakterističnu funkciju* uočenog dinamičkog sistema.

Ako se, dakle, uoči holonomni i konzervativni sistem i pretpostavi:

1) da su, kao i u slučaju Hamiltonovog principa, odstupanja zaobilaznih puteva od direktnog puta infinitezimalna ($\delta q^i = \epsilon \eta^i$);

2) da je kretanje u intervalu vremena (t_1, t_2) izohrono, ali da sad nije sinhrono već se i vreme varira; i

3) da se kretanje po stvarnom i zaobilaznim putevima odvija pri stalnoj totalnoj mehaničkoj energiji h , tada će, kad obrasci (4) i (5) važe za direktni put na zaobilaznom putu biti

$$(6) \quad \begin{aligned} \bar{W} &= \int_{t_1}^{t_2} 2\bar{T} dt - h(t_2 - t_1), \\ \bar{S} &= \int_{t_1}^{t_2} 2\bar{T} dt. \end{aligned}$$

Varijacija Hamiltonovog dejstva biće onda

$$(7) \quad \delta W = \bar{W} - W = \bar{S} - S = \delta S,$$

jednaka varijaciji Lagranževog dejstva, jer je $h(t_2 - t_1)$ konstantno.

Hamiltonov princip važi za sve holonomne sisteme na koje dejstvuju konzervativne aktivne sile pa prema tome važi i za konzervativne sisteme. Kako je prema Hamiltonovom principu $\delta W = 0$, to će za konzervativne sisteme biti

$$(8) \quad \delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} 2T dt = 0.$$

Obrazac (8) predstavlja *Mopertiji (Maupertius) - Lagranžev princip najmanjeg dejstva*: *Svaki holonomni konzervativni sistem kreće se tako da na njegovom stvarnom putu Lagranževo dejstvo ima stacionarnu vrednost u poređenju sa vrednostima tog dejstva na zaobilaznim putevima, ako se kretanje na stvarnom i zaobilaznim putevima vrši sa istom totalnom energijom.*

Iz Mopertiji-Lagranževog principa diferencijalne jednačine kretanja mogu se izvesti na sličan način kao i iz Hamiltonovog principa kad se prema (2) stavi

$$2T = L + h$$

tako da se relacija (8) može napisati u obliku

$$(9) \quad \delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} (L + h) dt = \int_{t_1}^{t_2} \delta L dt,$$

jer je $\delta h = 0$, pošto po pretpostavci sistem ima na svim putevima istu totalnu energiju.

Kod Lagranževog principa najmanje akcije treba obratiti pažnju na činjenicu da tački $P(q^i)$ na direktnom putu i odgovarajućoj tački $\bar{P}(q^i + \delta q^i)$ na zaobilaznom putu sad ne odgovara isti trenutak vremena t , već tački na zaobilaznom putu odgovara vreme $t + \delta t$. Međutim, isto onako kako uzimamo da su početni i krajnji položaj sistema na direktnom i zaobilaznom putu isti usvajamo i to da se prelaz iz početnog u krajnji položaj odvija po svim putevima za isto vreme.

Osim toga varijacija δq^i generalisane brzine q^i u slučaju asinhronog kretanja, tj. kad se i vreme varira po direktnom i zaobilaznom putu sistema se računa drukčije. Naime u slučaju sinhronog kretanja je

$$\delta \dot{q}^i = \frac{d}{dt} (\delta q^i)$$

što znači da su tada operatori δ i $\frac{d}{dt}$ razmenljivi. U slučaju asinhronog kretanja biće prva varijacija generalisane brzine, s obzirom da se i vreme varira, određena relacijom

$$(10) \quad \delta \dot{q}^i = \frac{d(q^i + \delta q^i)}{d(t + \delta t)} - \frac{dq^i}{dt}$$

Prvi količnik s desne strane može se transformisati na naredni način

$$\begin{aligned} \frac{dq^i + d(\delta q^i)}{dt + d(\delta t)} &= \frac{\dot{q}^i + \frac{d}{dt}(\delta q^i)}{1 + \frac{d}{dt}(\delta t)} = \left[\dot{q}^i + \frac{d}{dt}(\delta q^i) \right] \left[1 - \frac{d}{dt}(\delta t) + \left(\frac{d}{dt} \delta t \right)^2 + \dots \right] = \\ &= \dot{q}^i + \frac{d}{dt}(\delta q^i) - \dot{q}^i \frac{d}{dt}(\delta t), \end{aligned}$$

gde su beskonačno male veličine višeg reda izostavljene. Prema tome biće

$$(11) \quad \delta \dot{q}^i = \frac{d}{dt}(\delta q^i) - \dot{q}^i \frac{d}{dt}(\delta t),$$

odn.
$$\frac{d}{dt}(\delta q^i) = \delta \dot{q}^i + \dot{q}^i \frac{d}{dt}(\delta t),$$

a ova relacija pokazuje da u slučaju asinhronog kretanja operatori δ i $\frac{d}{dt}$ nisu razmenljivi.

3.3.2.3. Hercov princip najmanje krivine

U kinematici tačke (odjeljak 1.6.1) navedeno je da je krivina trajektorije tačke određena vektorom

$$(1) \quad \chi = \frac{d\mathbf{t}}{ds} = \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2},$$

gde je \mathbf{r} vektor položaja tačke, $\mathbf{t} = d\mathbf{r}/ds$ je jedinični vektor tangente trajektorije, s je dužina luka trajektorije i $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ vektorska konačna jednačina trajektorije. Ako se Dekartove pravouglo koordinatne x, y, z označe sa $x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z$, koordinate vektora krivine biće

$$(2) \quad x^i = \frac{dr^i}{ds} = \frac{d}{ds} \left(\frac{dx^i}{ds} \right). \quad (i = 1, 2, 3)$$

Za neke krivolinijske koordinate q^j ,

$$(3) \quad q^j = q^j(x^1, x^2, x^3); \quad x^i = x^i(q^1, q^2, q^3)$$

biće

$$(4) \quad \frac{dx^i}{ds} = \frac{\partial x^i}{\partial q^j} \frac{dq^j}{ds},$$

pa je

$$(5) \quad x^i = \frac{d^2 x^i}{ds^2} = \frac{\partial^2 x^i}{\partial q^j \partial q^k} \frac{dq^j}{ds} \frac{dq^k}{ds} + \frac{\partial x^i}{\partial q^j} \frac{d^2 q^j}{ds^2}.$$

Ako se relacija (5) pomnoži parcijalnim izvodom $\frac{\partial q^l}{\partial x^i}$ i izvrši sabiranje po indeksu i dobiće se relacija

$$(6) \quad k^l \equiv \frac{\partial q^l}{\partial x^i} x^i = \frac{d^2 q^l}{ds^2} + \frac{\partial q^l}{\partial x^i} \frac{\partial^2 x^i}{\partial q^j \partial q^k} \frac{dq^j}{ds} \frac{dq^k}{ds}. \quad (l = 1, 2, 3)$$

Veličine k^l predstavljaju *krivolinijske koordinate vektora krivine trajektorije* tačke.

Za određivanje krivolinijskih koordinata krivine nije neophodno znati vezu između Dekartovih koordinata x^i i generalisanih q^j , već samo koordinate g_{ij} metričkog tenzora za izabrani sistem generalisanih koordinata. Element luka ds određen je metričkom formom

$$(7) \quad ds^2 = g_{ij} dq^i dq^j, \quad (i, j = 1, 2, 3)$$

gde je prema (1.2.1 — 6)

$$(8) \quad g_{ij} = \delta_{ab} \frac{\partial x^a}{\partial q^i} \frac{\partial x^b}{\partial q^j}. \quad (a, b = 1, 2, 3)$$

Parcijalni izvodi koordinata metričkog tenzora po generalisanim koordinatama prema (8) biće

$$(9) \quad \frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k} = \delta_{ab} \left(\frac{\partial^2 x^a}{\partial q^k \partial q^i} \frac{\partial x^b}{\partial q^j} + \frac{\partial x^a}{\partial q^i} \frac{\partial^2 x^b}{\partial q^j \partial q^k} \right).$$

Permutovanjem indeksa i, j, k dobiće se izvodi

$$(10) \quad \frac{\partial g_{jk}}{\partial q^i} = \delta_{ab} \left(\frac{\partial^2 x^a}{\partial q^k \partial q^j} \frac{\partial x^b}{\partial q^i} + \frac{\partial x^a}{\partial q^j} \frac{\partial^2 x^b}{\partial q^i \partial q^k} \right);$$

$$(11) \quad \frac{\partial g_{ki}}{\partial q^j} = \delta_{ab} \left(\frac{\partial^2 x^a}{\partial q^j \partial q^k} \frac{\partial x^b}{\partial q^i} + \frac{\partial x^a}{\partial q^k} \frac{\partial^2 x^b}{\partial q^j \partial q^i} \right).$$

Kombinovanjem ovih izvoda mogu se lako izračunati Kristofelovi simboli prve vrste (1.6.3. — 5) za uočeni sistem generalisanih koordinata

$$(12) \quad [j k, i] = \frac{1}{2} \delta_{ab} \left(\frac{\partial x^a}{\partial q^i} \frac{\partial^2 x^b}{\partial q^j \partial q^k} + \frac{\partial^2 x^a}{\partial q^j \partial q^k} \frac{\partial x^b}{\partial q^i} \right) = \delta_{ab} \frac{\partial^2 x^a}{\partial q^j \partial q^k} \frac{\partial x^b}{\partial q^i},$$

pri čemu je iskorišćena simetričnost Kronekerovih simbola. Ako se sada relaciji (12) pomnoži sa

$$g^{il} = \delta_{mn} \frac{\partial q^i}{\partial x^m} \frac{\partial q^l}{\partial x^n}$$

i izvrši sabiranje po indeksu i , dobiće se za Kristofelov simbol druge vrste (1.6.3. — 11) obrazac

$$(13) \quad [j k, i] g^{il} = \left\{ \begin{matrix} l \\ j k \end{matrix} \right\} = \delta_{ab} \delta^{mn} \frac{\partial^2 x^a}{\partial q^j \partial q^k} \frac{\partial x^b}{\partial q^i} \frac{\partial q^i}{\partial x^m} \frac{\partial q^l}{\partial x^n} = \frac{\partial^2 x^a}{\partial q^j \partial q^k} \frac{\partial q^l}{\partial x^a}$$

Upoređivanjem sa obrascem (6) vidi se da se za krivolinijske koordinatne vektora krivine može napisati obrazac

$$(14) \quad k^l = \frac{d^2 q^l}{ds^2} + \left\{ \begin{matrix} l \\ j k \end{matrix} \right\} \frac{dq^j}{ds} \frac{dq^k}{ds} \equiv \frac{D}{Ds} \left(\frac{dq^l}{ds} \right).$$

Kad su poznate konačne jednačine kretanja $q^i = q^i(t)$ biće

$$\frac{dq^i}{ds} = \frac{dq^i}{dt} \frac{dt}{ds}, \quad \frac{d^2 q^i}{ds^2} = \frac{d^2 q^i}{dt^2} \left(\frac{dt}{ds} \right)^2 + \frac{dq^i}{dt} \frac{d^2 t}{ds^2},$$

pa se obrazac (14) svodi na

$$(15) \quad k^l = \left(\frac{d^2 q^l}{dt^2} + \left\{ \begin{matrix} l \\ j k \end{matrix} \right\} \frac{dq^j}{dt} \frac{dq^k}{dt} \right) \left(\frac{dt}{ds} \right)^2 + \frac{dq^l}{dt} \frac{d^2 t}{ds^2} = \frac{D \dot{q}^l}{Dt} \left(\frac{dt}{ds} \right)^2 + \dot{q}^l \frac{d^2 t}{ds^2},$$

pri čemu $D \dot{q}^l / Dt$ označava apsolutni izvod generalisane brzine \dot{q}^l po vremenu (1.6.3. — 16).

Ako za kretanje tačke postoji integral energije

$$\frac{m}{2} v^2 = U + h$$

stavljajući da je $v^2 = (ds/dt)^2$ dobiće se

$$(16) \quad \frac{dt}{ds} = \sqrt{\frac{m}{2(U+h)}},$$

$$\frac{d^2 t}{ds^2} = -\frac{m}{4(U+h)^2} \frac{dU}{dt},$$

pa je krivina trajektorije materijalne tačke pri konzervativnom kretanju

$$(17) \quad k^l = \frac{m}{2(U+h)} \frac{D \dot{q}^l}{Dt} - \frac{m \dot{q}^l}{4(U+h)^2} \frac{dU}{dt}.$$

Kad se tačka kreće po inerciji ne djeluju zapreminske sile, $U = 0$; tada je $d^2t/ds^2 = 0$ i krivina je određena obrascem

$$(18) \quad k^l = \frac{m}{2h} \frac{D\dot{q}^l}{Dt}$$

Obrasci (14), (15), (17) i (18) mogu se neposredno uopštiti i za materijalne sisteme. Ako se posmatra kretanje nekog holonomnog i reonomnog sistema sa n stepena slobode određeno nezavisnim koordinatama q^i ($i = 1, 2, \dots, n$), biće sa tim kretanjem potpuno ekvivalentno kretanje jedne tačke u konfiguracionom prostoru V_n sa kinematičkim linijskim elementom (3.2.5 — 4)

$$ds^2 = 2T dt^2 = g_{ij} dq^i dq^j. \quad (i, j = 1, 2, \dots, n)$$

U analogiji sa odgovarajućim obrascima u mehanici tačke *krivina trajektorije* (tj. u geometriji višedimenzionih prostora *prva krivina*, jer na krivu u V_n u datoj tački mogu da se povuku $n - 1$ uzajamno upravni normala) biće vektor

$$(19) \quad k^l = \frac{d^2 q^l}{ds^2} + \left\{ \begin{matrix} l \\ j k \end{matrix} \right\} \frac{dq^j}{ds} \frac{dq^k}{ds} = \frac{D}{Ds} \left(\frac{dq^l}{ds} \right). \quad (j, k, l = 1, 2, \dots, n)$$

Ako se mesto luka s kao parametar uvede vreme t , iz (19) će se dobiti obrazac istovetan sa obrascem (15), pri čemu indeksi ne uzimaju više vrednosti od 1 do 3, već od 1 do n .

Kad je uočeni sistem konzervativan iz integrala energije

$$T = \frac{1}{2} \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 = U + h$$

proističe

$$(20) \quad k^l = \frac{1}{2(U+h)} \frac{D\dot{q}^l}{Dt} - \frac{\dot{q}^l}{4(U+h)^2} \frac{dU}{dt},$$

gde je D/Dt apsolutni izvod po vremenu u V_n (3.2.5 — 12). Za kretanje po inerciji ($U = 0$, $T = h$) biće

$$(21) \quad k^l = \frac{1}{2h} \frac{D\dot{q}^l}{Dt}$$

Intenzitet (veličina) vektora k^l u prostoru V_n definiše se kao skalarna krivina

$$(22) \quad k \equiv +\sqrt{g_{lm} k^l k^m}.$$

Metrička forma $ds^2 = 2T dt^2$ je uvek pozitivna, kakve god bile koordinate pomeranja dq^i , sem u slučaju kada su *sve* koordinate pomeranja jednake nuli. Ovaj zaključak proističe iz fizičke činjenice da je brzina uvek realan broj, stoga je i kinetička energija realan broj pa kvadrat realnog broja ne može biti negativan. Ako je kvadratna forma

$$ds^2 = 2T dt^2 = g_{ij} dq^i dq^j$$

uvek pozitivna ili jednaka nuli samo kad su sve koordinate dq^i pomeranja jednake nuli, kaže se da je forma *pozitivno definitna*, a i za sam metrički tenzor g_{ij} se kaže da je pozitivno definitan, jer u stvari od njega zavisi kakva je forma. Prema tome i skalarna *krivina* trajektorije reprezentativne tačke u V_n ne može biti negativna, već je uvek $k \geq 0$.

Hercov (Hertz) princip najmanje krivine tvrdi da od svih trajektorija holonomnog sistema koji se kreće po inerciji stvarna trajektorija ima najmanju skalarnu krivinu.

Zaista, prema (3.2.5 — 9, 15 i 17) diferencijalne jednačine kretanja holonomnog sistema su

$$(23) \quad \frac{D\dot{q}^l}{Dt} = g^{li} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial T}{\partial q^i} \right) = Q^l.$$

Kad na sistem ne djeluju aktivne sile ($Q^l = 0$) biće

$$(24) \quad \frac{D\dot{q}^l}{Dt} = g^{li} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial T}{\partial q^i} \right) = 0$$

a iz (21) i (22) proističe tada da je krivina k jednaka nuli. Kako je $k \geq 0$, znači da je duž stvarne trajektorije krivina najmanja.

Obrnuto, ako je $k = 0$ iz (22) sledi

$$(25) \quad g_{lm} k^l k^m = 0$$

a pošto su g_{ij} koeficijenti pozitivno definitne kvadratne forme moraju sve koordinate vektora krivine k^l biti jednake nuli, pa odatle proističu diferencijalne jednačine kretanja (24) holonomnog sistema po inerciji.

Putanja najmanje krivine može da se interpretira i kao putanja koja određuje put najmanje dužine između dve tačke, pa se Hercov princip može formulisati i ovako: *Od svih trajektorija holonomnog sistema koji se kreće po inerciji stvarna trajektorija određuje najkraći put (ima stacionarnu dužinu).*

Neka su Σ_0 i Σ_1 dve konfiguracije sistema kojima u V_n odgovaraju tačke A i B . Dužina luka neke krive linije od tačke A do B u V_n je

$$(26) \quad s = \int_A^B ds = \int_A^B \sqrt{g_{ij} dq^i dq^j},$$

pri čemu se integracija vrši duž posmatrane linije.

Za kretanje po inerciji je $ds = \sqrt{2T} dt$ pa je dužina luka

$$(27) \quad s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{2T} dt,$$

ako reprezentativna tačka polazi od položaja A u trenutku t_1 i stiže u položaj B u trenutku t_2 . Neka je (27) obrazac za dužinu luka direktne putanje reprezentativne tačke; za izohrono kretanje po zaobilaznoj putanji biće

$$(28) \quad \bar{s} = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{2T} dt.$$

Varijacija luka biće

$$(29) \quad \delta s = \bar{s} - s = \int_{t_1}^{t_2} \delta \sqrt{2T} dt,$$

a za stacionarni (najkraći) luk mora biti $\delta s = 0$.

Prema (3.3.2 — 14) je

$$(30) \quad \delta \sqrt{2T} = \frac{1}{\sqrt{2T}} \left(\frac{\partial T}{\partial q^i} \delta q^i + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} \delta \dot{q}^i \right),$$

pa se za varijaciju luka, kada se izvrši delimično integraljenje (analogno (3.3.2.1—10)) dobiva

$$(31) \quad \delta s = \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{\sqrt{2T}} \left(\frac{\partial T}{\partial q^i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} \right) \delta q^i dt.$$

Prema (21) i (23) može se mesto (31) napisati

$$\delta s = - \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{2T} k_i \cdot \delta q^i dt. \quad (T = h = \text{const.})$$

Ako je $k_i = 0$, biće $\delta s = 0$ pa je zaista dužina luka stvarne trajektorije stacionarna; a ako se postulira $\delta s = 0$, iz nezavisnosti varijacija δq^i proističe $k_i = 0$, a to su jednačine kretanja holonomnog sistema po inerciji.

Sredstvima savremene diferencijalne geometrije i primenom apstraktnijih pojmova o prostoru mogu se formirati konfiguracioni prostori analogni prostoru V_n i za kretanje nekonzervativnih sistema, a tada se Hercov princip može podesiti i za najopštiji slučaj kretanja holonomnih sistema.

3.4. Male oscilacije materijalnog sistema

3.4.1. Stabilnost kretanja

Kretanje nekog materijalnog sistema, određeno rešenjima diferencijalnih jednačina, npr. u generalisanim koordinatama $q^i = q^i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) pri datim početnim uslovima uzećemo kao *osnovno* ili *neporemećeno*. Kretanje određeno izmenjenim početnim uslovima naziva se *poremećeno*, a veličine promena koordinata i brzina izazvane ovom promenom početnih uslova zovu se *poremećaji* kretanja sistema.

Neka konačne jednačine poremećenog kretanja budu $\bar{q}^i = \bar{q}^i(t)$ a neka su $\eta^i = \eta^i(t)$ odstupanja. Tada ove veličine η^i mogu predstavljati razlike odnosnih koordinata u poremećenom i neporemećenom kretanju ($\bar{q}^i - q^i$), mogu biti samo razlike odnosnih brzina ($\dot{\bar{q}}^i - \dot{q}^i$), ali mogu biti i funkcije koordinata q^i , \bar{q}^i i brzina \dot{q}^i , $\dot{\bar{q}}^i$ oba kretanja.

Ako su $\eta_0^i = \eta^i(t_0)$ dovoljno male promene koordinata početnog položaja q_0^i , a $\dot{\eta}_0^i = \dot{\eta}^i(t_0)$ dovoljno male promene početne brzine \dot{q}_0^i , tada je uočeno *neporemećeno kretanje* po Ljapunovu (Ляпунов) *stabilno*, kad se za svako unapred zadano $\varepsilon > 0$ može naći drugi broj $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tako da za svaki trenutak vremena $t \geq t_0$ važi

$$(1) \quad |\eta^i(t)| < \varepsilon, \quad |\dot{\eta}^i(t)| < \varepsilon,$$

kad je u početnom trenutku $t = t_0$

$$(2) \quad |\eta_0^i| < \delta, \quad |\dot{\eta}_0^i| < \delta.$$

Kad za $t \rightarrow \infty$ sve veličine η^i teže nuli, ($\eta^i(t) \rightarrow 0$), *neporemećeno kretanje* je po Ljapunovu *asimptotski stabilno*.

3.4.2. Stabilnost ravnoteže. Ležen-Dirihleova teorema

U slučaju ravnoteže datog materijalnog sistema biće $q^i = q_0^i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) pa je to samo poseban slučaj rešenja diferencijalnih jednačina kretanja. Stoga se kaže: Ravnoteža materijalnog sistema biće po Ljapunovu stabilna, ako odstupanja η^i od ravnotežnog položaja i odstupanja brzina $\dot{\eta}^i$ od nule zadovoljavaju uslove

$$(1) \quad |\eta^i| < \varepsilon, \quad |\dot{\eta}^i| < \varepsilon,$$

kad promene početnih uslova zadovoljavaju uslove

$$(2) \quad |\eta_0^i| < \delta, \quad |\dot{\eta}_0^i| < \delta.$$

Pri tome, ako je sistem pod dejstvom konzervativnih sila pa postoji potencijal $V(q^1, q^2, \dots, q^n)$, tada je položaj u kome potencijal V ima strogi minimum položaj stabilne ravnoteže. Ova teorema se zove *Ležen-Dirihleova* (Lejeune-Dirichlet) ili *Lagranževa* i za njenu primenu je bitno da potencijalna energija zavisi od svih generalisanih koordinata.

Ono kretanje koje materijalni sistem izvodi pri dovoljno malom udaljenju od ravnotežnog položaja i sa dovoljno malim početnim brzinama je periodno i zove se *male oscilacije sistema oko položaja stabilne ravnoteže*.

Ležen-Dirihleova teorema važi i u slučaju kad pored konzervativnih sila na sistem dejstvuju giroskopske i disipativne sile. Pri tome se kao giroskopske sile Q_i smatraju sve one čija je snaga jednaka nuli, što se u generalisanim koordinatama može napisati

$$(3) \quad Q_i \dot{q}^i = 0$$

i one ne narušavaju zakon o održanju mehaničke energije. Takve sile su oblika

$$(4) \quad Q_i = \gamma_{ij} \dot{q}^j,$$

gde je matrica koeficijenata $\gamma_{ij} = -\gamma_{ji}$ antisimetrična.

Disipativne sile su pak one čija je snaga nepozitivna, tj.

$$(5) \quad Q_i \dot{q}^i \leq 0,$$

pa totalna mehanička energija opada — kretanje se umrtvljuje (amortizuje) i teorema ostaje u važnosti.

Ležen-Dirihleova teorema važi u izvesnim slučajevima i kad minimum potencijala nije strogi minimum tj. kad se u njegovoj neposrednoj okolini nalaze vrednosti koje su mu jednake.

3.4.3. Približne vrednosti kinetičke i potencijalne energije pri malim oscilacijama. Diferencijalne jednačine malih oscilacija

Kinetička energija holonomnog materijalnog sistema sa skleronomnim vezama može se u generalisanim koordinatama napisati (3.2.10—15) u obliku

$$(1) \quad 2T = a_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j,$$

gde je a_{ij} funkcija položaja, tj. od q^1, q^2, \dots, q^n , u opštem slučaju. Neka položaj ravnoteže sistema bude određen sa $q_0^i = 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$), onda kad se stavi za male poremećaje

$$(2) \quad a_{ij} \approx a_{ij}(0, 0, \dots, 0) = \alpha_{ij}$$

može se napisati za kinetičku energiju približno obrazac

$$(3) \quad 2 T = \alpha_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j,$$

gde su sad koeficijenti α_{ij} konstante, a desna strana je pozitivno definitna kvadratna forma. Pri uslovima malih oscilacija vrednosti koeficijenata α_{ij} se ne razlikuju znatno od stvarnih vrednosti a_{ij} .

Kad se potencijalna energija kao funkcija položaja razvije u *Mek-Lorinov* (Mac-Laurin) *red* u okolini tačke $(0, 0, \dots, 0)$ dobiće se

$$(4) \quad V(q^1, q^2, \dots, q^n) = V(0, 0, \dots, 0) + q^i \left(\frac{\partial V}{\partial q^i} \right)_0 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q^i \partial q^j} \right)_0 q^i q^j + \dots$$

U položaju ravnoteže je $\left(\frac{\partial V}{\partial q^i} \right)_0 = 0$, pa ako se uvede oznaka

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial q^i \partial q^j} \right)_0 = \beta_{ij}$$

dobiće se za potencijalnu energiju *približno*

$$(5) \quad V = V_0 + \frac{1}{2} \beta_{ij} q^i q^j.$$

Kako je potencijalna energija sistema uvek određena samo do na izvesnu konstantnu vrednost, može se bez ograničenja opštosti rešavanja uzeti da je $V_0 = 0$, pa se dobiva

$$(6) \quad 2 V = \beta_{ij} q^i q^j.$$

Konstantni koeficijenti α_{ij} zovu se *inercioni* (tačnije *kvaziinercioni*), a koeficijenti β_{ij} *restitucioni* (*koeficijenti uspostavljanja, kvazielastični, statički koeficijenti krutosti*).

Ako se iz jednačina

$$(7) \quad P_i = -Q_i = \frac{\partial V}{\partial q^i} = \beta_{ij} q^j,$$

generalisane koordinate izraze pomoću veličina P_i , koje su negativne generalisane sile, može se napisati

$$(8) \quad 2 V = c^{ij} P_i P_j,$$

gde je u stvari potencijalna energija izražena kao kvadratna forma po generalisanim silama. Koeficijenti c^{ij} zovu se *statički koeficijenti uticaja sistema*.

U slučaju da na uočeni sistem dejstvuju samo konzervativne sile, tada Lagranževe jednačine za određivanje malih oscilacija glase

$$(9) \quad \alpha_{ij} \ddot{q}^j + \beta_{ij} \dot{q}^j = 0. \quad (i, j = 1, 2, \dots, n)$$

Prema tome, matematička teorija slobodnih malih oscilacija (dati sistem je slobodan) svodi se na rešavanje sistema homogenih linearnih diferencijalnih jednačina drugog reda sa konstantnim koeficijentima. Pri tome je $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$ i $\beta_{ij} = \beta_{ji}$. Broj nezavisnih parametara q^i određuje broj stepena slobode.

Ako se konzervativnim silama $Q_i = -\frac{\partial V}{\partial q^i} = -\beta_{ij} \dot{q}^j$ dodadu giroskopske sile $\bar{Q}_i = \gamma_{ij} \dot{q}^j$, tada sistem jednačina (9) postaje

$$(10) \quad \alpha_{ij} \ddot{q}^j - \gamma_{ij} \dot{q}^j + \beta_{ij} q^j = 0$$

i zadržava svoj karakter s tim što se u njemu pojavljuju i generalisane brzine \dot{q}^i .

Dejstvuju li na uočeni materijalni sistem i disipativne sile, npr. oblika

$$(11) \quad Q_i^* = -v_{ij} \dot{q}^j,$$

gde su koeficijenti simetrični ($v_{ij} = v_{ji}$) i gde je $v_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j \geq 0$, biće efekt rada ovih sila $Q_i^* \dot{q}^i = -v_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j \leq 0$, pa se mehanička energija sistema ne održava već rasipa. Stoga se ovakve sile (takve su sile trenja) zovu *disipativne*. Izraz

$$(12) \quad 2R = v_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j$$

je *Rejljeva* (Rayleigh) *disipativna funkcija* čija je osobina da je

$$(13) \quad Q_i^* = -\frac{\partial R}{\partial \dot{q}^i}.$$

Za skleronomni sistem na koji dejstvuju konzervativne i disipativne sile biće ($E = T + V$) (vidi Ф. Р. Гантмахер — Лекции по аналитической механике, str. 57)

$$(14) \quad \frac{dE}{dt} = Q_i^* \dot{q}^i = -\frac{\partial R}{\partial \dot{q}^i} \dot{q}^i = -2R$$

pa je dvostruka Rejljeva funkcija jednaka brzini opadanja totalne mehaničke energije.

Jednačine (9) dopunjene, kad na uočeni sistem pored konzervativnih sila dejstvuju i disipativne sile, imaju oblik

$$(15) \quad \alpha_{ij} \ddot{q}^j + v_{ij} \dot{q}^j + \beta_{ij} q^j = 0,$$

a to je za $v_{ij} = \text{const.}$ sistem istog karaktera kao i sistem (9) s tim što se i u njemu pojavljuju generalisane brzine \dot{q}^i .

Rešavanje sistema (9) se obično izvodi na taj način što se kvadratne forme

$$(16) \quad 2T = \alpha_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j, \quad 2V = \beta_{ij} q^i q^j$$

svedu simultano (uvođenjem novih promenljivih $q^i = \rho^{ij} \xi_j$) na kanonski oblik (tj. na zbir kvadrata). Na taj način se poznatim postupcima dobiva

$$(17) \quad 2T = \sum_i \xi_i^2, \quad 2V = \sum_i \lambda_i \xi_i^2. \quad (\lambda_i > 0).$$

Ove nove koordinate ξ_i zovu se *normalne* i sistem jednačina (9) se svodi sad na sistem

$$(18) \quad \ddot{\xi}_i + \lambda_i \xi_i = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

kad se za gornje vrednosti T i V napišu Lagranževe jednačine kretanja.

Rešenje ovoga sistema diferencijalnih jednačina određivaće pojedine normalne koordinate

$$(19) \quad \xi_i = A_i \sin(\omega_i t + \varphi_i),$$

pri čemu je $\omega_i^2 = \lambda_i$. Ove harmonijske oscilacije nazivaju se *glavne* ili *svojstvene* a u prvobitnim koordinatama biće

$$(20) \quad q^i = \rho^{ij} A_j \sin(\omega_j t + \varphi_j).$$

(Prethodni rezultati se dobivaju prostije matičnim računom, vidi npr. Anđelić — Matrični račun, II izd.)

Vrednosti λ_i , tzv. zajedničke karakteristične vrednosti kvadratnih formi $2T$ i $2V$, određuju se iz *frekventne* ili *sekularne* jednačine

$$(21) \quad \begin{vmatrix} \alpha_{11} - \lambda \beta_{11} & \alpha_{12} - \lambda \beta_{12} & \dots & \alpha_{1n} - \lambda \beta_{1n} \\ \alpha_{21} - \lambda \beta_{21} & \alpha_{22} - \lambda \beta_{22} & \dots & \alpha_{2n} - \lambda \beta_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} - \lambda \beta_{n1} & \alpha_{n2} - \lambda \beta_{n2} & \dots & \alpha_{nn} - \lambda \beta_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

3.4.4. Male oscilacije sistema sa jednim stepenom slobode

a) *Slobodne oscilacije.* — Položaj sistema i od N materijalnih tačaka određen je ovde samo jednim parametrom q , tj. važi

$$(1) \quad x_i = x_i(q), \quad y_i = y_i(q), \quad z_i = z_i(q). \quad (i = 1, 2, \dots, N)$$

Ako se uzme da položaju ravnoteže odgovara $q = 0$, biće konfiguracija sistema u ravnoteži određena jednačinama

$$(1a) \quad x_{i0} = x_i(0), \quad y_{i0} = y_i(0), \quad z_{i0} = z_i(0).$$

Razvijanjem funkcija (1) u red u okolini vrednosti $q = 0$ može se u slučaju malih oscilacija približno pisati $\left(\frac{dx_i}{dq} = x_i'\right)$

$$(2) \quad x_i = x_{i0} + x_{i0}' q, \quad y_i = y_{i0} + y_{i0}' q, \quad z_i = z_{i0} + z_{i0}' q,$$

pa će onda biti

$$(3) \quad 2T = \sum_i m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) = \dot{q}^2 \sum_i m_i (x_{i0}'^2 + y_{i0}'^2 + z_{i0}'^2) = \alpha \dot{q}^2$$

i inercioni koeficijent α ima vrednost

$$(4) \quad \alpha = \sum_i m_i (x_{i0}'^2 + y_{i0}'^2 + z_{i0}'^2).$$

Potencijalna energija će moći da se napiše u obliku

$$(5) \quad 2V = \beta q^2,$$

kad se uzme $V(0) = 0$. Dovoljan uslov da postoji strogi minimum, za $q = 0$, biće $\beta > 0$.

Diferencijalna jednačina malih oscilacija u ovom slučaju glasi

$$(6) \quad \alpha \ddot{q} + \beta q = 0$$

i očigledno je ekvivalentna jednačini $\frac{1}{2} \alpha \dot{q}^2 + \frac{1}{2} \beta q^2 = \text{const.}$, koja izražava zakon o održanju mehaničke energije. Kako je $\beta/\alpha > 0$, može se napisati najzad

$$(7) \quad \ddot{q} + k^2 q = 0,$$

a to je diferencijalna jednačina harmonijskih oscilacija (2.5.2.1—20) čije je rešenje

$$(7a) \quad q = h \sin(kt + \varphi).$$

Ove oscilacije su male i u opštem slučaju nisu pravolinijske već krivolinijske. Međutim, kako su male one su približno pravolinijske oko položaja ravnoteže. Vrednosti konstantne amplitude h i početne faze φ zavise od početnih uslova koji određuju konfiguraciju celog sistema i sve njegove početne brzine.

Kako je ravnotežni položaj i -te tačke određen sa (1a), biće odstupanje (elongacija) s_i po krivolinijskoj putanji ove tačke s obzirom na (4)

$$(8) \quad \begin{aligned} s_i &= q \sqrt{x_{i0}'^2 + y_{i0}'^2 + z_{i0}'^2} \\ &= h \sqrt{x_{i0}'^2 + y_{i0}'^2 + z_{i0}'^2} \sin(kt + \varphi) \\ &= h_i \sin(kt + \varphi), \end{aligned}$$

gde je

$$q = h \sin(kt + \varphi)$$

rešenje diferencijalne jednačine (7) a

$$h_i = h \sqrt{x_{i0}'^2 + y_{i0}'^2 + z_{i0}'^2}.$$

Ovo pokazuje da su amplitude h_i pojedinih tačaka sistema različite, ali je period $\tau = 2\pi/k = 2\pi\sqrt{\alpha/\beta}$ za sve tačke isti, a isto tako su jednake i faze oscilovanja φ za sve tačke. Čitav sistem se periodno vraća u ravnotežni položaj pri čemu je τ tzv. *sopstveni period sistema*, a k frekvencija njegovih sopstvenih oscilacija. Frekvencija k zavisi od mehaničkog karaktera sistema, ali ne zavisi od izbora generalisanih koordinata.

Sistem sa jednim stepenom slobode koji izvodi male oscilacije oko ravnotežnog položaja zove se *linearni oscilator*. Ako su te oscilacije još i harmonijske onda se radi o *harmonijskom oscilatoru*.

b) *Amortizovane oscilacije*. — Ako pored konzervativnih sila postoji i polje sila otpora (trenja) proporcionalnih brzini, tj. $Q = -\mu \dot{q}$ ($\mu > 0$), tada imamo *linearni oscilator sa trenjem*. Njegovo kretanje određeno je jednačinom

$$\alpha \ddot{q} + \beta \dot{q} = -\mu \dot{q},$$

odnosno jednačinom

$$(9) \quad \ddot{q} + 2l\dot{q} + k^2q = 0,$$

kad se stavi

$$\mu/\alpha = 2l > 0, \quad \beta/\alpha = k^2 > 0.$$

Funkcija

$$(10) \quad \Phi = -\frac{1}{2} \mu \dot{q}^2$$

je ovde Rejljeva disipativna funkcija i određuje brzinu rasipanja mehaničke energije.

Rešenja jednačine (9) su analizirana (2.5.4) i u suštini se ne razlikuju od ovih. Jedino što se ovde radi o malim i samo približno pravolinijskim oscilacijama. Dakle, u slučaju $k^2 - l^2 = \omega^2 > 0$ biće opšte rešenje jednačine (9)

$$(11) \quad q = h e^{-lt} \sin(\omega t + \vartheta)$$

i predstavlja male amortizovane oscilacije oko ravnotežnog položaja sistema.

Odstupanja s_i od ravnotežnog položaja i -te tačke biće sad

$$\begin{aligned}
 (12) \quad s_i &= q \sqrt{x_{i0}'^2 + y_{i0}'^2 + z_{i0}'^2} \\
 &= h e^{-lt} \sqrt{x_{i0}'^2 + y_{i0}'^2 + z_{i0}'^2} \sin(\omega t + \vartheta) \\
 &= h_i e^{-lt} \sin(\omega t + \vartheta).
 \end{aligned}$$

c) *Prinudne oscilacije linearnog oscilatora.* — Prinudne oscilacije u nekom linearnom oscilatoru nastaju kao posledica dejstva spoljašnje (obično periodne) sile. Takva sila je *poremećajna*. Najprostiji oblik takve sile je $Q = H \sin \omega t$, gde je H amplituda te sile a $2\pi/\omega$ njen period. Diferencijalna jednačina malih oscilacija nastalih samo pod dejstvom elastične i prirodne sile može se napisati u obliku

$$(13) \quad \alpha \ddot{q} + \beta \dot{q} = H \sin \omega t.$$

Kad se ovde stavi $\beta/\alpha = k^2$, $H/\alpha = a$, dobićemo običnu diferencijalnu jednačinu drugog reda.

$$(14) \quad \ddot{q} + k^2 q = a \sin \omega t,$$

koja je istog oblika kao jednačina (2.5.6—2) koja je tamo podrobno proučena. Prema tome, ova jednačina određuje male prinudne približno pravolinijske oscilacije sistema oko položaja ravnoteže. I ovde u slučaju $k = \omega$ nastupa rezonancija.

Odstupanje s_1 od ravnotežnog položaja biće ovde

$$(15) \quad s_1 = h_1 \sin(kt + \varphi),$$

gde je $h_1 = R \sqrt{x_{i0}'^2 + y_{i0}'^2 + z_{i0}'^2}$, a R i φ se određuju kao i u odeljku (2.5.6).

U slučaju, kad je generalisana sila opšta periodna funkcija vremena sa periodom $2\pi/\omega$, ona se može predstaviti konvergentnim trigonometrijskim redom

$$(16) \quad Q(t) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{\nu} H_{\nu} \sin(\nu \omega t + \delta_{\nu}).$$

Kad je $a_0 = 0$ i kad se stavi $h_{\nu} = H_{\nu}/\alpha$ diferencijalna jednačina ovog linearnog oscilatora postaje

$$(17) \quad \ddot{q} + k^2 q = \sum_{\nu} h_{\nu} \sin(\nu \omega t + \delta_{\nu}),$$

dakle, pored restitucione sile sistem je podvrgnut nizu harmonijskih oscilacija. Ako je $k \neq \nu \omega$, ($\nu = 1, 2, \dots$) rešenje se može napisati u obliku

$$\begin{aligned}
 (18) \quad q &= q_0 \cos kt + \frac{\dot{q}_0}{k} \sin kt - \sum_{\nu} \frac{h_{\nu}}{k^2 - \nu^2 \omega^2} \left(\sin \delta_{\nu} \cos kt + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\omega}{k} \cos \delta_{\nu} \sin kt \right) + \sum_{\nu} \frac{h_{\nu}}{k^2 - \nu^2 \omega^2} \sin(\nu \omega t + \delta_{\nu}).
 \end{aligned}$$

Za $k = \nu \omega$ postoji rezonancija ν -tog reda kojoj odgovara divergentna oscilacija određena obrascem

$$(19) \quad q = - \frac{h_{\nu} t}{2k} \cos(kt + \delta_{\nu}).$$

Kad na linearni oscilator pored poremećajne sile dejstvuje i otporna sila proporcionalna brzini biće diferencijalna jednačina njegovog kretanja u dosadašnjim oznakama

$$(20) \quad \ddot{q} + 2l\dot{q} + k^2q = \frac{1}{\alpha} Q(t)$$

čije je rešenje za najprostiji slučaj poremećajne sile $Q(t)/\alpha = H \cos \omega t$, dato u (2.5.7) sa nešto malo drukčijim oznakama i naravno sad se radi samo o malim približno pravolinijskim oscilacijama.

U najopštijem slučaju poremećajne sile, pri početnim uslovima, $t_0 = 0$, q_0 i \dot{q}_0 , rešenje, kad je $k > l$ ($k^2 - l^2 = \omega^2$), glasi

$$(21) \quad q = \left[q_0 \cos \omega t + \frac{\dot{q}_0 + lq_0}{\omega} \sin \omega t \right] e^{-lt} + \frac{1}{\alpha \omega} \int_0^t Q(\xi) e^{-l(t-\xi)} \sin [\omega(t-\xi)] d\xi,$$

a kad je $k < l$

$$(21a) \quad q = \left[q_0 \operatorname{ch} \omega t + \frac{\dot{q}_0 + lq_0}{\omega} \operatorname{sh} \omega t \right] e^{-lt} + \frac{1}{\alpha \omega} \int_0^t Q(\xi) e^{-l(t-\xi)} \operatorname{sh} [\omega(t-\xi)] d\xi$$

i najzad, za $k = l$ biće

$$(21b) \quad q = q_0 + (\dot{q}_0 + lq_0) te^{-lt} + \frac{1}{\alpha} \int_0^t Q(\xi) e^{-l(t-\xi)} (t-\xi) d\xi.$$

Prvi delovi u tim obrascima određuju amortizovane oscilacije koje se javljaju i u slučaju kad nema poremećajne sile $Q(t)$. Članovi pak sa integralima određuju tzv. *male prinudne oscilacije*. Međutim, kako se amortizovane oscilacije u ovom slučaju praktično brzo smanjuju, to se posle izvesnog vremena ovo kretanje svodi na prinudne oscilacije.

3.5. Dinamika krutog tela

Kruto telo u dinamičkom smislu je specijalan slučaj materijalnog sistema, kad se međusobna rastojanja tačaka sistema pod dejstvom aktivnih unutrašnjih i spoljašnjih sila i sila reakcije ne menjaju. Masa krutog tela može da bude koncentrisana u diskretnim tačkama u prostoru a može biti neprekidno raspoređena u nekoj oblasti prostora koja se tada kratko naziva telo. Međutim, slobodno kruto telo ima šest stepeni slobode (odeljak 1.8.1) nezavisno od rasporeda masa. U slučaju diskretnog rasporeda masa, mase pojedinačnih tačaka tela su m_i . U opštem slučaju može se staviti da je u nekoj tački prostora gustina mase ρ a masa u odgovarajućoj elementarnoj zapremini u toj tački prostora biće ρdV . U slučaju diskretnog rasporeda masa pomoću delta-funkcije i ovaj se slučaj obuhvata obrascima koji važe za neprekidno raspoređene mase. Međutim, i obrasci formulisani za diskretne sisteme mogu se primeniti na neprekidni raspored masa ako se uzme da je masa neke tačke M_i data sa $m_i = \rho dV$.

3.5.1. Kinetička energija, količina kretanja i kinetički moment krutog tela

3.5.1.1. Kinetička energija krutog tela

Kinetička energija materijalnog sistema definisana je (3.2.2—13) kao zbir kinetičkih energija pojedinačnih tačaka sistema

$$(1) \quad T = \frac{1}{2} \sum m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum m_i \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i.$$

Brzina tačke krutog tela prema (1.11—4) određena je obrascem

$$(2) \quad \mathbf{v}_i = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_i,$$

gde je \mathbf{v}_i brzina neke tačke M_i tela, \mathbf{v}_A je brzina neke uočene tačke tela koj je izabrana za pokretni pol, $\boldsymbol{\omega}$ je vektor trenutne ugaone brzine i $\boldsymbol{\rho}_i$ je vektor položaja tačke M_i prema pokretnom polu A .

S obzirom na (2) izraz za kinetičku energiju krutog tela biće

$$(3) \quad 2T = \sum m_i [\mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}_A + 2 \mathbf{v}_A \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_i) + (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_i) \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_i)].$$

U prvom članu sa desne strane relacije (3) sabiranje se odnosi samo na mase tela, $\sum m_i = m$, gde je m celokupna masa tela, pa je

$$(4) \quad \sum m_i \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}_A = m v_A^2.$$

U drugom članu sa desne strane relacije (3) zbir se odnosi na mase m_i i vektore položaja $\boldsymbol{\rho}_i$ tačaka tela u odnosu na pokretni pol. Kako je

$$\sum m_i \mathbf{v}_A \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_i) = \mathbf{v}_A \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \sum m_i \boldsymbol{\rho}_i),$$

a sem toga prema (3.1.2—15) imamo

$$\sum m_i \boldsymbol{\rho}_i = m \boldsymbol{\rho}_C,$$

gde je $\boldsymbol{\rho}_C = \overrightarrow{AC}$ vektor položaja centra inercije C tela prema pokretnom polu, biće

$$(5) \quad \sum m_i \mathbf{v}_A \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_i) = m \mathbf{v}_A \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_C) = m [\mathbf{v}_A \boldsymbol{\omega} \boldsymbol{\rho}_C].$$

Simbol $[\mathbf{v}_A \boldsymbol{\omega} \boldsymbol{\rho}_C]$ označava po običaju mešoviti proizvod vektora \mathbf{v}_A , $\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{\rho}_C$

$$(6) \quad [\mathbf{v}_A \boldsymbol{\omega} \boldsymbol{\rho}_C] = \mathbf{v}_A \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_C) = \boldsymbol{\omega} \cdot (\boldsymbol{\rho}_C \times \mathbf{v}_A) = \boldsymbol{\rho}_C \cdot (\mathbf{v}_A \times \boldsymbol{\omega}).$$

Najzad, ako se stavi $\boldsymbol{\omega} = \omega \boldsymbol{\omega}_0$, gde je ω veličina vektora trenutne ugaone brzine a $\boldsymbol{\omega}_0$ jedinični vektor trenutne ose rotacije, treći član sa desne strane relacije (3) može se napisati u obliku

$$(7) \quad \sum m_i (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_i) \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_i) = \sum m_i (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_i)^2 = \omega^2 \sum m_i (\boldsymbol{\omega}_0 \times \boldsymbol{\rho}_i)^2 = \omega^2 I_{\omega}^A.$$

Prema (3.1.3—12) veličina

$$(7') \quad I_{\omega}^A = \sum m_i (\boldsymbol{\omega}_0 \times \boldsymbol{\rho}_i)^2$$

predstavlja moment inercije tela u odnosu na trenutnu osu rotacije $\boldsymbol{\omega}_0$ koja prolazi kroz pokretni pol A .

S obzirom na (4), (5) i (7) obrazac (3) za kinetičku energiju krutog tela može se najzad napisati u obliku

$$(8) \quad 2T = m v_A^2 + 2m [\mathbf{v}_A \boldsymbol{\omega} \boldsymbol{\rho}_C] + \omega^2 I_{\omega}^A.$$

Za Dekartov pravougli koordinatni sistem $Oxyz$ koji je nepokretan u prostoru biće

$$(9) \quad \mathbf{v}_A = \{\dot{x}_A, \dot{y}_A, \dot{z}_A\}, \quad \boldsymbol{\omega} = \{P, Q, R\}, \quad \mathbf{e}_C = \{x_C - x_A, y_C - y_A, z_C - z_A\}$$

tako da je

$$(10) \quad [\mathbf{v}_A \boldsymbol{\omega} \mathbf{e}_C] = \begin{vmatrix} \dot{x}_A & \dot{y}_A & \dot{z}_A \\ P & Q & R \\ x_C - x_A & y_C - y_A & z_C - z_A \end{vmatrix} = \\ = \dot{x}_A [Q(z_C - z_A) - R(y_C - y_A)] + \dot{y}_A [R(x_C - x_A) - P(z_C - z_A)] + \\ + \dot{z}_A [P(y_C - y_A) - Q(x_C - x_A)].$$

Sa druge strane s obzirom na (7) može se pisati

$$(11) \quad \omega^2 I_\omega^A = \sum m_i [(P \mathbf{i} + Q \mathbf{j} + R \mathbf{k}) \times \mathbf{e}_i]^2,$$

pa se posle razvijanja ovog obrasca dobiva

$$(12) \quad \omega^2 I_\omega^A = \sum m_i [P^2 (\mathbf{i} \times \mathbf{e}_i)^2 + Q^2 (\mathbf{j} \times \mathbf{e}_i)^2 + R^2 (\mathbf{k} \times \mathbf{e}_i)^2 + \\ + 2QR (\mathbf{j} \times \mathbf{e}_i) \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{e}_i) + 2RP (\mathbf{k} \times \mathbf{e}_i) \cdot (\mathbf{i} \times \mathbf{e}_i) + 2PQ (\mathbf{i} \times \mathbf{e}_i) \cdot (\mathbf{j} \times \mathbf{e}_i)].$$

S obzirom na definicije (3.1.3—12 i 22) momenata i proizvoda inercije za ose Dekartovog pravouglog koordinatnog sistema biće

$$(13) \quad \omega^2 I_\omega^A = I_x^A P^2 + I_y^A Q^2 + I_z^A R^2 + 2\Pi_{yz}^A QR + \\ + 2\Pi_{zx}^A RP + 2\Pi_{xy}^A PQ.$$

Prema (9), (10) i (13) u odnosu na nepokretni koordinatni sistem $Oxyz$ kinetička energija T krutog tela može sad da se izrazi obrascem

$$(14) \quad 2T = m(\dot{x}_A + \dot{y}_A + \dot{z}_A) + 2m \begin{vmatrix} \dot{x}_A & \dot{y}_A & \dot{z}_A \\ P & Q & R \\ x_C - x_A & y_C - y_A & z_C - z_A \end{vmatrix} + \\ + I_x^A P^2 + I_y^A Q^2 + I_z^A R^2 + 2\Pi_{yz}^A QR + 2\Pi_{zx}^A RP + 2\Pi_{xy}^A PQ.$$

Za koordinatni sistem $A\xi\eta\zeta$ koji je nepromenljivo vezan za uočeno kruto telo je

$$(15) \quad \mathbf{v}_A = \{v_{A\xi}, v_{A\eta}, v_{A\zeta}\}, \quad \boldsymbol{\omega} = \{p, q, r\}, \quad \mathbf{e}_C = \{\xi_C, \eta_C, \zeta_C\},$$

tako da je

$$(16) \quad [\mathbf{v}_A \boldsymbol{\omega} \mathbf{e}_C] = \begin{vmatrix} v_{A\xi} & v_{A\eta} & v_{A\zeta} \\ p & q & r \\ \xi_C & \eta_C & \zeta_C \end{vmatrix} = \\ = v_{A\xi} (q\zeta_C - r\eta_C) + v_{A\eta} (r\xi_C - p\zeta_C) + v_{A\zeta} (p\eta_C - q\xi_C).$$

Slično obrascu (11) može se za pokretni koordinatni sistem napisati

$$(17) \quad \omega^2 I_\omega^A = \sum m_i [(p \boldsymbol{\lambda} + q \boldsymbol{\mu} + r \boldsymbol{\nu}) \times \mathbf{e}_i]^2,$$

odakle se posle razvijanja dobiva

$$(18) \quad \omega^2 I_{\omega}^A = I_{\xi}^A p^2 + I_{\eta}^A q^2 + I_{\zeta}^A r^2 + 2 \Pi_{\eta\zeta}^A qr + 2 \Pi_{\zeta\xi}^A rp + 2 \Pi_{\xi\eta}^A pq.$$

U odnosu na pokretni triedar $A\xi\eta\zeta$ kinetička energija T krutog tela može se onda izraziti obrascem

$$(19) \quad 2T = m(v_{A\xi}^2 + v_{A\eta}^2 + v_{A\zeta}^2) + 2m \begin{vmatrix} v_{A\xi} & v_{A\eta} & v_{A\zeta} \\ p & q & r \\ \xi_C & \eta_C & \zeta_C \end{vmatrix} + \\ + I_{\xi}^A p^2 + I_{\eta}^A q^2 + I_{\zeta}^A r^2 + 2 \Pi_{\eta\zeta}^A qr + 2 \Pi_{\zeta\xi}^A rp + 2 \Pi_{\xi\eta}^A pq.$$

Usled kretanja tela veličine $x_C, y_C, z_C; I_x^A, I_y^A, I_z^A, \Pi_{xy}^A, \Pi_{yz}^A, \Pi_{zx}^A$, su promenljive. Odgovarajuće veličine definisane u odnosu na pokretni koordinatni sistem $\xi_C, \eta_C, \zeta_C, I_{\xi}^A, I_{\eta}^A, I_{\zeta}^A, \Pi_{\xi\eta}^A, \Pi_{\eta\zeta}^A, \Pi_{\zeta\xi}^A$, nepromenljive su. Zajedno sa masom tela te veličine predstavljaju *dinamičke parametre* koji u potpunosti karakterišu raspored masa krutog tela a time i njegove dinamičke osobine.

Ako se za pokretni pol izabere centar masa C tela biće $\mathbf{q}_C = \mathbf{0}$. Tada se obrazac (8) za kinetičku energiju svodi na jednostavniji oblik

$$(20) \quad 2T = m v_C^2 + \omega^2 I_{\omega}^C,$$

gde je sada I_{ω}^C centralni moment inercije. U tom slučaju za nepokretni triedar osa $Oxyz$ biće prema (14)

$$(21) \quad 2T = m(\dot{x}_C^2 + \dot{y}_C^2 + \dot{z}_C^2) + I_x^C P^2 + I_y^C Q^2 + I_z^C R^2 + \\ + 2 \Pi_{yz}^C QR + 2 \Pi_{zx}^C RP + 2 \Pi_{xy}^C PQ,$$

a za pokretni triedar, prema (19),

$$(22) \quad 2T = m(v_{C\xi}^2 + v_{C\eta}^2 + v_{C\zeta}^2) + I_{\xi}^C p^2 + I_{\eta}^C q^2 + I_{\zeta}^C r^2 + \\ + 2 \Pi_{\eta\zeta}^C qr + 2 \Pi_{\zeta\xi}^C rp + 2 \Pi_{\xi\eta}^C pq.$$

Kad se ose pokretnog triedra poklapaju sa glavnim osama inercije u tački A proizvodi inercije biće jednaki nuli (3.1.3.1) pa se obrazac (19) svodi na

$$(23) \quad 2T = m(v_{A\xi}^2 + v_{A\eta}^2 + v_{A\zeta}^2) + 2m \begin{vmatrix} v_{A\xi} & v_{A\eta} & v_{A\zeta} \\ p & q & r \\ \xi_C & \eta_C & \zeta_C \end{vmatrix} + \\ + I_{\xi}^A p^2 + I_{\eta}^A q^2 + I_{\zeta}^A r^2.$$

Ako se sem toga pokretni pol nalazi u centru masa C ose ξ, η, ζ poklopiće se sa glavnim osama inercije X, Y, Z , a momenti inercije za ose pokretnog triedra tada su glavni centralni momenti inercije $A = ma^2, B = mb^2, C = mc^2$ (a, b i c) su kraci inercije; (vidi odeljak 3.1.3) pa se iz izraza (22) i (23) za kinetičku energiju dobiva obrazac

$$(24) \quad 2T = m(v_{CX}^2 + v_{CY}^2 + v_{CZ}^2) + Ap^2 + Bq^2 + Cr^2,$$

pri čemu v_{CX}, v_{CY}, v_{CZ} označava koordinate vektora brzine centra mase tela u odnosu na triedar osa $CXYZ$.

U pojedinim problemima dinamike krutog tela veoma je korisno da se brzina pokretnog pola izražava u odnosu na nepokretni triedar koordinatnih osa,

a momenti inercije i ugaona brzina u odnosu na ose pokretnog triedra. Takvi izrazi za kinetičku energiju koriste se kada se pokretni pol nalazi u centru inercije tela. Tada se iz obrasca (22) dobiva

$$(25) \quad 2T = m(\dot{x}_C^2 + \dot{y}_C^2 + \dot{z}_C^2) + I_\xi^C p^2 + I_\eta^C q^2 + I_\zeta^C r^2 + \\ + 2 \Pi_{\xi\zeta}^C qr + 2 \Pi_{\zeta\xi}^C rp + 2 \Pi_{\xi\eta}^C pq,$$

a kad su ose pokretnog triedra glavne centralne ose inercije

$$(26) \quad 2T = m(\dot{x}_C^2 + \dot{y}_C^2 + \dot{z}_C^2) + Ap^2 + Bq^2 + Cr^2.$$

Prema odeljku (1.8.11) koordinate krutog tela su: tri koordinate x_A, y_A, z_A pokretnog pola u odnosu na nepokretni koordinatni sistem i tri nezavisna ugla, Ojlerovi uglovi $\psi, \varphi, \text{ i } \vartheta$ koji određuju relativnu orijentaciju pokretnog koordinatnog sistema prema nepokretnom. Prema (1.11.1.—27) koordinate trenutne ugaone brzine u odnosu na pokretni koordinatni sistem su date obrascima

$$(27) \quad \begin{aligned} p &= \dot{\psi} \sin \varphi \sin \vartheta + \dot{\vartheta} \cos \varphi, \\ q &= \dot{\psi} \cos \varphi \sin \vartheta - \dot{\vartheta} \sin \varphi, \\ r &= \dot{\psi} \cos \vartheta + \dot{\varphi}. \end{aligned}$$

Ako se ove vrednosti unesu u (26) dobiće se *Lagranžev oblik kinetičke energije* krutog tela

$$(28) \quad 2T = m(\dot{x}_C^2 + \dot{y}_C^2 + \dot{z}_C^2) + C\dot{\varphi}^2 + [(A \sin^2 \varphi + B \cos^2 \varphi) \sin^2 \vartheta + \\ + C \cos^2 \vartheta] \dot{\psi}^2 + (A \cos^2 \vartheta + B \sin^2 \psi) \dot{\vartheta}^2 + \\ + 2(A - B) \sin \varphi \cos \varphi \sin \vartheta \dot{\psi} \dot{\vartheta} + 2C \cos \vartheta \dot{\varphi} \dot{\psi}.$$

U slučaju translatornog kretanja (odjeljak 1.9.1) Ojlerovi uglovi su konstantni, ugaona brzina tela jednaka je nuli i obrazac (8) za kinetičku energiju se svodi na

$$(29) \quad 2T = mv_A^2,$$

a kako sve tačke tela pri translatornom kretanju imaju jednake brzine to se može mesto (29) pisati

$$(30) \quad 2T = mv_C^2,$$

gde je v_C brzina centra mase tela.

Kinetička energija određena ovim obrascem je kinetička energija materijalne tačke mase jednake masi uočenog tela, koja se kreće brzinom jednakom translatornoj brzini tela i naziva se *translatorna kinetička energija*.

U slučaju obrtanja tela oko neke nepokretne tačke ta se tačka može uzeti za početak A pokretnog koordinatnog sistema pa je $\mathbf{v}_A = \mathbf{0}$ i kinetička energija tela biće određena obrascem

$$(31) \quad 2T = \omega^2 I_\omega^A.$$

To je *rotaciona kinetička energija*.

Kad se centar inercije krutog tela izabere za početak pokretnog koordinatnog sistema, iz relacije (20) vidi se da se ukupna kinetička energija tela može da izrazi kao zbir translatorne i rotacione kinetičke energije.

3.5.1.2. Količina kretanja krutog tela

Količina kretanja materijalnog sistema jednaka je zbiru količina kretanja pojedinačnih tačaka sistema (3.2.7—1),

$$(1) \quad \mathbf{K} = \Sigma \mathbf{K}_i = \Sigma m_i \mathbf{v}_i.$$

S obzirom na obrazac (1.11—4) za količinu kretanja krutog tela može se napisati relacija

$$(2) \quad \mathbf{K} = \Sigma m_i (\mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i).$$

Kako je

$$(3) \quad \Sigma m_i \mathbf{v}_A = m \mathbf{v}_A,$$

i

$$(4) \quad \Sigma m_i (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i) = \boldsymbol{\omega} \times (\Sigma m_i \mathbf{r}_i) = m \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_C,$$

količina kretanja krutog tela biće određena obrascem

$$(5) \quad \mathbf{K} = m (\mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_C).$$

Vektor \mathbf{r}_C određuje položaj centra inercije tela prema pokretnom polu A , $\mathbf{r}_C = \overrightarrow{AC}$, pa je

$$(6) \quad \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_C = \mathbf{v}_C,$$

gde je \mathbf{v}_C brzina centra inercije tela. Stoga se pored (5) za količinu kretanja krutog tela može napisati i obrazac

$$(7) \quad \mathbf{K} = m \mathbf{v}_C,$$

tj. *količina kretanja krutog tela jednaka je količini kretanja materijalne tačke koja se kreće brzinom jednakom brzini centra inercije tela i koja ima masu jednaku masi celog tela.*

Videli smo (3.5.1.1—8) da se kinetička energija krutog tela može izraziti u obliku

$$(8) \quad 2 T = m \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}_A + 2 m \mathbf{v}_A \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_C) + \omega^2 I_{\omega}^A.$$

Delimični gradijent kinetičke energije određene obrascem (8) po translatornoj brzini \mathbf{v}_A biće prema (3.2.1—17) vektor

$$(9) \quad \text{grad}_{\mathbf{v}_A} T = m \mathbf{v}_A + m (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_C),$$

a upoređenjem ovog obrasca sa (6) vidi se da je

$$(10) \quad \mathbf{K} = \text{grad}_{\mathbf{v}_A} T = m (\mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_C) = \text{grad}_{\mathbf{v}_C} T,$$

tj. *količina kretanja krutog tela jednaka je delimičnom gradijentu kinetičke energije tela po vektoru translatorne brzine.*

Projekcije količine kretanja na ose nepokretnog koordinatnog sistema dobiće se skalarnim množenjem relacije (10) odgovarajućim jediničnim vektorima \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} , a projekcije na ose pokretnog sistema skalarnim množenjem vektorima $\boldsymbol{\lambda}$, $\boldsymbol{\mu}$ i $\boldsymbol{\nu}$.

S obzirom na (3.5.1.1—9) i (3.2.1—16) projekcije vektora \mathbf{K} na ose nepokretnog triedra $Oxyz$ biće

$$(11) \quad \begin{aligned} K_x &= \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_A} = m [\dot{x}_A + Q(z_C - z_A) - R(y_C - y_A)], \\ K_y &= \frac{\partial T}{\partial \dot{y}_A} = m [\dot{y}_A + R(x_C - x_A) - P(z_C - z_A)], \\ K_z &= \frac{\partial T}{\partial \dot{z}_A} = m [\dot{z}_A + P(y_C - y_A) - Q(x_C - x_A)]. \end{aligned}$$

Ako se uzmu u obzir koordinate vektora \mathbf{v}_A , $\boldsymbol{\omega}$ i \mathbf{p}_C u odnosu na pokretni koordinatni sistem (3.5.1.1—15), projekcije količine kretanja na te ose biće

$$(12) \quad \begin{aligned} K_\xi &= \frac{\partial T}{\partial v_{A\xi}} = m(v_{A\xi} + q\zeta_C - r\eta_C), \\ K_\eta &= \frac{\partial T}{\partial v_{A\eta}} = m(v_{A\eta} + r\xi_C - p\zeta_C), \\ K_\zeta &= \frac{\partial T}{\partial v_{A\zeta}} = m(v_{A\zeta} + p\eta_C - q\xi_C). \end{aligned}$$

Međutim, s obzirom na (7) projekcije količine kretanja na ose nepokretnog i pokretnog triedra mogu se napisati u obliku

$$(13) \quad K_x = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_C} = m\dot{x}_C, \quad K_y = \frac{\partial T}{\partial \dot{y}_C} = m\dot{y}_C, \quad K_z = \frac{\partial T}{\partial \dot{z}_C} = m\dot{z}_C;$$

$$(14) \quad K_\xi = \frac{\partial T}{\partial v_{C\xi}} = mv_{C\xi}, \quad K_\eta = \frac{\partial T}{\partial v_{C\eta}} = mv_{C\eta}, \quad K_\zeta = \frac{\partial T}{\partial v_{C\zeta}} = mv_{C\zeta}.$$

3.5.1.3. Kinetički moment krutog tela

Prema (3.2.9—1) kinetički moment krutog tela biće zbir kinetičkih momenta svih tačaka tela u odnosu na neki nepokretni pol O ,

$$(1) \quad \mathbf{l}^O = \Sigma \mathbf{l}_i^O = \Sigma \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i = \Sigma m_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i.$$

Ako se vektor položaja \mathbf{r}_i tačke krutog tela izrazi u obliku $\mathbf{r}_A + \mathbf{q}_i$, dobiće se iz (1)

$$(2) \quad \mathbf{l}^O = \Sigma \mathbf{r}_A \times m_i \mathbf{v}_i + \Sigma \mathbf{q}_i \times m_i \mathbf{v}_i.$$

Međutim, prema (3.5.1.2—1) biće

$$(3) \quad \Sigma \mathbf{r}_A \times m_i \mathbf{v}_i = \mathbf{r}_A \times \mathbf{K},$$

dok je

$$(4) \quad \Sigma \mathbf{q}_i \times m_i \mathbf{v}_i = \mathbf{l}^A$$

kinetički moment krutog tela u odnosu na pokretni pol A , pa se izraz za kinetički moment za nepokretni pol O može izraziti u obliku

$$(5) \quad \mathbf{l}^O = \mathbf{r}_A \times \mathbf{K} + \mathbf{l}^A.$$

Kad se u obrazac (4) unese vrednost (1.11—4) za brzinu \mathbf{v}_i dobiće se

$$(6) \quad \mathbf{I}^A = \sum m_i \mathbf{e}_i \times (\mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_i) = m \mathbf{e}_C \times \mathbf{v}_A + \sum m_i \mathbf{e}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_i),$$

ili posle razvijanja dvostrukog vektorskog proizvoda

$$(7) \quad \mathbf{I}^A = m \mathbf{e}_C \times \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \sum m_i \rho_i^2 - \sum m_i \mathbf{e}_i (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{e}_i).$$

Obrazac (3.5.1.2—8) za kinetičku energiju može se s obzirom na (7) napisati i u obliku

$$(8) \quad 2T = mv_A^2 + 2m \boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{e}_C \times \mathbf{v}_A) + \sum m_i (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_i) \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_i).$$

Za skalarni proizvod dva vektorska proizvoda može se iskoristiti obrazac

$$(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_i) \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_i) = (\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega}) \rho_i^2 - (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{e}_i)^2,$$

pa će biti

$$(9) \quad 2T = mv_A^2 + 2m \boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{e}_C \times \mathbf{v}_A) + (\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega}) \sum m_i \rho_i^2 - \sum m_i (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{e}_i)^2.$$

Delimični gradijent kinetičke energije po trenutnoj ugaonoj brzini biće tada

$$(10) \quad \text{grad}_{\boldsymbol{\omega}} T = m (\mathbf{e}_C \times \mathbf{v}_A) + \boldsymbol{\omega} \sum m_i \rho_i^2 - \sum m_i \mathbf{e}_i (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{e}_i).$$

Pri tome se npr. parcijalni gradijent po $\boldsymbol{\omega}$ od izraza $(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_i)^2$ računa na ovaj način

$$\text{grad}_{\boldsymbol{\omega}} (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{e}_i)^2 = 2 (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{e}_i) \text{grad}_{\boldsymbol{\omega}} (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{e}_i) = 2 (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{e}_i) \mathbf{e}_i.$$

Upoređenjem ovog izraza sa obrascem (7) za kinetički moment u odnosu na pokretni pol A vidi se da je

$$(11) \quad \mathbf{I}^A = \text{grad}_{\boldsymbol{\omega}} T = m (\mathbf{e}_C \times \mathbf{v}_A) + \boldsymbol{\omega} \sum m_i \rho_i^2 - \sum m_i \mathbf{e}_i (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{e}_i),$$

tj. *kinetički moment krutog tela za pokretni pol jednak je delimičnom gradijentu kinetičke energije po trenutnoj ugaonoj brzini.*

Kad se pokretni pol A poklapa sa centrom inercije tela biće $\mathbf{e}_C = \mathbf{0}$ i

$$(12) \quad \mathbf{I}^A = \text{grad}_{\boldsymbol{\omega}} T = \boldsymbol{\omega} \sum m_i \rho_i^2 - \sum m_i \mathbf{e}_i (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{e}_i).$$

Za nepokretni pol O može se onda obrazac (5) napisati u obliku

$$\mathbf{I}^O = \mathbf{r}_A \times \mathbf{K} + \text{grad}_{\boldsymbol{\omega}} T,$$

ili prema (3.5.1.2—10),

$$(13) \quad \mathbf{I}^O = \mathbf{r}_A \times \text{grad}_{\mathbf{v}_A} T + \text{grad}_{\boldsymbol{\omega}} T.$$

Skalarnim množenjem vektorske relacije (11) jediničnim vektorima nepokretnog koordinatnog sistema dobiće se, s obzirom na (3.5.1.1—14),

$$(14) \quad \begin{aligned} l_x^A &= \frac{\partial T}{\partial P} = m[(y_C - y_A)\dot{z}_A - (z_C - z_A)\dot{y}_A] + I_x^A P + \Pi_{xy}^A Q + \Pi_{xz}^A R, \\ l_y^A &= \frac{\partial T}{\partial Q} = m[(z_C - z_A)\dot{x}_A - (x_C - x_A)\dot{z}_A] + \Pi_{yx}^A P + I_y^A Q + \Pi_{yz}^A R, \\ l_z^A &= \frac{\partial T}{\partial R} = m[(x_C - x_A)\dot{y}_A - (y_C - y_A)\dot{x}_A] + \Pi_{zx}^A P + \Pi_{zy}^A Q + I_z^A R. \end{aligned}$$

Iz obrasca (13) dobiće se projekcije kinetičkog momenta na ose kroz nepokretni pol O

$$(15) \quad \begin{aligned} l_x^O &= \frac{\partial T}{\partial P} + y_A \frac{\partial T}{\partial z_A} - z_A \frac{\partial T}{\partial y_A}, \\ l_y^O &= \frac{\partial T}{\partial Q} + z_A \frac{\partial T}{\partial x_A} - x_A \frac{\partial T}{\partial z_A}, \\ l_z^O &= \frac{\partial T}{\partial R} + x_A \frac{\partial T}{\partial y_A} - y_A \frac{\partial T}{\partial x_A}. \end{aligned}$$

Projiciranjem na ose pokretnog koordinatnog sistema $A\xi\eta\zeta$ dobiće se iz (11), s obzirom na (3.5.1.1—19),

$$(16) \quad \begin{aligned} l_\xi^A &= \frac{\partial T}{\partial p} = m(\eta_C v_{A\zeta} - \zeta_C v_{A\eta}) + I_\xi^A p + \Pi_{\xi\eta}^A q + \Pi_{\xi\zeta}^A r, \\ l_\eta^A &= \frac{\partial T}{\partial q} = m(\zeta_C v_{A\xi} - \xi_C v_{A\zeta}) + I_\eta^A q + \Pi_{\eta\xi}^A r + \Pi_{\eta\zeta}^A p, \\ l_\zeta^A &= \frac{\partial T}{\partial r} = m(\xi_C v_{A\eta} - \eta_C v_{A\xi}) + I_\zeta^A r + \Pi_{\zeta\xi}^A p + \Pi_{\zeta\eta}^A q. \end{aligned}$$

3.5.2. Diferencijalne jednačine kretanja krutog tela

Za određivanje kretanja krutog tela koje se kreće pod dejstvom datih aktivnih sila potrebno je naći šest konačnih jednačina kretanja

$$(1) \quad \begin{aligned} x_A &= x_A(t), & y_A &= y_A(t), & z_A &= z_A(t), \\ \psi &= \psi(t), & \varphi &= \varphi(t), & \vartheta &= \vartheta(t), \end{aligned}$$

čime se koordinate tela određuju kao funkcije vremena. Tih šest funkcija mogu se odrediti samo iz šest međusobno nezavisnih skalarnih diferencijalnih jednačina kretanja. Skalarnе diferencijalne jednačine kretanja mogu se dobiti projiciranjem dve vektorske diferencijalne jednačine na koordinatne ose. Te nezavisne vektorske diferencijalne jednačine proističu iz zakona količine kretanja i zakona kinetičkog momenta primenjenih na kruto telo.

Iz zakona količine kretanja za materijalni sistem uopšte (3.2.7—9 i 10) dobiva se s obzirom na (3.5.1.2—7 i 10) zakon količine kretanja za kruto telo

$$(2) \quad \dot{\mathbf{K}} = \frac{d}{dt} \text{grad}_{\mathbf{v}_A} T = \frac{d}{dt} \text{grad}_{\mathbf{v}_C} T = \mathbf{F} + \mathbf{R},$$

gde je \mathbf{F} rezultanta svih aktivnih sila koje dejstvuju na telo a \mathbf{R} rezultanta svih sila reakcije veza.

Sa druge strane iz zakona kinetičkog momenta materijalnog sistema (3.2.9—6 i 12), kad se uzme u obzir (3.5.1.3—12 i 13) i činjenica da između \mathbf{L}^O i \mathbf{L}^A postoji veza

$$(3) \quad \mathbf{L}^O = \mathbf{L}^A + \mathbf{r}_A \times \mathbf{K},$$

dobiva se zakon kinetičkog momenta krutog tela za pokretni i nepokretni pol. Za pokretni pol se dobiva

$$(4) \quad \dot{\mathbf{i}}^A + \mathbf{v}_A \times \mathbf{K} = \frac{d}{dt} \text{grad}_{\omega} T + \mathbf{v}_A \times \text{grad}_{\mathbf{v}_A} T = \mathbf{L}^A,$$

gde je \mathbf{L}^A rezultatni moment svih aktivnih sila i sila reakcije koje dejstvuju na telo, a u odnosu na pol A . Za nepokretni pol zakon kinetičkog momenta biće

$$(5) \quad \dot{\mathbf{i}}^0 = \frac{d}{dt} (\text{grad}_{\omega} T + \mathbf{r}_A \times \text{grad}_{\mathbf{v}_A} T) = \mathbf{L}^0.$$

Vektorske diferencijalne jednačine kretanja (2) i (4) ili (2) i (5) određuju dve serije od po tri skalarne diferencijalne jednačine kretanja krutog tela. Skalarne jednačine dobiće se projiciranjem na ose pokretnog ili nepokretnog koordinatnog sistema.

3.5.2.1. Skalarne diferencijalne jednačine kretanja slobodnog krutog tela

Skalarnim množenjem relacija (2) i (5) iz prethodnog odeljka jediničnim vektorima \mathbf{i} , \mathbf{j} i \mathbf{k} dobiće se diferencijalne jednačine kretanja u odnosu na nepokretni koordinatni sistem $Oxyz$. Ako je \mathbf{a} neki stalni jedinični vektor, iz (2) i (5) skalarnim množenjem sa \mathbf{a} dobiće se

$$(1) \quad \left(\frac{d}{dt} \text{grad}_{\mathbf{v}_A} T \right) \cdot \mathbf{a} = \frac{d}{dt} (\text{grad}_{\mathbf{v}_A} T \cdot \mathbf{a}) = \mathbf{F} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{R} \cdot \mathbf{a},$$

i

$$(2) \quad \left[\frac{d}{dt} (\text{grad}_{\omega} T + \mathbf{r}_A \times \text{grad}_{\mathbf{v}_A} T) \right] \cdot \mathbf{a} = \\ = \frac{d}{dt} (\text{grad}_{\omega} T \cdot \mathbf{a} + [\mathbf{r}_A, \text{grad}_{\mathbf{v}_A} T, \mathbf{a}]) = \mathbf{L}^0 \cdot \mathbf{a}.$$

Kad se stavi redom da je $\mathbf{a} = \mathbf{i}$, \mathbf{j} , \mathbf{k} , i iskoriste obrasci (3.5.1.2—11) dobiće se iz (1) tri skalarne jednačine,

$$(3) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_A} = X + R_x, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{y}_A} = Y + R_y, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{z}_A} = Z + R_z,$$

a iz (2) pošto se iskoristi obrazac (3.5.1.3—14),

$$(4) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial P} + y_A \frac{\partial T}{\partial \dot{z}_A} - z_A \frac{\partial T}{\partial \dot{y}_A} \right) = L_x^0, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial Q} + z_A \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_A} - x_A \frac{\partial T}{\partial \dot{z}_A} \right) = L_y^0, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial R} + x_A \frac{\partial T}{\partial \dot{y}_A} - y_A \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_A} \right) = L_z^0.$$

Skalarnim množenjem vektorskih relacija (3.5.2 — 2 i 4) jediničnim vektorima λ , μ , ν osa pokretnog koordinatnog sistema dobiće se šest skalarnih diferen-

cijalnih jednačina kretanja za pokretne ose $A\xi\eta\zeta$. Te ose menjaju, međutim, svoj pravac za vreme kretanja tela pa se pri pisanju skalarnih jednačina kretanja mora i o tome voditi računa.

Neka je \mathbf{u} neki promenljivi jedinični vektor. Skalarnim množenjem vektorske jednačine (3.5.2 — 2) sa \mathbf{u} dobiće se

$$(5) \quad \dot{\mathbf{K}} \cdot \mathbf{u} = \frac{d}{dt} (\mathbf{K} \cdot \mathbf{u}) - \mathbf{K} \cdot \dot{\mathbf{u}} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{R} \cdot \mathbf{u}.$$

Kako je prema (1.11.1 — 11)

$$\dot{\mathbf{u}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u},$$

relacija (5) može se napisati u obliku

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{K} \cdot \mathbf{u}) - [\mathbf{K} \boldsymbol{\omega} \mathbf{u}] = \mathbf{F} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{R} \cdot \mathbf{u},$$

odnosno u obliku

$$(6) \quad \frac{d}{dt} (\mathbf{K} \cdot \mathbf{u}) - (\mathbf{K} \times \boldsymbol{\omega}) \cdot \mathbf{u} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{R} \cdot \mathbf{u},$$

koji je najpodesniji za primenu.

Slično tome, skalarnim množenjem vektorske jednačine (3.5.2 — 4) vektorom \mathbf{u} dobiće se

$$(7) \quad \frac{d}{dt} (\text{grad}_{\boldsymbol{\omega}} T \cdot \mathbf{u}) - (\text{grad}_{\boldsymbol{\omega}} T \times \boldsymbol{\omega}) \cdot \mathbf{u} + (\mathbf{v}_A \times \text{grad}_{\mathbf{v}_A} T) \cdot \mathbf{u} = \mathbf{L}^A \cdot \mathbf{u}.$$

Ako se onda u (6) stavi da je $\mathbf{u} = \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\nu}$ i iskoriste obrasci (3.5.1.2 — 12) dobiće se sistem skalarnih jednačina kretanja

$$(8) \quad \begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial v_{A\xi}} + q \frac{\partial T}{\partial v_{A\zeta}} - r \frac{\partial T}{\partial v_{A\eta}} &= F_{\xi} + R_{\xi}, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial v_{A\eta}} + r \frac{\partial T}{\partial v_{A\xi}} - p \frac{\partial T}{\partial v_{A\zeta}} &= F_{\eta} + R_{\eta}, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial v_{A\zeta}} + p \frac{\partial T}{\partial v_{A\eta}} - q \frac{\partial T}{\partial v_{A\xi}} &= F_{\zeta} + R_{\zeta}. \end{aligned}$$

Iz (7) se, pošto se iskoriste obrasci (3.5.1.3 — 16), dobivaju za $\mathbf{u} = \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\nu}$ jednačine

$$(9) \quad \begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial p} + q \frac{\partial T}{\partial r} - r \frac{\partial T}{\partial q} + v_{A\eta} \frac{\partial T}{\partial v_{A\zeta}} - v_{A\zeta} \frac{\partial T}{\partial v_{A\eta}} &= L_{\xi}^A, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial q} + r \frac{\partial T}{\partial p} - p \frac{\partial T}{\partial r} + v_{A\zeta} \frac{\partial T}{\partial v_{A\xi}} - v_{A\xi} \frac{\partial T}{\partial v_{A\zeta}} &= L_{\eta}^A, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial r} + p \frac{\partial T}{\partial q} - q \frac{\partial T}{\partial p} + v_{A\xi} \frac{\partial T}{\partial v_{A\eta}} - v_{A\eta} \frac{\partial T}{\partial v_{A\xi}} &= L_{\zeta}^A. \end{aligned}$$

Šest jednačina (8) i (9) predstavljaju potpuni sistem skalarnih diferencijalnih jednačina kretanja krutog tela za pokretni koordinatni sistem koji se kreće zajedno sa telom i za telo je nepromenljivo vezan.

Ako se pokretni pol poklapa sa centrom inercije tela a za ose pokretnog sistema uzmu se glavne ose inercije, kinetička energija tela biće određena obrascem (3.5.1.1 — 24),

$$(10) \quad 2T = mv_A^2 + Ap^2 + Bq^2 + Cr^2,$$

pa će koordinate vektora $\text{grad}_{\omega} T$ u odnosu na pokretni triedar biti

$$(11) \quad \frac{\partial T}{\partial p} = Ap, \quad \frac{\partial T}{\partial q} = Bq, \quad \frac{\partial T}{\partial r} = Cr,$$

dok je

$$(12) \quad \text{grad}_{\mathbf{v}_C} T = m\mathbf{v}_C.$$

U nizu problema dinamike krutog tela zgodno je da se zakon količine kretanja projicira na ose nepokretnog koordinatnog sistema, a zakon kinetičkog momenta na ose pokretnog sistema. Tada se jednačine (3) svode na

$$(13) \quad m\ddot{x}_C = X + R_x, \quad m\ddot{y}_C = Y + R_y, \quad m\ddot{z}_C = Z + R_z.$$

Iz (12) proističe neposredno

$$\mathbf{v}_C \times \text{grad}_{\mathbf{v}_C} T = \mathbf{0},$$

pa se zakon kinetičkog momenta (3.5.2 — 4) svodi na oblik

$$(14) \quad \frac{d}{dt} \text{grad}_{\omega} T = \mathbf{L}^A.$$

Prema tome za glavne centralne ose $CXYZ$ skalarne diferencijalne jednačine kretanja (9) koje potiču iz zakona kinetičkog momenta biće

$$(15) \quad \begin{aligned} A \frac{dp}{dt} - (B - C) qr &= L_x^C, \\ B \frac{dq}{dt} - (C - A) rp &= L_y^C, \\ C \frac{dr}{dt} - (A - B) pq &= L_z^C. \end{aligned}$$

Jednačine (13) i (15) međusobno potpuno su nezavisne. Jednačine (13) određuju translatorno kretanje krutog tela a jednačine (15) njegovo obrtanje oko centra inercije. Jednačine (15) nazivaju se *Ojlerove diferencijalne jednačine obrtanja krutog tela oko centra inercije*.

Konfiguracija krutog tela, shvaćenog kao materijalni sistem u smislu opštih razmatranja u poglavljima 3.2 i 3.5, određena je pomoću šest koordinata krutog tela

$$x_A, y_A, z_A; \quad \psi, \varphi, \vartheta.$$

Prema tome i na kretanje krutog tela mogu se primeniti Lagranževe jednačine kretanja. Za slobodno telo kinetička energija može da se napiše u Lagranževom

obliku (3.5.1.1 — 28) pri čemu je centar inercije C tela izabran za pokretni pol, pa će diferencijalne jednačine kretanja biti s obzirom na (3.2.3 — 16)

$$\begin{aligned}
 m\ddot{x}_C &= X, & m\ddot{y}_C &= Y, & m\ddot{z}_C &= Z; \\
 (16) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} - \frac{\partial T}{\partial \psi} &= Q_\psi, \\
 \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} &= Q_\varphi, \\
 \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\vartheta}} - \frac{\partial T}{\partial \vartheta} &= Q_\vartheta.
 \end{aligned}$$

Veličine $X, Y, Z, Q_\psi, Q_\varphi, Q_\vartheta$ odgovaraju ovde generalisanim silama za koordinate krutog tela $x_C, y_C, z_C, \psi, \varphi, \vartheta$. Jednačine kretanja (16) nazivaju se *Lagranževe diferencijalne jednačine kretanja krutog tela*.

Ako je \mathbf{F} rezultanta sila koje dejstvuju na kruto telo, rad sile \mathbf{F} na elementarnom pomeranju biće

$$(17) \quad dA = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

Elementarno pomeranje $d\mathbf{r}$ neke tačke tela u opštem slučaju određeno je relacijom (1.9.6 — 2),

$$(18) \quad d\mathbf{r} = d\mathbf{r}_A + d\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\rho},$$

gde je $d\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega} dt$ vektor elementarne rotacije tela. Prema (1.10 — 12) elementarna rotacija može se izraziti obrascem

$$(19) \quad d\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega} dt = d\psi \mathbf{k} + d\varphi \mathbf{v} + d\vartheta \mathbf{N},$$

pa se unošenjem te vrednosti u obrazac (18) dobiva za elementarno pomeranje izraz

$$(20) \quad d\mathbf{r} = d\mathbf{r}_A + (\mathbf{k} \times \boldsymbol{\rho}) d\psi + (\mathbf{v} \times \boldsymbol{\rho}) d\varphi + (\mathbf{N} \times \boldsymbol{\rho}) d\vartheta.$$

Za nepokretni koordinatni sistem elementarna translacija je određena obrascem

$$(21) \quad d\mathbf{r}_A = dx_A \mathbf{i} + dy_A \mathbf{j} + dz_A \mathbf{k}.$$

S obzirom na (20) i (21) iz relacije (17) dobiće se za rad na elementarnom pomeranju relacija

$$\begin{aligned}
 (22) \quad dA &= X dx_A + Y dy_A + Z dz_A + \mathbf{F} \cdot (\mathbf{k} \times \boldsymbol{\rho}) d\psi + \mathbf{F} \cdot (\mathbf{v} \times \boldsymbol{\rho}) d\varphi + \\
 &\quad + \mathbf{F} \cdot (\mathbf{N} \times \boldsymbol{\rho}) d\vartheta.
 \end{aligned}$$

Pri tome su X, Y, Z projekcije sile \mathbf{F} na ose nepokretnog koordinatnog sistema $Oxyz$. Tri mešovita proizvoda u obrascu (22) mogu se napisati i u nešto drukčijem obliku,

$$\begin{aligned}
 (23) \quad Q_\psi &\equiv \mathbf{F} \cdot (\mathbf{k} \times \boldsymbol{\rho}) = (\boldsymbol{\rho} \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k}, \\
 Q_\varphi &\equiv \mathbf{F} \cdot (\mathbf{v} \times \boldsymbol{\rho}) = (\boldsymbol{\rho} \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{v}, \\
 Q_\vartheta &\equiv \mathbf{F} \cdot (\mathbf{N} \times \boldsymbol{\rho}) = (\boldsymbol{\rho} \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{N},
 \end{aligned}$$

odakle se vidi da generalisane sile $Q_\psi, Q_\varphi, Q_\vartheta$ predstavljaju momente sile \mathbf{F} u odnosu na ose \mathbf{k}, \mathbf{v} i liniju čvorova $\overrightarrow{ON}(\mathbf{N})$.

3.5.2.2. Jednačine kretanja vezanog krutog tela

Ako je sloboda kretanja krutog tela ograničena pomoću k_1 holonomnih i k_2 neholonomnih idealnih veza, $k_1 + k_2 < 6$,

$$(1) \quad f_\alpha(\mathbf{r}_A, \psi, \varphi, \vartheta; t) = 0, \quad (\alpha = 1, 2, \dots, k_1)$$

$$(2) \quad \varphi_\beta(\mathbf{r}_A, \psi, \varphi, \vartheta; \mathbf{v}_A, \dot{\psi}, \dot{\varphi}, \dot{\vartheta}; t) = 0, \quad (\beta = 1, 2, \dots, k_2)$$

sile reakcije prema (3.2.3 — 9 i 16) biće određene relacijama

$$(3) \quad \begin{aligned} R_x &= \sum_{\alpha=1}^{k_1} \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_A} + \sum_{\beta=1}^{k_2} \mu_\beta \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial x_A}, \\ R_y &= \sum_{\alpha=1}^{k_1} \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial y_A} + \sum_{\beta=1}^{k_2} \mu_\beta \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial y_A}, \\ R_z &= \sum_{\alpha=1}^{k_1} \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial z_A} + \sum_{\beta=1}^{k_2} \mu_\beta \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial z_A}, \\ R_\psi &= \sum_{\alpha=1}^{k_1} \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial \psi} + \sum_{\beta=1}^{k_2} \mu_\beta \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial \dot{\psi}}, \\ R_\varphi &= \sum_{\alpha=1}^{k_1} \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial \varphi} + \sum_{\beta=1}^{k_2} \mu_\beta \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial \dot{\varphi}}, \\ R_\vartheta &= \sum_{\alpha=1}^{k_1} \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial \vartheta} + \sum_{\beta=1}^{k_2} \mu_\beta \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial \dot{\vartheta}}. \end{aligned}$$

Ako se ove relacije unesu u Lagranževe jednačine kretanja (3.5.2.1 — 16) dobiće se

$$(4) \quad \begin{aligned} m\ddot{x}_C &= X + \sum_{\alpha=1}^{k_1} \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_C} + \sum_{\beta=1}^{k_2} \mu_\beta \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial x_C}, \\ m\ddot{y}_C &= Y + \sum_{\alpha=1}^{k_1} \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial y_C} + \sum_{\beta=1}^{k_2} \mu_\beta \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial y_C}, \\ m\ddot{z}_C &= Z + \sum_{\alpha=1}^{k_1} \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial z_C} + \sum_{\beta=1}^{k_2} \mu_\beta \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial z_C}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} - \frac{\partial T}{\partial \psi} &= Q_{\psi} + \sum_{\alpha=1}^{k_1} \lambda_{\alpha} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial \psi} + \sum_{\beta=1}^{k_2} \mu_{\beta} \frac{\partial \varphi_{\beta}}{\partial \psi}, \\
 \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} &= Q_{\varphi} + \sum_{\alpha=1}^{k_1} \lambda_{\alpha} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial \varphi} + \sum_{\beta=1}^{k_2} \mu_{\beta} \frac{\partial \varphi_{\beta}}{\partial \varphi}, \\
 \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\vartheta}} - \frac{\partial T}{\partial \vartheta} &= Q_{\vartheta} + \sum_{\alpha=1}^{k_1} \lambda_{\alpha} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial \vartheta} + \sum_{\beta=1}^{k_2} \mu_{\beta} \frac{\partial \varphi_{\beta}}{\partial \vartheta}.
 \end{aligned}
 \tag{5}$$

Diferencijalne jednačine (4) i (5) obrazuju sistem od šest *Lagranževih jednačina prve vrste za kruto telo* koje je podvrgnuto holonomnim i neholonomnim vezama.

Ako na kruto telo dejstvuju samo holonomne veze mogu se uvesti nezavisne koordinate na isti način kako je to izloženo u odeljku (3.2.4) i u odnosu na njih napisati Lagranževe jednačine druge vrste kojih će biti tačno onoliko koliko telo ima stepena slobode.

Od neholonomnih veza najčešće se javlja uslov da se telo kotrlja bez klizanja (odeljak 1.11.2) po nekoj ravni ili površi uopšte. Kotrljanje bez klizanja može da se ostvari samo ako su površi tela i veza po kojima se telo kotrlja *savršeno hrapave*

U tački dodira D površi tela i veze, prema tome, javlja se u opštem slučaju sila trenja. Pri kotrljanju tela bez klizanja po vezi, brzina tačke dodira jednaka je nuli i kroz tu tačku prolazi trenutna osa rotacije tela (odeljak 1.11.2 i 1.11.3). Stoga ako je $\boldsymbol{\omega}$ vektor trenutne ugaone brzine i $\mathbf{e}_D = \overrightarrow{AD}$ vektor položaja tačke D dodira tela sa vezom u odnosu na pokretni pol A , brzina tačke dodira će biti

$$\mathbf{v}_D = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_D.
 \tag{6}$$

Kad se telo kotrlja bez klizanja, $\mathbf{v}_D = \mathbf{0}$ biće brzina pokretnog pola određen obrascem

$$\mathbf{v}_A = -\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_D,
 \tag{7}$$

odakle se vidi da je vektor \mathbf{v}_A upravan na osu $\boldsymbol{\omega}$ trenutne ugaone brzine.

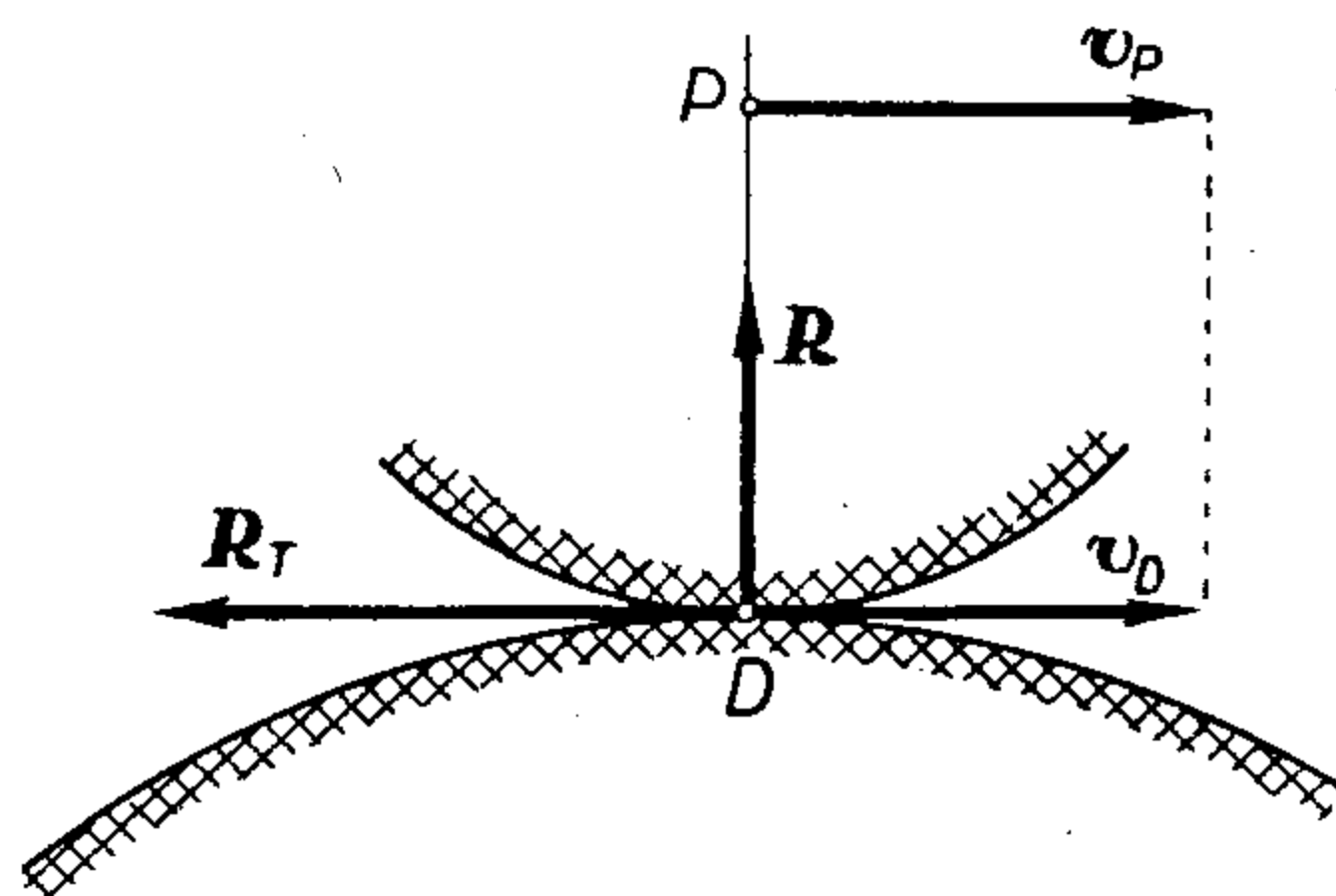
Kad veze nisu idealne u tački ili tačkama dodira tela i veze javlja se sila trenja \mathbf{R}_T koja je proporcionalna normalnoj reakciji veze \mathbf{R} , kolinearna je sa brzinom tačke dodira ali je suprotno od nje orijentisana,

$$\mathbf{R}_T = -k |\mathbf{R}| \frac{\mathbf{v}_D}{|\mathbf{v}_D|}.
 \tag{8}$$

Brzina \mathbf{v}_D tačke dodira je *brzina klizanja*.

Do kotrljanja tela bez klizanja dovodi sila trenja. Ako bi površ tela i površ veze bile idealne glatke površi, telo bi se moglo kretati bez obrtanja — translatorno i tačka dodira D imala bi brzinu jednaku brzini pokretnog pola A , $\mathbf{v}_D = \mathbf{v}_A$. Neka je P (sl. 144) centar krivine linije krivine površi tela (v. zadatak 11, str. 114) u tački dodira tela sa vezom. Pri translatorsnom kretanju tela i tačka P imala bi brzinu jednaku brzini pokretnog pola, $\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_D = \mathbf{v}_A$. Neka je I^P moment inercije tela za osu upravnu na ravan određenu vektorom \mathbf{v}_P i tačkom D i neka u tački D dej

stvuje sila trenja \mathbf{R}_T data obrascem (8). U nekom uočenom trenutku može se tačka P uzeti za pokretni pol. Kinetička energija tela biće prema (3.5.1.1 — 8)



Slika 144

$$T = \frac{m}{2} v_P^2 + m [\mathbf{v}_P \boldsymbol{\omega} \overrightarrow{PC}] + \frac{1}{2} \omega^2 I_{\omega}^P,$$

gde je \overrightarrow{PC} vektor položaja centra inercije tela prema polu P . Zakon kinetičkog momenta u odnosu na pol P biće prema (3.5.2 — 4)

$$(9) \quad \frac{d}{dt} \text{grad}_{\boldsymbol{\omega}} T + \mathbf{v}_P \times \text{grad}_{\mathbf{v}_P} T = \mathbf{L}^P.$$

Pošto su pri klizanju brzine svih tačaka tela jednake biće $\text{grad}_{\mathbf{v}_P} T = m\mathbf{v}_C = m\mathbf{v}_P$ pa je otuda

$$\mathbf{v}_P \times \text{grad}_{\mathbf{v}_P} T = \mathbf{0}.$$

Normalna reakcija \mathbf{R} veze prolazi kroz centar krivine P i njen je moment u tački P jednak nuli. Stoga će moment \mathbf{L}^P zavisiti samo od sile trenja i rezultante \mathbf{F} aktivnih sila koje dejstvuju, saglasno zakonu količine kretanja (3.5.2 — 2), na centar inercije C tela,

$$\mathbf{L}^P = \overrightarrow{PD} \times \mathbf{R}_T + \overrightarrow{PC} \times \mathbf{F}.$$

Ako se stavi $\mathbf{R}_T = -R_T \boldsymbol{\lambda}$; $\overrightarrow{PD} = -a \boldsymbol{\mu}$, $\overrightarrow{PC} \times \mathbf{F} = \boldsymbol{\Lambda}^P$, može se najzad napisati

$$(10) \quad \mathbf{L}^P = -a R_T \boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{\Lambda}^P,$$

a vektor $\boldsymbol{\nu}$ kolinearan je sa trenutnom ugaonom brzinom $\boldsymbol{\omega}$.

Da bi nastupilo kotrljanje bez klizanja potrebno je da sila trenja određena obrascem (8) bude po veličini najmanje tolika da njen moment za tačku P prouzrokuje obrtanje tela ugaonom brzinom $\boldsymbol{\omega}$, tolikom da uslov (7), odnosno

$$(11) \quad \mathbf{v}_P = -\boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{PD},$$

bude zadovoljen. Iz (8) proističe

$$R_T = k |\mathbf{R}|,$$

što zamenom u (10) daje

$$\mathbf{L}^P = -ak |\mathbf{R}| \mathbf{v} + \Lambda^P.$$

Zakon kinetičkog momenta može se sad napisati u obliku

$$(12) \quad \frac{d}{dt} (\text{grad}_{\omega} T) = -ak |\mathbf{R}| \mathbf{v} + \Lambda^P.$$

Skalarnim množenjem relacije (11) sa \mathbf{v} dobiće se

$$\frac{d}{dt} (\text{grad}_{\omega} T \cdot \mathbf{v}) = -ak |\mathbf{R}| + \Lambda_{\mathbf{v}}^P,$$

a odatle se može izračunati koeficijent trenja k ,

$$(13) \quad k = \frac{\Lambda_{\mathbf{v}}^P - \frac{d}{dt} (\text{grad}_{\omega} T \cdot \mathbf{v})}{a |\mathbf{R}|} \equiv k^*.$$

Za $k < k^*$ trenje nije dovoljno i telo će klizati; za $k \geq k^*$ telo se po vezi kotrlja bez klizanja. Veličina k^* zavisi od aktivnih sila, brzine \mathbf{v}_A i ugaone brzine ω tela kao i krivine površi tela, a koeficijent trenja k određuje se eksperimentalno za razne vrste materijala.

Rad sile trenja \mathbf{R}_T na elementarnom pomeranju $d\mathbf{r}_D$ je

$$dA_T = \mathbf{R}_T \cdot d\mathbf{r}_D.$$

Kako je prema (6)

$$d\mathbf{r}_D = \mathbf{v}_D dt = d\mathbf{r}_D + \omega \times \mathbf{r}_D dt,$$

očigledno pri kotrljanju bez klizanja nema pomeranja $d\mathbf{r}_D$ tačke dodira D i sila trenja ne vrši nikakav rad. Stoga se za idealno hrapave površi kaže takođe da predstavljaju idealne veze. Reakcija \mathbf{R} određena obrascima (3) naziva se *normalna reakcija*.

Dve vektorske diferencijalne jednačine kretanja odn. šest skalarnih diferencijalnih jednačina za određivanje koordinata krutog tela $x_A, y_A, z_A, \psi, \varphi, \vartheta$ u zavisnosti od vremena dovoljne su kada je telo slobodno. Kad je telo neslobodno diferencijalne jednačine kretanja sadrže i sile reakcije. Samo na osnovu pretpostavki o idealnosti veza ne mogu se uvek odrediti sile reakcije; ako je broj jednačina nedovoljan za određivanje reakcije kaže se da je sistem *dinamički neodređen*. Tad je za određivanje reakcija potrebno uvesti i dopunske hipoteze.

3.5.2.3. Skalarne diferencijalne jednačine kretanja u odnosu na pokretne ose

U mnogim problemima dinamike krutog tela postižu se velika uprošćenja skalarnih diferencijalnih jednačina kretanja, ako se vektorske diferencijalne jednačine (3.5.2 — 2 i 4) projiciraju na ose nekog koordinatnog sistema koji ima sopstveno kretanje nezavisno od kretanja samog tela. Za takav sistem referencija obično se uzima Dekartov pravougli koordinatni sistem sa početkom u pokretnom polu A tela koji je fiksiran u telu. Koordinatni početak se tada kreće zajedno s telom dok sam sistem koordinata ima rotaciju oko početka nezavisnu od kretanja tela.

Neka su \mathbf{u}_i ($i = 1, 2, 3$) jedinični vektori triedra $Au_1u_2u_3$ koji se oko tačke A obrće ugaonom brzinom $\mathbf{\Omega}$. Ako se projekcije ugaone brzine $\boldsymbol{\omega}$ tela i translatorne brzine \mathbf{v}_A na ose \mathbf{u}_i obeleže sa

$$(1) \quad \begin{aligned} \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{u}_i &= v_{Ai}, \\ \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{u}_i &= \omega_i, \end{aligned} \quad (i = 1, 2, 3)$$

kinetička energija tela biće upravo funkcija tih projekcija,

$$T = T(v_{Ai}, \omega_i).$$

Skalarni proizvodi vektorskih diferencijalnih jednačina kretanja (3.5.2 — 2 i 4) sa jediničnim vektorima \mathbf{u}_i mogu da se napišu na isti način kao i projekcije tih jednačina na ose $A\xi\eta\zeta$ koordinatnog sistema nepromenljivo vezanog za telo, tj. kao (3.5.2.1 — 5 i 7),

$$(2) \quad \begin{aligned} \frac{d}{dt} (\text{grad}_{\mathbf{v}_A} T \cdot \mathbf{u}_i) - \text{grad}_{\mathbf{v}_A} T \cdot \dot{\mathbf{u}}_i &= \mathbf{F} \cdot \mathbf{u}_i + \mathbf{R} \cdot \mathbf{u}_i \equiv F_i + R_i, \\ \frac{d}{dt} (\text{grad}_{\boldsymbol{\omega}} T \cdot \mathbf{u}_i) - \text{grad}_{\boldsymbol{\omega}} T \cdot \dot{\mathbf{u}}_i + (\mathbf{v}_A \times \text{grad}_{\mathbf{v}_A} T) \cdot \mathbf{u}_i &= \mathbf{L}^A \cdot \mathbf{u}_i \equiv L_i^A. \end{aligned}$$

Pošto se koordinatni sistem $Au_1u_2u_3$ obrće ugaonom brzinom $\mathbf{\Omega}$, izvodi jediničnih vektora \mathbf{u}_i po vremenu biće

$$(3) \quad \dot{\mathbf{u}}_i = \mathbf{\Omega} \times \mathbf{u}_i,$$

pa će jednačine (2) dobiti oblik

$$(4) \quad \begin{aligned} \frac{d}{dt} (\text{grad}_{\mathbf{v}_A} T \cdot \mathbf{u}_i) - \mathbf{u}_i \cdot (\text{grad}_{\mathbf{v}_A} T \times \mathbf{\Omega}) &= F_i + R_i, \\ \frac{d}{dt} (\text{grad}_{\boldsymbol{\omega}} T \cdot \mathbf{u}_i) - \mathbf{u}_i \cdot (\text{grad}_{\boldsymbol{\omega}} T \times \mathbf{\Omega}) + \mathbf{u}_i \cdot (\mathbf{v}_A \times \text{grad}_{\mathbf{v}_A} T) &= L_i^A. \end{aligned}$$

Delimični gradijenti kinetičke energije će za sistem $Au_1u_2u_3$ biti određeni relacijama

$$(5) \quad \begin{aligned} \text{grad}_{\mathbf{v}_A} T &= \frac{\partial T}{\partial v_{A1}} \mathbf{u}_1 + \frac{\partial T}{\partial v_{A2}} \mathbf{u}_2 + \frac{\partial T}{\partial v_{A3}} \mathbf{u}_3, \\ \text{grad}_{\boldsymbol{\omega}} T &= \frac{\partial T}{\partial \omega_1} \mathbf{u}_1 + \frac{\partial T}{\partial \omega_2} \mathbf{u}_2 + \frac{\partial T}{\partial \omega_3} \mathbf{u}_3. \end{aligned}$$

S obzirom na (5) skalarne jednačine (4) mogu se napisati u obliku

$$(6) \quad \begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial v_{A1}} + \Omega_2 \frac{\partial T}{\partial v_{A3}} - \Omega_3 \frac{\partial T}{\partial v_{A2}} &= F_1 + R_1, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial v_{A2}} + \Omega_3 \frac{\partial T}{\partial v_{A1}} - \Omega_1 \frac{\partial T}{\partial v_{A3}} &= F_2 + R_2, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial v_{A3}} + \Omega_1 \frac{\partial T}{\partial v_{A2}} - \Omega_2 \frac{\partial T}{\partial v_{A1}} &= F_3 + R_3; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \omega_1} + \Omega_2 \frac{\partial T}{\partial \omega_3} - \Omega_3 \frac{\partial T}{\partial \omega_2} + v_{A2} \frac{\partial T}{\partial v_{A3}} - v_{A3} \frac{\partial T}{\partial v_{A2}} = L_1^A, \\
 (7) \quad & \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \omega_2} + \Omega_3 \frac{\partial T}{\partial \omega_1} - \Omega_1 \frac{\partial T}{\partial \omega_3} + v_{A3} \frac{\partial T}{\partial v_{A1}} - v_{A1} \frac{\partial T}{\partial v_{A3}} = L_2^A, \\
 & \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \omega_3} + \Omega_1 \frac{\partial T}{\partial \omega_2} - \Omega_2 \frac{\partial T}{\partial \omega_1} + v_{A1} \frac{\partial T}{\partial v_{A2}} - v_{A2} \frac{\partial T}{\partial v_{A1}} = L_3^A.
 \end{aligned}$$

3.5.3. Ravansko kretanje krutog tela

Kad se sve tačke nekog krutog tela kreću u ravnima paralelnim nekoj osnovnoj ravni, koja je nepromenljiva, kaže se da je kretanje tela ravansko (odjeljak 1.9.3). Pri takvom kretanju telo ima tri stepena slobode. Ako se za nepokretni koordinatni sistem u prostoru uzme takav Dekartov pravougli sistem $Oxyz$ čija je z -osa upravna na tu osnovnu ravan, ravan xOy biće joj paralelna. Tada je za sve tačke tela $z = \text{const.}$ pa su koordinate tela pri ravanskom kretanju x_A, y_A i φ , pri čemu su x_A i y_A uopšte koordinate projekcije pokretnog pola A na xOy ravan a φ ugao koji obrazuju ose Ox i $A\xi$. Pokretni koordinatni sistem se može uvek uzeti i tako da se $\xi A \eta$ ravan poklapa sa xOy ravni pa je tada za sve tačke tela $\zeta = z$.

U slučaju ravanskog kretanja vektor ugaone brzine ω stalno je upravan na osnovnu ravan pa je

$$(1) \quad \omega = \omega \mathbf{k} = \omega \mathbf{v}, \quad (\omega = \dot{\varphi})$$

a otuda je

$$\begin{aligned}
 (2) \quad & P = p = Q = q = 0, \\
 & R = r = \omega = \dot{\varphi}.
 \end{aligned}$$

Ako se centar inercije C tela uzme za pokretni pol, kinetička energija T biće određena obrascem (3.5.1.1 — 20)

$$(3) \quad 2T = mv_C^2 + \omega^2 I^C,$$

gde je I^C centralni moment inercije tela u odnosu na osu upravnu na osnovnu ravan. Pošto je kretanje ravansko, to i za centar inercije važi $v_{Cz} = 0$. Lagranževe diferencijalne jednačine kretanja (3.5.2.1 — 16) u slučaju ravanskog kretanja krutog tela svode se na tri jednostavne jednačine

$$\begin{aligned}
 (4) \quad & m\ddot{x}_C = X, \\
 & m\ddot{y}_C = Y, \\
 & I^C \ddot{\varphi} = L^C,
 \end{aligned}$$

pri čemu su X i Y projekcije sila koje dejstvuju na telo na ose x i y , a L^C je moment tih sila u odnosu na $C\zeta$ -osu u tački C . Ove se jednačine odnose i na neslobodno telo, pod uslovom da su veze idealne i sa silama reakcije upravnim na osnovnu ravan, jer tada sile reakcije nemaju projekcije na ose u osnovnoj ravni niti moment za osu upravnu na osnovnu ravan.

Ako u samoj osnovnoj ravni postoje neke idealne veze oblika

$$f(x_C, y_C, \varphi; t) = 0; \quad \Phi(x_C, y_C, \varphi; \dot{x}_C, \dot{y}_C, \dot{\varphi}; t) = 0$$

jednačine kretanja treba dopuniti silama reakcije,

$$(5) \quad \begin{aligned} m\ddot{x}_C &= X + R_x, \\ m\ddot{y}_C &= Y + R_y, \\ I^C\ddot{\varphi} &= L^C + \Lambda^C, \end{aligned}$$

pri čemu je sada Λ^C moment sile reakcije za ζ -osu u tački C . Za određivanje kretanja potrebno je sada pored diferencijalnih jednačina kretanja posmatrati i jednačine veza.

Ravansko kretanje može biti spontano, ali može biti ostvareno i na taj način što su najmanje tri tačke tela prinuđene da se nalaze u nekoj stalnoj ravni (paralelnoj osnovnoj ravni). Neka su M_i ($i = 1, 2, \dots, s$) tačke tela koje su prinuđene da se kreću u ravni xOy ili u njoj paralelnim stalnim ravnima. Zbog ravanskog karaktera kretanja može se uzeti da su sve tačke M_i u osnovnoj ravni i da je njihov položaj u odnosu na pokretni koordinatni sistem određen vektorom položaja

$$\mathbf{e}_i = \{\xi_i, \eta_i, 0\}$$

i da su jednačine veza

$$f_i \equiv z_i = 0. \quad (i = 1, 2, \dots, s)$$

Ukoliko se sve tačke M_i ne nalaze u istoj ravni, veze će biti $z_i = c_i = \text{const.}$, što nema uticaja na naredna razmatranja.

Ako su veze idealne, reakcije veza su upravne na osnovnu ravan

$$(6) \quad \mathbf{R}_i = \sum_{\alpha=1}^s \lambda_{\alpha} \text{grad}_i f_{\alpha} = \lambda_i \mathbf{v}, \quad (i = 1, 2, \dots, s)$$

gde su λ_i množiocí veza. Momenti sile reakcije (6) biće

$$(7) \quad \Lambda_{\zeta i}^C = \mathbf{e}_i \times \mathbf{R}_i = \eta_i R_i \boldsymbol{\lambda} - \xi_i R_i \boldsymbol{\mu}.$$

Prema tome za određivanje sile reakcije može se koristiti samo zakon količine kretanja projiciran na ζ -osu i zakon kinetičkog momenta projiciran na ξ - i η -ose, što će dati ukupno tri jednačine.

Na osnovu (3.5.1.1 — 22) s obzirom na $v_{C\zeta} = 0$ kinetička energija tela biće

$$(8) \quad \begin{aligned} 2T &= m(v_{C\xi}^2 + v_{C\eta}^2) + I_{\xi}^C p^2 + I_{\eta}^C q^2 + I_{\zeta}^C r^2 + \\ &+ 2\Pi_{\eta\zeta}^C qr + 2\Pi_{\zeta\xi}^C rp + 2\Pi_{\xi\eta}^C pq. \end{aligned}$$

Delimični gradijenti kinetičke energije po vektorima \mathbf{v}_C i $\boldsymbol{\omega}$ biće

$$(9) \quad \begin{aligned} \text{grad}_{\mathbf{v}_C} T &= \left\{ \frac{\partial T}{\partial v_{C\xi}}, \frac{\partial T}{\partial v_{C\eta}}, 0 \right\} = \{m v_{C\xi}, m v_{C\eta}, 0\}, \\ \text{grad}_{\boldsymbol{\omega}} T &= \left\{ \frac{\partial T}{\partial p}, \frac{\partial T}{\partial q}, \frac{\partial T}{\partial r} \right\} = \\ &= \{I_{\xi}^C p + \Pi_{\xi\eta}^C q + \Pi_{\zeta\xi}^C r; I_{\eta}^C q + \Pi_{\eta\zeta}^C r + \Pi_{\xi\eta}^C p; I_{\zeta}^C r + \Pi_{\zeta\xi}^C p + \Pi_{\eta\zeta}^C q\}. \end{aligned}$$

Za ravansko kretanje je prema (2) $p = q = 0$, $r = \omega = \dot{\varphi}$, pa je otuda

$$(10) \quad \text{grad}_{\boldsymbol{\omega}} T = \{\Pi_{\zeta\xi}^C \dot{\varphi}, \Pi_{\eta\zeta}^C \dot{\varphi}, I_{\zeta}^C \dot{\varphi}\}.$$

Unošenjem ovoga u diferencijalne jednačine kretanja (3.5.2.1 — 8 i 9), dobivene projiciranjem zakona količine kretanja i zakona kinetičkog momenta na ose pokretnog koordinatnog sistema, pošto se još uzmu u obzir relacije (6) i (7) za sile reakcije, dobiće se naredne diferencijalne jednačine kretanja,

$$(11) \quad m(\dot{v}_{C\xi} - \dot{\varphi} v_{C\eta}) = F_{\xi},$$

$$(12) \quad m(\dot{v}_{C\eta} + \dot{\varphi} v_{C\xi}) = F_{\eta},$$

$$(13) \quad 0 = F_{\zeta} + \sum_{i=1}^s R_i;$$

$$(14) \quad \Pi_{\zeta\xi}^C \ddot{\varphi} - \Pi_{\eta\xi}^C \dot{\varphi}^2 = L_{\xi}^C + \sum_{i=1}^s \eta_i R_i,$$

$$(15) \quad \Pi_{\eta\xi}^C \ddot{\varphi} + \Pi_{\zeta\xi}^C \dot{\varphi}^2 = L_{\eta}^C - \sum_{i=1}^s \xi_i R_i,$$

$$(16) \quad I^C \ddot{\varphi} = L_{\zeta}^C.$$

Jednačine (11), (12) i (16) su potpuno ekvivalentne jednačinama (4) i određuju konačne jednačine kretanja tela. Reakcije veza mogu se odrediti iz tri preostale jednačine (13), (14) i (15). Ako su konačne jednačine kretanja određene, iz te tri jednačine mogu se odrediti reakcije veze, ako veze dejstvuju u tri nelinearne tačke. Ako je tih tačaka više problem je neodređen i može se rešiti samo ako se uvedu neke nove pretpostavke o vezama.

Da su jednačine (11) i (12) ekvivalentne sa prve tri jednačine (4) vidi se otuda što je

$$\mathbf{v}_C = \dot{x}_C \mathbf{i} + \dot{y}_C \mathbf{j} = v_{C\xi} \boldsymbol{\lambda} + v_{C\eta} \boldsymbol{\mu},$$

$$\mathbf{F} = X \mathbf{i} + Y \mathbf{j} = F_{\xi} \boldsymbol{\lambda} + F_{\eta} \boldsymbol{\mu}.$$

Zbog $\angle(x, \xi) = \varphi$ odatle proističe

$$(17) \quad v_{C\xi} = \dot{x}_C \cos \varphi + \dot{y}_C \sin \varphi,$$

$$v_{C\eta} = -\dot{x}_C \sin \varphi + \dot{y}_C \cos \varphi;$$

$$(18) \quad F_{\xi} = X \cos \varphi + Y \sin \varphi,$$

$$F_{\eta} = -X \sin \varphi + Y \cos \varphi.$$

Iz (17) se posle diferenciranja po vremenu dobiva

$$(19) \quad \dot{v}_{C\xi} - \dot{\varphi} v_{C\eta} = \ddot{x}_C \cos \varphi + \ddot{y}_C \sin \varphi,$$

$$\dot{v}_{C\eta} + \dot{\varphi} v_{C\xi} = -\ddot{x}_C \sin \varphi + \ddot{y}_C \cos \varphi.$$

Unošenjem ovoga kao i relacija (18) u jednačine (11) i (12) dobiće se

$$m(\ddot{x}_C \cos \varphi + \ddot{y}_C \sin \varphi) = X \cos \varphi + Y \sin \varphi,$$

$$m(-\ddot{x}_C \sin \varphi + \ddot{y}_C \cos \varphi) = -X \sin \varphi + Y \cos \varphi,$$

odakle se rešavanjem po x_C i y_C nalazi

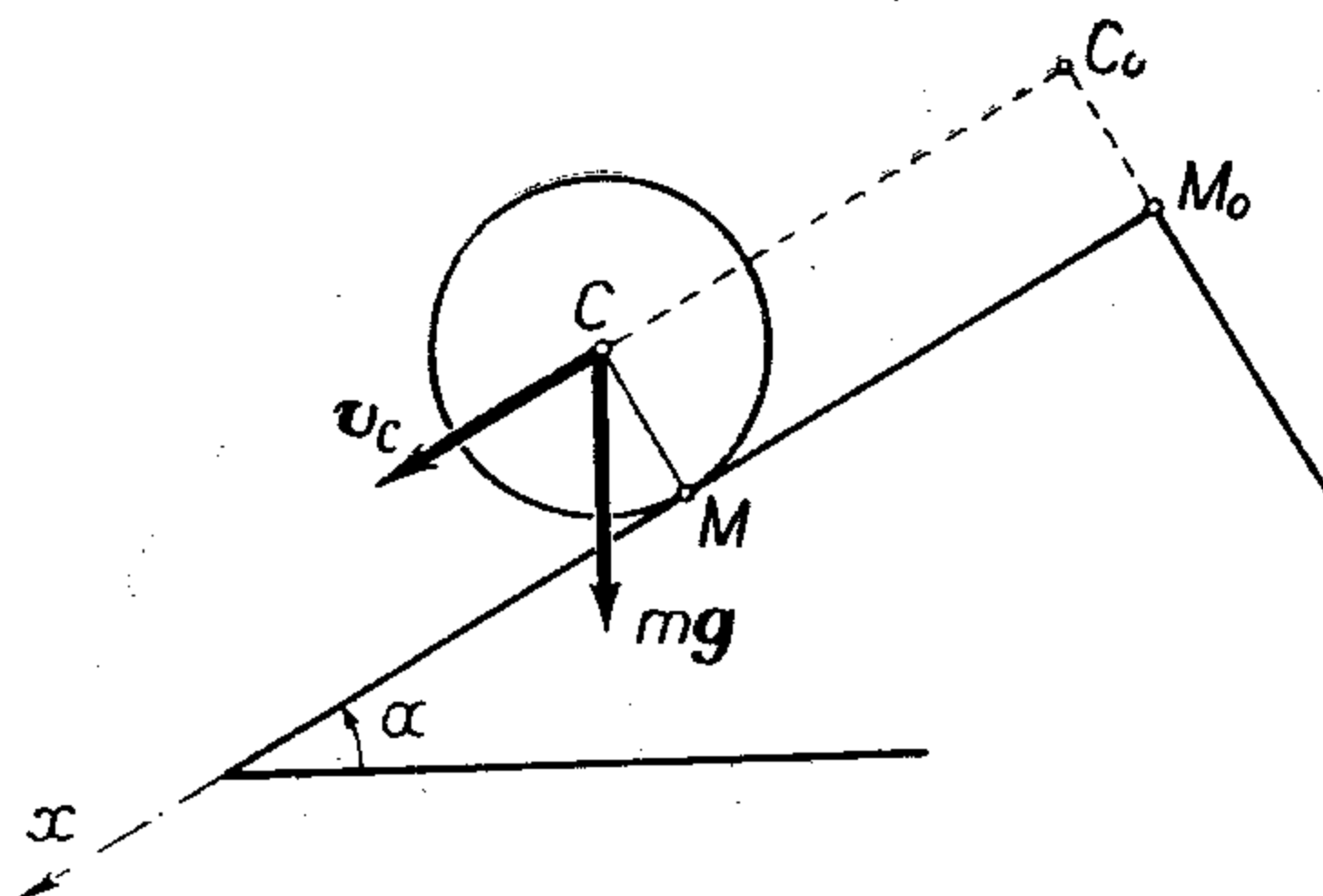
$$m\ddot{x}_C = X, \quad m\ddot{y}_C = Y;$$

a to su upravo jednačine (4). Jednačina (16) je identična sa (4).

Primeri i zadaci

1. Teška homogena kružna ploča (disk) mase m i poluprečnika a kotrlja se bez klizanja duž linije najvećeg nagiba niz strmu ravan nagnutu za ugao α prema horizontu. Naći kretanje diska i reakcije veze.

Neka je C_0 početni položaj centra C diska, M_0 tačka dodira diska i strme ravni u početnom trenutku a M tačka dodira u nekom kasnijem trenutku t (sl. 145)



Slika 145

i neka se x -osa poklapa sa linijom najvećeg nagiba strme ravni, dok je ϑ ugao za koji se disk obrne oko ose upravne na ravan diska. U početnom položaju neka je $\vartheta_0 = 0$ i $x_0 = 0$. Veze su: 1) Rub diska se stalno nalazi u dodiru sa strmom ravni duž x -ose. Ako je y -osa upravna na strmu ravan a z -osa je u samoj strmoj ravni, biće

$$f_1 \equiv y - a = 0, \quad f_2 \equiv z = 0.$$

2) Disk se kotrlja bez klizanja duž x -ose pa je uslov za to

$$v_M = \dot{x}_C - a \dot{\vartheta} = 0.$$

Ova veza nije neholonomna jer se može integraliti, čime će se dobiti i treća konačna veza

$$f_3 = x_C - a \vartheta = 0,$$

pri čemu je uzeto u obzir da je u početnom položaju $x_{C_0} = a \vartheta_0 = 0$.

Ako se centar C diska uzme za pokretni pol, a pošto je disk homogen to će C istovremeno biti i centar inercije diska, kinetička energija se može napisati u obliku

$$2T = m v_C^2 + I \dot{\vartheta}^2$$

pri čemu je $I = mk^2$ centralni moment inercije diska za osu upravnu na disk.

Kretanje diska je ravansko; osnovna ravan jeste ravan diska i u ravni kretanja dejstvuju dve veze $f_1 = 0$ i $f_3 = 0$ koje ograničavaju koordinate x_C , y_C i ϑ tela. Veza $f_2 = 0$ je trivijalna; ona predstavlja uslov da se disk stalno nalazi u ravni $z = 0$, a pošto se ovdje unapred uzima da je kretanje ravansko i to u vertikalnoj ravni ta veza je automatski zadovoljena. Napomenimo da se ovaj zakon može proširiti i na slučaj kada se disk ne nalazi u vertikalnoj ravni već se kotrlja bez klizanja po strmoj ravni i pri tome je nagnut u odnosu na strmu ravan. Tada ne

bi postojala veza oblika $f_2 = 0$ niti neka ekvivalentna veza jer kretanje ne bi moralo da bude ravansko.

S obzirom da postoje dve veze disk će imati samo jedan stepen slobode i kinetička energija može se izraziti obrascem

$$T = \frac{m}{2} (a^2 + k^2) \dot{\vartheta}^2.$$

Aktivna sila je $\mathbf{F} = m\mathbf{g}$ i dejstvuje u ravni diska na njegov centar inercije (težište). Elementarni rad aktivne sile biće

$$dA = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}_C = m\mathbf{g} \cdot (dx_C \mathbf{i} + dy_C \mathbf{j}).$$

Kako je (sl. 145) $\mathbf{g} = g(\sin \alpha \mathbf{i} + \cos \alpha \mathbf{j})$ a $dx_C = a d\vartheta$, $dy_C = 0$, biće

$$dA = mga \sin \alpha d\vartheta$$

pa je funkcija sile

$$U = mga \vartheta \sin \alpha.$$

Za jednu nezavisnu koordinatu ϑ Lagranževa jednačina druge vrste glasi

$$m(a^2 + k^2) \ddot{\vartheta} = \frac{dU}{d\vartheta} = mga \sin \alpha.$$

Odatle je

$$\ddot{\vartheta} = \frac{ga \sin \alpha}{a^2 + k^2}.$$

Prvi integral biće (ako su početni uslovi $\dot{\vartheta}_0 \neq 0$, $t_0 = 0$),

$$\dot{\vartheta} - \dot{\vartheta}_0 = \frac{ga \sin \alpha}{a^2 + k^2} t,$$

a odatle se neposredno integraljenjem dobiva i konačna jednačina kretanja

$$\vartheta = \frac{1}{2} \frac{ga \sin \alpha}{a^2 + k^2} t^2 + \dot{\vartheta}_0 t$$

pri čemu je uzeto da je u početnom trenutku $\vartheta_0 = 0$.

Za određivanje reakcije najjednostavnije je iskoristiti Lagranževe jednačine prve vrste za koordinate x , y i z ,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_C} = m\ddot{x}_C = X + R_x, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{y}_C} = m\ddot{y}_C = Y + R_y, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{z}_C} = 0 = Z + R_z.$$

S obzirom na to da je aktivna sila $m\mathbf{g}(\sin \alpha \mathbf{i} + \cos \alpha \mathbf{j})$, ove će jednačine moći da se napišu u jednostavnom obliku

$$m\ddot{x}_C = mg \sin \alpha + R_x$$

$$m\ddot{y}_C = mg \cos \alpha + R_y$$

$$0 = R_z.$$

Iz jednačina veza $y - a = 0$ i $x - a\vartheta = 0$ dvostrukim diferencijaljenjem po vremenu dobiće se

$$\ddot{x} - a\ddot{\vartheta} = 0, \quad \ddot{y} = 0,$$

pa kad se $\ddot{\vartheta}$ zameni iz Lagranževe jednačine prve vrste imamo

$$\ddot{x} = \frac{ga^2 \sin \vartheta}{a^2 + k^2}.$$

Za koordinatu R_x sile reakcije dobiće se na taj način

$$R_x = -\frac{mgk^2 \sin \alpha}{a^2 + k^2},$$

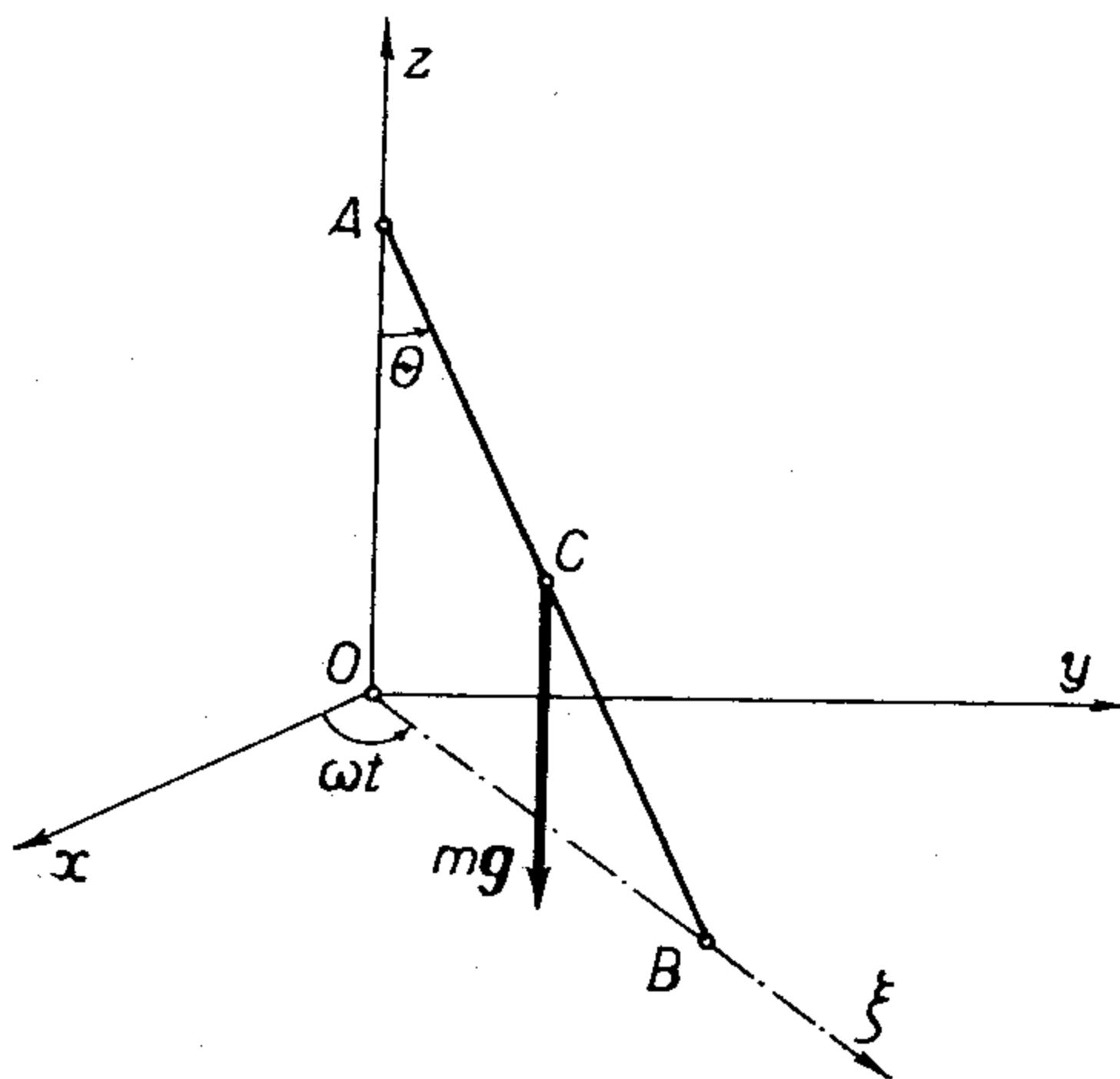
dok je R_y neposredno određeno jednačinama kretanja. Za homogeni kružni disk poluprečnika a krak inercije je $k^2 = a^2/2$ pa se definitivno za koordinate sile reakcije može napisati

$$R_x = -\frac{1}{3} mg \sin \alpha, \quad R_y = -mg \cos \alpha.$$

Reakcija u pravcu x -ose javlja se otuda što je kotrljanje bez klizanja pa je R_x u stvari sila trenja koja dovodi do kotrljanja diska.

2. Težak homogeni štap kreće se tako da mu se krajevi stalno nalaze na jednoj horizontalnoj i na jednoj vertikalnoj pravoj koje se susstiču u tački O . Horizontalna prava se obrće oko vertikalne ose koja je u miru, stalnom ugaonom brzinom ω . Proučiti kretanje štapa.

• Neka se kraj A štapa nalazi na vertikalnoj z -osi a kraj B na horizontalnoj ξ -osi i neka je nagib štapa prema vertikalnoj osi ϑ (sl. 146). Kretanje štapa sastoji



Slika 146

se iz rotacije oko z -ose stalnom ugaonom brzinom ω i kretanja u vertikalnoj ravni ξOz . Na štap dejstvuje sila teže $mg = -mg\mathbf{k}$, a pošto je štap homogen centar inercije i težište štapa poklapaju se (tačka C).

Kinetička energija štapa biće

$$2T = mv_C^2 + I_{\vartheta}^C \dot{\vartheta}^2 + I_{\omega}^C \omega^2$$

pri čemu je I_{ϑ}^C moment inercije štapa za osu upravnu na ravan $Oz\zeta$ u tački C a I_{ω}^O je moment inercije štapa za z -osu. Ako je $l = 2a$ dužina štapa, biće

$$\xi_C = a \sin \vartheta, \quad z_C = a \cos \vartheta$$

pa je $v_C^2 = a^2 \dot{\vartheta}^2$.

Moment inercije štapa nagnutog za ugao ϑ prema osi z je

$$I_z = \sigma_2 \int_0^{2a \cos \vartheta} \xi^2 \frac{dz}{\cos \vartheta} = \sigma_2 \frac{\sin^2 \vartheta}{\cos^3 \vartheta} \int_0^{2a \cos \vartheta} (2a \cos \vartheta - z)^2 dz = \frac{4}{3} ma^2 \sin^2 \vartheta,$$

gde je $m = 2a\sigma_2$ masa štapa. Moment inercije štapa za centralnu osu upravnu na štap je

$$I_{\vartheta}^C = \frac{1}{3} ma^2$$

tako da je kinetička energija određena obrascem

$$2T = \frac{4}{3} ma^2 \dot{\vartheta}^2 + \frac{4}{3} ma^2 \omega^2 \sin^2 \vartheta.$$

(U opštem slučaju trebalo bi uzeti u obzir i proizvod inercije za ose za koje su uzeti u obzir momenti inercije, ali je osa upravna na štap glavna osa inercije pa je proizvod inercije koji se odnosi i na tu osu identički jednak nuli.)

Funkcija sile koja deluje na štap je $U = -mg \cos \vartheta$. Pošto kinetička energija ne zavisi eksplicitno od vremena a aktivna sila je konzervativna, postoji integral energije $T - U = h$, koji se može napisati u obliku

$$\frac{2}{3} ma^2 \dot{\vartheta}^2 + \frac{2}{3} ma^2 \omega^2 \sin^2 \vartheta + mga \cos \vartheta = h.$$

Kako je ugao ϑ jedina nezavisna promenljiva, integral energije je svakako dovoljan za određivanje kretanja štapa. Sem toga integral energije je prvi integral pa time predstavlja diferencijalnu jednačinu kretanja prvog reda te je u principu formiranjem integrala energije već izvršeno i jedno integraljenje diferencijalne jednačine kretanja, recimo Lagranževe, koja je drugog reda.

Ako se uvede nova promenljiva $u = \cos \vartheta$ integral energije će se svesti na relaciju

$$\dot{u}^2 = (1 - u^2) \left[\frac{3h}{2a} - \omega^2 - \left(\frac{3g}{4a\omega} \right)^2 + \left(u\omega - \frac{3g}{4a\omega} \right)^2 \right]$$

ili, kad se uvede oznaka $3h/2a - \omega^2 - (3g/4a\omega)^2 \equiv -k^2$,

$$\dot{u}^2 = (1 - u^2) \left[\left(u\omega - \frac{3g}{4a\omega} \right)^2 - k^2 \right] \equiv (1 - u^2) P_2(u).$$

Ova se diferencijalna jednačina integrali razdvajanjem promenljivih,

$$\frac{du}{\sqrt{(1 - u^2) P_2(u)}} = dt.$$

Funkcija $P_2(u)$ je kvadratna i integral se ne može izraziti običnim elementarnim funkcijama. U stvari u će kao funkcija vremena biti određeno Vajerštrasovom

(Weierstrass) eliptičnom funkcijom vremena. Međutim, i bez integraljenja može se iz integrala energije zaključiti da će se štap kretati samo u onom razmaku vrednosti promenljive u za koje je $u^2 \geq 0$. Kako je uvek $1 - u^2 \geq 0$, ograničenje potiče iz uslova

$$-k^2 + \left(u\omega - \frac{3g}{4a\omega}\right)^2 \geq 0,$$

odakle se dobiva da je

$$\frac{3g}{4a\omega^2} - \frac{1}{\omega}k \leq u \leq \frac{3g}{4a\omega^2} + \frac{1}{\omega}k.$$

3. Homogeni štap mase m i dužine $2a$ slobodno se kreće po savršeno glatkoj ravni. Na svaku tačku štapa dejstvuje privlačna sila proporcionalna masi i rastojanju te tačke od neke prave linije koja je nepokretna u ravni i koja je izvor sile.

Neka je prava koja privlači pokretan štap uzeta za x -osu. Kretanje štapa je ravansko i koordinate štapa biće x_C, y_C, ϑ (sl. 147) a kinetička energija štapa je

$$T = \frac{m}{2} \left(\dot{x}_C^2 + \dot{y}_C^2 + \frac{1}{3} a^2 \dot{\vartheta}^2 \right),$$

gde je C centar inercije štapa i $I = ma^2/3$ moment inercije štapa u odnosu na centralnu osu upravnu na ravan u kojoj se štap kreće. Ako je σ gustina štapa, na svaki element štapa dužine dl dejstvuje sila

$$\begin{aligned} d\mathbf{F} &= -\mu y dm \mathbf{j} = -\mu \sigma y dl \mathbf{j} = \\ &= -\mu \sigma \frac{y}{\sin \vartheta} dy \mathbf{j}, \end{aligned}$$

gde je $dm = \sigma dl$ masa uočenog elementa štapa a μ koeficijent proporcionalnosti. Elementarni rad dA sile $d\mathbf{F}$ na pomeranju elementa dl biće

$$dA = d\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = dF dy.$$

Funkcija sile koja dejstvuje na element štapa biće $dU = -\frac{1}{2} \mu y^2 dm$, a za ceo štap:

$$U = -\frac{1}{2} \mu \int_{y_C - a \sin \vartheta}^{y_C + a \sin \vartheta} y^2 dm = -\frac{1}{6} m \mu (3y_C^2 + a^2 \sin^2 \vartheta).$$

Koordinate generalisane sile koja dejstvuje na štap mogu se sad izračunati diferencijaljenjem funkcije sile

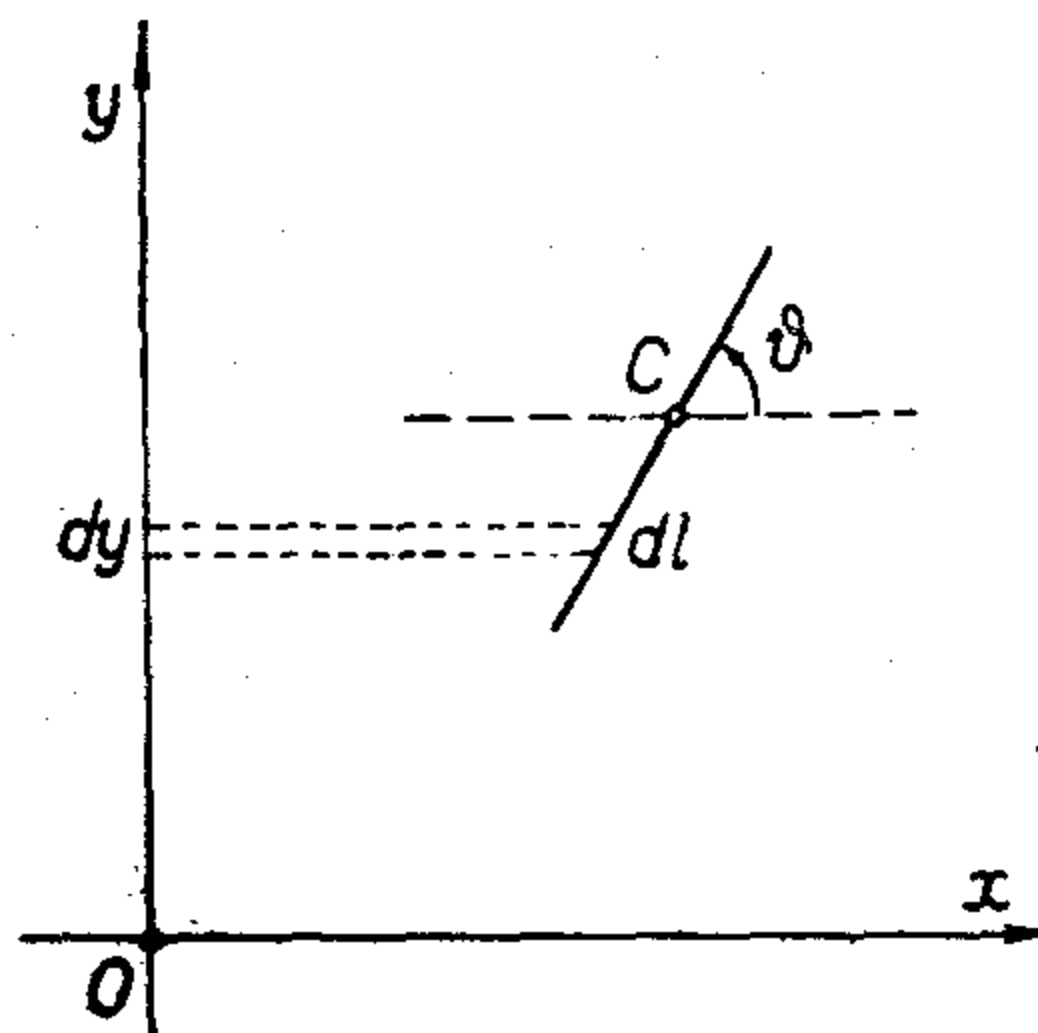
$$X = \frac{\partial U}{\partial x_C} = 0, \quad Y = \frac{\partial U}{\partial y_C} = -m\mu y_C, \quad Q_\vartheta = \frac{\partial U}{\partial \vartheta} = -\frac{1}{6} m \mu a^2 \sin 2\vartheta.$$

Lagranževe diferencijalne jednačine kretanja štapa su

$$\ddot{x}_C = 0, \quad \ddot{y}_C = -\mu y_C, \quad 2\ddot{\vartheta} = \mu \sin 2\vartheta.$$

Iz prve dve jednačine nalazi se zakon kretanja centra masa štapa

$$x_C = \dot{x}_C t + x_{C0}, \quad y_C = A \sin(\sqrt{\mu} t + \alpha),$$



Slika 147

dok se iz treće jednačine vidi da će štap oscilovati oko centra inercije kao matematičko klatno jer je ta jednačina po svojoj strukturi istovetna sa diferencijalnom jednačinom (2.11.3.2 — 4) kretanja matematičkog klatna i na nju se može primeniti sve ono što je za matematičko klatno već rečeno.

4. Teška homogena lopta poluprečnika b kotrlja se bez klizanja niz cikloиду koja se nalazi u vertikalnoj ravni,

$$x = a(\vartheta + \sin \vartheta), \quad y = a(1 - \cos \vartheta).$$

U početnom trenutku lopta je u miru a njen centar se nalazi u horizontalnoj ravni $y = 2a$. Naći brzinu centra lopte kao funkciju od y_C (y -osa orijentisana je vertikalno naviše).

Kretanje lopte je ravansko, centar lopte se nalazi stalno u ravni xOy , a po cikloidi se kotrlja bez klizanja veliki krug lopte. Pošto je y -osa orijentisana naviše, data cikloida je konveksna prema pozitivnom smeru y -ose. Najniži položaj na cikloidi je $y = 0$.

Ako je φ ugao za koji se obrne lopta oko ose upravne na ravan cikloide polazeći od početnog položaja u kome je $\varphi_0 = 0$, uslov da se lopta kotrlja bez klizanja biće da se u tački dodira lopte i cikloide nalazi trenutni centar rotacije, odakle proističe da mora biti

$$(1) \quad v_C = b \dot{\varphi}$$

tako da je

$$v_C = 2a \cos \frac{1}{2} \vartheta \dot{\vartheta}.$$

Kinetička energija lopte je

$$T = \frac{1}{2} (m v_C^2 + I \dot{\varphi}^2)$$

gde je $I = 2mb^2/5$ centralni moment inercije lopte za prečnik a m je njena masa

Na loptu dejstvuje sila teže koja ima funkciju sile

$$U = - mgy_C.$$

Pošto je veza nepokretna i aktivna sila ima funkciju sile, kretanje je konzervativno i postoji integral energije,

$$(2) \quad \frac{m}{2} \left(v_C^2 + \frac{2}{5} b^2 \dot{\varphi}^2 \right) + mgy_C = h = mgy_{C_0} = 2mga,$$

pri čemu je uzeto u obzir da je u početnom trenutku lopta bila u miru ($v_{C_0} = 0$, $\dot{\varphi}_0 = 0$). Ako se iskoristi relacija (1), koja predstavlja jednačinu veze, iz (2) će se dobiti

$$\frac{m}{2} \left(1 + \frac{2}{5} \right) v_C^2 = mg(2a - y_C),$$

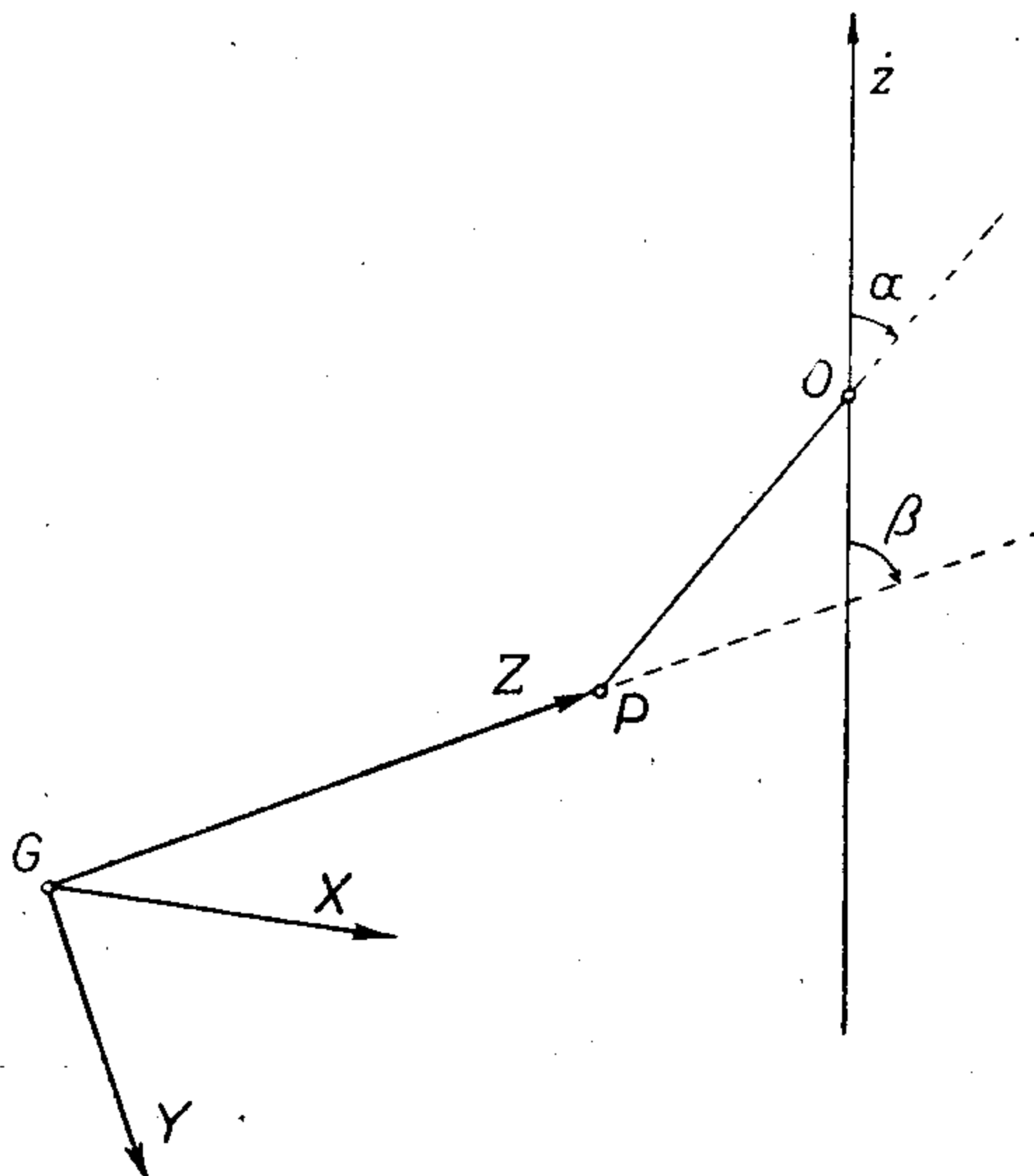
odakle je

$$v_C^2 = \frac{10}{7} (2a - y_C) g.$$

5. Teško obrtno homogeno telo mase m , koje se obrće oko svoje ose dinamičke simetrije GP stalnom ugaonom brzinom n , obešeno je o nepomičnu tačku C pomoću nerastegljivog konca PO dužine l pričvršćenog za telo u tački P . G j

centar inercije tela a $GP = c$ je krak inercije tela za osu dinamičke simetrije. Naći nagib α konca prema vertikali i nagib β ose GP prema vertikali tako da sistem može da se obrće oko vertikalne ose kroz O stalnom ugaonom brzinom n a da pri tome osa GP i konac PO budu stalno u istoj vertikalnoj ravni.

Neka je G početak pokretnog koordinatnog sistema $GXYZ$ čije su ose određene jediničnim vektorima $\mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K}$, a koji je takav da se osa GZ poklapa sa osom GP dinamičke simetrije tela, da je osa GY stalno u vertikalnoj ravni i osa GX stalno u horizontalnoj ravni. Ose X, Y i Z su glavne ose inercije tela, ali se sistem $GXYZ$ ne kreće zajedno sa telom, već ima sopstveno kretanje, sem početka G koji se poklapa stalno sa centrom inercije tela, i kreće se zajedno sa njim.



Slika 148

Ako se vertikalna osa kroz O uzme za z -osu (sl. 148), ravan xOy biće horizontalna. Telo se obrće oko Oz -ose konstantnom ugaonom brzinom $\mathbf{\Omega} = \Omega \mathbf{k}$. Projekcije ugaone brzine na ose pokretnog sistema $GXYZ$ biće

$$(1) \quad \Omega_1 = 0, \quad \Omega_2 = -\Omega \sin \beta, \quad \Omega_3 = \Omega \cos \beta.$$

Ugaona brzina $\boldsymbol{\omega}$ tela sastoji se iz brzine $\boldsymbol{\omega}_1 = \omega_* \mathbf{K}$ sopstvene rotacije oko GZ -ose i brzine $\mathbf{\Omega} = \Omega \mathbf{k}$ obrtanja oko Oz -ose,

$$(2) \quad \boldsymbol{\omega} = \omega_* \mathbf{K} + \Omega \mathbf{k}.$$

Prema (1) projekcija ugaone brzine $\boldsymbol{\omega}$ na ose $GXYZ$ biće

$$(3) \quad \omega_1 = 0, \quad \omega_2 = \Omega_2 = -\Omega \sin \beta, \quad \omega_3 = \omega_* + \Omega \cos \beta.$$

Zadatak zahteva da je brzina rotacije oko Oz -ose konstantna, ali da je takođe i brzina obrtanja tela oko GZ -ose konstantna pa je otuda

$$(4) \quad \omega_3 = \omega_* + \Omega \cos \beta = n = \text{const.}$$

Kad se duž $GP = c$ i konac PO nalaze u istoj ravni i kad su uglovi α i β stalni centar inercije G tela kretaće se po krugu poluprečnika $r = l \sin \alpha + c \sin \beta$ brzinom

$$\mathbf{v}_G = \Omega r \mathbf{I}$$

koja se nalazi u stalnoj horizontalnoj ravni i kolinearna je sa osom GX .

Kinetička energija tela biće

$$(5) \quad T = \frac{1}{2} (mv_G^2 + I_X \omega_1^2 + I_Y \omega_2^2 + I_Z \omega_3^2)$$

pri čemu je $I_X = I_Y = A$, $I_Z = C$. Aktivna sila $\mathbf{F} = -mg \mathbf{k}$ imaće koordinate

$$(6) \quad F_1 = 0, \quad F_2 = -mg \sin \beta, \quad F_3 = -mg \cos \beta.$$

Sila reakcije \mathbf{R} dejstvuje u koncu PO i njene su projekcije

$$(7) \quad R_1 = 0, \quad R_2 = -R \sin(\beta - \alpha), \quad R_3 = R \cos(\beta - \alpha).$$

Pošto sila teže dejstvuje na težište G tela, to će moment sile \mathbf{F} za tačku G biti jednak nuli. Moment reakcije, koja dejstvuje u tački P , jer u toj tački dejstvuje veza (konac), biće

$$(8) \quad \mathbf{L}^G = \overrightarrow{GP} \times \mathbf{R} = c \mathbf{K} \times \mathbf{R} = c R \sin(\beta - \alpha) \mathbf{I}.$$

Za proučavanje kretanja tela najzgodnije je koristiti diferencijalne jednačine (3.5.2.3 — 6, 7) u odnosu na pokretni sistem osa. Međutim, aktivna sila je vertikalna pa se stoga mogu kombinovati diferencijalne jednačine tako da se zakon količine kretanja projicira na ose nepokretnog koordinatnog sistema $Oxyz$ (3.5.2.1 — 3), a zakon kinetičkog momenta na pokretne ose (3.5.2.3 — 7). Količina kretanja tela je

$$\mathbf{K} = m \mathbf{v}_G = m v_G \mathbf{I}$$

pa imamo

$$(9) \quad \dot{\mathbf{K}} = m \dot{v}_G = m v_G \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{I} = m v_G \Omega \mathbf{k} \times \mathbf{I}.$$

Vektor $\mathbf{k} \times \mathbf{I} = \mathbf{a}$ nalazi se u horizontalnoj ravni i to u ravni YGZ , jer je vektor \mathbf{I} upravan na tu ravan. Sila reakcije može se takođe rastaviti u dve komponente, jednu u pravcu \mathbf{a} i drugu u pravcu \mathbf{k} ,

$$(10) \quad \mathbf{R} = R(\sin \alpha \mathbf{a} + \cos \alpha \mathbf{k}),$$

jer se sila reakcije \mathbf{R} nalazi u vertikalnoj ravni GPO . Projiciranjem zakona količine kretanja $\dot{\mathbf{K}} = \mathbf{F} + \mathbf{R}$ na pravce \mathbf{a} i \mathbf{k} dobiće se dve skalarne jednačine

$$(11) \quad r \Omega^2 = (l \sin \alpha + c \sin \beta) \Omega^2 = \frac{R}{m} \sin \alpha, \quad g = -\frac{R}{m} \cos \alpha.$$

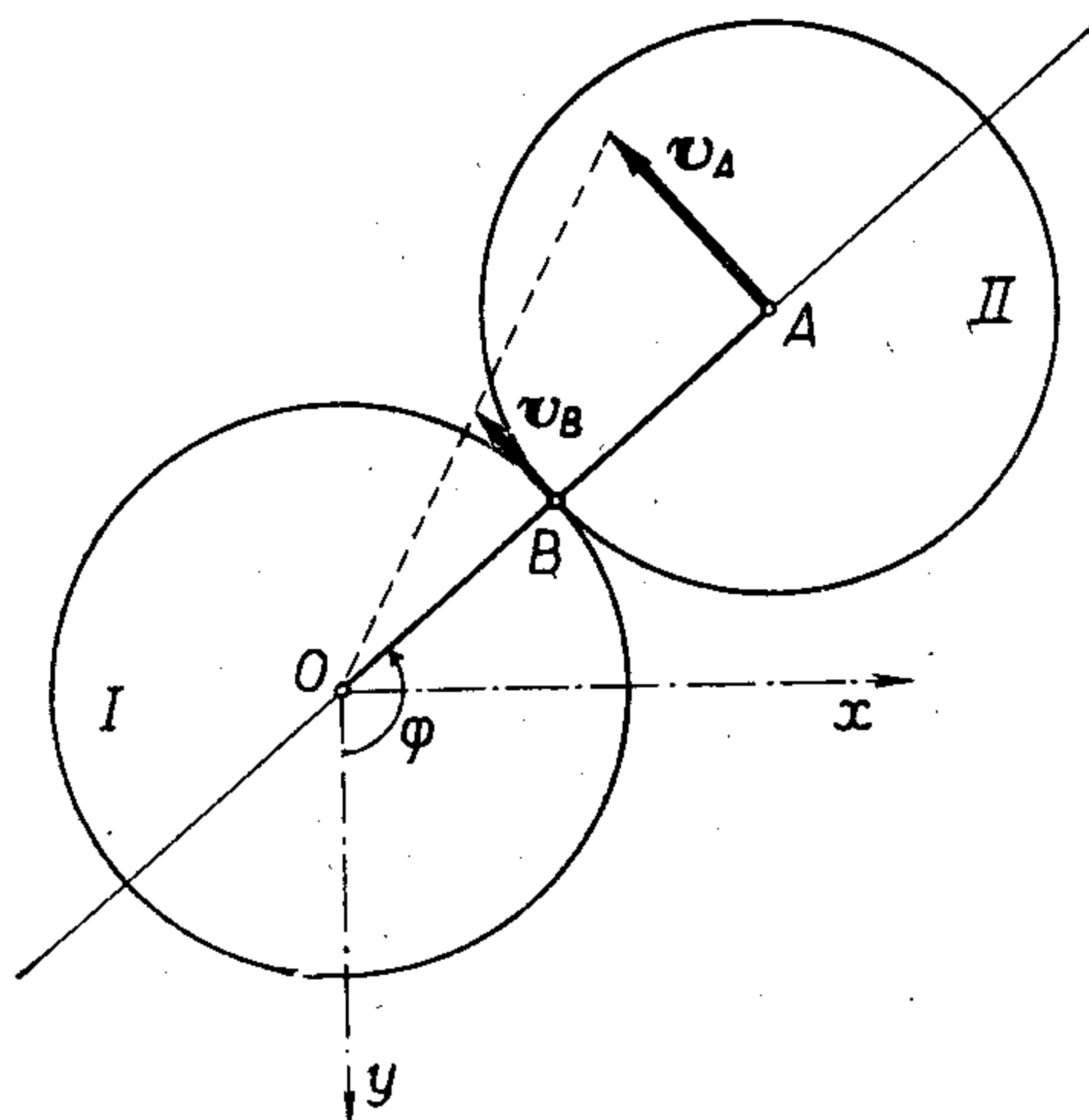
Iz zakona kinetičkog momenta dobiće se za $GXYZ$ sistem osa tri jednačine (3.5.2.3 — 7), ali s obzirom na konstantnu vrednost vektora $\boldsymbol{\Omega}$ i $\boldsymbol{\omega}$ i na obrasce (1), (3) i (8) one se svode samo na jednu jednačinu,

$$(12) \quad A \Omega^2 \sin \beta \cos \beta - C n \Omega \sin \beta = c \frac{R}{m} \sin(\beta - \alpha).$$

Iz tri jednačine (11) i (12) mogu se izračunati uglovi α i β kao i veličina R sile reakcije.

6. Dve jednake teške homogene kružne ploče, poluprečnika a i mase M , sa savršeno hrapavim rubovima, održavaju se u dodiru pomoću homogene teške poluge mase m i dužine $2a$ koja spaja njihove centre. Obe ploče nalaze se u vertikalnoj ravni, centar ploče I je nepomičan a sama ploča se obrće konstantnim ugaonim ubrzanjem ε oko horizontalne ose koja prolazi kroz njen centar O . Svojom obrtanjem ova ploča dovodi u obrtanje ploču II i polugu OA koja spaja njihove centre, pri čemu poluga OA ne ometa obrtanje ploče. Odrediti jedan prvi integral diferencijalnih jednačina kretanja ovog sistema krutih tela. Ako je u početnom trenutku sistem bio u miru sa polugom OA vertikalno naniže, kakvo treba da bude ugaono ubrzanje ε da bi poluga mogla da dođe u horizontalni položaj?

Neka je u ravni ploče koordinatni početak nepokretnog koordinatnog sistema u centru O ploče I, neka je osa Ox u toj ravni horizontalna a osa Oy orijentisana vertikalno naniže. Neka je $\dot{\varphi} = \varepsilon t$ ugaona brzina ploče I, pri čemu je φ ugao za koji se ta ploča obrne i meri se od y -ose; neka je Ω ugao između y -ose i poluge OA i neka je Ω ugaona brzina ploče II (sl. 149). Pošto su rubovi ploča savršeno



Slika 149

hrapavi, ploča I dovodi u obrtanje ploču II tako da se jedna ploča kotrlja po drugoj bez klizanja.

Tačka B dodira ploče kao tačka ploče I imaće brzinu

$$\mathbf{v}_{BI} = \dot{\varphi} \mathbf{k} \times \overrightarrow{OB}$$

a kao tačka ploče II imaće brzinu

$$\mathbf{v}_{BII} = \mathbf{v}_A + \Omega \mathbf{k} \times \overrightarrow{AB},$$

pri čemu je \mathbf{v}_A brzina tačke A poluge OA koja se kreće oko centra O ugaonom brzinom $\dot{\varphi} \mathbf{k}$,

$$\mathbf{v}_A = \dot{\varphi} \mathbf{k} \times \overrightarrow{OA}.$$

Prema tome da bi se ploče kotrljale jedna po drugoj bez klizanja brzine \mathbf{v}_{BI} i \mathbf{v}_{BII} moraju biti jednake,

$$\dot{\vartheta} \mathbf{k} \times \overrightarrow{OB} = \dot{\varphi} \mathbf{k} \times \overrightarrow{OA} + \Omega \mathbf{k} \times \overrightarrow{AB}.$$

Ako se sa \mathbf{u} označi jedinični vektor u pravcu $\overrightarrow{OA} = 2a\mathbf{u}$, $\overrightarrow{OB} = a\mathbf{u}$, $\overrightarrow{AB} = -a\mathbf{u}$ uslov da nema klizanja može se napisati u obliku

$$a \dot{\vartheta} (\mathbf{k} \times \mathbf{u}) = 2a \dot{\varphi} (\mathbf{k} \times \mathbf{u}) - a \Omega (\mathbf{k} \times \mathbf{u}).$$

Dakle, između ugaonih brzina ploča i poluge postoji veza

$$\Omega = 2\dot{\varphi} - \dot{\vartheta} = 2\dot{\varphi} - \varepsilon t,$$

koja je reonomna jer zavisi eksplicitno od vremena. Sistem ima jedan stepen slobode a za nezavisnu koordinatu sistema može se uzeti ugao φ .

Kinetička energija sistema sastoji se od kinetičke energije ploča i kinetičke energije poluge OA ,

$$T = T_I + T_{II} + T_{OA}.$$

Za ploču I koja se obrće oko centra O ugaonom brzinom $\dot{\vartheta}$ biće

$$T_I = \frac{1}{2} I \dot{\vartheta}^2 = \frac{1}{4} Ma^2 \dot{\vartheta}^2.$$

Ploča II obrće se oko centra A ugaonom brzinom Ω a sam centar A kreće se brzinom \mathbf{v}_A pa je

$$T_{II} = Mv_A^2 + I \Omega^2.$$

Međutim je $v_A^2 = (2a\dot{\varphi})^2$, dok je Ω određeno jednačinom veze kao funkcija ugaonih brzina ploče I i poluge, pa je

$$T_{II} = \frac{1}{2} [4Ma^2 \dot{\varphi}^2 + I(2\dot{\varphi} - \dot{\vartheta})^2] = Ma^2 \left(3\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{4} \dot{\vartheta}^2 - \dot{\varphi} \dot{\vartheta} \right).$$

Poluga \overline{OA} obrće se oko O ugaonom brzinom $\dot{\varphi}$ pa će biti

$$T_{OA} = \frac{1}{2} I_{OA} \dot{\varphi}^2 = \frac{2}{3} ma^2 \dot{\varphi}^2.$$

Najzad se za kinetičku energiju sistema može napisati obrazac

$$T = \frac{1}{2} Ma^2 \dot{\vartheta}^2 + \left(3M + \frac{2}{3}m \right) a^2 \dot{\varphi}^2 - Ma^2 \dot{\varphi} \dot{\vartheta}.$$

Pošto je $\dot{\vartheta} = \varepsilon t$, kinetička energija je funkcija generalisane koordinate φ i vremena

$$T = \left(3M + \frac{2}{3}m \right) a^2 \dot{\varphi}^2 - Ma^2 \varepsilon \dot{\varphi} t - \frac{1}{2} Ma^2 \varepsilon^2 t^2.$$

Kako je kinetička enereija eksplicitno zavisna od vremena kretanje nije konzervativno.

Sila teže dejstvuje na sredinu B poluge OA i na težište A ploče II pa se za elementarni rad može napisati

$$dA = mg dy_B + Mg dy_A = -(2M + m) ag \sin \varphi d\varphi.$$

Lagranževe jednačine kretanja za jednu nezavisnu koordinatu sistema biće

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \left(6M + \frac{4}{3}m\right) a^2 \ddot{\varphi} - Ma^2 \varepsilon = -(2M + m) ag \sin \varphi.$$

Ako se ova jednačina pomnoži sa $\dot{\varphi}$ može se neposredno dobiti prvi integral u obliku

$$\left(3M + \frac{2}{3}m\right) a^2 \dot{\varphi}^2 - Ma^2 \varepsilon \varphi - (2M + m) ag \cos \varphi = \text{const.} = C.$$

Za početne uslove, $t_0 = 0$, $\varphi_0 = 0$, $\dot{\varphi}_0 = 0$, dobiće se

$$C = -(2M + m) ag$$

pa će se prvi integral jednačine kretanja moći da napiše u obliku

$$f(\varphi, \dot{\varphi}) = \left(3M + \frac{2}{3}m\right) a^2 \dot{\varphi}^2 - Ma^2 \varepsilon \varphi + (2M + m) ag (1 - \cos \varphi) = 0.$$

Da bi poluga OA došla u položaj $\varphi = \pi/2$ i u tom položaju nastavila da se kreće ili se tu zaustavila mora biti zadovoljen uslov

$$Ma^2 \varepsilon \pi/2 - (2M + m) ag = \left(3M + \frac{2}{3}m\right) a^2 \dot{\varphi}^2 \geq 0,$$

odakle proističe da ugaono ubrzanje ε mora zadovoljavati uslov

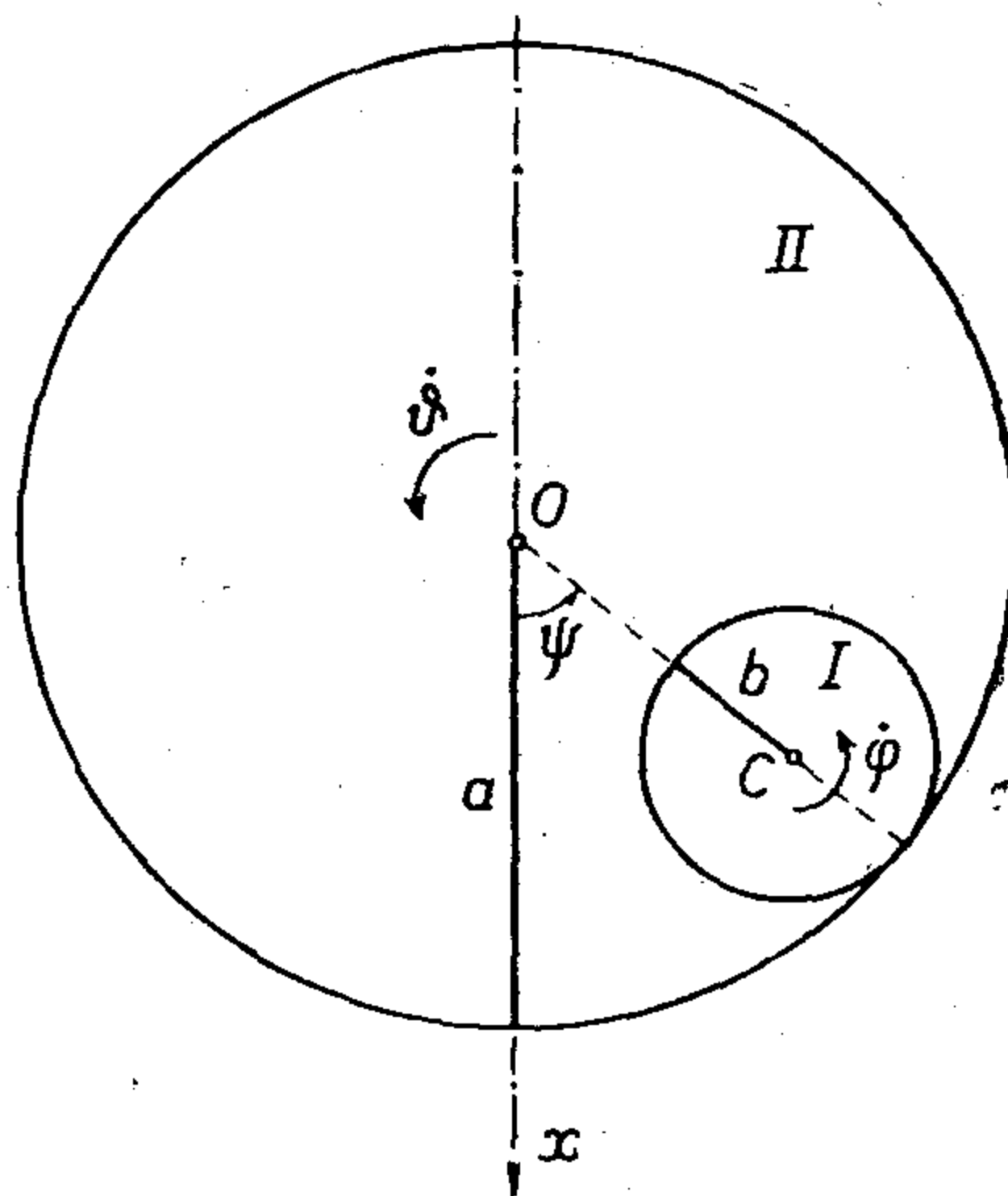
$$\varepsilon \geq \frac{4g}{\pi a} \left(1 + \frac{m}{2M}\right).$$

7. Težak kružni prsten I mase m i poluprečnika b kotrlja se bez klizanja sa unutrašnje strane prstena II mase M i poluprečnika a koji može slobodno da se obrće oko svog nepomičnog središta. Oba prstena nalaze se u vertikalnoj ravni. Proučiti kretanje prstena I, ako se on u početnom trenutku nalazi u najnižem položaju na prstenu II.

Prsten I svojim kretanjem dovodi do kretanja prstena II. Neka je O nepomični centar prstena II, C centar prstena I, ϑ ugao za koji se obrne prsten II oko svog centra O meren od ose Ox koja je orijentisana vertikalno naniže (sl. 150), ψ ugao između x -ose i potega OC i φ ugao za koji se okrene prsten I oko svog centra C , takođe meren od najnižeg položaja, kada je poteg OC bio vertikalan.

Da bi kotrljanje bilo bez klizanja tačka dodira prstenova mora da ima istu brzinu u odnosu na oba prstena. Kao tačka prstena II njena brzina će biti $a\dot{\vartheta}$, dok će kao tačka prstena I imati brzinu

$$v_C + b\dot{\varphi} = (b - a)\dot{\psi} + b\dot{\varphi},$$



Slika 150

pa je otuda jednačina veze

$$a \dot{\vartheta} = (a-b) \dot{\psi} + b \dot{\varphi}.$$

Ova je veza prividno neholonomna, jer je jednačina veze integrabilna; integriranjem će se dobiti konačna jednačina veze

$$(1) \quad f \equiv a \vartheta - b \varphi - (a-b) \psi = 0,$$

pri čemu je uzeto u obzir da je u početnom položaju $\vartheta = \psi = \varphi = 0$. Pošto između tri koordinate sistema postoji jedna veza, sistem će imati dva stepena slobode.

Kinetička energija sistema jednaka je zbiru kinetičkih energija prstenova. Za prsten II je

$$T_{II} = \frac{1}{2} I_{II} \dot{\vartheta}^2 = \frac{1}{2} M a^2 \dot{\vartheta}^2,$$

a za prsten I,

$$T_I = \frac{1}{2} (m v_C^2 + I_I \dot{\varphi}^2) = \frac{1}{2} m [(a-b)^2 \dot{\psi}^2 + b^2 \dot{\varphi}^2],$$

gde su I_I i I_{II} centralni momenti inercije prstenova, tako da je

$$(2) \quad T_{II} = \frac{M}{2} a^2 \dot{\vartheta}^2 + \frac{m}{2} (a-b)^2 \dot{\psi}^2 + \frac{m}{2} b^2 \dot{\varphi}^2.$$

Na sistem deluje samo sila Zemljine teže, čija je napadna tačka u centru inercije C prstena I, $\mathbf{F} = mg\mathbf{i}$, pa je elementarni rad

$$dA = mg dx_C.$$

Funkcija sile biće data obrascem

$$(3) \quad U = mgx_C = mg(a-b) \cos \psi.$$

1. način — Lagranževe jednačine prve vrste. — Za koordinatni sistem φ, ψ, ϑ i vezu $f = 0$ biće Lagranževe jednačine prve vrste

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} = \frac{\partial U}{\partial \psi} + \lambda \frac{\partial f}{\partial \psi}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \lambda \frac{\partial f}{\partial \varphi}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\vartheta}} = \lambda \frac{\partial f}{\partial \vartheta},$$

jer je

$$\frac{\partial T}{\partial \psi} = \frac{\partial T}{\partial \varphi} = \frac{\partial T}{\partial \vartheta} = 0; \quad \frac{\partial U}{\partial \varphi} = \frac{\partial U}{\partial \vartheta} = 0,$$

tako da se može napisati

$$(4) \quad \begin{aligned} m(a-b)^2 \ddot{\psi} &= -mg(a-b) \sin \psi - \lambda(a-b), \\ mb^2 \ddot{\varphi} &= \lambda b, \\ Ma^2 \ddot{\vartheta} &= \lambda a. \end{aligned}$$

Iz druge i treće jednačine (4) nalazi se

$$\lambda = mb \ddot{\varphi} = Ma \ddot{\vartheta},$$

pa se otuda dobiva jedan prvi integral,

$$m b \dot{\varphi} = Ma \dot{\vartheta} + C_1.$$

Diferencijacijom jednačine veze (1) dva puta po vremenu dobiće se

$$\ddot{f} = (a-b) \ddot{\psi} - a \ddot{\vartheta} - b \ddot{\varphi} = 0,$$

pa kako se $\ddot{\vartheta}$ i $\ddot{\varphi}$ eliminišu pomoću jednačina (4) dobiće se za množilac veze obrazac

$$\lambda = \frac{Mm}{M+m} (a-b) \ddot{\psi}.$$

Unošenjem ovoga u prvu od diferencijalnih jednačina (4) dobiće se diferencijalna jednačina drugog reda koja sadrži samo nepoznatu funkciju ψ ,

$$(5) \quad \ddot{\psi} = -\frac{M+m}{(2M+m)(a-b)} g \sin \psi,$$

a to je jednačina istog oblika kao jednačina kretanja matematičkog klatna dužine

$$L = \frac{(2M+m)(a-b)}{M+m}.$$

Prema tome centar prstena I kreće se kao matematičko klatno dužine L . Prvi integral jednačine (5) biće

$$\dot{\psi}^2 = 2a^2 \cos \psi + C_2. \quad \left(a^2 \equiv \frac{g}{L} \right)$$

Za početne uslove, $t_0 = 0$, $\psi_0 = 0$, $\dot{\psi}_0 \neq 0$, integraciona konstanta C_2 imaće vrednost

$$C_2 = \dot{\psi}_0^2 - 2a^2,$$

tako da se može pisati

$$\dot{\psi}^2 = 2a^2 (\cos \psi + p), \quad p \equiv \frac{\dot{\psi}_0^2}{2a^2} - 1.$$

Prema analizi izvedenoj u odeljku 2.11.3.2 za matematičko klatno, ako je $-1 < p < 1$, kretanje je oscilatorno, za $p = 1$ kretanje je asimptotsko i za $p > 1$ progresivno. Stoga će prsten I oscilovati oko najnižeg položaja na prstenu II ako je

$$0 < \dot{\psi}_0^2 < 4 \frac{g}{L},$$

približavaće se asimptotski položaju $\psi = \frac{\pi}{2}$ za

$$\dot{\psi}_0^2 = 4 \frac{g}{L},$$

a kretaće se progresivno ako početni uslovi zadovoljavaju nejednakost

$$\dot{\psi}_0^2 > 4 \frac{g}{L}.$$

2 način — Lagranževe jednačine druge vrste. — Za nezavisne koordinate mogu se uzeti φ i ψ pa je iz (1)

$$\vartheta = \frac{b}{a} \varphi + \frac{a-b}{a} \psi.$$

Unošenjem ovoga u (2) dobiće se za kinetičku energiju izraz

$$(6) \quad T = \frac{M+m}{2} b^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{M+m}{2} (a-b)^2 \dot{\psi}^2 + Mb(a-b) \dot{\varphi} \dot{\psi}.$$

Iz (3) se nalazi da samo za generalisanu nezavisnu koordinatu ψ postoji odgovarajuća koordinata generalisane sile,

$$Q_\psi = -mg(a-b) \sin \psi, \quad Q_\varphi = 0.$$

Lagranževe diferencijalne jednačine kretanja biće sada

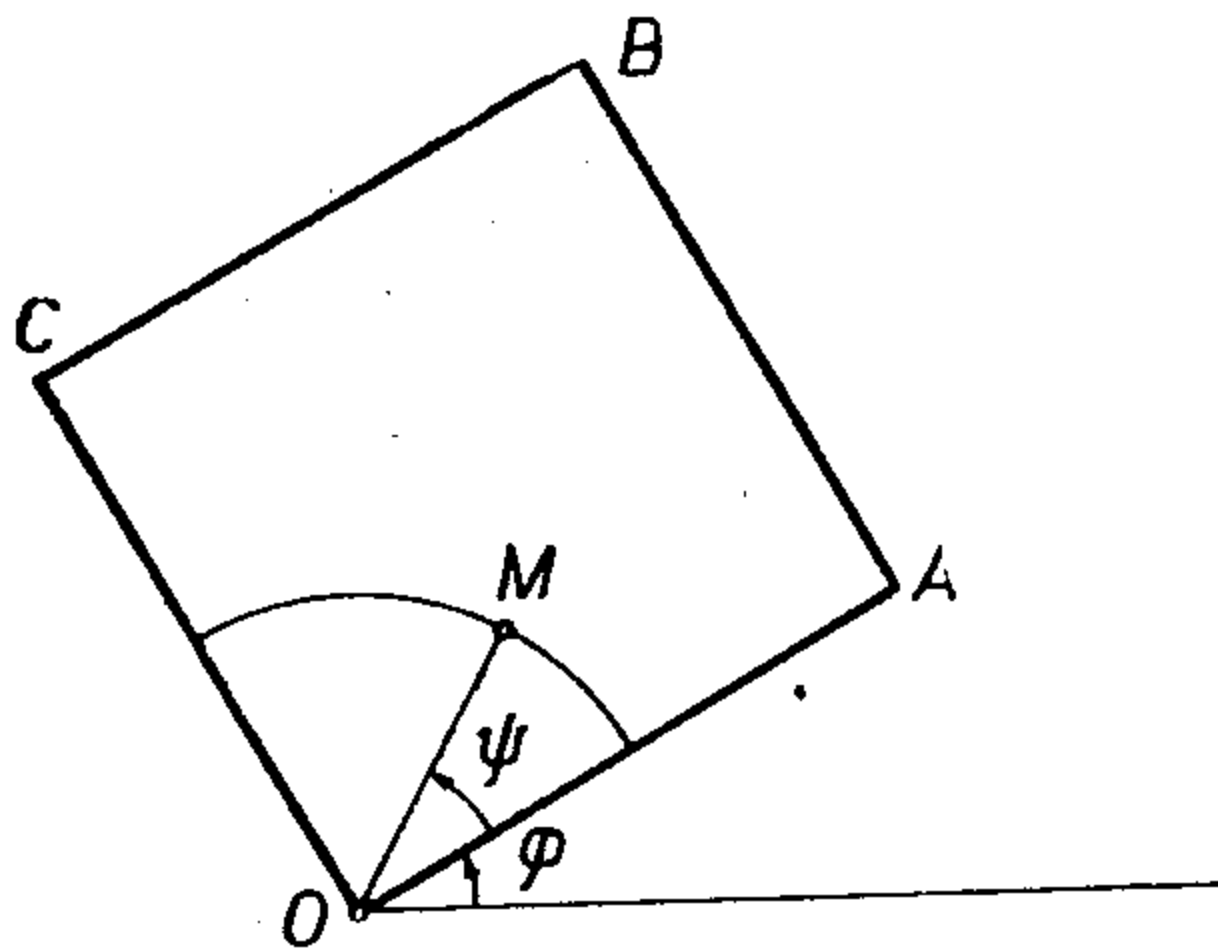
$$(7) \quad \begin{aligned} \frac{d}{dt} [(M+m)b^2 \dot{\varphi} + Mb(a-b) \dot{\psi}] &= 0, \\ \frac{d}{dt} [(M+m)(a-b)^2 \dot{\psi} + Mb(a-b) \dot{\varphi}] &= -mg(a-b) \sin \psi. \end{aligned}$$

Iz prve od ovih jednačina nalazi se

$$\ddot{\varphi} = -\frac{M(a-b)}{(M+m)b} \ddot{\psi},$$

što zamenom u drugoj dovodi do relacije (5). Dalja analiza kretanja je istovetna kao i za Lagranževe jednačine prve vrste.

8. Na idealno glatkoj horizontalnoj ravni nalazi se teška glatka tanka homogena kvadratna ploča $OABC$, stranice $2a$ i mase m , koja može slobodno da se obrće oko vertikalne ose kroz O . Po ploči se kreće teška materijalna tačka mase M . Ako je u početnom trenutku sistem bio u miru i ako je tačka M , polazeći od sredine stranice OA opisala na ploči kružni luk do preseka sa stranicom OC , naći za koliko će se pomeriti sama ploča.



Slika 151

Neka je z -osa upravna na ploču u tački O . Kako su sve sile, aktivne i reakcije, kolinearne sa z -osom njihov će moment za tu osu biti jednak nuli. Ako je φ ugao za koji se obrne ploča oko Oz -ose, $I = 8ma^2/3$ moment inercije ploče za osu Oz i ψ polarni ugao tačke M za polarni koordinatni sistem (a, ψ) koji se kreće zajedno sa pločom (sl. 151), sa polom u tački O , kinetički moment za osu Oz biće

$$L_z^O = I \dot{\varphi} + Ma^2 (\dot{\varphi} + \dot{\psi}).$$

Pošto su sile kolinearne sa tom osom, postoji integral kinetičkog momenta,

$$I \dot{\varphi} + Ma^2 (\dot{\varphi} + \dot{\psi}) = 0$$

odakle proističe

$$d\varphi = -\frac{Ma^2}{Ma^2 + I} d\psi.$$

Kad tačka M pređe po ploči kružni luk poluprečnika a od $\psi = 0$ do $\psi = \frac{\pi}{2}$, dobiće se

$$\varphi = -\frac{3M}{3M+8m} \int_0^{\pi/2} d\psi = -\frac{3\pi M}{2(3M+8m)}.$$

9. Homogeni štap AB dužine $2b$ i mase m kreće se tako da su mu krajevi A i B stalno na idealno glatkom nepomičnom krugu poluprečnika a . Materijalna tačka M mase jednake mase štapa kreće se duž štapa stalnom brzinom V u odnosu na štap. Proučiti kretanje štapa.

Uočeni sistem sastoji se od krutog tela — štapa AB i materijalne tačke M koja ima relativnu brzinu $V = \text{const.}$ duž štapa. Kretanje štapa po krugu istovetno je sa obrtanjem štapa oko ose Oz , upravne na ravan kruga, ugaonom brzinom $\omega = \dot{\vartheta} \mathbf{k}$ (sl. 152). Moment inercije štapa za osu Oz biće

$$I_z^O = I_z^C + m \overline{OC}^2.$$

Zbog $I_z^C = mb^2/3$ i $OC^2 = a^2 - b^2$ imamo

$$I_z^O = \frac{m}{3} (3a^2 - 2b^2),$$

pa je kinetička energija štapa

$$T_1 = \frac{m}{2 \cdot 3} (3a^2 - 2b^2) \dot{\vartheta}^2.$$

Apsolutna brzina tačke M biće

$$\mathbf{V}_M = \mathbf{V}_C + \omega \times \overrightarrow{CM} + \mathbf{V}_{\text{rel}}.$$

Za koordinatne sisteme prema slici 152, gde je CB osa ξ i CO osa η , biće

$\mathbf{V}_C = \overline{OC} \dot{\vartheta} \boldsymbol{\lambda} = \dot{\vartheta} \boldsymbol{\lambda} \sqrt{a^2 - b^2}$, $\omega = \dot{\vartheta} \mathbf{k}$, $\overrightarrow{CM} = \xi \boldsymbol{\lambda}$, $\mathbf{V}_{\text{rel}} = V \boldsymbol{\lambda}$, pa je

$$\mathbf{V} = (\sqrt{a^2 - b^2} \dot{\vartheta} + V) \boldsymbol{\lambda} + \xi \dot{\vartheta} \boldsymbol{\mu}.$$

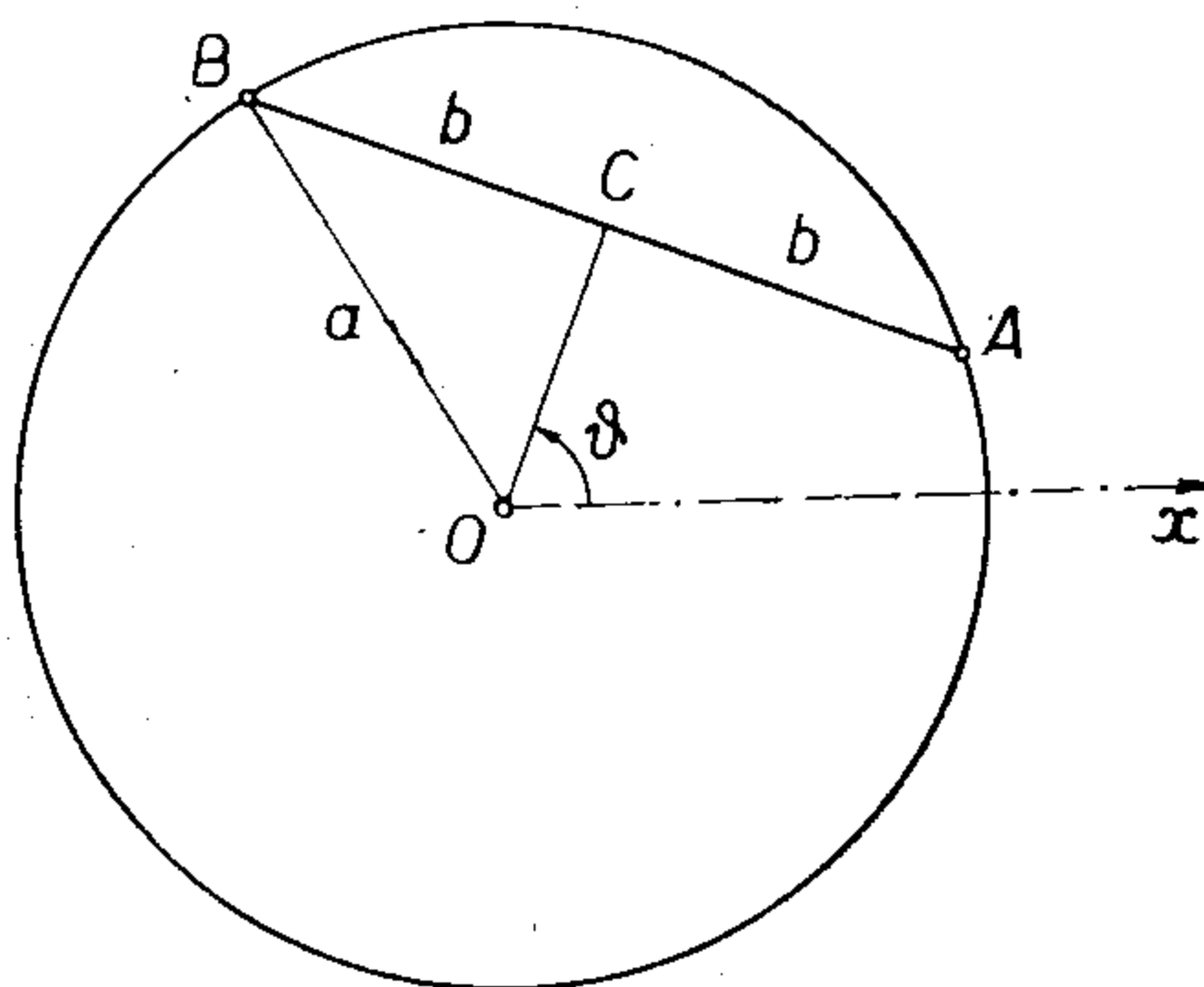
Kako je $V_{\text{rel}} = \dot{\xi} = V$, biće $\xi = \xi_0 + Vt$. Kinetička energija tačke M može se sada napisati u obliku

$$T_2 = \frac{m}{2} [(\sqrt{a^2 - b^2} \dot{\vartheta} + V)^2 + \xi^2 \dot{\vartheta}^2]$$

ili

$$T_2 = \frac{m}{2} \{ [a^2 - b^2 + (\xi_0 + Vt)^2] \dot{\vartheta}^2 + 2V\sqrt{a^2 - b^2} \dot{\vartheta} + V^2 \}.$$

Kinetička energija sistema $T = T_1 + T_2$ očigledno zavisi eksplicitno od vremena pa stoga ne postoji integral energije. Međutim, kinetička energija ne



Slika 152

zavisi eksplicitno od koordinate. Kako na sistem ne djeluju nikakve aktivne sile, ϑ je stoga ciklička koordinata i odgovara joj ciklički integral

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\vartheta}} = m \left[2a^2 - \frac{5}{3}b^2 + (\xi_0 + Vt)^2 \right] \dot{\vartheta} + mV \sqrt{a^2 - b^2} = C = \text{const.}$$

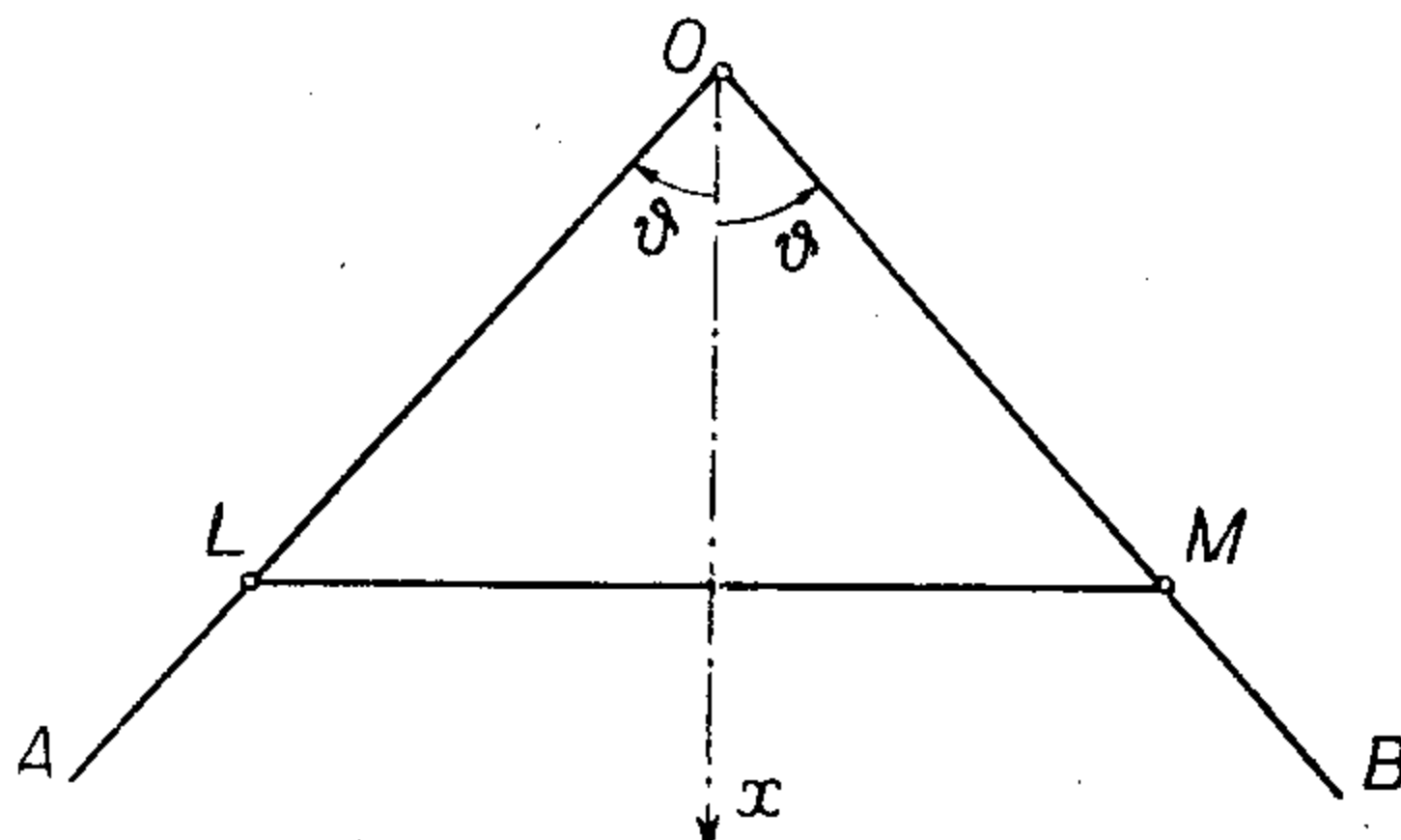
Ako se stavi $C - mV \sqrt{a^2 - b^2} \equiv mK$, iz cikličkog integrala se dobiva

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{K}{\alpha^2 + \tau^2},$$

gde je $\alpha^2 = 2a^2 - \frac{5}{3}b^2$ a $\tau = \xi_0 + Vt$. U vremenskom razmaku (t_0, t) biće kretanje štapa određeno konačnom jednačinom

$$\begin{aligned} \vartheta - \vartheta_0 &= \frac{K}{V} \int_{\xi_0}^{\xi_0 + V_0 t} \frac{d\tau}{\alpha^2 + \tau^2} = \\ &= \frac{K}{V \sqrt{a^2 - b^2}} \left(\text{arc tg} \frac{\xi_0 + Vt}{\sqrt{2a^2 - \frac{5}{3}b^2}} - \text{arc tg} \frac{\xi_0}{\sqrt{2a^2 - \frac{5}{3}b^2}} \right). \end{aligned}$$

10. Dva tanka homogena štapa OA i OB jednakih dužina $2a$ i masa m mogu slobodno da se obrću oko nepomične tačke O . Krajevi L i M teškog homogenog štapa LM mogu slobodno da se kreću po štapovima OA i OB . Dužina i masa štapa LM jednaka je dužini i masi štapova OA i OB . Ako su se u početnom trenutku sva tri štapa nalazila na horizontalnoj pravoj kroz O tako da su se kra-



Slika 153

jevi L i M štapa LM nalazili na sredinama štapova OA i OB i ako je sistemu saopštena ugaona brzina ω oko vertikalne ose kroz O , koliko mora biti ω da štapa LM ne spadne sa štapova OA i OB .

Ako je ϑ ugao između štapa OA i OB i x -ose (sl. 153), momenti inercije štapova OA i OB za Ox osu biće jednaki i iznosiće (gustina $\sigma = 1$)

$$I_{x_1}^O = \sigma \int_0^{2a \cos \vartheta} x^2 \text{tg}^2 \vartheta \frac{dx}{\cos \vartheta} = \frac{4}{3} ma^2 \sin^2 \vartheta.$$

Moment inercije štapa LM za osu x paralelnu osi Ox u tački C biće

$$I_{x_2}^C = \sigma \int_{-a}^a y^2 dy = \frac{1}{3} ma^2.$$

Kad se štap LM kreće menjajući se ugao ϑ u ravni OAB . Pri tome zbog homogenosti i početnih uslova može se neposredno zaključiti da će centar C štapa LM stalno biti na vertikalnoj osi Ox (prema zakonu količine kretanja). Ako je Oy osa upravna na ravan OAB , moment inercije za štapove OA i OB za osu Oy biće

$$I_{y_1}^O = \sigma \int_0^{2a} l^2 dl = \frac{4}{3} ma^2.$$

Koordinata težišta C štapa LM je, prema sl. 153, data sa $x_C = a \operatorname{ctg} \vartheta$ pa je brzina kretanja tačke C

$$v_C = \dot{x}_C = -\frac{a}{\sin^2 \vartheta} \dot{\vartheta}.$$

Ukupna kinetička energija ovog sistema biće

$$T = I_{x_1}^O \omega^2 + I_{y_1}^O \dot{\vartheta}^2 + \frac{1}{2} I_{x_2}^O \omega^2 + \frac{m}{2} v_C^2,$$

odnosno

$$T = \frac{1}{3} ma^2 \left[\left(4 \sin^2 \vartheta + \frac{1}{2} \right) \omega^2 + \left(4 + \frac{3}{2 \sin^2 \vartheta} \right) \dot{\vartheta}^2 \right].$$

Aktivna sila koja dejstvuje na štapove jeste sila teže, a ona dejstvuje na težišta štapova pa se za funkciju sile može napisati

$$U = -2mga \cos \vartheta + mgx_C = -mga(2 \cos \vartheta + \operatorname{ctg} \vartheta).$$

Sistem je konzervativan; s obzirom na početne uslove, $\vartheta_0 = \frac{\pi}{2}$, $\dot{\vartheta}_0 = 0$, biće integral energije

$$\frac{1}{3} a \left[\left(4 \sin^2 \vartheta + \frac{1}{2} \right) \omega^2 + \left(4 + \frac{3}{2 \sin^2 \vartheta} \right) \dot{\vartheta}^2 \right] + g(2 \cos \vartheta + \operatorname{ctg} \vartheta) = h = \frac{3}{2} a \omega^2.$$

Da bi krajevi L i M štapa LM bili stalno na štapovima OA i OB ugao ϑ ne sme biti manji od $\frac{\pi}{6}$ a $\dot{\vartheta}$ mora biti pri tome ≥ 0 . Kad se integral energije napiše u obliku

$$\frac{4}{3} a \omega^2 \cos^2 \vartheta = g(2 \cos \vartheta + \operatorname{ctg} \vartheta) + \frac{a}{3} \left(4 + \frac{3}{2 \sin^2 \vartheta} \right) \dot{\vartheta}^2$$

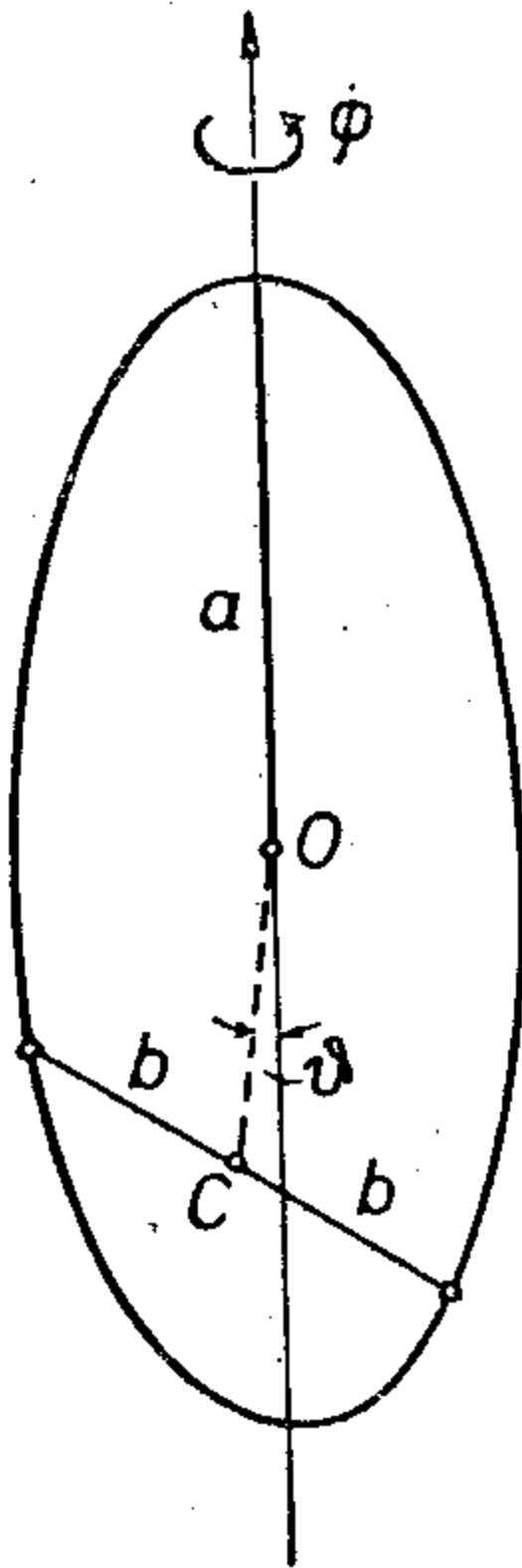
i u toj relaciji stavi da u graničnom položaju $\vartheta_1 = \frac{\pi}{4}$ mora biti $\dot{\vartheta} \geq 0$, dobiće se

$$\frac{4}{3} a \omega^2 \cos^2 \vartheta_1 \geq g(2 \cos \vartheta_1 + \operatorname{ctg} \vartheta_1),$$

pa se najzad, za $\vartheta_1 = \frac{\pi}{6}$ ($\cos \vartheta_1 = \sqrt{3}/2$), definitivno dobiva

$$\omega^2 \geq \frac{2g\sqrt{3}}{a}.$$

11. Homogeni glatak krug poluprečnika a i mase M obrće se oko vertikalnog prečnika ugaonom brzinom $\dot{\varphi}$. Centar kruga O nepomičan je u prostoru. Krajevi teške homogene duži mase m i dužine $2b$ oslanjaju se na krug i mogu po njemu slobodno da se kreću. Odrediti prve integrale diferencijalnih jednačina kretanja (sl. 154).



Slika 154

Dok se krug obrće oko vertikalnog prečnika teška duž će zajedno sa krugom da se kreće, ali se njeni krajevi kreću po krugu tako da se sama duž obrće u ravni kruga oko njegovog centra (v. zadatak 9). Ako je ϑ ugao između vertikalnog prečnika kruga i potega OC od centra O kruga do središta C duži i ako se sa I_1^O i I_2^O obeleže momenti inercije kruga i duži za osu koja se poklapa sa vertikalnim prečnikom kruga, a sa I_3^O moment inercije duži za osu kroz O upravnu na ravan kruga, kinetička energija sistema biće

$$2T = (I_1^O + I_2^O) \dot{\varphi}^2 + I_3^O \dot{\vartheta}^2.$$

Moment inercije kruga je

$$I_1^O = \frac{1}{2} Ma^2,$$

a za duž se prema Hajgens-Štajnerovoj teoremi (3.1.3.1—8) dobiva

$$I_2^O = I_2^C + m\overline{OC}^2 \sin^2 \vartheta = \frac{1}{3} mb^2 \cos^2 \vartheta + m(a^2 - b^2) \sin^2 \vartheta.$$

Za horizontalnu osu kroz O dobiće se za moment inercije duži na sličan način

$$I_3^O = I_3^C + m\overline{OC}^2 = \frac{1}{3} mb^2 + m(a^2 - b^2) = m\left(a^2 - \frac{2}{3} b^2\right).$$

Sad se može napisati za kinetičku energiju sistema obrazac

$$2T = \left[\frac{1}{2} Ma^2 + \frac{m}{3} b^2 \cos^2 \vartheta + m(a^2 - b^2) \sin^2 \vartheta \right] \dot{\varphi}^2 + m\left(a^2 - \frac{2}{3} b^2\right) \dot{\vartheta}^2.$$

Aktivna sila dejstvuje na težište pokretne duži pa će funkcija sile biti određena obrascem

$$U = mg \sqrt{a^2 - b^2} \cos \vartheta.$$

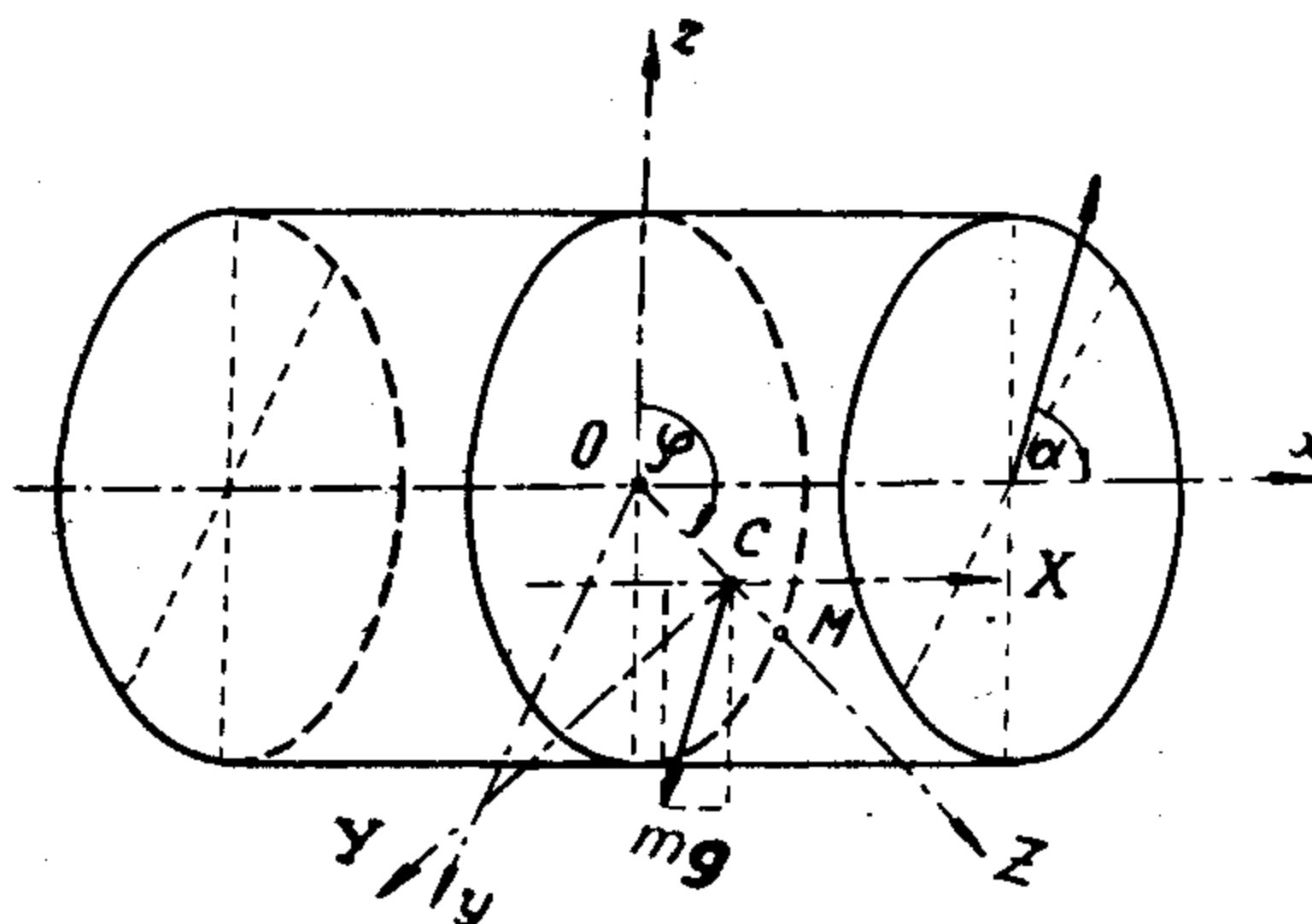
Pošto ni kinetička energija niti funkcija sile ne zavise od ugla φ , toj koordinati odgovara ciklički integral

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \left[\frac{M}{2} a^2 + \frac{m}{3} b^2 \cos^2 \vartheta + m(a^2 - b^2) \sin^2 \vartheta \right] \dot{\varphi} = \text{const.}$$

Pored ovog integrala postoji i integral energije $T - U = h$, jer kinetička energija ne zavisi eksplicitno od vremena a aktivna sila ima funkciju sile.

12. Teška lopta poluprečnika a kotrlja se bez klizanja sa unutrašnje strane nepomičnog pravog kružnog cilindra poluprečnika $a + b$ čija je osa nagnuta prema vertikali za ugao α . Krak inercije lopte ma za koju osu koja prolazi kroz njen centar je $k^2 = a^2/3$, a centar inercije lopte poklapa se sa njenim geometrijskim centrom. U početnom trenutku lopta je u miru a ravan koja prolazi kroz osu cilindra i centar lopte obrazuje sa vertikalnom ravni kroz osu cilindra ugao β . Odrediti translatornu brzinu lopte u pravcu ose cilindra kada te dve ravni obrazuju ugao ϑ .

Neka je (sl. 155) $CXYZ$ pravougli Dekartov koordinatni sistem sa početkom u centru C lopte, takav da je X -osa stalno kolinearna sa osom cilindra, a da



Slika 155

je Z -osa stalno upravna na osu cilindra. Neka je $Oxyz$ nepokretni Dekartov koordinatni sistem čiji se početak nalazi na osi cilindra, x -osa se poklapa sa osom cilindra a z -osa je u vertikalnoj ravni. Neka je φ ugao između z - i Z -osa, Ω ugaona brzina triedra $CXYZ$ i ω ugaona brzina lopte.

Ravan u kojoj se menja ugao φ upravna je na X -osu pa su koordinate vektora Ω u sistemu $CXYZ$

$$\Omega = \{-\dot{\varphi}, 0, 0\}.$$

Veze su:

1) Površni lopte i cilindra moraju slobodno da se dodiruju, što znači da rastojanje centra lopte od ose cilindra mora biti konstantno,

$$(1) \quad \overline{CO} = |Z_0| = b = \text{const.}$$

2) Lopta se kotrlja bez klizanja po površi cilindra pa stoga mora brzina tačke dodira da bude jednaka nuli,

$$\mathbf{v}_C + \boldsymbol{\omega} \times \overline{CM} = \mathbf{0}.$$

Brzina centra lopte za sistem $CXYZ$ biće vektor

$$\mathbf{v}_C = \{v_{C1}, v_{C2}, 0\}$$

pri čemu je $v_{C2} = b \dot{\varphi}$. Kako je za taj isti koordinatni sistem $\boldsymbol{\omega} = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ i $\overrightarrow{CM} = \{0, 0, a\}$, uslov da je kotrljanje bez klizanja svodi se na naredne tri skalarne relacije

$$(2) \quad v_{C1} + a \omega_2 = 0, \quad v_{C2} - a \omega_1 = 0, \quad v_{C3} = 0.$$

Treća od ovih relacija nije nezavisna, jer proističe iz veze (1). Prve dve veze (2) su neintegrabilne, dakle neholonomne. Prema tome sloboda lopte ograničena je sa tri veze, jednom holonomnom i dve neholonomne i sama lopta imaće tri stepena slobode. Zbog neholonomnosti veza nije moguće uvesti nezavisne koordinate pomoću kojih bi proučavanje kretanja lopte moglo da se svede na tri diferencijalne jednačine sa toliko isto nepoznatih funkcija, već se moraju posmatrati jednačine kretanja u kojima se javljaju i sile reakcije.

Koordinatni sistem $CXYZ$ ima sopstveno kretanje pa se za taj sistem mogu primeniti diferencijalne jednačine kretanja (3.5.2.3—6, 7). Aktivna sila $\mathbf{F} = mg$ deluje u težištu lopte i u sistemu $CXYZ$ imaće koordinate

$$\mathbf{F} = mg \{-\cos \alpha, \sin \alpha \cos \varphi, \sin \alpha \sin \varphi\}.$$

Moment sile \mathbf{F} za tačku C jednak je nuli. Sila reakcije deluje u tački dodira lopte i cilindra. Ako su koordinate reakcije

$$\mathbf{R} = \{R_1, R_2, R_3\},$$

moment te sile u odnosu na tačku C biće

$$\mathbf{L}^C = \overrightarrow{CM} \times \mathbf{R} = \{-a R_2, a R_1, 0\}.$$

Prema uslovima zadatka moment inercije za ma koju centralnu osu lopte je $I = ma^2/3$ pa je stoga kinetička energija lopte

$$T = \frac{1}{2} [m v_C^2 + I(\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2)].$$

Diferencijalne jednačine kretanja (3.5.2.3—6) koje proističu iz zakona količine kretanja biće

$$(3) \quad \begin{aligned} m \dot{v}_{C1} &= mg \cos \alpha + R_1, \\ m \dot{v}_{C2} &= mg \sin \alpha \cos \varphi + R_2, \\ m \Omega_1 v_{C3} &= mg \sin \alpha \sin \varphi + R_3, \end{aligned}$$

a diferencijalne jednačine (3.5.2.3—7) koje potiču iz zakona kinetičkog momenta glase

$$(4) \quad \begin{aligned} I \dot{\omega}_1 &= -a R_2, \\ I(\dot{\omega}_2 - \Omega_1 \omega) &= a R_1, \\ I(\dot{\omega}_3 + \Omega_1 \omega_2) &= 0. \end{aligned}$$

Jednačine (3) i (4) sadrže pet nepoznatih funkcija v_{C1} , v_{C2} , ω_1 , ω_2 , ω_3 kao i tri nepoznate koordinate sile reakcije R_1 , R_2 , R_3 . Za određivanje tih osam veličina na raspolaganju su šest jednačina kretanja (3) i (4) kao i dve od jednačina veza (2). Pomoću veze (1) eliminisana je brzina $v_{C3} = 0$.

U zadatku se traži v_{C1} .

Iz jednačina (3) i (4) mogu se eliminisati koordinate reakcije pa se dobiva

$$R_1 = m\dot{v}_{C1} + mg \cos \alpha = \frac{1}{3} ma (\dot{\omega}_3 - \Omega_1 \omega_3),$$

$$R_2 = m\dot{v}_{C2} - mg \sin \alpha \cos \varphi = -\frac{1}{3} ma \dot{\omega}_1,$$

$$\dot{\omega}_3 + \Omega_1 \omega_2 = 0.$$

Ako se pomoću jednačina veza (2) eliminišu ugaone brzine ω_2 i ω_3 dobiće se naredne tri jednačine

$$(5) \quad \begin{aligned} 4 \dot{v}_{C1} + 3g \cos \alpha &= -a \Omega_1 \omega_3, \\ 4 \dot{v}_{C2} - 3g \sin \alpha \cos \varphi &= 0, \\ a \dot{\omega}_3 - \Omega_1 v_{C1} &= 0. \end{aligned}$$

Unošenjem vrednosti $v_{C3} = b \dot{\varphi}$, $\Omega_1 = -\dot{\varphi}$ u ove jednačine i eliminacijom ω_3 iz prve i treće jednačine dobiće se

$$4 \ddot{v}_{C1} = -\dot{\varphi}^2 v_{C1} + a \omega_3 \ddot{\varphi}.$$

Kad se ova relacija pomnoži sa $\dot{\varphi}$ a prva od jednačina (5) sa $-\ddot{\varphi}$ i tako dobivene relacije saberu, dobiće se jedna diferencijalna jednačina drugog reda po v_{C1} i φ ,

$$(6) \quad 4 \ddot{v}_{C1} \dot{\varphi} - 4 \dot{v}_{C1} \ddot{\varphi} + v_{C1} \dot{\varphi}^3 - 3g \dot{\varphi} \cos \alpha = 0.$$

Da bi se našlo v_{C1} kao funkcija položaja treba iz ove relacije naći $v_{C1} = v_{C1}(\varphi)$. Kratkoće pisanja radi može se sada staviti $v_{C1} = v$ i ako se uzme u obzir da je

$$\dot{v} = \dot{\varphi} \frac{dv}{d\varphi}, \quad \ddot{v} = \frac{d^2v}{d\varphi^2} \dot{\varphi}^2 + \frac{dv}{d\varphi} \ddot{\varphi}$$

može relacija (6) da se napiše u obliku

$$(7) \quad 4 \frac{d^2v}{d\varphi^2} \dot{\varphi}^2 + v \dot{\varphi}^3 = 3g \dot{\varphi} \cos \alpha.$$

Iz druge od jednačina (5) proizilazi

$$(8) \quad 4b \ddot{\varphi} = 3g \sin \alpha \cos \varphi.$$

Ako se uvede smena $\varphi = \frac{\pi}{2} - \vartheta$, pošto je u početnom trenutku $t_0 = 0$ bilo

$\vartheta_0 = \beta$, $\dot{\vartheta}_0 = 0$, integraljenjem će se iz (8) dobiti

$$(9) \quad 2b \dot{\vartheta}^2 = 3g \sin \alpha (\cos \beta - \cos \vartheta).$$

Diferencijalna jednačina (7) može se sada napisati u obliku

$$\frac{d^2v}{d\vartheta^2} + \frac{1}{4} v = 3g \cos \alpha \frac{\dot{\vartheta}}{\dot{\vartheta}^3},$$

a prema (8) i (9) je

$$\frac{\ddot{\vartheta}}{\dot{\vartheta}^3} = \frac{1}{2} \left(\frac{2b}{3g \sin \alpha} \right)^{1/2} \frac{\sin \vartheta}{(\cos \beta - \cos \vartheta)^{3/2}},$$

pa ako se stavi

$$(10) \quad \frac{1}{8} \left(\frac{2b}{3g \sin \alpha} \right)^{1/2} \equiv A,$$

biće

$$(11) \quad \frac{d^2 v}{d\vartheta^2} + \frac{1}{4} v = A \frac{\sin \vartheta}{(\cos \beta - \cos \vartheta)^{3/2}} \equiv F(\vartheta).$$

Diferencijalna jednačina (11) može se integraliti na taj način što se u integralu odgovarajuće homogene jednačine

$$(12) \quad v_1 = C_1 \cos \frac{\vartheta}{2} + C_2 \sin \frac{\vartheta}{2}$$

konstante C_1 i C_2 po metodi varijacije konstanta shvate kao funkcije promenljive ϑ pa se odrede tako da zadovolje jednačinu (11). Prema toj metodi za određivanje $C_1 = C_1(\vartheta)$ i $C_2 = C_2(\vartheta)$ treba integraliti sistem od dve simultane jednačine prvog reda

$$\begin{aligned} \frac{dC_1}{d\vartheta} \cos \frac{\vartheta}{2} + \frac{dC_2}{d\vartheta} \sin \frac{\vartheta}{2} &= 0, \\ -\frac{1}{2} \frac{dC_1}{d\vartheta} \sin \frac{\vartheta}{2} + \frac{1}{2} \frac{dC_2}{d\vartheta} \cos \frac{\vartheta}{2} &= F(\vartheta). \end{aligned}$$

Rešenja toga sistema su

$$\begin{aligned} \frac{dC_1}{d\vartheta} &= -2F(\vartheta) \sin \frac{\vartheta}{2}, \\ \frac{dC_2}{d\vartheta} &= 2F(\vartheta) \cos \frac{\vartheta}{2}. \end{aligned}$$

Integraljenjem se nalazi onda

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{4A}{\sqrt{2}} \left[\frac{\sin \frac{\vartheta}{2}}{\left(\sin^2 \frac{\vartheta}{2} - \sin^2 \frac{\beta}{2} \right)^{1/2}} - \text{Arch} \left(\frac{\sin \frac{\vartheta}{2}}{\sin \frac{\beta}{2}} \right) \right] + C_3, \\ C_2 &= \frac{4A}{\sqrt{2}} \left[\text{arc cos} \left(\frac{\cos \frac{\vartheta}{2}}{\cos \frac{\beta}{2}} \right) - \frac{\cos \frac{\vartheta}{2}}{\left(\cos^2 \frac{\beta}{2} - \cos^2 \frac{\vartheta}{2} \right)^{1/2}} \right] + C_4, \end{aligned}$$

gde su C_3 i C_4 integracione konstante.

Unošenjem ovih vrednosti C_1 i C_2 u (12) dobiće se

$$\begin{aligned} v &= \frac{4A}{\sqrt{2}} \left[\text{arc cos} \left(\frac{\cos \frac{\vartheta}{2}}{\cos \frac{\beta}{2}} \right) \sin \frac{\vartheta}{2} - \cos \frac{\vartheta}{2} \text{Arch} \left(\frac{\sin \frac{\vartheta}{2}}{\sin \frac{\beta}{2}} \right) + \right. \\ &\quad \left. + C_3 \cos \frac{\vartheta}{2} + C_4 \sin \frac{\vartheta}{2} \right], \end{aligned}$$

jer je

$$\left(\sin^2 \frac{\vartheta}{2} - \sin^2 \frac{\beta}{2} \right)^{-1/2} - \left(\cos^2 \frac{\beta}{2} - \cos^2 \frac{\vartheta}{2} \right)^{-1/2} \equiv 0.$$

U početnom trenutku je $\vartheta_0 = \beta$ i $v_0 = 0$ pa je

$$C_3 \cos \frac{\beta}{2} + C_4 \sin \frac{\beta}{2} = 0.$$

Ova relacija mora da važi i za svako β pa i za $\beta = 0$ i $\beta = \pi$, a stoga mora biti $C_3 = C_4 = 0$. Kada se za konstantu A unese vrednost (10) dobiće se definitivno za brzinu centra lopte u pravcu ose cilindra obrazac

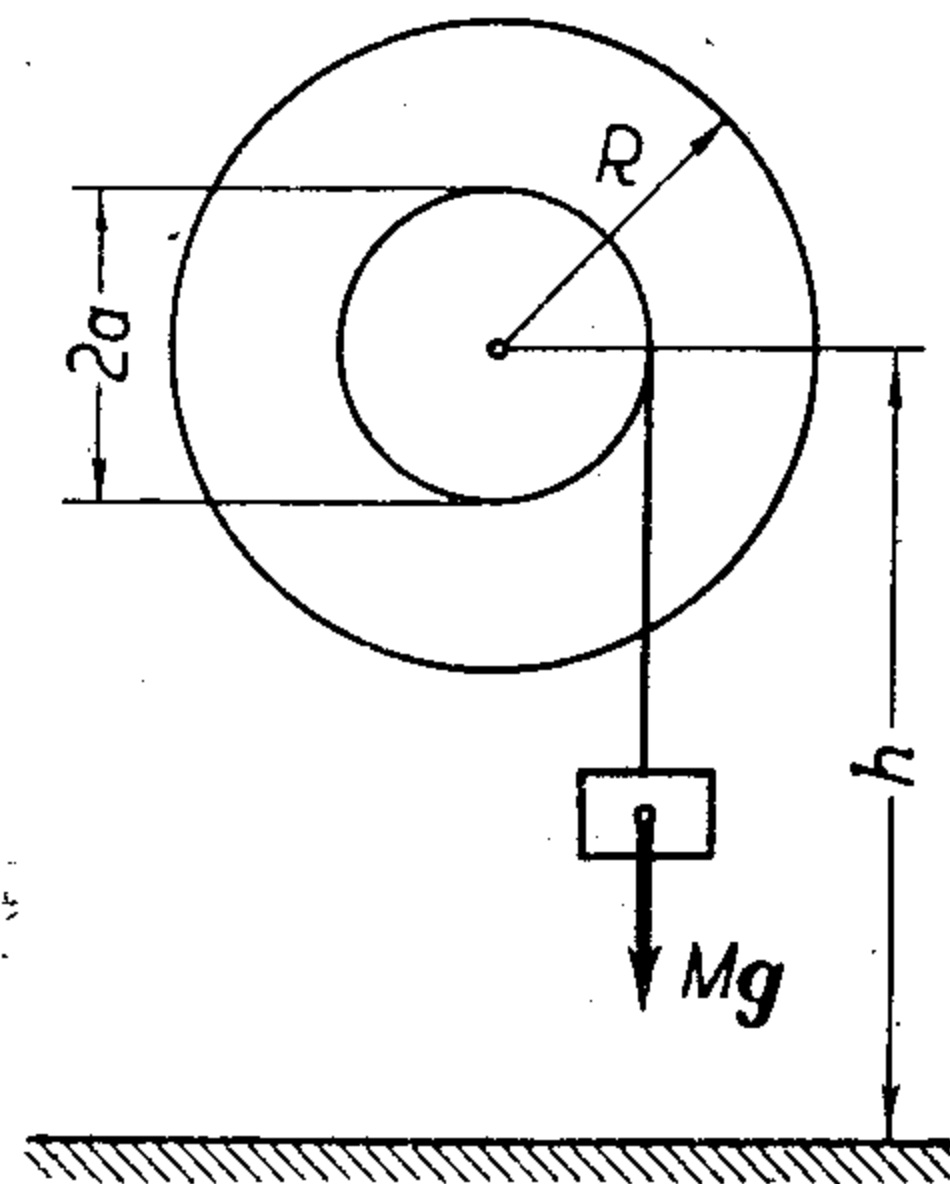
$$v = \frac{1}{2} \left(\frac{3gb \cos^2 \alpha}{\sin \alpha} \right)^{\frac{1}{2}} \left[\sin \frac{\vartheta}{2} \operatorname{arc} \cos \left(\frac{\cos \frac{\vartheta}{2}}{\cos \frac{\beta}{2}} \right) - \cos \frac{\vartheta}{2} \operatorname{Arch} \left(\frac{\sin \frac{\vartheta}{2}}{\sin \frac{\beta}{2}} \right) \right].$$

13. Homogena kružna ploča mase M i poluprečnika R može da se obrće oko horizontalne osovine poluprečnika a ; ploča je u vertikalnoj ravni. Konac zanemarljive mase i nerastegljiv namotan je oko osovine, a na njegovom slobodnom kraju visi teg mase jednake masi ploče. Ceo sistem nalazi se u miru i teg mase M je pušten bez početne brzine da pada. Na rastojanju h ispod početnog položaja tega ovaj pada na horizontalnu ravan. Ako se obrtanju ploče suprotstavlja konstantna sila otpora sa momentom G , naći za koliko će se kružna ploča okrenuti posle pada tega na ravan i naći silu u koncu zategnutom tegom M . Konac se odmotava sa osovine bez klizanja (sl. 156).

Ploča će se okrenuti za ugao

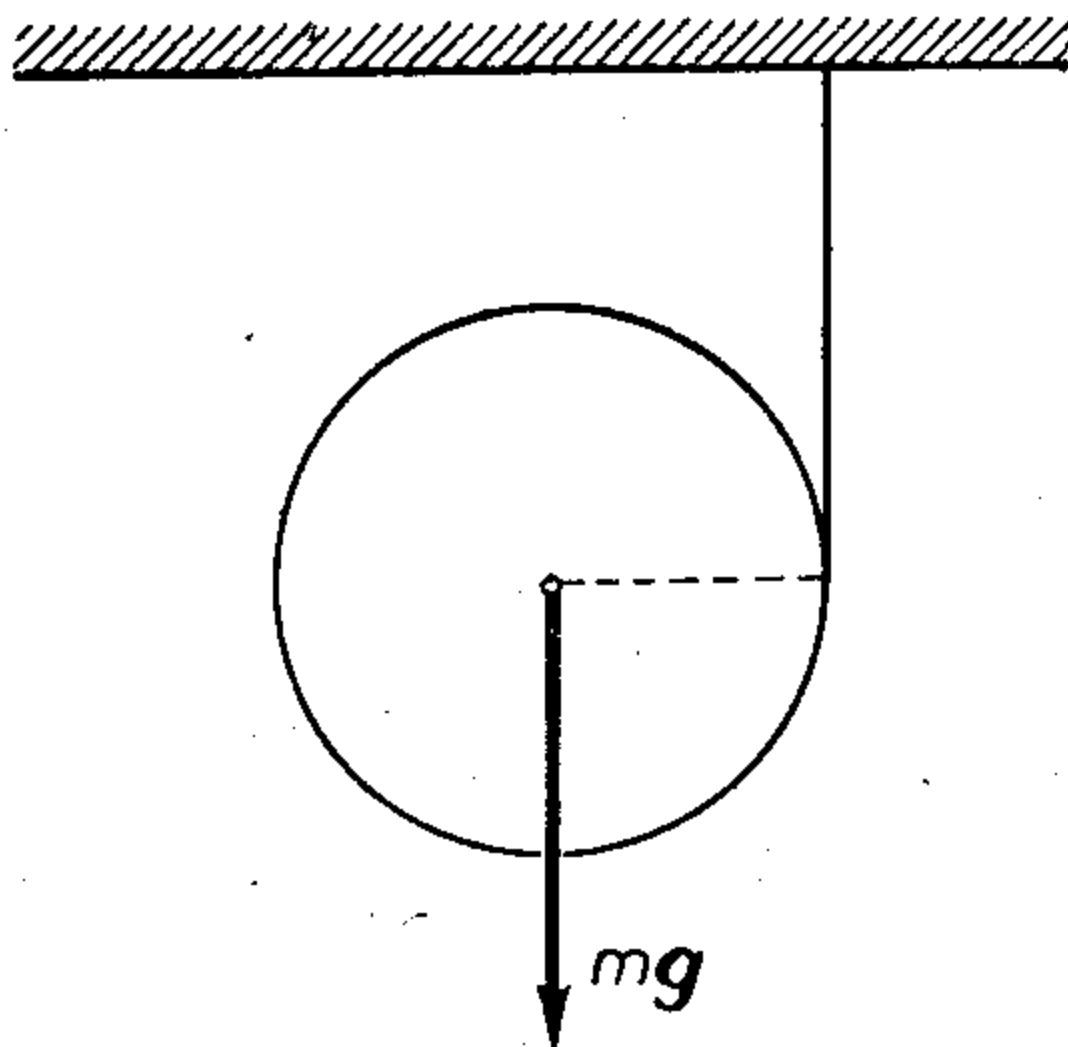
$$\varphi = \frac{I \frac{h}{a} (Mga - G)}{G(I + Ma^2)},$$

gde je $I = MR^2/2$ moment inercije ploče za osu obrtanja. Sila u koncu je



Slika 156

$$Ma \frac{Mga - G}{I + Ma^2} - Mg.$$



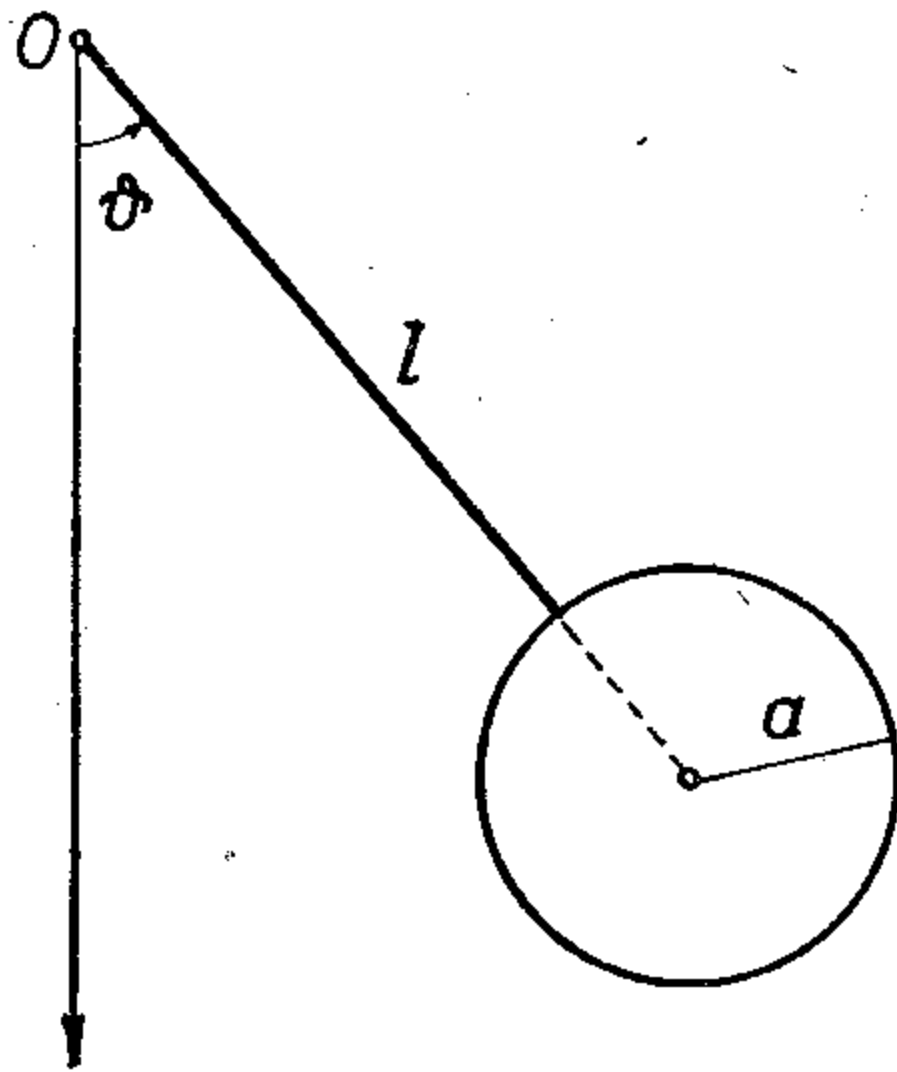
Slika 157

(Treba naći ugaonu brzinu ploče u trenutku pada tega na horizontalnu ravan; to će biti početna ugaona brzina za određivanje ugla φ .)

14. Oko ruba teškog homogenog kružnog diska poluprečnika a omotan je više puta tanak nerastegljiv konac čiji je jedan kraj prikačen za nepomičnu tačku. Disk je pušten da pod dejstvom sopstvene težine pada slobodno iz stanja mira, pri čemu se konac odmotava (sl. 157). Naći ubrzanje centra inercije diska i konačne jednačine njegova kretanja.

Odgovor: $w_C = \frac{2g}{3a}; \quad \vartheta = \frac{g}{3a} t^2.$

15. Teška homogena lopta mase M i poluprečnika a kruto je vezana za kraj teškog tankog homogenog štapa, dužine l i mase m , čiji je drugi kraj slobodno okačen o nepomičnu tačku O oko koje može da se obrće. Ceo sistem se okreće konstantnom ugaonom brzinom ω oko vertikalne ose kroz O . Naći nagib štapa prema vertikali (sl. 158).



Slika 158

Odgovor:

$$\cos \vartheta = \frac{g}{\omega^2} \frac{M(l+a) + m \frac{l}{2}}{M(l+a)^2 + \frac{ml^2}{3}}$$

16. Po unutrašnjoj strani površi šupljeg kružnog cilindra poluprečnika R kotrlja se bez klizanja teški homogeni kružni disk poluprečnika r i mase m . Osa cilindra je horizontalna a ravan diska je vertikalna. Kakvu najmanju početnu brzinu treba dati disku kad se ovaj nalazi u najnižem položaju u cilindru, da bi se disk kotrljao progresivno po površi cilindra ne napuštajući je?

$$v_0 \geq \left[\frac{11}{3} g (R-r) \right]^{1/2}$$

17. Težak homogeni štap mase M i dužine $2a$ kreće se u vertikalnoj ravni tako da mu jedan kraj klizi po horizontalnoj a drugi po vertikalnoj glatkoj pravoj. Odrediti ugaonu brzinu štapa i pritiske štapa na horizontalnu i vertikalnu pravu. Početni nagib štapa prema horizontali je α i štap nema početnu brzinu.

Pored diferencijalnih jednačina kretanja štapa za ose koje se poklapaju sa vezama treba iskoristiti i integral energije. Ugaona brzina štapa je

$$\omega = \left[\frac{3g}{2a} (\sin \alpha - \sin \vartheta) \right]^{1/2},$$

a koordinate sile reakcije su

$$R_x = \frac{3g}{4} M \cos \vartheta (3 \sin \vartheta - 2 \sin \alpha); \quad R_y = \frac{1}{4} Mg [(3 \sin \vartheta - \sin \alpha)^2 + \cos^2 \alpha].$$

18. Dve teške materijalne tačke masa m i M nalaze se na nepromenljivom rastojanju L jedna od druge. U početnom položaju duž L je horizontalna i nalazi se na visini h iznad horizontalne ravni; u tom položaju težište duži je u miru a duži je saopštena početna ugaona brzina ω_0 oko horizontalne ose upravne na duž u težištu. Odrediti ugaonu brzinu ω_0 tako da obe materijalne tačke padnu istovremeno na horizontalnu ravan.

Odgovor:
$$\omega_0 = n\pi \sqrt{\frac{g}{2h}} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

19. Napisati diferencijalnu jednačinu kretanja teškog homogenog kružnog cilindra mase M i poluprečnika a na čijoj se površi nalazi teška materijalna tačka mase m u relativnom miru prema cilindru. Cilindar se kotrlja bez klizanja po savršeno hrapavoj horizontalnoj ravni.

Odgovor:
$$\frac{3}{2} \left(\frac{M}{m} \right) \ddot{\vartheta} + 2\ddot{\vartheta} (1 - \cos \vartheta) + \dot{\vartheta}^2 \sin \vartheta + \frac{g}{a} \sin \vartheta = 0.$$

20. Proučiti kretanje savršeno hrapavog teškog homogenog kružnog cilindra mase m i poluprečnika a , koji se kotrlja u šupljem cilindru mase M i poluprečnika b i koji se sa svoje strane sam obrće oko svoje ose koja je horizontalna.

Ugao obrtanja šupljeg cilindra je ciklička koordinata. Treba iskoristiti ciklički integral i pomoću njega i integrala energije eliminisati ugao ϑ . Homogeni cilindar kreće se kao matematičko klatno dužine.

Odgovor:
$$L = \frac{3M+m}{2M+m}(b-a).$$

21. Homogena kružna ploča mase M nalazi se na savršeno glatkoj horizontalnoj ravni, a po njenom rubu kreće se materijalna tačka mase m konstantnom brzinom. Kakvo je kretanje centra ploče ako je u početnom trenutku ploča bila u miru?

Ako se nepokretni koordinatni sistem Oxy u ravni ploče uzme takó da se početak O poklopi sa centrom ploče u početnom položaju i da osa Ox prolazi kroz početni položaj pokretne tačke m , iz zakona količine kretanja dobiće se

$$x = \frac{m}{M+m} a (1 - \cos \vartheta), \quad y = \frac{m}{M+m} a (\vartheta - \sin \vartheta),$$

gde je $\vartheta = \omega t$, a brzina tačke m je $v = a \omega$.

22. Homogena sfera kotrlja se po savršeno hrapavoj ravni pod dejstvom sile čija rezultanta prolazi kroz njen centar. Pokazati da je kretanje centra sfere istovetno sa kretanjem materijalne tačke pod dejstvom istih sila umanjjenih u odnosu 5 : 7.

23. Naći prve integrale diferencijalnih jednačina kretanja savršeno hrapave teške homogene sfere poluprečnika a i mase m koja se kotrlja bez klizanja po nepomičnoj sferi poluprečnika b .

Treba uzeti koordinatni sistem $CXYZ$ sa početkom u težištu C pokretne sfere, takav da Z -osa stalno prolazi kroz centar pokretne i nepokretne sfere a X -osa da bude stalno horizontalna. Položaj centra C može se odrediti pomoću sfernih koordinata ϑ , φ sa polom u centru nepomične sfere, pri čemu je ϑ u horizontalnoj a φ u vertikalnoj ravni. Projekcije ugaone brzine Ω sistema $CXYZ$ na ose tog sistema su

$$\Omega = \{-\dot{\vartheta} \cos \varphi, -\dot{\varphi}, \dot{\vartheta} \sin \varphi\}.$$

Prvi integrali diferencijalnih jednačina kretanja biće

$$\omega_3 = n = \text{const.}$$

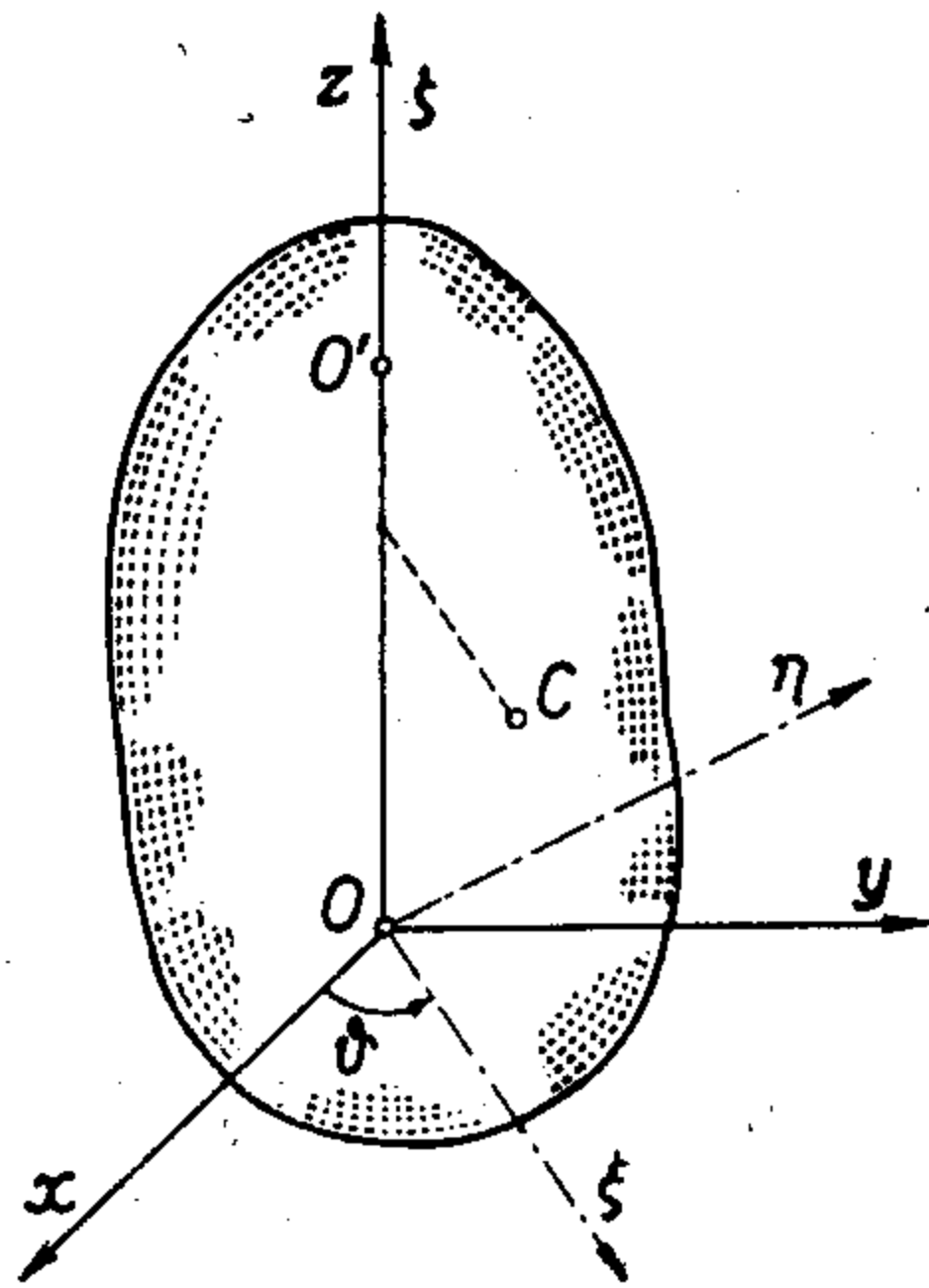
$$(a+b) \dot{\vartheta} \cos^2 \varphi + \frac{2}{7} a n \sin \varphi = C_1 = \text{const.},$$

$$\dot{\varphi}^2 + \dot{\vartheta}^2 \cos^2 \varphi + \frac{10}{17} \cdot \frac{g}{ab} \sin \varphi = C_2 = \text{const.}$$

3.5.4. Obrtanje krutog tela oko nepokretne ose

Pri kretanju krutog tela kada su dve njegove tačke utvrđene u prostoru, recimo tačke O i O' , telo će se sa jednim stepenom slobode obrtati oko ose određene tim tačkama (odeljak 1.9.2). Pokretni i nepokretni koordinatni sistem mogu se

uzeti tako da im se počeci poklapaju u tački O (sl. 159) i da se ose Oz i $O\zeta$ poklapaju sa osom OO' oko koje se telo obrće. Ugao ϑ obrtanja tela je tada ugao između nepokretne ravni zOx i ravni $\zeta O\xi$ koja se obrće zajedno sa telom.



Slika 159

Pored aktivnih sila sa rezultantom \mathbf{F} , koje dejstvuju na telo, u utvrđenim tačkama u kojima dejstvuju veze javljaju se i sile reakcije \mathbf{R} i \mathbf{R}' .

Za proučavanje kretanja treba projicirati zakon količine kretanja i zakon kinetičkog momenta na ose $Oxyz$ nepokretnog koordinatnog sistema. Na taj način dobiće se skalarne diferencijalne jednačine kretanja (3.5.2.1—3 i 4). Pri tome treba uzeti u obzir da je za obrtanje tela oko nepokretne ose ugaona brzina tela data vektorom $\boldsymbol{\omega} = \dot{\vartheta} \mathbf{k} = \dot{\vartheta} \mathbf{v}$, tako da je $P = p = Q = q = 0$ a $R = r = \dot{\vartheta} = \omega$ i da je $\mathbf{r}_A = \mathbf{v}_A = 0$. Tada se iz (3.5.1.2—11) i (3.5.1.3—14) dobivaju naredni izrazi za koordinate delimičnih gradijenata kinetičke energije tela

$$(1) \quad \text{grad}_{\mathbf{v}_A} T = \{-m \dot{\vartheta} y_C, m \dot{\vartheta} x_C, 0\},$$

$$(2) \quad \text{grad}_{\boldsymbol{\omega}} T = \{\Pi_{zx}^O \dot{\vartheta}, \Pi_{yz}^O \dot{\vartheta}, I_z^O \dot{\vartheta}\}.$$

Skalarne diferencijalne jednačine kretanja biće

$$(3) \quad \begin{aligned} -m \frac{d}{dt} (y_C \dot{\vartheta}) &= X + R_x + R_x', \\ m \frac{d}{dt} (x_C \dot{\vartheta}) &= Y + R_y + R_y', \\ 0 &= Z + R_z + R_z'; \end{aligned}$$

$$(4) \quad \frac{d}{dt} (\Pi_{zx}^O \dot{\vartheta}) = L_x + \Lambda_x + \Lambda_x',$$

$$\frac{d}{dt} (\Pi_{yz}^O \dot{\vartheta}) = L_y + \Lambda_y + \Lambda_y',$$

$$\frac{d}{dt} (I_z^O \dot{\vartheta}) = L_z + \Lambda_z + \Lambda_z'.$$

Za nepokretni koordinatni sistem koordinate x_C i y_C centra inercije tela kao i proizvodi inercije Π_{zx}^O i Π_{yz}^O nisu konstantni. Moment inercije $I = I_z^O = I_{\zeta}^O$ je konstantan, jer se konfiguracija tela u odnosu na osu obrtanja ne menja.

Ako su koordinate centra inercije u pokretnom koordinatnom sistemu ξ_C, η_C, ζ_C na osnovu (1.9.3—7) biće

$$(5) \quad \begin{aligned} x_C &= \xi_C \cos \vartheta - \eta_C \sin \vartheta, \\ y_C &= \xi_C \sin \vartheta + \eta_C \cos \vartheta, \\ z_C &= \zeta_C. \end{aligned}$$

Diferencijaljenjem ovih relacija po vremenu, pošto su ξ_C i η_C konstantni dobiće se

$$(6) \quad \begin{aligned} \dot{x}_C &= -\dot{\vartheta} (\xi_C \sin \vartheta + \eta_C \cos \vartheta) = -\dot{\vartheta} y_C, \\ \dot{y}_C &= \dot{\vartheta} (\xi_C \cos \vartheta - \eta_C \sin \vartheta) = \dot{\vartheta} x_C, \\ \dot{z}_C &= 0. \end{aligned}$$

Slično tome, ako se za proizvode inercije iskoriste obrasci (3.1.3—24)

$$\Pi_{zx} = -\sum m_i z_i x_i, \quad \Pi_{yz} = -\sum m_i y_i z_i,$$

pa se te relacije diferencijale po vremenu i uzme u obzir da je za sve tačke tela z_i nepromenljivo, dobiće se

$$(7) \quad \begin{aligned} \frac{d \Pi_{zx}}{dt} &= -\sum m_i z_i \dot{x}_i = \dot{\vartheta} \sum m_i y_i z_i = -\dot{\vartheta} \Pi_{yz}, \\ \frac{d \Pi_{yz}}{dt} &= -\sum m_i y_i \dot{z}_i = -\dot{\vartheta} \sum m_i z_i x_i = \dot{\vartheta} \Pi_{zx}. \end{aligned}$$

Kad se u jednačinama kretanja (3) i (4) izvrše naznačene diferencijacije i iskoriste relacije (6) i (7) dobiće se najzad naredni sistem od šest skalarnih jednačina za obrtanje krutog tela oko nepokretne ose

$$(8) \quad \begin{aligned} -m \ddot{\vartheta} y_C - m \dot{\vartheta}^2 x_C &= X + R_x + R_x', \\ m \ddot{\vartheta} x_C - m \dot{\vartheta}^2 y_C &= Y + R_y + R_y', \\ 0 &= Z + R_z + R_z'; \end{aligned}$$

$$(9) \quad \begin{aligned} \Pi_{zx} \ddot{\vartheta} - \Pi_{yz} \dot{\vartheta}^2 &= L_x + \Lambda_x + \Lambda_x', \\ \Pi_{yz} \ddot{\vartheta} + \Pi_{zx} \dot{\vartheta}^2 &= L_y + \Lambda_y + \Lambda_y', \\ I \ddot{\vartheta} &= L_z + \Lambda_z + \Lambda_z'. \end{aligned}$$

Ovaj sistem jednačina sadrži sedam nepoznatih funkcija i to šest koordinata sila reakcija i jednu koordinatu tela, ugao ϑ . Prema tome u opštem slučaju problem obrtanja krutog tela oko nepokretne ose je dinamički neodređen.

Moment sile reakcije \mathbf{R} u tački O jednak je za tu tačku nu i, $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{0}$. Ako je $\overrightarrow{OO'} = l \mathbf{k}$, moment reakcije \mathbf{R}' koja dejstvuje u tački O' za tačku O biće

$$(10) \quad \mathbf{\Lambda}' = l \mathbf{k} \times \mathbf{R}' = \{-l R_y', l R_x', 0\}.$$

Prema tome, treća jednačina (9) ne sadrži moment reakcije već samo moment aktivnih sila za osu Oz . Ta jednačina služi za određivanje kretanja krutog tela,

$$(11) \quad I \ddot{\vartheta} = L_z.$$

Preostalih pet jednačina služi za određivanje reakcija. Dinamička neodređenost može da se izbegne naknadnim pretpostavkama o silama reakcije. U tačkama O i O' nalaze se *ležišta* ose oko koje se telo obrće. Reakcije \mathbf{R} i \mathbf{R}' predstavljaju *kinetostatičke pritiske u ležištima*. Ako se u O' nalazi cilindarsko

ležište (sl. 160) koje ne sprečava translaciju tela u pravcu ose obrtanja, već samo pomeranje tela upravno na tu osu, reakcija u tom ležištu neće imati komponentu u pravcu ose obrtanja

$$(12) \quad R_z' = 0.$$

Ležište O je dovoljno da onemogući translaciju tela u pravcu z -ose i u njemu reakcija ima sve tri komponente. U takvom slučaju postoji svega pet koordinata: sila reakcije. Kad se iz jednačine (11) odredi konačna jednačina kretanja tela,

$$(13) \quad \vartheta = \vartheta(t),$$

iz preostalih jednačina (8) i (9) mogu se odrediti koordinate reakcija,

$$\begin{aligned} -m \ddot{\vartheta} y_C - m \dot{\vartheta}^2 x_C &= X + R_x + R_x', \\ m \ddot{\vartheta} x_C - m \dot{\vartheta}^2 y_C &= Y + R_y + R_y', \\ 0 &= Z + R_z; \end{aligned}$$

$$(14) \quad \begin{aligned} \Pi_{zx} \ddot{\vartheta} - \Pi_{yz} \dot{\vartheta}^2 &= L_x - l R_y', \\ \Pi_{yz} \ddot{\vartheta} + \Pi_{zx} \dot{\vartheta}^2 &= L_y + l R_x'. \end{aligned}$$

Svaka od reakcija \mathbf{R} i \mathbf{R}' može se razložiti u po dve komponente, tj.

$$(15) \quad \mathbf{R} = \mathbf{S} + \mathbf{D}, \quad \mathbf{R}' = \mathbf{S}' + \mathbf{D}',$$

i to tako da komponente \mathbf{S} i \mathbf{S}' budu u ravnoteži sa aktivnim silama, a komponente \mathbf{D} i \mathbf{D}' sa inercijalnim silama (silama u kojima se javljaju $\ddot{\vartheta} = \varepsilon$ i $\dot{\vartheta} = \omega$). Komponente \mathbf{S} i \mathbf{S}' zavise samo od spoljašnjih sila i nazivaju se *statičke reakcije* u ležištima O i O' , a komponente \mathbf{D} i \mathbf{D}' su *dinamičke reakcije* ili *pritisci*.

Iz jednačina (8) i (9) ond. (14) mogu se dobiti narednih pet jednačina za određivanje statičkih reakcija,

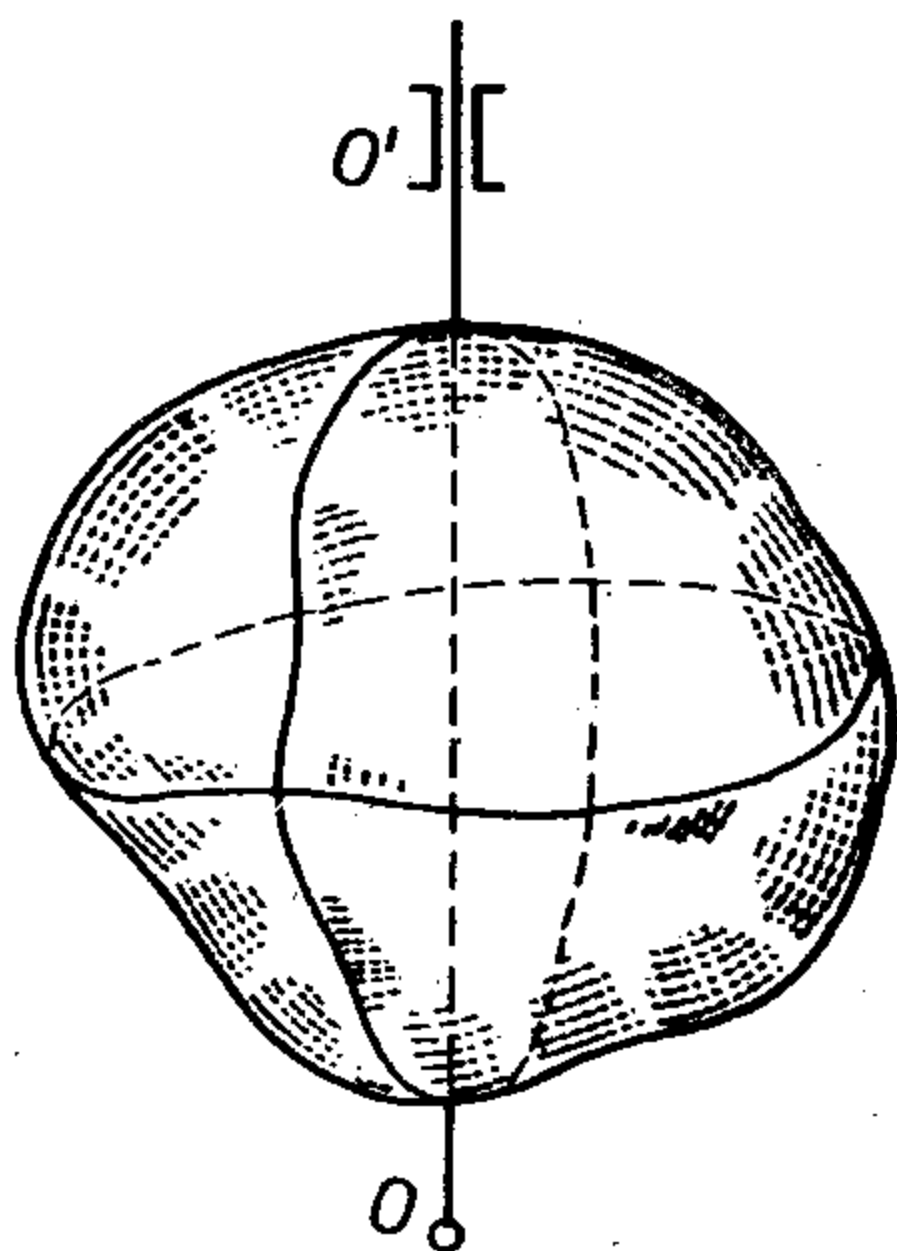
$$(16) \quad \begin{aligned} X + S_x + S_x' &= 0, \quad Y + S_y + S_y' = 0, \quad Z + S_z + S_z' = 0; \\ L_x - l S_y' &= 0, \quad L_y + l S_x' = 0. \end{aligned}$$

Ako je ležište O cilindarsko biće $S_z' = 0$, pa se iz (16) nalazi

$$(17) \quad \begin{aligned} S_x &= -X + \frac{1}{l} L_y, \quad S_y = -Y - \frac{1}{l} L_x, \quad S_z = -Z; \\ S_x' &= -\frac{1}{l} L_y, \quad S_y' = \frac{1}{l} L_x, \quad S_z' = 0. \end{aligned}$$

Za određivanje dinamičkih reakcija preostaju relacije

$$(18) \quad \begin{aligned} -m \varepsilon y_C - m \omega^2 x_C &= D_x + D_x', \\ m \varepsilon x_C - m \omega^2 y_C &= D_y + D_y', \\ 0 &= D_z + D_z'; \\ \Pi_{zx} \varepsilon - \Pi_{yz} \omega^2 &= -l D_y', \\ \Pi_{yz} \varepsilon + \Pi_{zx} \omega^2 &= l D_x'. \end{aligned}$$



Slika 160

U pravcu ose obrtanja nema inercijalnih sila pa se može uzeti da je $D_z + D_z' = 0$. Tada se iz jednačina (18) nalaze koordinate dinamičkih reakcija,

$$\begin{aligned}
 D_x &= -m \ddot{x}_C - \frac{1}{l} (\Pi_{yz} \varepsilon + \Pi_{zx} \omega^2), \\
 D_y &= m \ddot{y}_C + \frac{1}{l} (\Pi_{zx} \varepsilon - \Pi_{yz} \omega^2), \\
 D_x' &= \frac{1}{l} (\Pi_{yz} \varepsilon + \Pi_{zx} \omega^2), \\
 D_y' &= -\frac{1}{l} (\Pi_{zx} \varepsilon - \Pi_{yz} \omega^2),
 \end{aligned}
 \tag{19}$$

pri čemu su iskorišćene relacije (6), a odatle proističe

$$\begin{aligned}
 \ddot{x}_C &= -\ddot{\vartheta} y_C - \dot{\vartheta} \dot{y}_C = -\varepsilon y_C - \dot{\vartheta}^2 x_C, \\
 \ddot{y}_C &= \ddot{\vartheta} x_C + \dot{\vartheta} \dot{x}_C = \varepsilon x_C - \dot{\vartheta}^2 y_C.
 \end{aligned}
 \tag{20}$$

Razlike između kinetostatičkih i statičkih reakcija, tj. dinamičke reakcije, isčezavaju tada i samo tada, kad je osa obrtanja glavna centralna osa inercije tela, tj. kad je

$$x_C = y_C = 0; \quad \Pi_{zx} = \Pi_{yz} = 0.
 \tag{21}$$

Kad je osa obrtanja centralna, ali nije glavna osa inercije, dobiva se $\mathbf{D} + \mathbf{D}' = \mathbf{0}$, tj. dinamičke reakcije u ležištima obrazuju spreg kome je intenzitet momenta

$$M(\mathbf{D}, \mathbf{D}') = \sqrt{\omega^2 + \varepsilon^2} \sqrt{\Pi_{yz}^2 + \Pi_{zx}^2}.
 \tag{22}$$

3.5.4.1. Permanentna i slobodna osa obrtanja

U opštem slučaju, ako se jedna tačka tela koje se kreće sa dve utvrđene tačke oslobodi, recimo tačka O' , telo će se kretati samo oko jedne nepokretne tačke, tačke O . Međutim, pod određenim uslovima telo može da se i tada kreće oko jedne stalne ose OO' . U tom slučaju je kretanje oko ose OO' spontano a veza u tački O' je trivijalna. Trivijalnost te veze odražava se u tome što u toj tački ne deluje sila reakcije, $\mathbf{R}' = \mathbf{0}$. Ako aktivna sila nema momente za ose x i y , iz poslednje dve jednačine (3.5.4—14) proističe da će biti $R_x' = R_y' = 0$ samo ako je

$$\Pi_{yz} = \Pi_{zx} = 0,
 \tag{1}$$

a to znači da osa Oz mora biti glavna osa inercije u tački O .

Prema tome, ako na kruto telo koje je utvrđeno u jednoj tački deluje aktivna sila koja ima moment samo u odnosu na jednu glavnu osu inercije tela u utvrđenoj tački, dok su joj momenti za ose upravne na tu osu jednaki nuli, telo će se obrtati oko te glavne ose. Takva osa se zove *permanentna osa rotacije*. Da bi neka osa mogla da bude permanentna kad je utvrđena samo jedna tačka te ose, potrebno je da je ta osa glavna osa inercije za utvrđenu tačku.

Kad u tački O' nema reakcije, a aktivna sila nema projekcije na ose x i y , iz prve dve jednačine (3.5.4—14) dobiće se da će reakcije u tački O biti jednake nuli samo pod uslovom da je

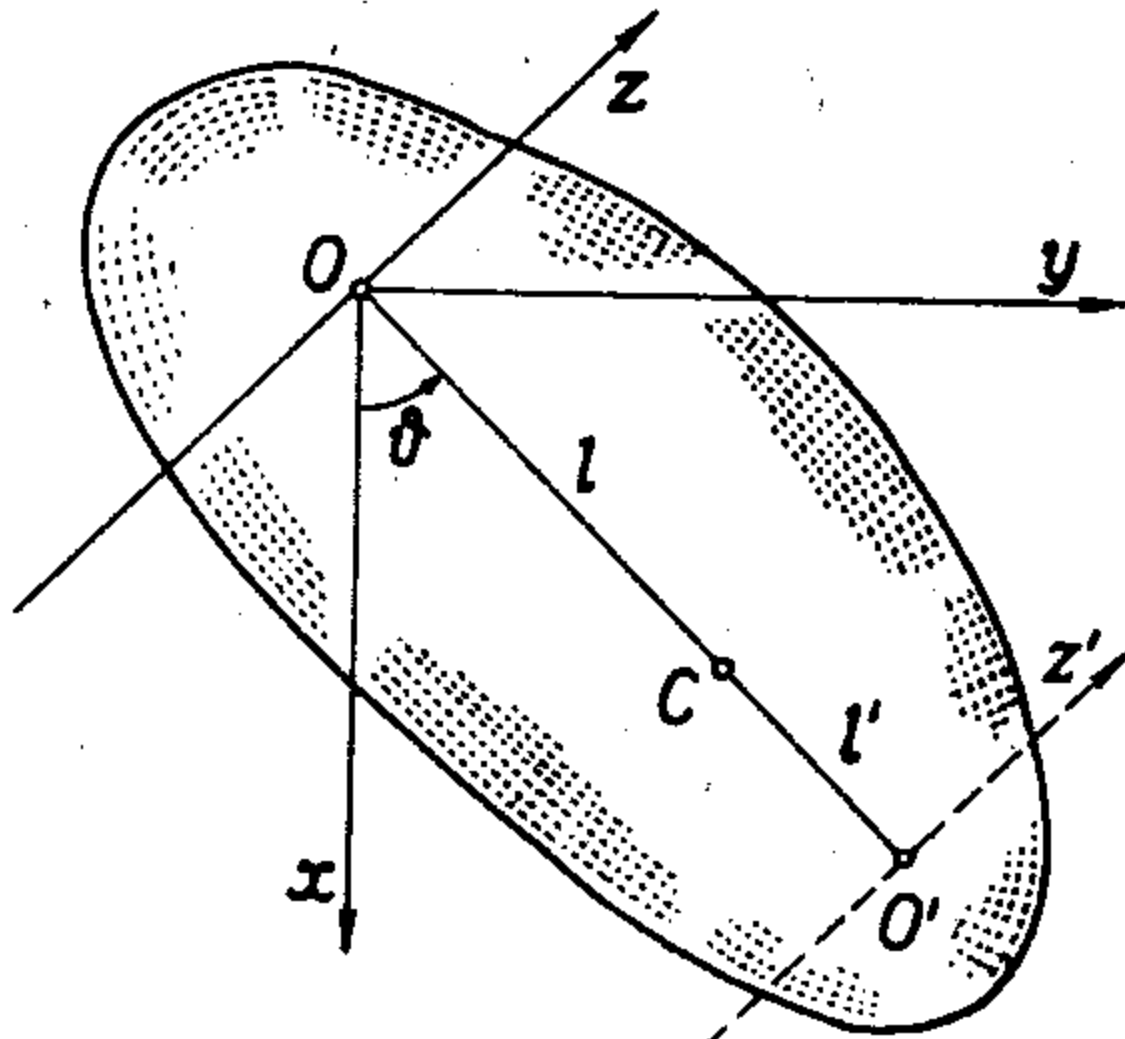
$$(2) \quad x_C = 0, \quad y_C = 0,$$

a to znači da se centar inercije tela nalazi na osi obrtanja. Tada se uočeno kruto telo obrće oko OO' ose iako ta osa uopšte nije ni u jednoj tački utvrđena. Takva osa naziva se *slobodna osa*.

Da bi neka osa bila slobodna osa rotacije krutog tela potrebno je da je to glavna centralna osa inercije. Ako aktivna sila dejstvuje samo u pravcu glavne centralne ose inercije nekog tela i ako nema momente u odnosu na ose upravne na tu osu, osa će biti slobodna i telo će se spontano obrtati oko nje.

3.5.4.2. Fizičko klatno

Teško kruto telo koje se obrće pod dejstvom sopstvene težine oko nepomične horizontalne ose naziva se *fizičko klatno* (sl. 161). Ako se za $O\xi$ -osu uzme



Slika 161

osa koja prolazi kroz centar inercije tela a za Ox -osa u tački O koja je orijentisana vertikalno naniže, dok je $Oz = O\xi$ osa obrtanja, centar inercije imaće u pokretnom koordinatnom sistemu koordinate $\xi_C = l$, $\eta_C = 0$, ζ_C , a u nepokretnom

$$(1) \quad x_C = l \cos \vartheta, \quad y_C = l \sin \vartheta, \\ z_C = \zeta_C.$$

Moment aktivne sile $\mathbf{F} = m\mathbf{g}$, gde je m masa tela, za osu obrtanja biće.

$$(2) \quad L_z^O = \mathbf{L}^O \cdot \mathbf{k} = (\mathbf{r}_C \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k} = \\ = -mgl \sin \vartheta.$$

Prema tome, s obzirom na (3.5.4—11) diferencijalna jednačina kretanja fizičkog klatna biće

$$(3) \quad I \ddot{\vartheta} = -mgl \sin \vartheta.$$

Ova je jednačina istovetna sa jednačinom kretanja matematičkog klatna dužine

$$(4) \quad L = \frac{I}{ml}.$$

Ova dužina se zove *redukovana dužina fizičkog klatna* ili *dužina ekvivalentnog matematičkog klatna*. Fizičko klatno se kreće na potpuno isti način kao matematičko klatno dužine L određene obrascem (4). U slučaju malih oscilacija fizičkog klatna period će biti kao i kod matematičkog klatna određen obrascem

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}},$$

a s obzirom na (4) taj će period biti

$$(5) \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgl}}.$$

Ovaj obrazac može da se iskoristi za eksperimentalno određivanje momenata inercije za date ose, naročito kada telo ima nepravilan oblik i raspored masa. Za datu osu mogu da se izmere l i T , a ako je $G = mg$ težina tela moment inercije će biti

$$(6) \quad I = \frac{GIT^2}{4\pi^2}.$$

Prema Hajgens-Štajnerovoj teoremi za centralni moment inercije oko ose paralelne osi iz (6) dobiva se

$$(7) \quad I^C = Gl \left(\frac{T^4}{4\pi^2} - \frac{l}{g} \right).$$

Tačka O' koja se nalazi na normali na osu obrtanja (osu vešanja) fizičkog klatna na rastojanju $\overline{OO'} = L$ od ose vešanja zove se *centar oscilovanja*. Osa $O'z$ u tački O' , paralelna prvobitnoj osi vešanja zove se *osa oscilovanja*.

Moment inercije I^O za datu osu vešanja prema Hajgens-Štajnerovoj teoremi će biti

$$(8) \quad I^O = I^C + ml^2 = m(k^2 + l^2),$$

gde je k krak inercije centralnog momenta inercije I^C za osu paralelnu osi vešanja. Redukovana dužina klatna može se sada prema (4) izraziti obrascem

$$(9) \quad L = \frac{I^O}{ml} = \frac{k^2}{l} + l.$$

Neka je l_1 rastojanje od centra inercije C neke druge ose vešanja kroz tačku O_1 paralelne datoj osi u tački O , za koju će dužina redukovanog klatna biti takođe jednaka L , tj.

$$(10) \quad L = \frac{k^2}{l_1} + l_1.$$

Ovako definisane ose Oz i O_1z_1 ($Oz \parallel O_1z_1$) zovu se *konjugovane ose* fizičkog klatna. Na osnovu (9) i (10) mora onda biti

$$\frac{k^2}{l} + l = \frac{k^2}{l_1} + l_1,$$

odakle se dobiva

$$(11) \quad k^2 = ll_1.$$

Ako se ova vrednost za krak k centralnog momenta inercije unese u relaciju (9) ili (10) dobiće se

$$(12) \quad l + l_1 = L,$$

tj. rastojanje između konjugovanih osa jednako je redukovanoj dužini klatna a tačke O i $O' = O_1$ su jedna za drugu centri oscilovanja, dok su ose Oz i $O'z$ jedne za drugu ose oscilovanja.

Primeri i zadaci

1. Teška homogena kvadratna ploča ivice $2a$ i mase m obrće se oko jedne svoje vertikalne ivice stalnom ugaonom brzinom ω . Osa obrtanja je nepokretna. Odrediti reakcije u ležištima.

Ako je ϑ ugao za koji se ploča obrne oko svoje vertikalne ivice OO' (sl. 162), biće

$$\omega = \dot{\vartheta} = \text{const.}, \quad \varepsilon = \ddot{\omega} = 0.$$

Na ploču dejstvuje aktivna sila mg čija je napadna tačka u centru inercije C . Kako je ploča homogena biće $\xi_C = a$, $\eta_C = 0$, $\zeta_C = 0$, pa je prema (3.5.4—5)

$$x_C = a \cos \vartheta, \quad y_C = a \sin \vartheta.$$

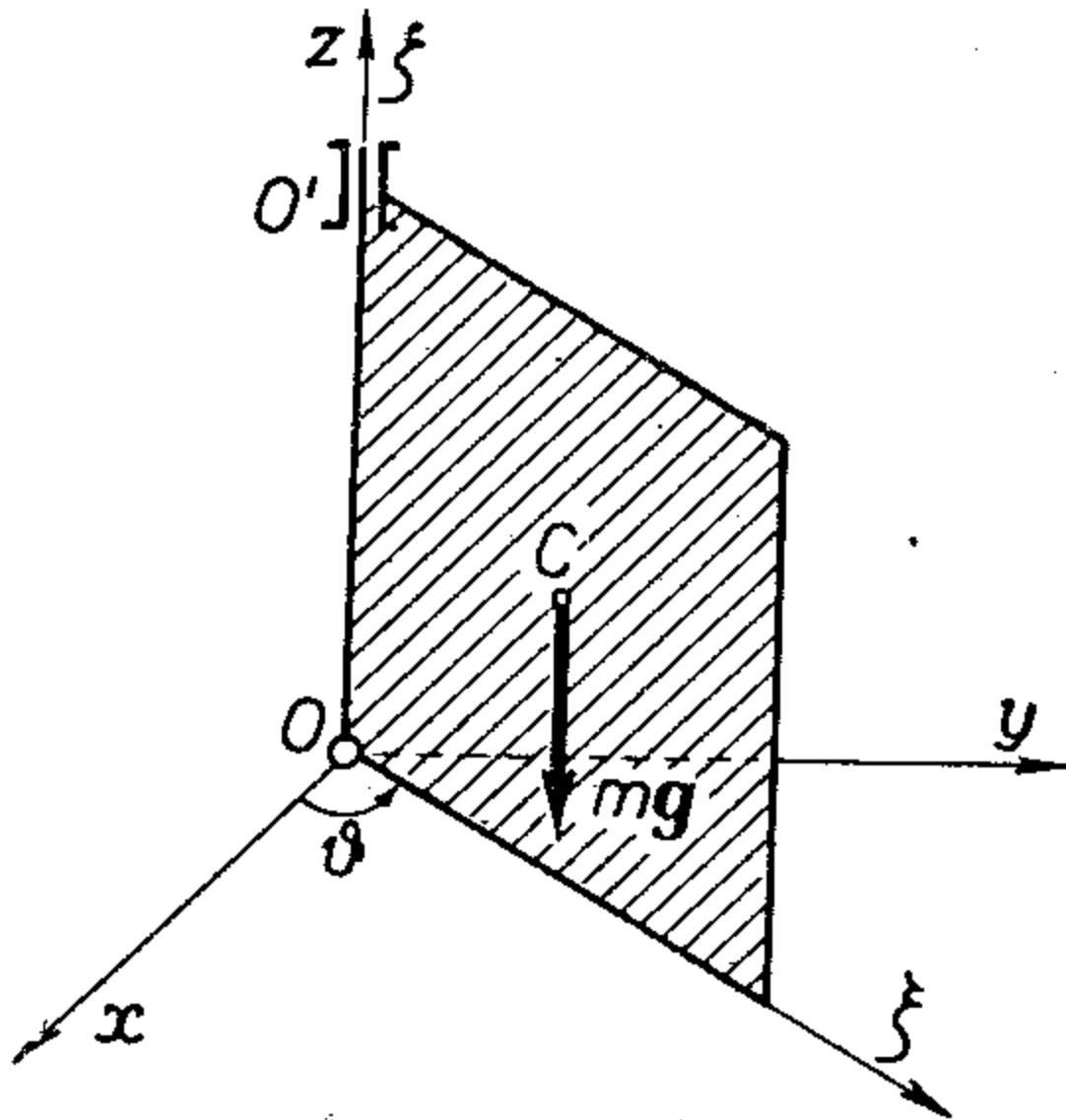
Koordinate aktivne sile su

$$\mathbf{F} = \{0, 0, -mg\},$$

te je moment aktivne sile za osu obrtanja jednak nuli, jer je pravac dejstva sile kolinearan sa osom obrtanja.

Za određivanje reakcija mogu se iskoristiti relacije (3.5.4—14), koje se u uočenom slučaju svode na

$$\begin{aligned} -m \omega^2 x_C &= R_x + R_x', \\ -m \omega^2 y_C &= R_y + R_y', \\ 0 &= -mg + R_z + R_z', \\ -\Pi_{yz} \omega^2 &= L_x - 2a R_y', \\ \Pi_{zx} \omega^2 &= L_y + 2a R_x'. \end{aligned}$$



Slika 162

Iz treće od ovih jednačina nalazi se

$$R_z + R_z' = mg.$$

Preostale koordinate reakcije mogu se naći iz ostale četiri jednačine. Proizvodi inercije ploče su

$$\Pi_{zx} = \frac{\sigma}{\cos \vartheta} \int_0^{2a} \int_0^{2a \cos \vartheta} zx \, dz \, dx = ma^2 \cos \vartheta;$$

$$\Pi_{yz} = \frac{\sigma}{\sin \vartheta} \int_0^{2a} \int_0^{2a \sin \vartheta} yz \, dy \, dz = ma^2 \sin \vartheta,$$

gde je σ gustina ploče a $4a^2\sigma = m$ njena masa.

Za određivanje reakcije se onda mogu napisati jednačine

$$\begin{aligned} -ma \omega^2 \cos \vartheta &= R_x + R_x', \\ -ma \omega^2 \sin \vartheta &= R_y + R_y', \\ ma^2 \omega^2 \sin \vartheta &= 2a R_y', \\ ma^2 \omega^2 \cos \vartheta &= 2a R_x'. \end{aligned}$$

Iz poslednje dve od ovih jednačina nalazi se

$$R_x' = \frac{1}{2} ma \omega^2 \cos \vartheta, \quad R_y' = \frac{1}{2} ma \omega^2 \sin \vartheta.$$

Zamenom ovih vrednosti u prve dve jednačine dobiće se

$$R_x = -\frac{3}{2} ma \omega^2 \cos \vartheta, \quad R_y = -\frac{3}{2} ma \omega^2 \sin \vartheta.$$

2. Ako se neka homogena ploča obrće kao fizičko klatno oko ose upravne na ploču, dokazati da se geometrijsko mesto tačaka vešanja na ploči, pri datoj dužini L redukovanog matematičkog klatna, sastoji iz dva kruga sa centrom u centru inercije ploče. Ako su A i B tačke na tim krugovima (ne na istom) i ako je L' redukovana dužina fizičkog klatna kad se tačka vešanja nalazi na sredini duži $\overline{AB} = 2c$, odrediti krak inercije centralnog momenta inercije ploče za osu upravnu na ploču kao funkciju od L , L' i c .

Moment inercije za osu vešanja u prvobitnoj tački vešanja neka bude

$$I = I^C + ml^2 = m(k^2 + l^2),$$

gde je l rastojanje tačke vešanja od centra inercije C ploče. Ako je L data dužina ekvivalentnog matematičkog klatna, biće

$$L = \frac{I}{ml} = \frac{k^2 + l^2}{l}.$$

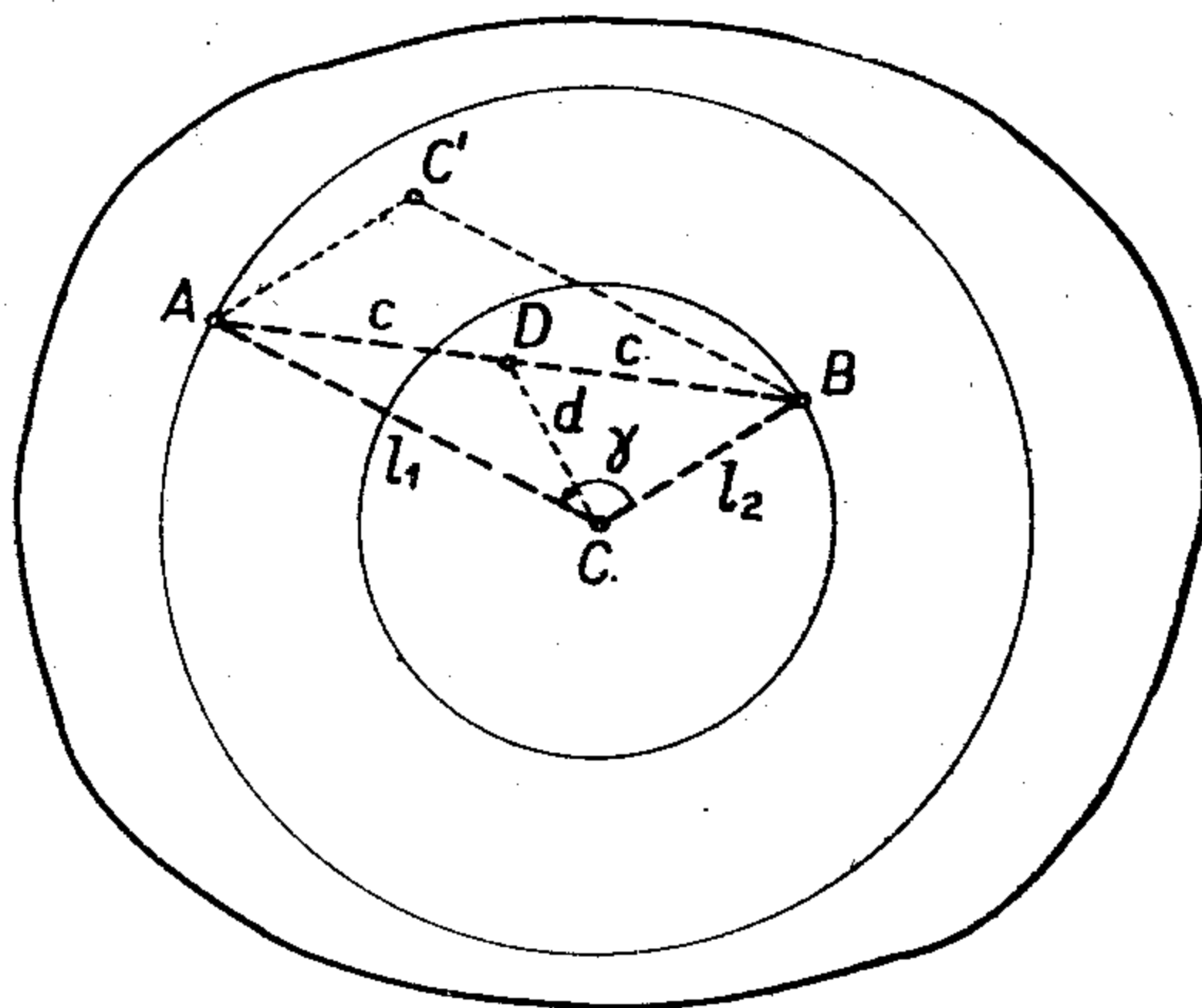
Odatle proističe da je

$$l = \frac{1}{2} (L \pm \sqrt{L^2 - 4k^2}).$$

Prema tome zaista postoje dva koncentrična kruga na ploči čiji se zajednički centar nalazi u centru inercije C , a čiji su poluprečnici

$$l_1 = \frac{1}{2} (L + \sqrt{L^2 - 4k^2}), \quad l_2 = \frac{1}{2} (L - \sqrt{L^2 - 4k^2}),$$

za koje ekvivalentno matematičko klatno ima datu dužinu.



Slika 163

Neka je D sredina duži koja spaja neku tačku A na jednom i B na drugom od tih krugova. Moment inercije za tu tačku je

$$I^D = I^C + md^2,$$

pri čemu je $d = \overline{CD}$ rastojanje tačke D od centra inercije ploče. Ekvivalentno matematičko klatno biće dužine

$$L' = \frac{I^D}{md}$$

Ako se (sl. 163) u ravni ploče nacrtaju paralelogram $ACBC'$ sa stranicama l_1 i l_2 i ako je γ ugao između stranica CA i CB a λ ugao između stranica BC i BC' , prema kosinusnoj teoremi biće

$$(2d)^2 = l_1^2 + l_2^2 - 2l_1l_2 \cos \lambda,$$

$$(2c)^2 = l_1^2 + l_2^2 - 2l_1l_2 \cos \gamma.$$

Međutim je $\lambda = \pi - \gamma$ pa je otuda $\cos \lambda = -\cos \gamma$. Tada se sabiranjem dobiva

$$4(d^2 + c^2) = 2(l_1^2 + l_2^2).$$

Iz obrazaca za poluprečnike l_1 i l_2 imamo

$$l_1^2 + l_2^2 = L^2 - 2k^2,$$

odakle je

$$d^2 = \frac{1}{2} L^2 - k^2 - c^2.$$

Za dužinu L' ekvivalentnog matematičkog klatna u odnosu na tačku vešanja D može se sad napisati obrazac

$$L' = \frac{mk^2 + md^2}{md} = \frac{1}{2} \frac{L^2}{\sqrt{\frac{1}{2} L^2 - k^2 - c^2}}.$$

Odatle se za krak inercije k centralnog momenta inercije $I^C = mk^2$ nalazi

$$k^2 = \frac{1}{L'^2} \left(\frac{1}{2} L^2 - c^2 \right) \left(L'^2 - \frac{1}{2} L^2 + c^2 \right).$$

3. Naći geometrijsko mesto svih osa koje prolaze kroz datu tačku nekog krutog tela, za koje će dužina ekvivalentnog matematičkog klatna imati datu dužinu L .

Neka se u datoj tački O krutog tela ose $Oxyz$ poklapaju sa glavnim osama inercije, tako da su momenti inercije

$$I_x = ma^2, \quad I_y = mb^2, \quad I_z = mc^2$$

glavni momenti za tu tačku. Za ma koju osu $\mathbf{u} = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ momenti inercije u toj tački biće

$$I_u = I_x \alpha^2 + I_y \beta^2 + I_z \gamma^2.$$

Ako je L data duž ekvivalentnog matematičkog klatna, biće

$$L = \frac{I_u}{ml},$$

gde je l rastojanje tačke O od centra inercije tela. Prema tome, može se napisati

$$L = \frac{a\alpha^2 + b\beta^2 + c\gamma^2}{l}.$$

Kosinusi α , β , γ uglova koje osa u gradi sa glavnim osama inercije moraju zadovoljavati ova dva uslova

$$a\alpha^2 + b\beta^2 + c\gamma^2 = Ll,$$

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1.$$

Iz tih uslova nalazi se

$$(a) \quad \alpha^2 = P_1 + P_2\gamma^2, \quad \beta^2 = Q_1 + Q_2\gamma^2,$$

gde je

$$P_1 = \frac{Ll-b}{a-b}, \quad P_2 = \frac{b-c}{a-b}, \quad Q_1 = \frac{Ll-c}{b-a}, \quad Q_2 = \frac{a-c}{b-a}.$$

Jednačina prave u tački O sa koeficijentima pravca α , β , γ je

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma}$$

što se može s obzirom na (a) napisati u obliku

$$\frac{x}{\sqrt{P_1 + P_2\gamma^2}} = \frac{y}{\sqrt{Q_1 + Q_2\gamma^2}} = \frac{z}{\gamma}.$$

Eliminacijom koeficijenta pravca γ dobiće se jednačina traženog geometrijskog mesta

$$Q_1 x^2 - P_1 y^2 - (P_2 Q_1 - P_1 Q_2) z^2 = 0,$$

a to je jednačina konusa sa temenom u datoj tački O .

4. Homogeni valjak gustine σ_1 , poluprečnika R i visine h obrće se oko ose AA' , paralelne osi valjka OO' na rastojanju d od nje. U ravni osa OO' i AA' na normali iz centra C valjka nalazi se centar K homogene lopte gustine σ_2 i poluprečnika r koja je čvrsto vezana sa valjkom. Koliko treba da bude rastojanje $x = \overline{KC}$ pa da osa AA' bude slobodna osa rotacije sistema koji čine valjak i lopta.

$$\text{O d g o v o r:} \quad x = (m_1 + m_2) \frac{d}{m_2}$$

(m_1 i m_2 su mase valjka i lopte).

5. Tanak homogeni štap dužine l i težine G može slobodno da se obrće u vertikalnoj ravni oko horizontalne ose koja prolazi kroz jedan njegov kraj, bez trenja u osloncu. Štap je pušten iz stanja mira u horizontalnom položaju. Odrediti ugaonu brzinu i ugaono ubrzanje štapa u trenutku kad sa horizontom obrazuje ugao ϑ , kao i horizontalnu i vertikalnu komponentu reakcije u tom položaju.

$$\text{O d g o v o r:} \quad \omega = \left(\frac{3g}{l} \sin \vartheta \right)^{1/2}, \quad \varepsilon = \frac{3g}{2l} \cos \vartheta;$$

$$R_{\text{hor.}} = -\frac{9}{8} G \sin 2\vartheta, \quad R_{\text{vert.}} = -\frac{1}{4} G (10 - 9 \cos^2 \vartheta).$$

6. Dato je fizičko klatno mase m čiji je centar inercije udaljen od ose obrtanja za h i kod koga je dat krak ρ centralnog momenta inercije. Odrediti promenu ΔL dužine redukovanog klatna, ako se datom fizičkom klatnu doda masa μ na rastojanju h od ose obrtanja.

$$\text{O d g o v o r:} \quad \Delta L = \frac{\mu}{h} \cdot \frac{\rho^2 - h^2}{m + \mu}$$

7. Homogena teška duž mase m i dužine $2a$ može slobodno da se obrće oko horizontalne nepokretne ose koja prolazi kroz jedan njen kraj O . Duži je u početnom trenutku saopštena početna ugaona brzina $\omega = \sqrt{3g/a}$, a duž je u tom trenutku visila vertikalno naniže. Naći konačnu jednačinu kretanja.

Odgovor:
$$\vartheta = \pi - 4 \operatorname{arctg} e^{-\frac{1}{2}t \sqrt{\frac{3g}{a}}}$$

3.5.5. Kretanje krutog tela oko nepokretne tačke

Pri kretanju krutog tela sa jednom utvrđenom tačkom (sferno kretanje) uvek je moguće tu tačku uzeti jednovremeno za početak i pokretnog i nepokretnog koordinatnog sistema. Ako se sem toga za ose $A\xi\eta\zeta$ pokretnog koordinatnog sistema uzmu glavne ose inercije za nepokretnu tačku A , kinetička energija tela biće određena obrascem (3.5.1.1 — 22) u kome je stavljeno $\mathbf{v}_A = \mathbf{0}$,

$$(1) \quad 2T = \omega^2 I_\omega^A = I_\xi^A p^2 + I_\eta^A q^2 + I_\zeta^A r^2.$$

Vektorske diferencijalne jednačine kretanja (3.5.2 — 2 i 3) svode se u slučaju obrtanja tela oko nepokretne tačke $A \equiv O$ na oblik

$$(2) \quad \frac{d}{dt}(\operatorname{grad}_{\mathbf{v}_A} T) = \mathbf{F} + \mathbf{R},$$

$$(3) \quad \frac{d}{dt}(\operatorname{grad}_\omega T) = \mathbf{L}^A,$$

gde je \mathbf{L}^A moment aktivnih sila i sila reakcije u odnosu na nepokretnu tačku.

Iz obrasca (3.5.1.2 — 14) se za $\mathbf{v}_A = \mathbf{0}$ dobiva

$$(4) \quad \operatorname{grad}_{\mathbf{v}_A} T = m \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_C = m \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_C,$$

jer je za sferno kretanje prema (1.9.4 — 1) $\mathbf{r}_C = \mathbf{r}_C$. Unošenjem ovoga u (2) dobiće se za određivanje reakcije obrazac

$$(5) \quad \mathbf{R} = -\mathbf{F} + m(\boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r}_C + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_C),$$

gde je $\boldsymbol{\varepsilon} = \dot{\boldsymbol{\omega}}$ ugaono ubrzanje, \mathbf{r}_C vektor položaja a \mathbf{v}_C vektor brzine centra inercije tela. Komponenta $\mathbf{S} = -\mathbf{F}$ predstavlja statičku reakciju veze dok preostali deo relacije (5) predstavlja dinamičku reakciju.

Iz (1) se diferencijaljenjem dobiva da je

$$\operatorname{grad}_\omega T = \{I_\xi^A p, I_\eta^A q, I_\zeta^A r\}$$

pa se projiciranjem vektorske diferencijalne jednačine kretanja (3) na ose pokretnog koordinatnog sistema dobivaju tri skalarne jednačine (3.5.2.1 — 5) u obliku

$$I_\xi \frac{dp}{dt} - (I_\eta - I_\zeta) qr = L_\xi,$$

$$(6) \quad I_\eta \frac{dq}{dt} - (I_\zeta - I_\xi) rp = L_\eta,$$

$$I_\zeta \frac{dr}{dt} - (I_\xi - I_\eta) pq = L_\zeta,$$

koje se zovu *Ojlerove jednačine obrtanja krutog tela oko nepokretne tačke*. U jednačinama (6) izostavljena je oznaka tačke u odnosu na koju se određuju momenti jer se podrazumeva da se svi momenti odnose na nepokretnu tačku tela.

Jednačine (6) sadrže tri nepoznate koordinate p, q, r ugaone brzine koje se iz ovih jednačina mogu odrediti kao funkcije vremena. Momenti inercije I_ξ, I_η, I_ζ su pri tome konstantni. Međutim, momenti sile L_ξ, L_η, L_ζ nisu u opštem slučaju konstantni i mogu zavistiti od vremena, položaja tela i ugaone brzine. I koordinate ugaone brzine i položaj tela koje se obrće oko nepokretne tačke funkcije su Ojlerovih uglova, tako da jednačine (6) u stvari sadrže šest nepoznatih funkcija vremena, $p, q, r, \psi, \varphi, \vartheta$. Ako se diferencijalnim jednačinama kretanja (6) dodadu veze (1.11.1—27) između koordinata ugaone brzine i Ojlerovih uglova, onda se pri datom početnom položaju i početnoj ugaonoj brzini za date aktivne sile mogu naći konačne jednačine kretanja

$$\psi = \psi(t), \quad \varphi = \varphi(t), \quad \vartheta = \vartheta(t).$$

Pokazano je da se u opštem slučaju za tela sa proizvoljnim rasporedom mase, proizvoljno izabranom nepokretnom tačkom i u polju proizvoljnih sila problem obrtanja tela oko nepokretne tačke ne može rešiti u konačnom obliku, niti se mogu naći opšta rešenja, tj. rešenja koja ne zavise od specijalnog izbora početnih uslova. U slučaju teškog tela postoje svega tri slučaja u kojima se mogu formirati algebarski integrali i naći opšta rešenja nezavisna od početnih uslova. To su slučajevi poznati pod imenom Ojlerov, Lagranžev i Sofije Kovalevske. Sem ta tri slučaja postoje i neki specijalni slučajevi u kojima su nađeni partikularni integrali, zavisni od specijalnog rasporeda masa i posebno izabranih početnih uslova.

Za teško telo koje se obrće oko nepokretne tačke A moment aktivne sile $\mathbf{F} = m\mathbf{g}$ za tačku A je vektor (C je centar mase)

$$\mathbf{L}^A = \overrightarrow{AC} \times \mathbf{F}.$$

Ako je osa Az nepokretnog koordinatnog sistema orijentisana vertikalno naviše, koordinate aktivne sile u pokretnom sistemu $A\xi\eta\zeta$ biće

$$\mathbf{F} = -mg \{a_{31}, a_{32}, a_{33}\}.$$

Ako je sem toga

$$\overrightarrow{AC} = \{\xi_C, \eta_C, \zeta_C\},$$

koordinate momenta \mathbf{L}^A biće

$$(7) \quad \mathbf{L}^A = mg \{\zeta_C a_{32} - \eta_C a_{33}; \xi_C a_{33} - \zeta_C a_{31}; \eta_C a_{31} - \xi_C a_{32}\}.$$

Za ose pokretnog koordinatnog sistema mogu se uzeti glavne ose inercije u odnosu na nepokretnu tačku. Tada će diferencijalne jednačine kretanja (6) biti

$$(8) \quad \begin{aligned} I_\xi \frac{dp}{dt} - (I_\eta - I_\zeta) qr &= mg (\zeta_C a_{32} - \eta_C a_{33}), \\ I_\eta \frac{dq}{dt} - (I_\zeta - I_\xi) rp &= mg (\xi_C a_{33} - \zeta_C a_{31}), \\ I_\zeta \frac{dr}{dt} - (I_\xi - I_\eta) pq &= mg (\eta_C a_{31} - \xi_C a_{32}). \end{aligned}$$

Kad je centar mase tela u nepokretnoj tački, ove su jednačine poznate pod imenom *Ojlerove jednačine za kretanje tela oko centra masa*.

Pri tome telo ne mora biti teško, već se može kretati pod dejstvom ma kakvih aktivnih sila.

Kosinusi uglova a_{31} , a_{32} , a_{33} su funkcije Ojlerovih uglova. Za nalaženje konačnih jednačina kretanja potrebno je izvršiti dve integracije, jednu za nalaženje koordinata ugaone brzine kao funkcija vremena i drugu za nalaženje samih Ojlerovih uglova kao funkcija vremena. Pri tome treba voditi računa da kosinusi uglova koje $A\xi\eta\zeta$ ose obrazuju sa osom Az nepokretnog koordinatnog sistema zadovoljavaju diferencijalne relacije koje se dobivaju projiciranjem trećeg obrasca (1.11.1 — 12) na ose pokretnog koordinatnog sistema,

$$(9) \quad \dot{a}_{31} = a_{32}r - a_{33}q; \quad \dot{a}_{32} = a_{33}p - a_{31}r; \quad \dot{a}_{33} = a_{31}q - a_{32}p.$$

3.5.5.1. Ojlerov slučaj kretanja tela oko nepokretne tačke

U Ojlerovom slučaju teško telo se obrće oko svog nepokretnog težišta. Diferencijalne jednačine kretanja (3.5.2.1 — 15) odn. (3.5.5 — 8) tada postaju (jer glavne centralne momente inercije obeležavamo A , B , C)

$$(1) \quad \begin{aligned} A\dot{p} - (B-C)qr &= 0, \\ B\dot{q} - (C-A)rp &= 0, \\ C\dot{r} - (A-B)pq &= 0. \end{aligned}$$

Ove jednačine dopuštaju dva prva integrala, integral energije i integral kinetičkog momenta. Kinetička energija tela je

$$(2) \quad T = \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2).$$

Ako se jednačine (1) pomnože redom sa p , q , r , i saberu, dobiće se

$$A p\dot{p} + B q\dot{q} + C r\dot{r} = 0,$$

a pošto su A , B i C konstante (kao glavni centralni momenti inercije) ova se relacija može neposredno integraliti i dobiće se

$$(3) \quad Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = \text{const.} = h,$$

što predstavlja integral energije.

Pošto se nepokretna tačka tela poklapa sa centrom inercije zakon kinetičkog momenta daje vektorsku jednačinu

$$\dot{\mathbf{I}}^A = 0,$$

iz koje proističe vektorski integral kinetičkog momenta,

$$(4) \quad \mathbf{I} = \mathbf{G} = \text{const.}$$

Međutim, iz (1) se može i neposredno dobiti skalarni integral kinetičkog momenta u obliku

$$(5) \quad I^2 = G^2,$$

ako se jednačine (1) redom pomnože sa Ap , Bq i Cr i saberu, a zatim izvrši integracija,

$$(6) \quad A^2 p^2 + B^2 q^2 + C^2 r^2 = G^2 = \text{const.}$$

Integrali (3) i (6) su *osnovni integrali* diferencijalnih jednačina kretanja (1). Uobičajeno je da se nezavisne konstante integracije h i G izražavaju pomoću *Grinhilovih* (Greenhill) *konstanti* D i μ ,

$$(7) \quad h = D \mu^2, \quad G^2 = D^3 \mu^2,$$

pa se osnovni integrali mogu napisati

$$(8) \quad Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = D \mu^2,$$

$$(9) \quad A^2 p^2 + B^2 q^2 + C^2 r^2 = D^2 \mu^2.$$

Konstanta D ima dimenziju momenta inercije a μ ugaone brzine.

Ako se prvim integralima (8) i (9) doda još jednačina

$$(10) \quad p^2 + q^2 + r^2 = \omega^2,$$

iz tri jednačine (8), (9) i (10) mogu se odrediti kvadrati koordinata ugaone brzine p^2 , q^2 i r^2 ,

$$(11) \quad \begin{aligned} p^2 &= \frac{BC}{(A-B)(A-C)} (\omega^2 - \omega_1^2), \\ q^2 &= \frac{CA}{(B-C)(B-A)} (\omega^2 - \omega_2^2), \\ r^2 &= \frac{AB}{(C-A)(C-B)} (\omega^2 - \omega_3^2). \end{aligned}$$

Ovde je

$$\omega_1^2 = \frac{D \mu^2}{BC} (B + C - D); \quad \omega_2^2 = \frac{D \mu^2}{CA} (C + A - D); \quad \omega_3^2 = \frac{D \mu^2}{AB} (A + B - D).$$

Ako se pretpostavi da su momenti inercije A , B i C označeni tako da bude $A > B > C$, svi koeficijenti u obrascima (11)

$$(12) \quad \alpha^2 = \frac{BC}{(A-B)(A-C)}, \quad \beta^2 = \frac{CA}{(B-C)(B-A)}, \quad \gamma^2 = \frac{AB}{(C-A)(C-B)}$$

su pozitivni. Sem toga i veličine p^2 , q^2 i r^2 su pozitivne pa moraju biti pozitivne i razlike $\omega^2 - \omega_i^2$ ($i = 1, 2, 3$).

Iz Ojlerovih jednačina kretanja (1) nalazi se

$$\dot{p} = \frac{B-C}{A} qr, \quad \dot{q} = \frac{C-A}{B} rp, \quad \dot{r} = \frac{A-B}{C} pq.$$

Množenjem ovih relacija redom sa p , q i r i sabiranjem dobiće se

$$(13) \quad \begin{aligned} p\dot{p} + q\dot{q} + r\dot{r} &= \omega \frac{d\omega}{dt} = \left(\frac{B-C}{A} + \frac{C-A}{B} + \frac{A-B}{C} \right) pqr \\ &= \frac{(A-B)(B-C)(C-A)}{ABC} pqr, \end{aligned}$$

a kako je iz (11), kad se iskoriste oznake (12),

$$p^2 q^2 r^2 = \alpha^2 \beta^2 \gamma^2 (\omega^2 - \omega_1^2) (\omega^2 - \omega_2^2) (\omega^2 - \omega_3^2),$$

relacija (13) će se svesti na jednostavan izraz

$$(14) \quad \frac{d\omega^2}{dt} = 2 \sqrt{(\omega^2 - \omega_1^2)(\omega^2 - \omega_2^2)(\omega^2 - \omega_3^2)}.$$

Razdvajanjem promenljivih iz relacije (14) dobiće se vreme kao funkcija kvadrata ugaone brzine,

$$(15) \quad 2(t - t_0) = \int_{\omega_0^2}^{\omega^2} \frac{d\omega^2}{[(\omega^2 - \omega_1^2)(\omega^2 - \omega_2^2)(\omega^2 - \omega_3^2)]^{1/2}}.$$

Sa desne strane ovog izraza nalazi se Vajerštrasov (Weierstrass) eliptički integral. Inverzijom relacije (15) dobiće se ω kao funkcija vremena

$$(16) \quad \omega = \omega(t).$$

Unošenjem ove vrednosti u (11) dobiće se koordinate ugaone brzine kao funkcije vremena, a zatim ako se iskoriste veze (1.11.1 — 27) između koordinata ugaone brzine i Ojlerovih uglova i izvrši još jedna integracija dobiće se najzad i konačne jednačine kretanja.

Ojlerov slučaj ne važi samo za teško telo već uopšte i za telo koje se kreće po inerciji oko svog centra inercije. U tom slučaju su diferencijalne jednačine kretanja (1), ali se razlika javlja u sili reakcije. U slučaju teškog tela sila reakcije je prema (3.5.4 — 5) $\mathbf{R} = -mg$, jer su \mathbf{r}_C i \mathbf{v}_C jednaki nuli, dok pri kretanju po inerciji je $\mathbf{R} = \mathbf{0}$.

Najzad uopšte kad rezultanta spoljašnjih sila (bez obzira na njenu prirodu) prolazi kroz nepokretnu tačku, jednačine (1) određuju kretanje ekvivalentno kretanju u Ojlerovom slučaju, samo što se mesto glavnih centralnih momenata inercije pojavljuju u računu glavni momenti inercije za ose kroz uočenu nepokretnu tačku.

3.5.5.2. Lagranžev slučaj kretanja tela oko nepokretne tačke

Drugi slučaj obrtanja teškog tela oko nepokretne tačke za koji postoje opšta rešenja nezavisna od izbora početnih uslova jeste *Lagranžev slučaj* za koji je

- 1) elipsoid inercije za nepokretnu tačku obrtni elipsoid i
- 2) težište tela nalazi se na osi simetrije elipsoida inercije.

Ako se $A\zeta$ -osa uzme za osu simetrije elipsoida inercije (A je nepokretna tačka tela), dok su ose $A\xi$ i $A\eta$ ma koje dve uzajamno upravne ose u meridijanskoj ravni elipsoida, ose $A\xi\eta\zeta$ poklapaće se sa glavnim osama inercije u nepokretnoj tački. Prema prvoj pretpostavci biće u Lagranževom slučaju $I_\xi = I_\eta$. Centar inercije tela nalaziće se na $A\zeta$ -osi i imaće koordinate $(0, 0, l)$. Smer $A\zeta$ -ose može se uvek tako odabrati da bude $\zeta_C = l > 0$. Diferencijalne jednačine kretanja (3.5.5 — 8) svode se u ovom slučaju na jednačine

$$(1) \quad \begin{aligned} I_\xi \dot{p} - (I_\xi - I_\zeta) qr &= mgl a_{32} \\ I_\xi \dot{q} + (I_\xi - I_\zeta) rp &= -mgl a_{31} \\ \dot{r} &= 0. \end{aligned}$$

Iz treće jednačine (1) neposredno se dobiva integral

$$(2) \quad r = r_0 = \text{const.},$$

pa se mogu uvesti konstante

$$(3) \quad \frac{I_{\xi} - I_{\zeta}}{I_{\xi}} r = a, \quad \frac{mgl}{I_{\xi}} = b.$$

Pomoću tih konstanta diferencijalne jednačine kretanja (1) mogu se napisati u obliku

$$(4) \quad \begin{aligned} \dot{p} - aq &= ba_{32}, \\ \dot{q} + ap &= -ba_{31}, \\ \dot{r} &= 0. \end{aligned}$$

Na težište tela dejstvuje sila $\mathbf{F} = m\mathbf{g} = -mg\mathbf{k}$, kad se nepokretna z -osa orijentiše vertikalno naviše. Funkcija sile će biti

$$(5) \quad U = -mgz_C,$$

a prema (1.8.2 — 6) može se izraziti obrascem

$$(6) \quad U = -mgl a_{33}.$$

Moment sile \mathbf{F} za osu Oz jednak je nuli pa stoga postoji integral kinetičkog momenta za tu osu

$$(7) \quad \mathbf{l} \cdot \mathbf{k} = \Gamma_1 = \text{const.}$$

Prema tome u Lagranževom slučaju kretanja krutog tela oko nepokretne tačke postoje tri prva integrala, integral energije

$$(8) \quad I_{\xi}(p^2 + q^2) + I_{\zeta}r^2 + mgl a_{33} = h_1,$$

integral kinetičkog momenta za Az -osu koji se može napisati u obliku

$$(9) \quad I_{\xi}pa_{31} + I_{\xi}qa_{32} + I_{\zeta}ra_{33} = \Gamma_1$$

i integral (2) koji se neposredno dobiva iz treće jednačine kretanja (1),

$$(10) \quad r = r_0.$$

Ako se stavi

$$r_1 = \frac{I_{\zeta}}{I_{\xi}} r_0, \quad b = \frac{mgl}{I_{\xi}}, \quad \Gamma = \frac{\Gamma_1}{I_{\xi}}, \quad h = \frac{h_1 - I_{\zeta}r_0^2}{I_{\xi}},$$

ta tri prva integrala mogu se napisati u uobičajenom obliku

$$(11) \quad \begin{aligned} p^2 + q^2 &= -2ba_{33} + h, \\ pa_{31} + qa_{32} + r_1 a_{33} &= \Gamma \\ r &= r_1 + a, \end{aligned}$$

gde su sad h , Γ i r_1 proizvoljne konstante integracije koje se određuju iz početnih uslova.

Pored p , q i r u jednačinama (11) nalaze se i kosinusi pravaca a_{31} , a_{32} i a_{33} pa radi određivanja tih kosinusa treba uzeti u obzir i obrasce (3.5.5 — 9), gde je sad $r = r_1 = \text{const.}$

Najzad, kad se p , q i r i kosinusi pravaca a_{31} , a_{32} i a_{33} izraze pomoću Ojlerovih uglova φ , ψ i ϑ dobivaju se naredne jednačine za određivanje Ojlerovih uglova u ovom slučaju.

$$(12) \quad \begin{aligned} \dot{\psi}u + \dot{\varphi} &= r_1, \\ \dot{\psi}(1-u^2) + (r_1-a)u &= \Gamma, \\ \dot{\vartheta}^2 + \dot{\psi}^2(1-u^2) &= -2bu + h, \end{aligned}$$

gde je $u = \cos \vartheta$.

3.5.5.3. Kretanje krutog tela oko nepokretne tačke u slučaju S. Kovalevske

Treći slučaj kretanja teškog krutog tela oko nepokretne tačke u kome postoji opšte rešenje nezavisno od posebnog izbora početnih uslova jeste *slučaj Sofije Kovalevske*. U ovom slučaju

- 1) elipsoid inercije za nepokretnu tačku tela je obrtni elipsoid,
- 2) moment inercije tela za osu simetrije jednak je polovini vrednosti momenta inercije za osu u ekvatorskoj ravni elipsoida i
- 3) težište tela nalazi se u ekvatorskoj ravni elipsoida inercije.

Ako se osa simetrije elipsoida inercije uzme za $A\zeta$ -osu, a osa $A\xi$ se uzme tako da prolazi kroz težište tela, prema uslovu 1) i 2) je

$$(1) \quad I_\xi = I_\eta = 2 I_\zeta,$$

a iz uslova 3) je

$$(2) \quad \xi_C = l > 0, \quad \eta_C = \zeta_C = 0,$$

ako se osa $A\xi$ orijentiše od nepokretne tačke ka težištu.

Diferencijalne jednačine kretanja (3.5.4 — 8) u ovom slučaju glasiće

$$(3) \quad \begin{aligned} 2\dot{p} - qr &= 0, \\ 2\dot{q} + rp &= \frac{mgl}{I_\zeta} a_{33}, \\ \dot{r} &= -\frac{mgl}{I_\zeta} a_{32}. \end{aligned}$$

I u slučaju S. Kovalevske postoje integral energije i integral kinetičkog momenta za vertikalnu z -osu. Funkcija sile je $U = -mgz_C$, a prema (1.8.2 — 6) može se napisati

$$(4) \quad U = -mgl a_{31}.$$

Integral energije biće onda

$$(5) \quad 2(p^2 + q^2) + r^2 = -2 \frac{mgl}{I_\zeta} a_{31} + h,$$

a integral kinetičkog momenta, slično kao i u Lagranževom slučaju (3.5.5.2 — 9),

$$(6) \quad 2(pa_{31} + qa_{32}) + ra_{33} = \Gamma.$$

Pored ovih integrala postoji i algebarski integral

$$(7) \quad a_{31}^2 + a_{32}^2 + a_{33}^2 = 1,$$

koji se prilikom integraljenja mora uzeti u obzir.

Integral (7) (tzv. integral kosinusa) ne uvodi nikakvu integracionu konstantu. Dopunska konstanta koja odgovara tom integralu može se uvesti tek pošto se odrede veličine p , q , r , a_{31} , a_{32} i a_{33} kao funkcije vremena. U tu svrhu pored tri integrala (5), (6) i (7) potrebno je uvesti još jedan algebarski integral. Osnovna ideja S. Kovalevske za rešavanje ovog problema obrtanja tela oko nepomične tačke sastojala se u korišćenju Jakobijeve teorije množioca, u koju se ovde ne možemo upuštati (vidi A. Bilimović, Racionalna mehanika II — mehanika sistema, 5.6, str. 218). Naime, za potpunu integraciju sistema od n linearnih diferencijalnih jednačina potrebno je $n-1$ integrala. Ako je poznato $n-2$ integrala, primenom Jakobijeve teoreme poslednjeg množioca može se formirati još jedan integral i time problem dovesti do rešenja kvadraturama. Za određivanje navedenih šest nepoznatih funkcija na raspolaganju su šest linearnih diferencijalnih jednačina, tri jednačine kretanja (3) i tri jednačine (3.5.5 — 9) dobivene projiciranjem na ose pokretnog koordinatnog sistema relacije $\dot{\mathbf{k}} = -\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{k}$. Za tih šest jednačina poznata su tri integrala, (5), (6) i (7) pa ako se može pronaći još jedan integral, onda se može primeniti Jakobijeva teorema i izvesti peti integral, a posle toga potpuno rešenje problema dobiće se kvadraturama. Sofija Kovalevska pronašla je taj dopunski integral u obliku

$$(8) \quad (p^2 - q^2 - k^2 a_{31})^2 + (2pq - k^2 a_{32})^2 = \text{const.}$$

čime je praktično problem rešen.

Ovde ćemo pokazati još samo na koji je način Sofija Kovalevska došla do svog integrala, jer je potpuna integracija jednačina ovog kretanja vrlo složena.

Naime, ako se druga od jednačina (3) pomnoži imaginarnom jedinicom i i doda prvoj jednačini, dobiće se

$$2 \frac{d}{dt} (p + iq) = -ir(p + iq) + ik^2 a_{33},$$

gde je još stavljeno

$$\frac{mgl}{I_{\zeta}} = k^2.$$

Posle množenja prethodne jednačine izrazom $p + iq$ dobiva se

$$(9) \quad \frac{d}{dt} (p + iq)^2 = -ir(p + iq)^2 + ik^2 a_{33} (p + iq).$$

Sa druge strane na sličan način se, množenjem druge od jednačina (3.5.5 — 9) imaginarnom jedinicom i i sabiranjem sa prvom, izvodi jednačina

$$\frac{d}{dt} (a_{31} + ia_{32}) = -ir(a_{31} + ia_{32}) + ia_{33} (p + iq).$$

Ova jednačina pomnožena sa k^2 oduzme se od jednačine (9) pa se dobije

$$(10) \quad \frac{d\Psi}{dt} = -ir\Psi,$$

gde smo stavili

$$\Psi = (p + iq)^2 - k^2(a_{31} + ia_{32}).$$

Kad se napiše konjugovano kompleksni oblik jednačine (10), tj.

$$(11) \quad \frac{d\bar{\Psi}}{dt} = ir \bar{\Psi},$$

gde je

$$\bar{\Psi} = (p - iq)^2 - k^2(a_{31} - ia_{32}),$$

onda se množenjem jednačine (10) sa $\bar{\Psi}$ a jednačine (11) sa Ψ i sabiranjem dobiva

$$\frac{d}{dt} (\Psi \bar{\Psi}) = 0,$$

a odatle je

$$\Psi \bar{\Psi} = [(p + iq)^2 - k^2(a_{31} + ia_{32})] [(p - iq)^2 - k^2(a_{31} - ia_{32})] = \text{const.}$$

a to je u stvari integral (8) Sofije Kovalevske, što nije teško prostim izračunavanjem ovog izraza potvrditi.

3.5.6. Giroskop

Kruto telo koje se obrće oko nepokretne tačke O u kojoj mu je elipsoid inercije rotacioni zove se *giroskop*. Obrtna osa tog elipsoida je *osa giroskopa*. Ona se zove i *figurna osa*, jer svako homogeno aksijalno simetrično kruto telo, koje se obrće oko neke tačke svoje ose simetrije, ispunjava prethodne uslove i predstavlja *giroskop (čigru)*. Pokretni koordinatni sistem $O\xi\eta\zeta$ se obično postavlja tako da mu se osa $O\zeta$ poklapa sa osom giroskopa, a ostale dve ose $O\xi$ i $O\eta$ da stoje ma kako u ekvatorskoj ravni (ravni kroz O normalnoj na osi giroskopa), ali da budu upravne. Nepokretni sistem pravougljih osa $Oxyz$ postavlja se podesno prema samom problemu. Ekvatorski momenti inercije (oni su glavni ali ne moraju biti i centralni) biće konstantni i jednaki $I_\xi = I_\eta$, a meridijanski moment inercije I_ζ , koji je takođe konstantan, može od njih biti različit i po pravilu je u najvažnijim primenama najveći. Ako su svi momenti inercije jednaki, elipsoid inercije se pretvara u sferu i *giroskop je sferni*.

Pored ose giroskopa, pri njegovom kretanju, u svakom trenutku kroz nepokretnu tačku O prolazi i *trenutna osa rotacije* tela (određena vektorom ω trenutne ugaone brzine) i tzv. *kinetička osa* (određena vektorom \mathbf{M} kinetičkog momenta tela). Ove tri ose kod giroskopa uvek leže u istoj ravni, jer je (\mathbf{v} je jedinični vektor ose $O\zeta$)

$$(1) \quad \mathbf{M} = I_\xi \omega + (I_\zeta - I_\xi) r \mathbf{v}.$$

Tačnost ovog tvrđenja nije teško dokazati. Znamo da je parcijalni gradijent $\text{grad}_\omega T$ kinetičke energije krutog tela, koje se obrće oko nepokretne tačke O , po trenutnoj ugaonoj brzini (3.5.5 — 1) jednak kinetičkom momentu \mathbf{M} krutog tela u odnosu na tačku O , tj.

$$\text{grad}_\omega T = \mathbf{M}.$$

Kako su u našem slučaju ξ , η i ζ glavne ose inercije, biće kinetička energija

$$2T = I_\xi p^2 + I_\eta q^2 + I_\zeta r^2,$$

a pošto je ovde po pretpostavci $I_\eta = I_\xi$, može se napisati

$$(2) \quad 2T = I_\xi(p^2 + q^2) + I_\zeta r^2.$$

Prema tome biće

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \text{grad}_\omega T = I_\xi p \boldsymbol{\lambda} + I_\xi q \boldsymbol{\mu} + I_\zeta r \boldsymbol{\nu} \\ &= I_\xi(p \boldsymbol{\lambda} + q \boldsymbol{\mu} + r \boldsymbol{\nu}) + (I_\zeta - I_\xi) r \boldsymbol{\nu} \\ &= I_\xi \boldsymbol{\omega} + (I_\zeta - I_\xi) r \boldsymbol{\nu}, \end{aligned}$$

što je i trebalo dokazati.

Kad je teško telo (giroskop) utvrđeno u težištu ili uopšte kad na kruto telo dejstvuju sile čiji je glavni (rezultantni) moment u odnosu na tačku obrtanja jednak nuli, onda se radi o tzv. *uravnoteženom giroskopu*. U tom slučaju, na osnovu zakona kinetičkog momenta krutog tela za nepokretni pol (3.5.2 — 4), biće vektor kinetičkog momenta konstantan

$$(3) \quad \mathbf{M} = \mathbf{G} = \text{const.}$$

Ovaj konstantni kinetički moment uravnoteženog giroskopa obrazuje stalan ugao sa figurnom osom i sa trenutnom osom rotacije. Da bi smo ovo dokazali postavimo osu Oz nepokretnog triedra u pravac i smer stalne kinetičke ose giroskopa. Ojlerov ugao između ose Oz i ose giroskopa $O\zeta$, kao ugao nutacije, obeležićemo sa ϑ i pokazati da je on konstantan. I zaista iz treće Ojlerove jednačine obrtanja krutog tela oko nepokretne tačke (3.5.4.1. — 1) dobiva se u ovom slučaju ($A = B$, ose $O\xi\eta\zeta$ su sad ne samo glavne već i centralne ose inercije pa ćemo po običaju glavne centralne momente inercije obeležavati sa A , B i C),

$$C \frac{dr}{dt} = 0.$$

Kako je C konstantno odavde proističe da je

$$(4) \quad r = r_0 = \text{const.}$$

Sa druge strane izraz za kinetički moment

$$(5) \quad \mathbf{G} = Ap \boldsymbol{\lambda} + Aq \boldsymbol{\mu} + Cr \boldsymbol{\nu}$$

pomnožen skalarno jediničnim vektorom $\boldsymbol{\nu}$ ose $O\zeta$ daje

$$(6) \quad \mathbf{G} \cdot \boldsymbol{\nu} = G \cos \vartheta = Cr,$$

a odatle je

$$\cos \vartheta = \frac{Cr}{G} = \text{const.}$$

pa je

$$(7) \quad \vartheta = \vartheta_0,$$

tj. ugao nutacije je zaista konstantan.

Da kinetički moment ovde obrazuje stalan ugao i sa vektorom $\boldsymbol{\omega}$ trenutne ugaone brzine u toku kretanja uviđa se na ovaj način. Slučaj uravnoteženog giroskopa odgovara Ojlerovom slučaju obrtanja krutog tela, pa stoga postoji integral energije, koji pri usvojenim pretpostavkama ima oblik

$$(8) \quad \mathbf{G} \cdot \boldsymbol{\omega} = G \omega \cos \alpha = A(p^2 + q^2) + Cr^2 = h,$$

gde je h integraciona konstanta, a sa α je obeležen ugao koji kinetički moment obrazuje sa trenutnom osom obrtanja. Iz jednačine (8) se vidi s jedne strane da će s obzirom na $r = r_0$ biti i $p^2 + q^2 = \text{const.}$ što pokazuje da je intenzitet ω trenutne ugaone brzine konstantan. Sa druge strane je onda stoga

$$\cos \alpha = \text{const.}$$

pa odatle proističe

$$(9) \quad \alpha = \alpha_0.$$

Tada u toku kretanja figurna osa i trenutna osa rotacije opisuju kao aksoide kružne konusne površi sa vrhom u tački O , pri čemu se pokretni aksoid figurene ose kotrlja bez klizanja po nepokretnom aksoidu trenutne ose rotacije. Ovakvo kretanje giroskopa zove se *regularna precesija* i kinetička osa je *precesiona osa*.

Videli smo da je kod uravnoteženog giroskopa ugao nutacije konstantan. Ostaje još da se odredi ugao precesije ψ i ugao sopstvene rotacije ϑ , pri čemu je ψ ugao između stalne ose Ox i linije čvorova po kojoj se ovde seku ekvatorska ravan giroskopa i ravan upravna na stalnoj osi Oz u tački O .

Radi određivanja precesije uočimo npr. obrazac za određivanje projekcije q trenutne ugaone brzine na osu $O\eta$ (jedinični vektor μ), koji glasi (1.11.1—27)

$$q = \dot{\psi} \cos \varphi \sin \vartheta - \dot{\vartheta} \sin \varphi$$

a koji se u našem slučaju ($\dot{\vartheta} = 0$) svodi na

$$(10) \quad q = \dot{\psi} \cos \varphi \sin \vartheta.$$

Kad se uzme u obzir da smo vektor \mathbf{G} uzeli u pravcu i smeru z -ose, može se s obzirom na (5) napisati

$$(11) \quad \mathbf{G} = G \mathbf{k} = A p \boldsymbol{\lambda} + A q \boldsymbol{\mu} + C r \boldsymbol{\nu}.$$

Odavde se skalarnim množenjem jediničnim vektorom $\boldsymbol{\mu}$ dobiva

$$G (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\mu}) = A q.$$

Međutim, pošto je (1.8.1—3)

$$\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\mu} = a_{32} = \cos \varphi \sin \vartheta$$

može se s obzirom na (10) napisati

$$\frac{G q}{\dot{\psi}} = A q,$$

odakle je

$$(12) \quad \dot{\psi} = \frac{G}{A},$$

a to znači da je ugaona brzina precesije konstantna.

Na kraju iz obrasca

$$r = \dot{\psi} \cos \vartheta + \dot{\varphi}$$

za određivanje projekcije vektora trenutne ugaone brzine na pravac ζ -ose (jedinični vektor $\boldsymbol{\nu}$) nalazimo za ugaonu brzinu sopstvene rotacije s obzirom na (12)

$$\dot{\varphi} = r - \frac{G}{A} \cos \vartheta.$$

Međutim, iz jednačine (6) imamo

$$r = \frac{G}{C} \cos \vartheta$$

pa se onda može za ugaonu brzinu sopstvene rotacije napisati

$$(13) \quad \dot{\varphi} = \frac{G(A-C)}{AC} \cos \vartheta$$

što dokazuje da je i ova ugaona brzina kod uravnoteženog giroskopa konstantna.

Prema tome, obitanje uravnoteženog giroskopa u opštem slučaju ima *dva stepena slobode* i može se smatrati kao složeno od dve rotacije, oko kinetičke ose i oko figurene ose, kad se vektor ω trenutne ugaone brzine razloži u dve komponente ω_1 i ω_2 duž kinetičke i duž figurene ose. tj. stavi

$$(14) \quad \omega = \omega_1 + \omega_2 = \omega_1 \mathbf{k} + \omega_2 \mathbf{v}.$$

Kako je kinetička osa i precesiona osa, a figura osa je osa sopstvene rotacije, biće veličine ovih komponentata određene obrascima

$$\omega_1 = \dot{\psi} = G/A; \quad \omega_2 = \dot{\varphi} = \frac{G(A-C)}{AC} \cos \vartheta.$$

Kad se osa obitanja Oz poklapa sa figurnom osom ($\omega \parallel \mathbf{v}$), tada i kinetička osa giroskopa, s obzirom na (1) pada u pravac ose obitanja i kretanje giroskopa ima samo *jedan stepen slobode*. Za ovakav giroskop se kaže da je *slobodan od precesije* i često se koristi u tehničkoj praksi sa po pravilu velikim kinetičkim momentom u odnosu na osu obitanja (osu dinamičke simetrije).

Kad glavni moment datih sila u odnosu na ležište giroskopa nije jednak nuli, on izaziva kretanje kinetičke ose giroskopa (ali ne uvek i promenu ugla ϑ). Sad i kinetička osa opisuje nepokretni aksoid oko ose Oz u obliku kružne konusne površi, ali sama i dalje ostaje osa precesionog konusa.

U posebnom slučaju, kad je moment datih sila u odnosu na osu Oz giroskopa jednak nuli i pored toga još u odnosu na neku drugu stalnu osu kroz tačku O , koju ćemo uzeti za Oz -osu, ugao ϑ ostaje nepromenjen — *precesija je opet regularna*. Tada se vektor kinetičkog momenta nalazi nepokretan u ravni Oz i obrće se zajedno sa tom ravni jednoliko oko nepokretne ose Oz . Obitanje giroskopa je onda rezultanta dve jednolike rotacije: oko figurene ose Oz i oko stalne ose Oz . U ravni Oz je onda i vektor ω trenutne ugaone brzine, pa se opet može napisati ($\omega_1 = \text{const.}$, $\omega_2 = \text{const.}$)

$$(15) \quad \omega = \omega_1 + \omega_2 = \omega_1 \mathbf{k} + \omega_2 \mathbf{v},$$

pa za kinetički moment, kad se ovo unese u obrazac (1), dobivamo

$$(16) \quad \mathbf{M} = I_{\xi} \omega_1 + [I_{\xi} \omega_2 + (I_{\zeta} - I_{\xi}) r] \mathbf{v}.$$

Primenom zakona kinetičkog momenta za navedene ose Oz i Oz dolazi se do zaključka, da u *najopštijem slučaju pri regularnoj precesiji* glavni moment datih sila ima oblik

$$(17) \quad \mathbf{L} = I_{\zeta} (\omega_1 \times \omega_2) \left(1 + \frac{I_{\zeta} - I_{\xi}}{I_{\zeta}} \frac{\omega_1}{\omega_2} \cos \vartheta \right).$$

I zaista, za glavni moment \mathbf{L} datih sila, koji neće imati projekcije na ose $O\zeta$ i Oz može se napisati

$$(18) \quad \mathbf{L} = \alpha (\boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{\omega}_2),$$

jer su onda zadovoljeni uslovi

$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{k} = 0 \quad \text{i} \quad \mathbf{L} \cdot \boldsymbol{\nu} = 0,$$

pa ostaje samo da se odredi koeficijent α . Tako, iz samog zakona kinetičkog momenta krutog tela (3.5.2—4) primenjenog na kinetički moment određen obrascem (16) dobiva se ($\boldsymbol{\omega}_1 = \text{const.}$)

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = [I_\xi \omega_2 + (I_\zeta - I_\xi) r] \dot{\boldsymbol{\nu}} = \alpha (\boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{\omega}_2) = \mathbf{L}.$$

Međutim, pošto je, kad se uzme u obzir (15),

$$\dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\nu} = \omega_1 (\mathbf{k} \times \boldsymbol{\nu}),$$

$$\boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{\omega}_2 = \omega_1 \omega_2 (\mathbf{k} \times \boldsymbol{\nu}),$$

$$r = \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\nu} = \omega_1 (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\nu}) + \omega_2 = \omega_1 \cos \vartheta + \omega_2,$$

biće

$$I_\xi \omega_2 + (I_\zeta - I_\xi) r = \alpha \omega_2,$$

odn.

$$I_\xi \omega_2 + (I_\zeta - I_\xi) \omega_1 \cos \vartheta + (I_\zeta - I_\xi) \omega_2 = \alpha \omega_2,$$

odakle se, najzad, izvodi

$$\alpha = I_\zeta \left[1 + \frac{I_\zeta - I_\xi}{I_\zeta} \frac{\omega_1}{\omega_2} \cos \vartheta \right]$$

što smo i hteli da pokažemo.

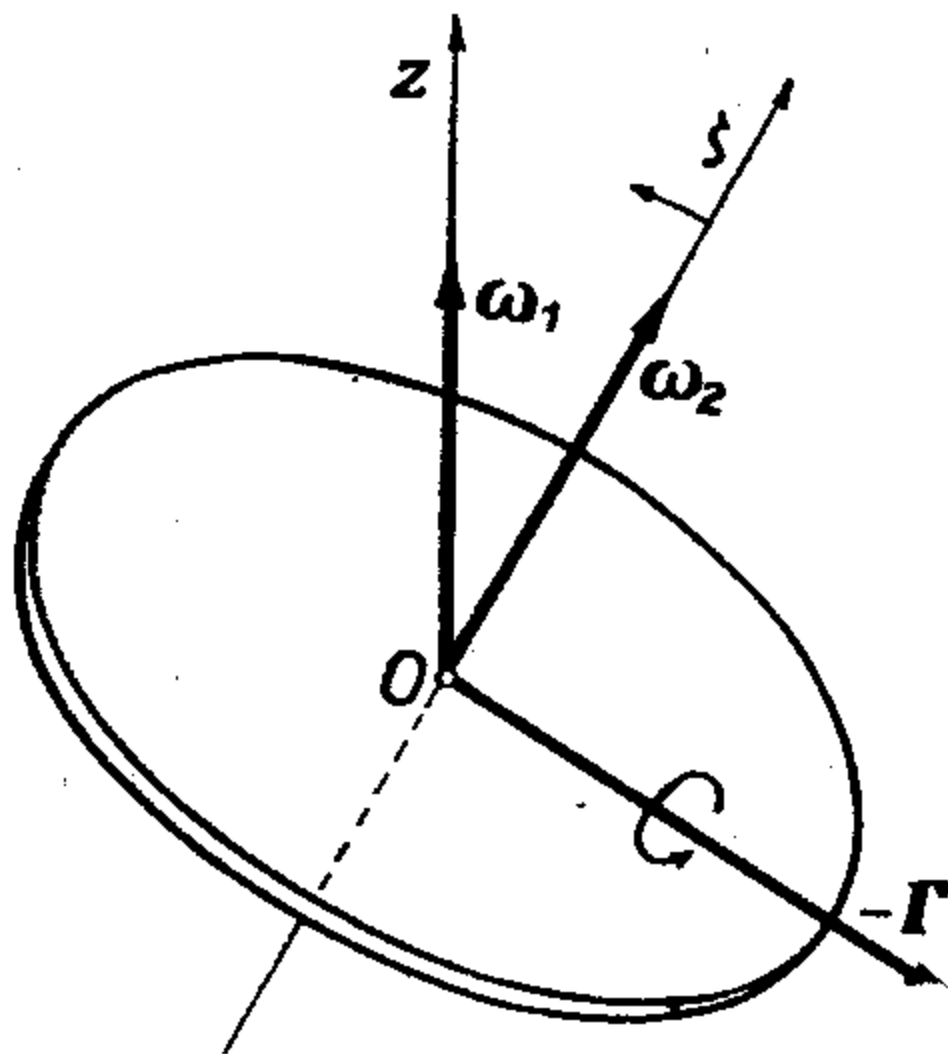
Za $\boldsymbol{\omega}_1 \perp \boldsymbol{\omega}_2$ dobiva se

$$(19) \quad \mathbf{L} = I_\zeta (\boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{\omega}_2).$$

Osim toga uvek u slučaju kad je ugaona brzina ω_2 sopstvenog obrtanja giroskopa znatno veća ($\omega_2 \gg \omega_1$) od ugaone brzine ω_1 precesije, dobiva se približni obrazac

$$(20) \quad \mathbf{L} \approx \boldsymbol{\Gamma} = I_\zeta (\boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{\omega}_2).$$

$$(\boldsymbol{\Gamma} = I_\zeta \omega_1 \omega_2 \sin \vartheta).$$



Slika 164

Vektor \mathbf{L} zove se *giroskopski moment*, a reakcija giroskopa na giroskopski moment, tj. $I_\zeta (\boldsymbol{\omega}_2 \times \boldsymbol{\omega}_1) = -\boldsymbol{\Gamma}$, zove se *giroskopski efekt*. On uvek teži da osu giroskopa (osu sopstvene rotacije) dovede do poklapanja sa osom precesije (Oz -osom) (sl. 164). Ovo je tzv. *Fukoovo pravilo*. Vektor $\boldsymbol{\Gamma}$ se zove i *giroskopska sila* (ma da ima dimenziju momenta sile) jer je $\boldsymbol{\Gamma} \cdot d\mathbf{r}$, shvaćeno kao elementarni rad, jednako nuli.

Najzad u opštem slučaju kretanja giroskopski moment datih sila izaziva i promenu ugla nutacije ϑ — stvara *nutaciono kretanje*, pri

čemu je nutaciona osa — linija čvorova. I obrnuto, svaka prouzrokovana nutacija kinetičke ose stvara sa svoje strane moment sila. Tada je posebno važan slučaj, kad je $\omega_2 \gg \omega_1$ i kad se ϑ malo razlikuje od stalne vrednosti ϑ_0 tj. kad je

$$(21) \quad \vartheta = \vartheta_0 + \alpha,$$

gde je α neki mali promenljivi ugao. Ako je osim toga ugaona brzina precesije jednaka nuli, tj. $\dot{\psi} = 0$ i ako je u početnom trenutku $\vartheta = \vartheta_0$, tada nutacija pokazuje mala harmonijska odstupanja od konstantne vrednosti ϑ_0 ugla nutacije i zove se *pseudoregularna precesija*.

Primeri i zadaci

1. Tankoj homogenoj kružnoj ploči, koja može slobodno da se obrće oko svog nepomičnog središta, saopštena je početna ugaona brzina ω_0 oko ose koja prolazi kroz središte i obrazuje sa osom simetrije normalnom na ploči ugao α . Pokazati da osa simetrije opisuje konus oko nekog stalnog pravca u prostoru, naći otvor tog konusa i period opisivanja konusa.

Uzmimo pokretni koordinatni sistem $O\xi\eta\zeta$ (sl. 165) tako da osa ζ bude normalna osa simetrije ploče a η -osa da bude u ravni određenoj ζ -osom i vektorom početne ugaone brzine ω_0 . Ako po običaju sa ψ označimo precesiju, sa ϑ nutaciju i sa φ sopstvenu rotaciju ploče, ugaona brzina je

$$\omega = \dot{\psi} \mathbf{k} + \dot{\varphi} \mathbf{v} + \dot{\vartheta} \mathbf{N}.$$

Na raspolaganju imamo dva prva integrala, integral energije i integral kinetičkog momenta,

$$(2) \quad 2T = A(p^2 + q^2) + Cr^2 \\ = h = Aq_0^2 + Cr_0^2,$$

$$(3) \quad \mathbf{l} = A(p \boldsymbol{\lambda} + q \boldsymbol{\mu}) + Cr \mathbf{v} = \mathbf{G}$$

a zbog simetrije ploče iz treće Ojlerove diferencijalne jednačine kretanja se dobiva

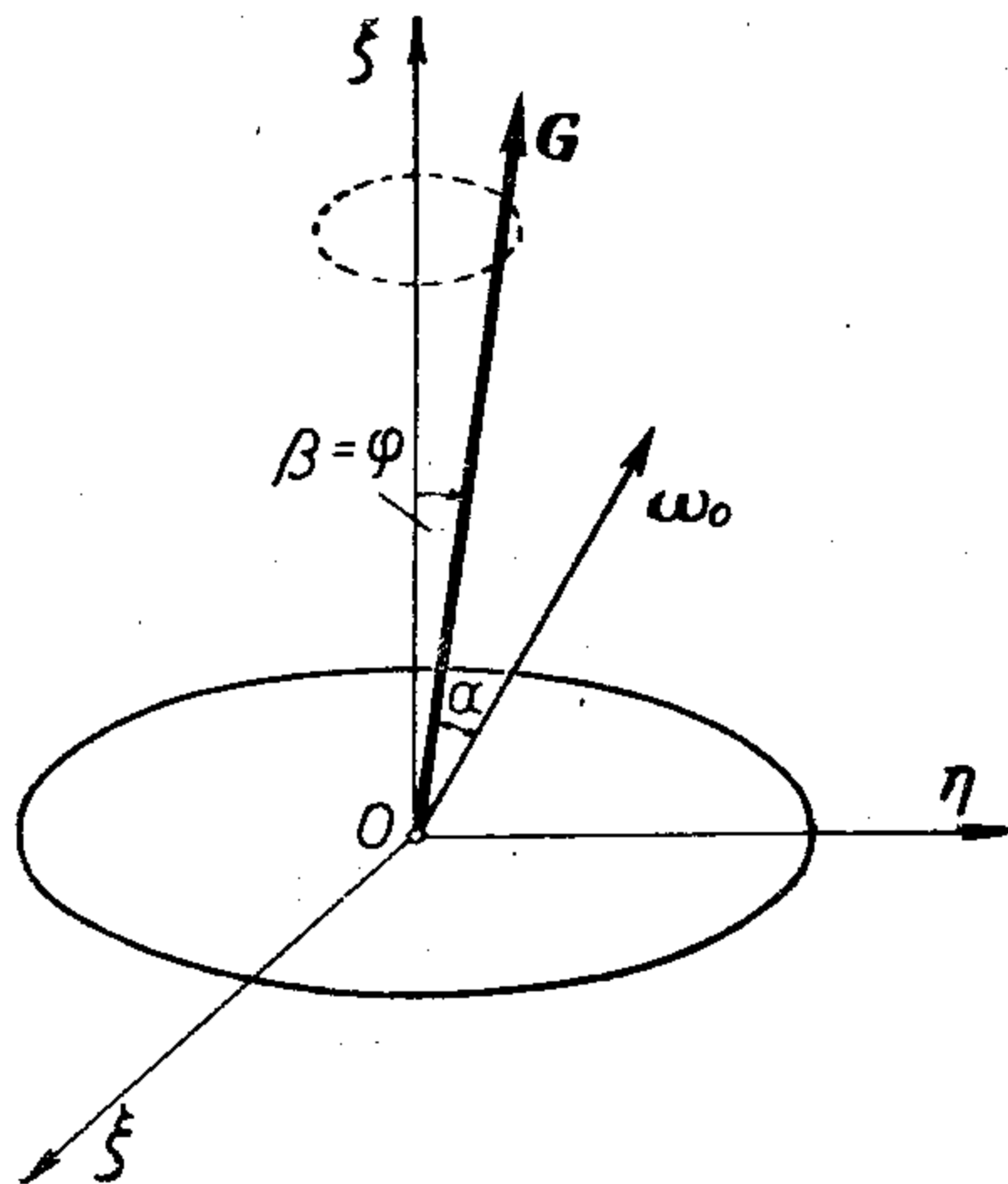
$$(4) \quad r = \text{const.} = \omega_0 \cos \alpha.$$

Momenti inercije ploče su

$$A = \frac{1}{4} ma^2, \quad C = \frac{1}{2} ma^2.$$

Iz (3) se skalarnim množenjem sa \mathbf{v} dobiva

$$\mathbf{G} \cdot \mathbf{v} = Cr = G \cos(\mathbf{G}, \mathbf{v}) = \text{const.} \quad (\text{jer je } C = \text{const.} \text{ i } r = \text{const.})$$



Slika 165

odakle proističe da je, ako se pravac stalnog kinetičkog momenta uzme za z -osu, nutacija ploče stalna, tj. osa simetrije opisuje oko z -ose konus stalnog otvora β . Za vrednost konstante G imamo

$$G^2 = A^2 \omega_0^2 \sin^2 \alpha + C^2 \omega_0^2 \cos^2 \alpha = \frac{\omega_0^2 m^2 a^4}{16} (1 + 3 \cos^2 \alpha),$$

pa je

$$\cos(\mathbf{G}, \mathbf{v}) = \cos \beta = \frac{Cr}{G} = \frac{2 \cos \alpha}{\sqrt{1 + 3 \cos^2 \alpha}}.$$

Iz integrala energije se dobiva

$$p^2 + q^2 = \frac{1}{A} (Aq_0^2 + Cr_0^2 - Cr^2) = \omega_0^2 \sin^2 \alpha.$$

Međutim, zbog konstantnosti ugla nutacije imamo

$$p^2 + q^2 = \dot{\psi}^2 \sin^2 \beta,$$

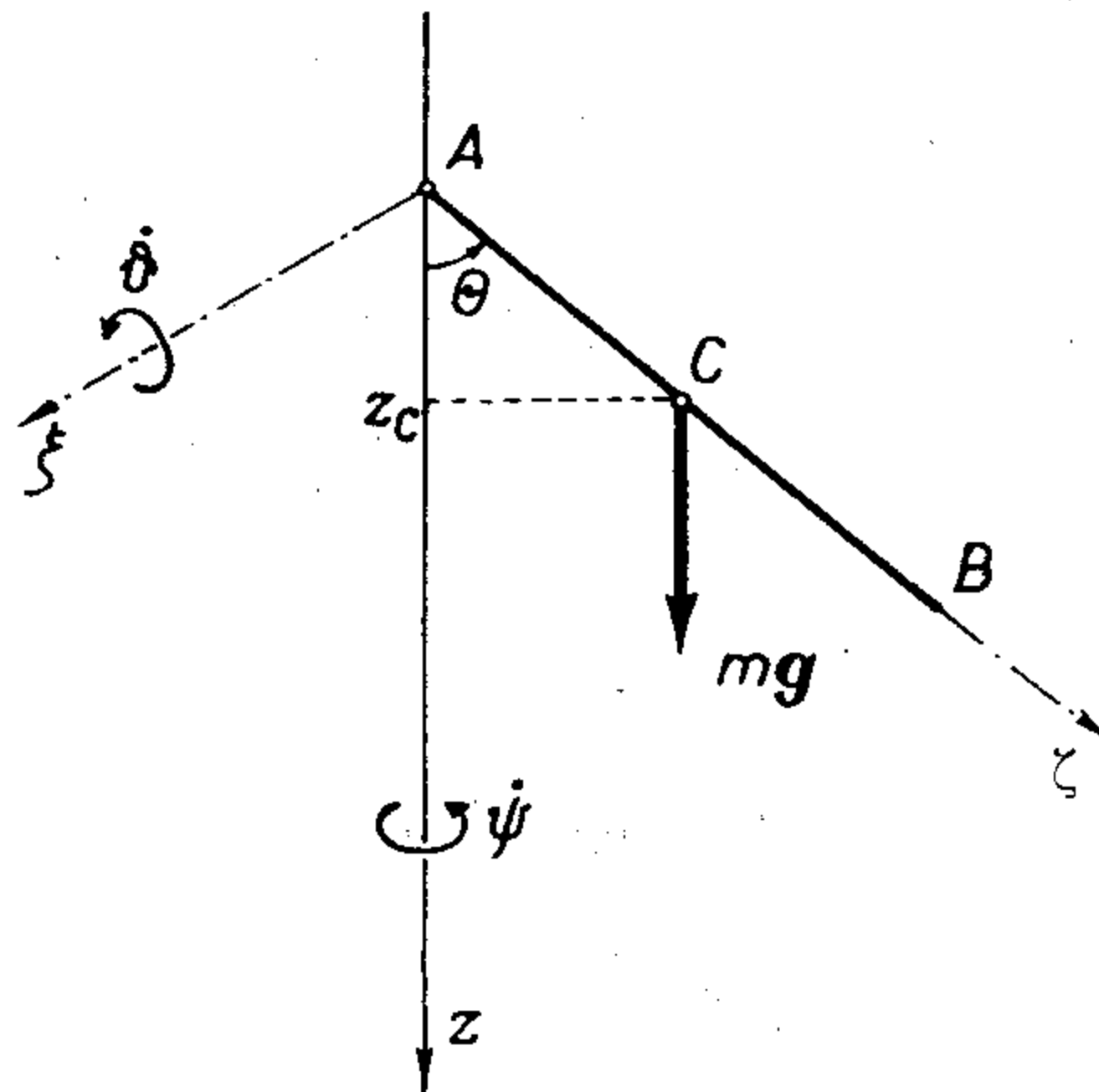
a otuda se za brzinu precesije nalazi

$$\dot{\psi} = \omega_0 \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \omega_0 \sqrt{1 + 3 \cos^2 \alpha}.$$

Period precesionog kretanja je

$$T = \frac{2\pi}{\dot{\psi}} = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1 + 3 \cos^2 \alpha}}.$$

2. Teška duž AB mase m i dužine $2a$ može slobodno da se obrće oko nepokretne tačke A . U početnom trenutku duž AB bila je horizontalna i saopštena



Slika 166

joj je početna ugaona brzina Ω oko vertikalne ose kroz A . Naći granice nutacije duži AB koristeći prve integrale kretanja.

Kako je duž AB zanemarljive debljine nema smisla voditi računa o sopstvenoj rotaciji duži, tako da ona ima svega dva stepena slobode. Neka je vertikala kroz A uzeta za z -osu (sl. 166), neka se duž AB nalazi na ζ -osi sa početkom

u A i neka je ξ -osa stalno horizontalna i upravna na AB u A . Obeležimo ugao precesije sa ψ a nutacije sa ϑ . Kinetička energija tela biće

$$2T = I_z \dot{\psi}^2 + I_\xi \dot{\vartheta}^2,$$

gde su momenti inercije

$$I_z = \frac{4}{3} ma^2,$$

a funkcija sile

$$U = mgz_C = mga \cos \vartheta.$$

Kako je u početnom trenutku $\vartheta_0 = \frac{\pi}{2}$, $\dot{\vartheta}_0 = 0$, $\dot{\psi}_0 = \Omega$, integral energije biće

$$\frac{2}{3} ma^2 (\sin^2 \vartheta \dot{\psi}^2 + \dot{\vartheta}^2 - \Omega^2) = mga \cos \vartheta.$$

Ni funkcija sile niti kinetička energija ne zavise od precesije ψ pa je taj ugao stoga ciklička koordinata kojoj odgovara integral

$$\sin^2 \vartheta \dot{\psi} = \sin^2 \vartheta_0 \cdot \Omega = \Omega.$$

Unošenjem ovog integrala u integral energije dobiće se

$$\dot{\vartheta}^2 + \Omega^2 \left(\frac{1}{\sin^2 \vartheta} - 1 \right) = \frac{3}{2} n^2 \cos \vartheta. \quad \left(\frac{g}{a} = n^2 \right)$$

Kretanje je moguće samo za $\dot{\vartheta} \geq 0$, pa iz integrala energije proističe da mora biti

$$\frac{3}{2} n^2 \cos \vartheta - \Omega^2 \frac{\cos^2 \vartheta}{\sin^2 \vartheta} \geq 0,$$

dakle, kosinus ugla nutacije mora se stalno nalaziti u intervalu

$$0 \leq \cos \vartheta \leq -\frac{1}{3} \left(\frac{\Omega}{n} \right)^2 + \sqrt{\left(\frac{1}{3} \frac{\Omega}{n} \right)^2 + 1}.$$

Drugo rešenje po kosinusu ugla nutacije ne dolazi u obzir, jer je

$$\cos \vartheta_2 = -\frac{1}{3} \left(\frac{\Omega}{n} \right)^2 - \sqrt{\left(\frac{1}{3} \frac{\Omega}{n} \right)^2 + 1} < 0.$$

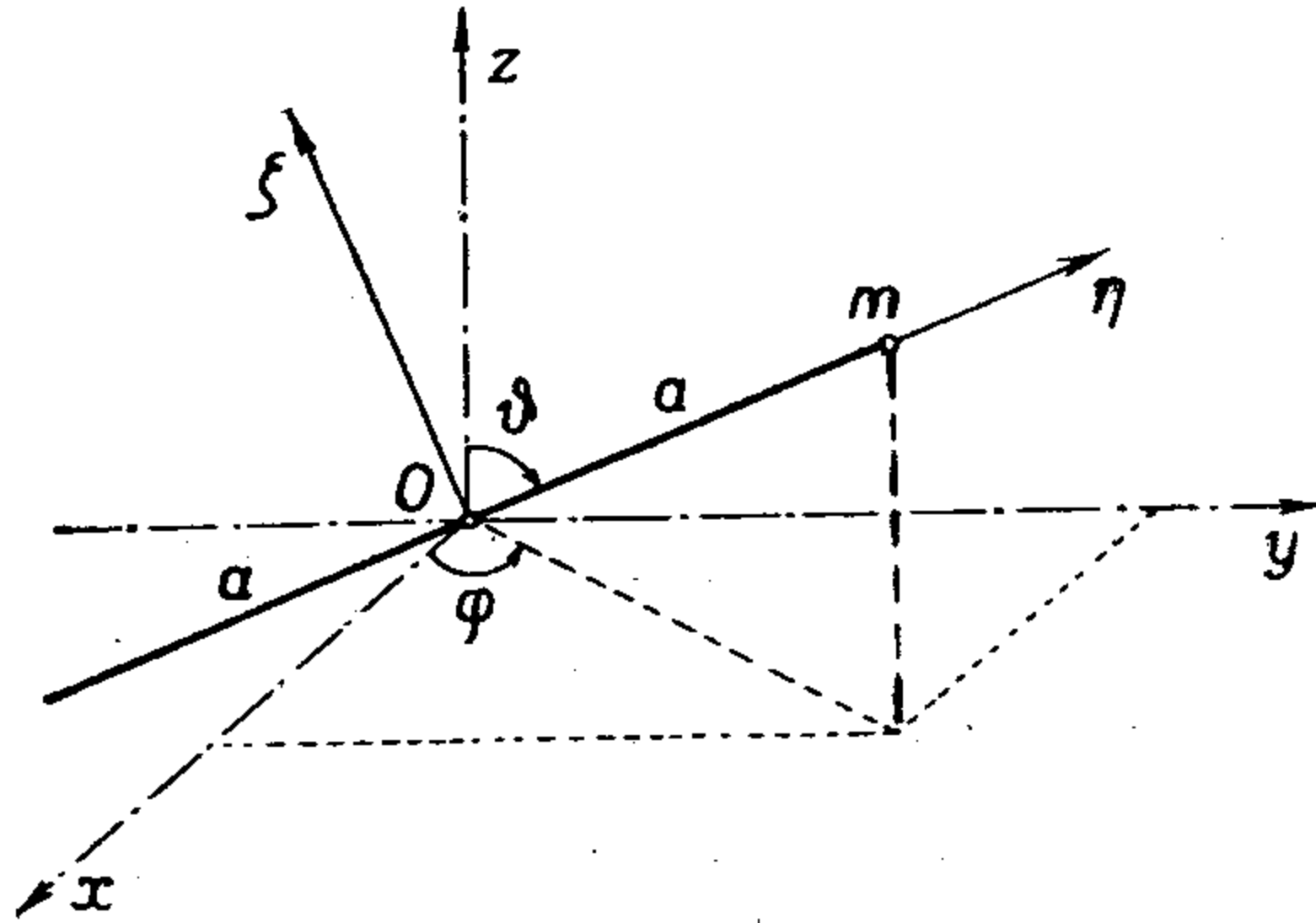
3. Sredina teškog homogenog štapa mase $3m$ i dužine $2a$, na čijem se jednom kraju nalazi pričvršćena materijalna tačka mase m nepomična je u prostoru. U početnom trenutku štap se nalazio u horizontalnoj ravni i saopštena mu je početna ugaona brzina $\omega = \sqrt{2ng/a}$ oko vertikalne ose koja prolazi kroz sredinu štapa. Pomoću prvih integrala proučiti kretanje štapa.

U početnom trenutku je (sl. 167)

$$t_0 = 0, \quad \vartheta_0 = \frac{\pi}{2}, \quad \dot{\vartheta}_0 = 0, \quad \dot{\psi}_0 = \omega, \quad \varphi_0 = 0.$$

Izaberimo koordinatni sistem tako da ζ bude upravno na štap a η u pravcu štapa i neka je z -osa vertikalna sa početkom u sredini štapa. Debljinu štapa

i njegovu sopstvenu rotaciju možemo zanemariti, pa štap ima svega dva stepena slobode. Kretanje ima dva prva integrala, integral energije i jedan ciklički integral pa se razmišljanjem sličnim onom u prethodnom zadatku može naći da će se

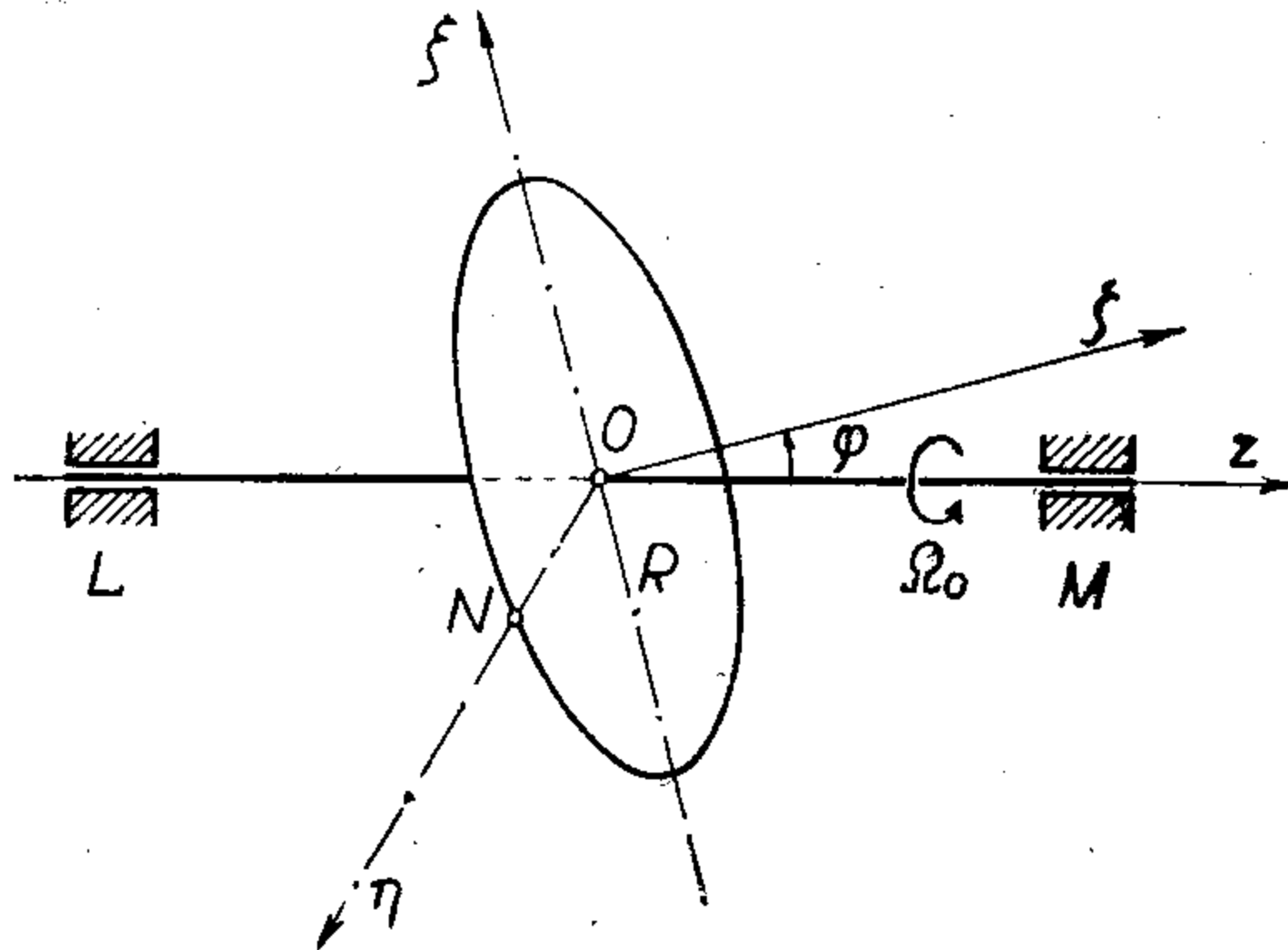


Slika 167

štap kretati oko nepokretne tačke tako da se njegov nagib prema vertikalnoj osi kroz nepokretnu tačku menja u granicama

$$\arccos(\sqrt{n^2 + 1} - n) \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}.$$

4. Teška tanka homogena kružna ploča poluprečnika R tako je pričvršćena za osovinu koja prolazi kroz njen centar da se obrće zajedno sa osovinom ali može slobodno da menja svoj nagib prema njoj. Osovina je oslonjena u dve tačke L i M i obrće se stalnom ugaonom brzinom $\Omega_0 = \text{const}$. Početni nagib nor-



Slika 168

male na ploči prema osovini je bio $\varphi_0 = \alpha$. Proučiti kretanje ploče, period klaćenja ploče prema osovini i ako je za celo vreme kretanja $\varphi = \varphi_0$ naći pritiske u ležištima osovine.

Pošto je centar ploče istovremeno i njen centar masa, ovo je Ojlerov slučaj obrtanja oko nepokretne tačke. Za koordinate kao na sl. 168 biće kinetička energija ploče

$$2 T = A (\dot{\varphi}^2 + \Omega_0^2 \sin^2 \varphi) + C \Omega_0^2 \cos^2 \varphi.$$

Kretanje je konzervativno i dopušta integral energije iz koga se nalazi

$$\dot{\varphi}^2 = \Omega_0^2 \frac{C-A}{A} (\sin^2 \alpha - \sin^2 \varphi).$$

Kako za celo vreme kretanja mora biti $\dot{\varphi}^2 \geq 0$, to iz integrala energije proizilazi

$$0 \leq \varphi \leq \alpha.$$

Ako je d debljina ploče, može se staviti da je $n^2 = (C-A)/A = \frac{3R^2 - d^2}{3R^2 + d^2} \approx 1$, jer je ploča tanka, pa se iz integrala energije dobiva

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\Omega_0 \sqrt{\sin^2 \alpha - \sin^2 \varphi},$$

što se smenom $\sin \varphi = \lambda \sin \varepsilon$ svodi na standardni oblik eliptičkog integrala druge vrste ($\lambda = \sin \alpha$),

$$I = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{\lambda^2 - \sin^2 \varphi}} = -\Omega_0 t = \int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon} \frac{d\varepsilon}{\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \varepsilon}}.$$

$\varepsilon = \varepsilon(t)$ je periodna funkcija čiji je period

$$T = 4 \int_0^{\pi/2} \frac{d\varepsilon}{\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \varepsilon}},$$

ili, ako se podintegralna funkcija razvije u red,

$$T = 4 \int_0^{\pi/2} \left(1 + \frac{1}{2} \lambda^2 \sin^2 \varepsilon + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \lambda^4 \sin^4 \varepsilon + \dots \right) d\varepsilon.$$

U početnom trenutku je dato $\lambda = \sin \frac{\pi}{4} = \sqrt{2}/2$, pa će biti približno

$$T = \frac{1}{40} \text{ sec.}$$

Za $\varphi = \text{const.}$ iz početnih uslova će biti

$$p = 0, \quad q = \Omega_0 \cos \varphi_0, \quad r = \Omega_0 \sin \varphi_0.$$

Ojlerove diferencijalne jednačine kretanja onda glase

$$\begin{aligned} -(A-C) \Omega_0^2 \sin \varphi_0 \cos \varphi_0 &= L_\eta, \\ 0 &= L_\xi, \\ 0 &= L_\zeta. \end{aligned}$$

Kad se uzmu u obzir vrednosti momenata inercije, prva od ovih jednačina daje

$$\frac{1}{3 \cdot 4} m (3 R^2 - d^2) \Omega_0^2 \sin \varphi_0 \cos \varphi_0 = L \eta.$$

Prema tome, na ležišta osovine deluje sila reakcije sa momentom $L \eta$ koji ne zavisi od položaja ležišta L i M u odnosu na ploču.

5. Težak homogeni štap OA mase m i dužine $2a$ može slobodno da se obrće oko svog kraja O . Štap se obrće konstantnom ugaonom brzinom ω oko vertikalne ose koja prolazi kroz O i obrazuje sa tom osom ugao $\alpha = \text{const}$. Pokazati da je $\cos \alpha = \frac{3g}{4a\omega^2}$.

6. Kraj A homogenog štapa AB težine mg je slobodno okačen u nepomičnoj tački A , a štap se kreće kao konusno klatno sa konstantnom ugaonom brzinom ω . Ako se tačka A nalazi na visini h iznad ravni u kojoj se kreće kraj B štapa, pokazati da je $\omega^2 = 3g/2h$.

7. Homogena tanka kružna ploča poluprečnika a i mase m obrće se konstantnom ugaonom brzinom ω oko nepomične ose koja prolazi kroz centar ploče, ali obrazuje sa normalnom osom simetrije ploče stalni ugao α . Naći pritiske u ležištima ose obrtanja i pokazati da je njihov moment $\frac{1}{4} ma^2 \omega^2 \sin \alpha \cos \alpha$.

8. Težak kružni disk poluprečnika R i mase m obrće se ugaonom brzinom ω oko svoje ose simetrije, koja obrazuje sa vertikalom stalni ugao α . Disk se kotrlja bez klizanja po horizontalnoj ravni. Ako nema nutacije i ako je brzina precesije diska stalna i iznosi n , pokazati da se n može odrediti iz jednačine

$$R(4 \operatorname{tg}^2 \alpha - 1) n^2 \cos \alpha - 2 R m \omega + 4 g \operatorname{tg} \alpha = 0.$$

9. Homogeni kružni disk mase m i poluprečnika a dobio je početnu ugaonu brzinu ω_0 oko ose koja prolazi kroz središte diska i obrazuje sa njegovom normalnom osom simetrije ugao α . Pokazati da će osa rotacije diska opisivati oko stalnog pravca kinetičkog momenta konus čiji je period

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0 \cos \alpha},$$

a da je period precesionog kretanja diska

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1 + 3 \cos^2 \alpha}}.$$

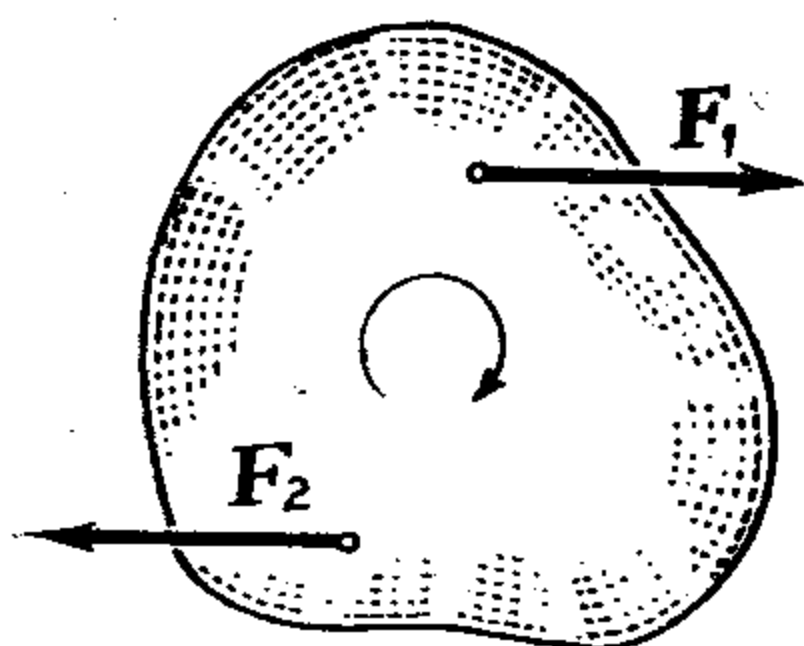
10. Obrtno kruto telo slobodno se obrće u prostoru. Ako je α ugao koji glavna osa inercije $O\zeta$ obrazuje sa nepromenljivim pravcem Oz , pokazati da je ugaona brzina kojom se ζOz ravan obrće oko Oz data relacijom

$$\frac{1}{\sin^2 \alpha} \left(\frac{2T}{L} - \frac{L}{C} \cos^2 \alpha \right),$$

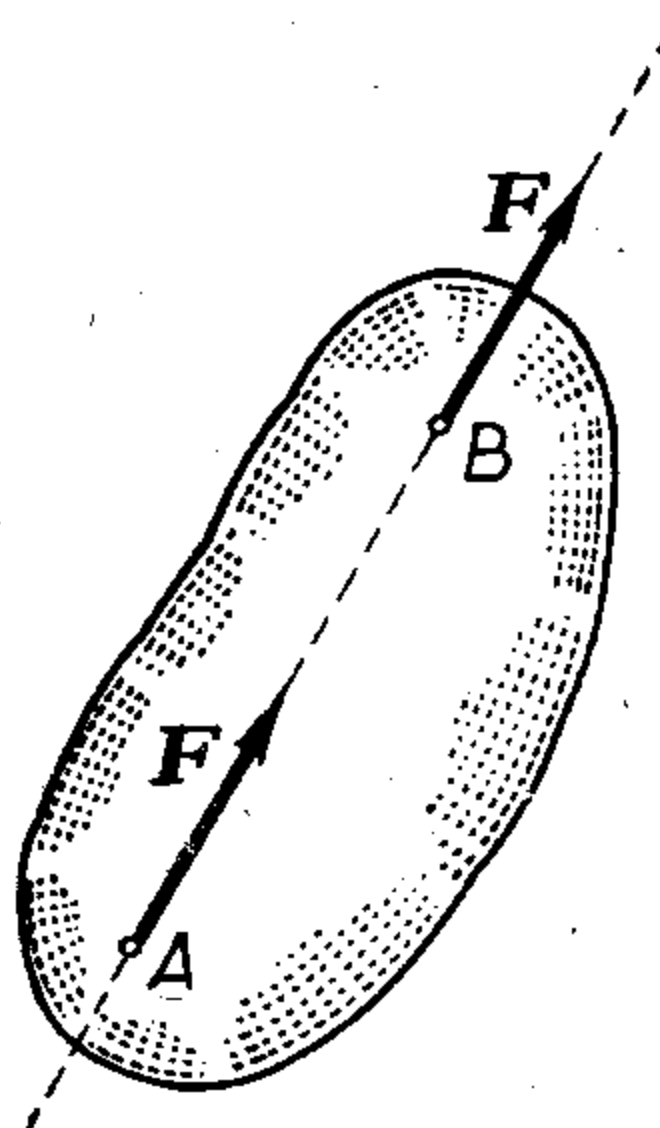
gde je T kinetička energija obrtanja, C moment inercije za ζ -osu i L veličina kinetičkog momenta tela.

3.5.7. Ravnoteža krutih tela

Za ravnotežu materijalne tačke dovoljno je da rezultanta svih aktivnih sila, kad je tačka slobodna, a rezultanta svih aktivnih sila i reakcija, kad je tačka vezana, koje dejstvuju na tačku, bude jednaka nuli. To se onda na odgovarajući način prenosi i važi i za materijalne sisteme koji nisu kruti. Međutim, kod krutog tela to nije dovoljno, ako se smatra da je kruto telo u ravnoteži onda, kad se ne kreće, kad miruje u odnosu na okolinu prema kojoj se posmatra u smislu izlaganja u odeljku 3.5.1.2.



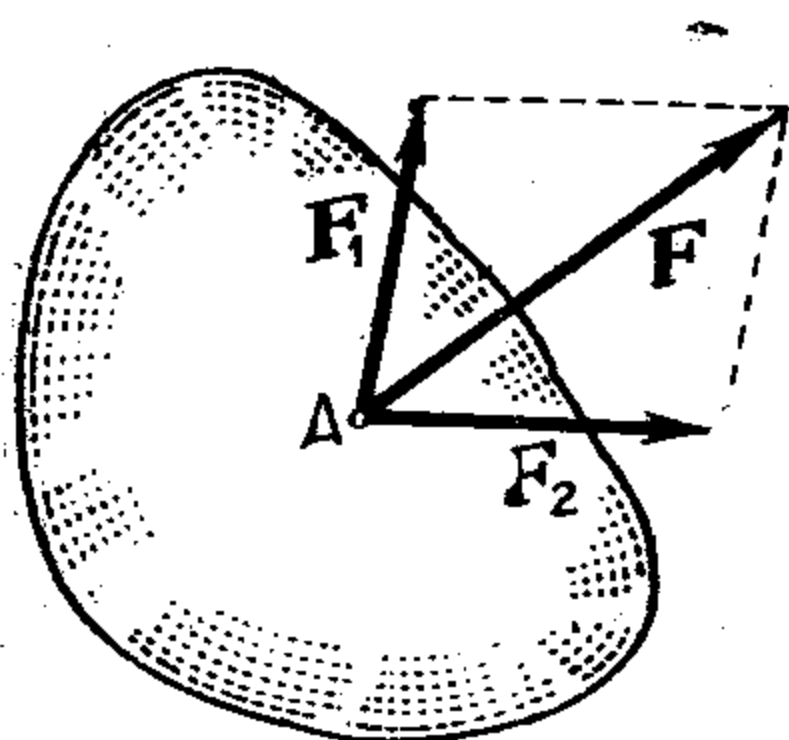
Slika 169a



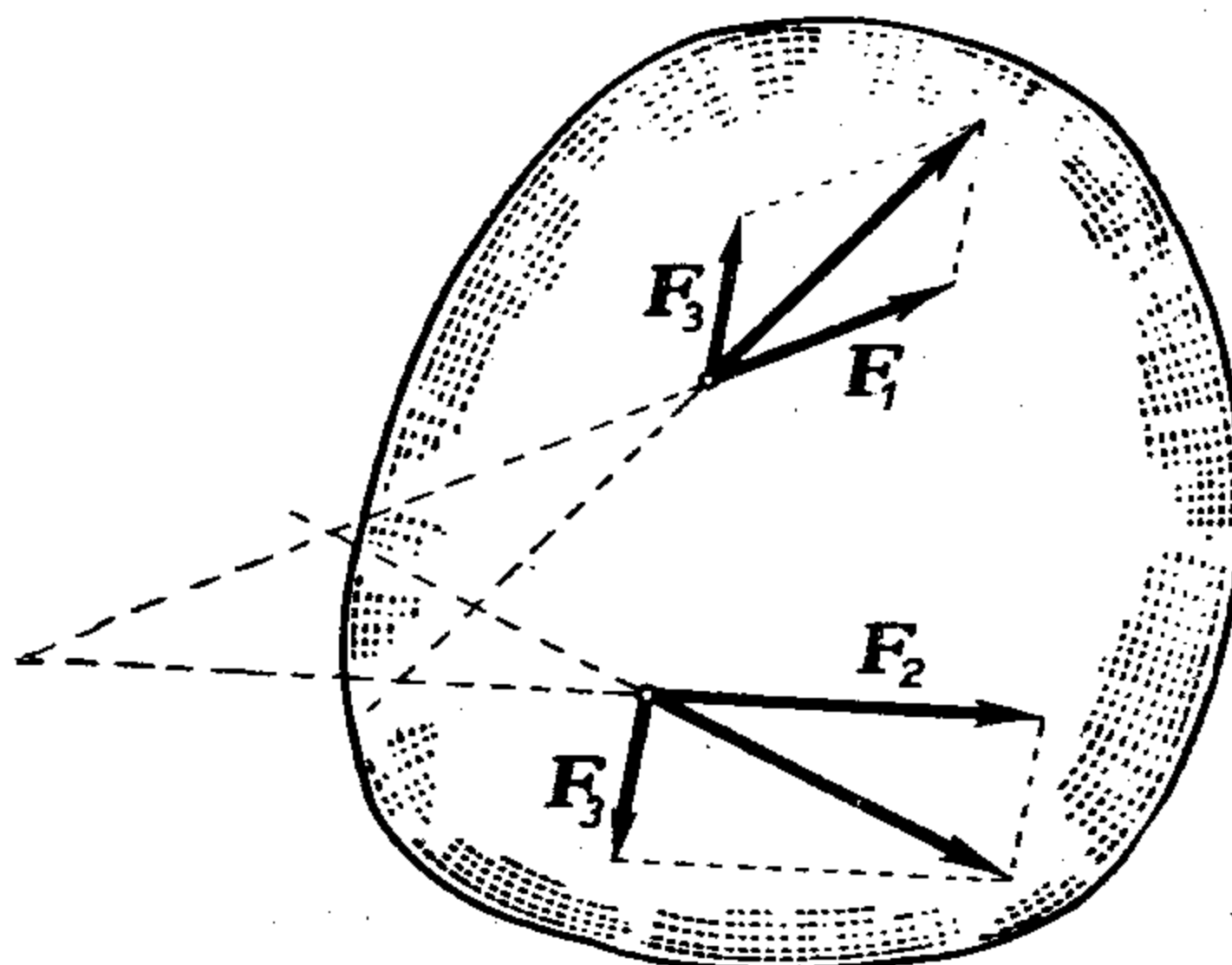
Slika 169b

Naime, ako na kruto telo dejstvuju dve sile F_1 i F_2 ($F_1 = -F_2$) (sl. 169a) koje su paralelne, suprotno orijentisane a jednakih veličina, dakle, dve sile čiji je vektorski zbir jednak nuli, ali čije su osnove (napadne linije) različite, kruto telo neće ostati u miru — ono će se obrtati. Samo, ako su ovakve dve sile na istoj osnovi, kruto telo će ostati u miru. Ovo se može lako izvesti iz dinamičkih jednačina o kretanju krutog tela.

Isto tako, ako na neko kruto telo dejstvuje sila F u tački A (sl. 169b), pa se ona pomeri po napadnoj liniji tako da joj početak bude u tački B , samo usled toga ravnoteža krutog tela (ali ni stanje kretanja uopšte) se neće promeniti.



Slika 169c



Slika 169d

Na osnovu toga zaključujemo:

- 1). *Dejstvo neke sile na kruto telo ne menja se pomeranjem sile duž njene napadne linije.*

2) *Dejstvo nekog sistema sila na kruto telo neće se promeniti dodavanjem dve proizvoljne suprotne sile sa istom napadnom tačkom.*

Dalje, ako na kruto telo dejstvuju dve različite sile \mathbf{F}_1 i \mathbf{F}_2 u nekoj tački A (sl. 169c) tada se, isto kao i kod materijalne tačke, one u svom dejstvu mogu zameniti potpuno rezultantom $\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$. Ovo pokazuje s obzirom na osobinu 1) sila koje dejstvuju na kruto telo, da se više sila mogu sabrati u jednu uvek, kad se njihove linije seku u jednoj tački i tada se baš ta presečna tačka može uzeti kao napadna tačka. Ukoliko bi se (sl. 169d) napadne linije datih sila \mathbf{F}_1 i \mathbf{F}_2 sekle negde van samog tela, tada se na osnovu osobine 2) dodavanjem dve suprotne sile \mathbf{F}_3 i $-\mathbf{F}_3$ može postići da presek bude u samom telu.

Prema tome, za sile koje dejstvuju na kruto telo važe i naredne osobine:

3) *Više sila sa zajedničkom napadnom tačkom koje dejstvuju na kruto telo, mogu se zameniti jednom koja je njihov vektorski zbir a sa istom napadnom tačkom.*

4) *Obrnuto, jedna sila u svom dejstvu na kruto telo može se uvek razložiti u komponentne sile sa istom napadnom tačkom.*

Iz ovih razmatranja jasno je da sistem sila koje dejstvuju na kruto telo treba smatrati kao sistem vektora vezanih za prave i tako ga proučavati. Npr. dve vektorski suprotne sile na različitim osnovama koje izazivaju rotaciju krutog tela obrazuju spreg. Promene 1/, 2/, 3/, i 4/ sistema sila koje ne izazivaju promene u dejstvu sistema sila na kruto telo zovu se *statičke transformacije* sistema sila. Pri tome se za svaki sistem sila $\bar{\mathcal{S}}$, koji se proizvoljnim statičkim transformacijama dobiva od nekog datog sistema \mathcal{S} , kaže da je ovome *statički jednak* ili *ekvivalentan*, što se izražava u obliku

$$\bar{\mathcal{S}} = \mathcal{S}.$$

U toku naših dosadašnjih izlaganja često smo koristili neke pojmove i stavove iz teorije vezanih vektora i u kinematici i u dinamici (kao npr. pojam trenutne zavojne ose kao centralne ose sistema vezanih vektora, momenta sile i momenta koičine kretanja kao momenta vezanog vektora itd.). Stoga ih ovde smatramo kao poznate, a radi potpunijeg upoznavanja sa teorijom vezanih vektora upućujemo čitaoca na knjigu T. Anđelića — Teorija vektora, III. izdanje str. 95—154.

Ipak i ovde ističemo da u sistemu sila koje dejstvuju na kruto telo dva pojma igraju glavnu ulogu. To su: Vektor (zbir svih sila uzetih kao slobodni vektori)

$$(1) \quad \mathbf{F} = \sum_i \mathbf{F}_i$$

koji se zove *glavni vektor* sistema sila; i vektor (zbir momenata svih sila izračunatih za isti pol O i sabranih kao slobodni vektori)

$$(2) \quad \mathfrak{M}^O = \sum_i \mathfrak{M}^O(\mathbf{F}_i)$$

koji se zove *glavni moment* sistema sila.

Glavni vektor sistema sila ne zavisi od statičkih transformacija sistema, ali ne zavisi ni od izbora pola, tj. one tačke na koju se sve sile svode kao na zajednički početak. *Glavni vektor je invarijanta u odnosu na statičke transformacije i na izbor početka.* Glavni moment sistema sila, takođe ne zavisi od statičkih transformacija sistema, ali se, kako znamo, menja sa promenom pola u opštem slučaju. *On je invarijanta u pogledu statičkih transformacija, ali nije u pogledu izbora pola.* I glavni moment sistema sila, određen za datu osu, ostaje pri statičkim transformacijama sistema nepromenjen.

Prema tome, ekvivalentni sistemi sila koje djeluju na kruto telo, imaju jednake glavne vektore i jednake glavne momente određene u odnosu na isti pol. Drugim rečima, svaki sistem sila koje djeluju na neko telo, može se statičkim transformacijama svesti (redukovati) na glavni vektor čiji je početak u proizvoljnoj tački prostora i na glavni moment, ali ovaj u odnosu na datu tačku. To znači da će sistem sila čiji se glavni vektor i glavni moment svode na nulu biti ekvivalentan nuli, a kruto telo na koje djeluje takav sistem sila je u ravnoteži.

Uslovi za ravnotežu datog sistema sila \mathbf{F}_i , koje djeluju na neko slobodno kruto telo, biće, dakle, u vektorskom obliku

$$(3) \quad \mathbf{F} = \sum_i \mathbf{F}_i = \mathbf{0},$$

$$\mathfrak{M}^O = \sum_i \mathfrak{M}^O(\mathbf{F}_i) = \mathbf{0}.$$

Ako se kruto telo posmatra u odnosu na Dekartov pravougli sistem koordinata čiji je početak u tački O , polu glavnog momenta, tada se uslovi ravnoteže slobodnog krutog tela mogu napisati u skalarnom obliku

$$(4) \quad X = \sum_i X_i = 0, \quad Y = \sum_i Y_i = 0, \quad Z = \sum_i Z_i = 0;$$

$$M_x = \sum_i (y_i Z_i - z_i Y_i) = 0, \quad M_y = \sum_i (z_i X_i - x_i Z_i) = 0,$$

$$M_z = \sum_i (x_i Y_i - y_i X_i) = 0,$$

gde su oznake očigledne. Onih šest nezavisnih parametara koji određuju položaj slobodnog krutog tela, npr. $x_A, y_A, z_A; \varphi, \psi, \vartheta$ mogu se odrediti iz šest uslovnih jednačina (4). Pri tome svaki sistem vrednosti pomenutih nezavisnih parametara koji zadovoljava jednačine (4) određuje jedan ravnotežni položaj krutog tela.

Uopšte uzev kruto telo će biti podvrgnuto i nekim vezama. Kako reakcije veza obično nisu unapred određene, one se kao nepoznate dodaju aktivnim silama i onda iz jednačina (4) određuju nepoznati nezavisni parametri položaja krutog tela, kojih je sad manje od šest, i nepoznate reakcije. Očigledno je da u opštem slučaju, bez naknadnih pretpostavki o vezama, neće biti moguće odrediti sve reakcije veza i onda se kaže da je takav problem *statički neodređen*.

Kao primer ravnoteže vezanog krutog tela, uočimo prvo *kruto telo sa utvrđenom (nepokretnom) tačkom (ležištem)*. Neka utvrđena tačka bude O i neka kruto telo inače može oko tačke O da se kreće *slobodno (bez trenja)*. Uzmimo da u tački O djeluje neka sila \mathbf{R} (reakcije nepokretne tačke) koja je održava u miru. Ova reakcija imaće u odnosu na tačku O moment jednak nuli, pa će se opšti uslovi za ravnotežu krutog tela svesti na

$$(5) \quad \mathbf{F} + \mathbf{R} = \mathbf{0}, \quad \mathfrak{M}^O = \mathbf{0},$$

ako je \mathbf{F} vektorski zbir svih aktivnih sila \mathbf{F}_i koje djeluju na telo a \mathbf{R} navedena reakcija, i ako je \mathfrak{M}^O glavni moment aktivnih sila u odnosu na tačku O , pošto je moment same reakcije jednak nuli. U skalarnom obliku imaćemo

$$(6) \quad \sum_i X_i + R_x = 0, \quad \sum_i Y_i + R_y = 0, \quad \sum_i Z_i + R_z = 0;$$

$$\sum_i (y_i Z_i - z_i Y_i) = 0, \quad \sum_i (z_i X_i - x_i Z_i) = 0,$$

$$\sum_i (x_i Y_i - y_i X_i) = 0.$$

Položaj krutog tela sa jednom nepokretnom tačkom ima tri stepena slobode određen je sa tri nezavisna parametra za koje se mogu uzeti Ojlerovi uglovi φ, ψ, ϑ . Oni se mogu odrediti iz tri momentne jednačine (6) tako da bude ravnotežni položaj krutog tela određen. Međutim, određivanjem takvog sistema vrednosti φ, ψ, ϑ biće određene i vrednosti $\sum_i X_i, \sum_i Y_i, \text{ i } \sum_i Z_i$, pa se unošenjem tih vrednosti u prve tri od jednačina (6) mogu izračunati reakcije R_x, R_y i R_z i tako potpuno odrediti reakcija ležišta O .

Kao drugi primer posmatrajmo *kruto telo sa nepokretnom pravom l* oko koje kruto telo može slobodno da se obrće i duž nje pomera bez trenja. U tom slučaju kruto telo ima dva stepena slobode. Ovakva veza je idealna i onda sve reakcije koje izvire od ove veze moraju biti upravne na pravoj l i neće imati momente u odnosu na osu duž prave l , jer je seku. Neka onda na uočeno telo deluje sistem aktivnih sila čiji je glavni vektor \mathbf{F} a glavni moment tih sila u odnosu na neku tačku O same utvrđene prave neka bude \mathfrak{M}^O . Tada je jasno da u slučaju ravnoteže oni moraju biti upravni na pravoj l pa uslovi ravnoteže u vektorskom obliku glase

$$(7) \quad \mathbf{F} + \mathbf{R} = \mathbf{0}, \quad \mathfrak{M}^O + \mathbf{L}^O = \mathbf{0},$$

tj. vektorski zbir \mathbf{R} reakcija mora biti jednak negativnom glavnom vektoru aktivnih sila $-\mathbf{F}$, a vektorski zbir \mathbf{L}^O momenata reakcija mora biti jednak negativnom glavnom momentu aktivnih sila $-\mathfrak{M}^O$ i to su jedini uslovi ravnoteže. Prema tome, svaki sistem reakcija, ma kako one inače pojedinačno bile raspoređene, samo ako ispunjavaju ova dva uslova, osigurava ravnotežu krutog tela. Ravnoteža je statički neodređena. U pojedinačnim slučajevima reakcije mogu postati određene na osnovu mehanizma kako je veza ostvarena, tj. kako je nepokretna prava utvrđena.

Najzad, kad je *kruto telo sa utvrđenom ravni*, po kojoj može da se kreće bez trenja, ono može izvoditi samo ravnansko kretanje sa tri stepena slobode. Ako nema trenja, sve reakcije biće upravne na tu ravan pa kad se uvede Dekartov koordinatni sistem osa tako da ravan Oxy bude u utvrđenoj ravni a z -osa da je upravna na njoj, tada su uslovi ravnoteže

$$(8) \quad \sum_i X_i = 0, \quad \sum_i Y_i = 0, \quad \sum_i (x_i Y_i - y_i X_i) = 0.$$

Iz ove tri jednačine mogu da se odrede tri nezavisna parametra položaja x_A, y_A i φ krutog tela koji zadovoljavaju uslov ravnoteže. Posle toga se iz jednačina

$$(9) \quad \sum_i Z_i + R_z = 0, \quad \sum_i (y_i Z_i - z_i Y_i) + L_x = 0, \quad \sum_i (z_i X_i - x_i Z_i) + L_y = 0$$

može odrediti sistem reakcija, ali samo do na statičke transformacije, tj. može se naći glavni vektor i glavni moment reakcija.

Sa druge strane, ako je sam sistem aktivnih sila naročitih osobina, uslovi ravnoteže se obrazuju prema tome. Npr. ako na neko slobodno kruto telo deluje *ravnanski sistem sila*, tada će glavni vektor tog sistema biti u ravni tog sistema sila, a glavni moment normalan na toj ravni. Ako se izabere takav Dekartov pravougli sistem koordinata da ravan Oxy bude u ravni sistema sila a da z -osa bude normalna na toj ravni, biće uslovi ravnoteže krutog tela

$$(10) \quad X = Y = 0, \quad M_z = \sum_i (x_i Y_i - y_i X_i) = 0,$$

pri čemu je koordinatni početak O pol glavnog momenta sistema sila.

Kad se radi o *sistemu paralelnih sila*, tada je glavni vektor i sam paralelan datom sistemu sila, a glavni moment je upravan na njemu. Ako se sad uzme takav Dekartov pravougli sistem koordinata da ravan Oxy bude upravna na sistemu vektora a z -osa da bude paralelna silama, tada će uslovi ravnoteže krutog tela biti

$$\sum_i Z_i = 0, \quad \sum_i (y_i Z_i - z_i Y_i) = 0, \quad \sum_i (z_i X_i - x_i Z_i) = 0.$$

3.5.8. Udar i sudar

3.5.8.1. Udar na sila. Trenutni impuls

Pod *udarom* se razume pojava pri kojoj u materijalnom sistemu (telu) ili kod materijalne tačke trenutno nastupaju konačne promene brzine. Trenutne sile koje dejstvuju u toku udara, u beskonačno malom intervalu vremena, mogu biti i aktivne i pasivne, ali je njihov impuls konačan i zovu se *udarne sile*. Udarne sile dostižu ogromne veličine i čak za ono kratko vreme trajanja udara ne ostaju konstantne.

Pri proučavanju udara čine se neke osnovne pretpostavke, i to: 1) udarna sila se smatra kao vektor čija je napadna tačka uvek na mestu udara; i 2) vreme trajanja udara (dejstva udarnih sila) je beskonačno mali vremenski razmak.

Impuls \mathbf{J} neke udarne sile \mathbf{F} koja u beskonačno malom intervalu vremena τ , od t_0 do $t_0 + \tau$, dejstvuje na neku materijalnu tačku, određen je obrascem

$$(1) \quad \mathbf{J} = \int_{t_0}^{t_0 + \tau} \mathbf{F} dt.$$

Ovaj impuls zove se *trenutni* ili *udarni*, ali se on naziva i kratko *udar*. Dimenzija udara je jednaka dimenziji količine kretanja (2.7.1). Iz prethodnog obrasca se dobiva

$$(2) \quad \mathbf{F}_s = \frac{\mathbf{J}}{\tau} = \frac{1}{\tau} \int_{t_0}^{t_0 + \tau} \mathbf{F} dt$$

kao *srednja vrednost udarne sile*.

Kad pored udarne sile na uočenu materijalnu tačku ili sistem dejstvuju i sile ograničene, konačne veličine (kao što su to npr. aktivne sile i sile reakcije bilateralnih veza koje su do sad bile posmatrane), one se pri proučavanju udara mogu zanemariti, jer u beskonačno malom intervalu vremena daju beskonačno male impulse. Prema teoremi količine kretanja (2.7.1—5), promena količine kretanja materijalne tačke mase m u toku udara iznosiće

$$(3) \quad m \mathbf{v}(t_0 + \tau) - m \mathbf{v}(t_0) = \mathbf{J}.$$

Vektori $\mathbf{v}(t_0)$ i $\mathbf{v}(t_0 + \tau)$ ovde odnose se uvek na istu materijalnu tačku i zovu: brzina uočene materijalne tačke *do udara* i *posle udara*. Ako $\mathbf{v}(t_0)$ označava brzinu u trenutku udara materijalne tačke o neku nepokretnu prepreku, onda se kaže da je to *dolazna brzina*. Ona trenutno promenjena brzina $\mathbf{v}(t_0 + \tau)$ pri udaru zove se tada *odlazna brzina*.

Osim toga treba imati pred očima i činjenicu da se za vreme trajanja udara položaj tačaka, u kojima dejstvuju udarne sile, menjaju beskonačno malo (upravo to su veličine onog reda kojeg i sam beskonačno mali interval vremena τ). Stoga je opravdano što se ove promene položaja zanemaruju i što se smatra da se

za vreme trajanja udara položaji tačaka ne menjaju. I zaista, relacija (3) može se napisati u obliku

$$(4) \quad \mathbf{v} - \mathbf{v}_0 = \Delta \mathbf{v} = \frac{1}{m} \mathbf{J}(t),$$

ako je $\mathbf{v}(t_0) = \mathbf{v}_0$ data, određena dolazna brzina, a $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t)$ brzina materijalne tačke u trenutku t ($t_0 < t < t_0 + \tau$) u intervalu udara τ pri čemu smo vrednost impulsa u trenutku t obeležili sa $\mathbf{J}(t)$. Kad se relacija (4) pomnoži sa dt i integriše u intervalu trajanja udara ($t_0, t_0 + \tau$), dobiće se

$$\int_{t_0}^{t_0+\tau} \mathbf{v} dt - \mathbf{v}_0 \int_{t_0}^{t_0+\tau} dt = \frac{1}{m} \int_{t_0}^{t_0+\tau} \mathbf{J} dt$$

i pošto je $\mathbf{v} dt = d\mathbf{r}$ dobićemo

$$(5) \quad \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0 = \mathbf{v}_0 \tau + \frac{1}{m} \mathbf{J}_s \tau = \left(\mathbf{v}_0 + \frac{1}{m} \mathbf{J}_s \right) \tau,$$

gde je $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}(t_0 + \tau)$, $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(t_0)$ a

$$\mathbf{J}_s = \frac{1}{\tau} \int_{t_0}^{t_0+\tau} \mathbf{J} dt,$$

tzv. *srednja vrednost udarnog impulsa* u intervalu vremena ($t_0, t_0 + \tau$) ili kratko *srednji impuls* u intervalu τ . Kako su u (5) veličine \mathbf{v}_0 i \mathbf{J}_s konačne, biće promena

$$(6) \quad \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0 = \Delta \mathbf{r}$$

vektora položaja beskonačno mala, istog reda kao i τ , što smo i hteli da dokažemo.

3.5.8.2. Opšte teoreme dinamike primenjene na udar

Smatra se po pravilu da sve tačke materijalnog sistema imaju udar istovremeno, jer nagla promena brzina jednih tačaka povlači naglu promenu brzina drugih tačaka. Inače same udarne sile mogu biti i spoljašnje i unutrašnje i kako aktivne (date sile) tako i sile reakcije veza. Prema tome su i trenutni impulsi i spoljašnji i unutrašnji.

Teorema količine kretanja za udar. — Kad na materijalne tačke m_i ($i = 1, 2, \dots, n$) nekog materijalnog sistema u nekom trenutku t dejstuju udarne sile \mathbf{F}_i sa impulsima \mathbf{J}_i , prema (3.5.8.1 — 2) biće za svaku tačku sistema

$$(1) \quad m_i \mathbf{v}_i(t_0 + \tau) - m_i \mathbf{v}_i(t_0) = \mathbf{J}_i.$$

Ako se izvrši sabiranje po svim tačkama sistema, prema (3.2.7 — 1) dobiće se

$$\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i(t_0 + \tau) = \mathbf{K}(t_0 + \tau),$$

što predstavlja količinu kretanja posle udara, a

$$\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i(t_0) = \mathbf{K}(t_0)$$

predstavlja količinu kretanja sistema pre udara, tako da je

$$(2) \quad \mathbf{K}(t_0 + \tau) - \mathbf{K}(t_0) = \sum_{i=1}^N \mathbf{J}_i = \mathbf{J},$$

a to je *teorema količine kretanja za udar materijalnog sistema*. Zbir $\sum_{i=1}^N \mathbf{J}_i = \mathbf{J}$ je rezultatni impuls samo spoljašnjih sila jer je zbir impulsa unutrašnjih sila jednak nuli. Zaista (v. odeljak 3.2.2) zbir unutrašnjih sila \mathbf{F}_{ij} kojima tačke sistema dejstvuju jedne na druge jednak je nuli, a stoga je i njihov rezultatni impuls jednak nuli,

$$\int_{t_0}^{t_0 + \tau} \sum_{i,j=1}^N \mathbf{F}_{ij} dt = \mathbf{0}.$$

Na osnovu (3.2.7 — 4) teorema količine kretanja za udar može se u narednom obliku iskoristiti za određivanje promene brzine centra masa sistema pri udaru

$$(3) \quad m \mathbf{v}_C(t_0 + \tau) - m \mathbf{v}_C(t_0) = \mathbf{J},$$

gde je m — masa materijalnog sistema, t_0 — trenutak (moment) udara, $\mathbf{v}(t_0)$ — dolazna brzina centra inercije, a $\mathbf{v}(t_0 + \tau)$ njegova odlazna brzina. Dakle, ako je sistem izolovan (nema dejstva spoljašnjih sila i impulsa), tada se pri udaru ne menja ni količina kretanja sistema ni brzina njegovog centra inercije.

Teorema kinetičkog momenta za udar. — Kinetički moment neke uočene materijalne tačke u trenutku udara biće (u odnosu na neki pol O)

$$\mathbf{l}^O(t_0) = \mathbf{r}_0 \times m \mathbf{v}(t_0) = \mathbf{r}_0 \times m \mathbf{v}_0.$$

Kinetički moment pak te iste materijalne tačke posle udara u odnosu na isti pol O biće s obzirom na (3.5.8.1 — 6)

$$\mathbf{l}^O(t_0 + \tau) = (\mathbf{r}_0 + \Delta \mathbf{r}) \times m \mathbf{v}(t_0 + \tau) = (\mathbf{r}_0 + \Delta \mathbf{r}) \times m \mathbf{v}_1,$$

gde je $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}(t_0 + \tau)$. Prema tome, ukupna promena kinetičkog momenta date materijalne tačke mase m u toku udara biće, s obzirom na (3.5.8.1 — 4, 5 i 6)

$$(4) \quad \begin{aligned} \mathbf{l}^O(t_0 + \tau) - \mathbf{l}^O(t_0) &= \\ &= \mathbf{r}_0 \times (m \mathbf{v}_1 - m \mathbf{v}_0) + \Delta \mathbf{r} \times m \mathbf{v}_1 \\ &= \mathbf{r}_0 \times \mathbf{J} + (m \mathbf{v}_0 + \mathbf{J}_s) \times \mathbf{v}_1 \tau. \end{aligned}$$

Međutim, član $(m \mathbf{v}_0 + \mathbf{J}_s) \times \mathbf{v}_1 \tau$ je mali onog reda koga je i τ , jer su vektori \mathbf{v}_0 , \mathbf{J}_s i \mathbf{v}_1 konačni, pa se može kao izraz teoreme kinetičkog momenta materijalne tačke pri udaru napisati

$$(5) \quad \mathbf{l}^O(t_0 + \tau) - \mathbf{l}^O(t_0) = \mathbf{r}_0 \times \mathbf{J} = \mathbf{L}^O(\mathbf{J}),$$

tj. promena kinetičkog momenta materijalne tačke pri udaru jednaka je momentu trenutnog impulsa u odnosu na isti onaj pol za koji su određeni sami kinetički momenti.

Za materijalni sistem m_i ($i = 1, 2, \dots, n$) dobiće se sabiranjem relacija (5), napisanih za sve tačke sistema, po svim tačkama, prema (3.2.9 — 1 i 5)

$$(6) \quad \mathbf{l}^O(t_0 + \tau) - \mathbf{l}^O(t_0) = \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \times \mathbf{J}_i = \int_{t_0}^{t_0 + \tau} \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i dt = \sum_{i=1}^N \mathbf{L}^O(\mathbf{J}_i),$$

jer je zbir momenata unutrašnjih impulsa jednak nuli.

Rad udarnih sila. — Pri dejstvu udarnih sila promene položaja tačaka materijalnog sistema su, kako smo videli, beskonačno male, ali udarne sile ogromnih intenziteta ipak za vreme trajanja dejstva mogu izvršiti određeni konačni rad. I zaista, npr. i ako je kod materijalne tačke ukupno pomeranje infinitezimalna veličina (3.5.8.1 — 5 i 6)

$$\Delta \mathbf{r} = \left(\mathbf{v}_0 + \frac{1}{m} \mathbf{J}_s \right) \tau$$

biće ukupni rad na pomeranju $\Delta \mathbf{r}$ u intervalu vremena τ određen približno s obzirom na (3.5.8.1 — 2) relacijom

$$\mathbf{F}_s \cdot \Delta \mathbf{r} = \left(\mathbf{v}_0 + \frac{1}{m} \mathbf{J}_s \right) \tau \frac{\mathbf{J}}{\tau} = \left(\mathbf{v}_0 + \frac{1}{m} \mathbf{J}_s \right) \cdot \mathbf{J}$$

i očigledno je konačan.

Tako će ukupni elementarni rad spoljašnjih sila \mathbf{F}_i u nekom intervalu $(t, t + dt)$ koji je sadržan u intervalu $(t_0, t_0 + \tau)$, u kome dejstvuju udarne sile, biti

$$(7) \quad dA = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{r}_i = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{v}_i dt.$$

Ako se sa $\mathbf{J}(t)$ obeleži impuls u nekom trenutku t , ($t_0 < t < t_0 + \tau$) a sa $d\mathbf{J}$ promena impulsa od trenutka t do trenutka $t + dt$, može se prethodna relacija (7) napisati u obliku

$$(8) \quad dA = \sum_{i=1}^N \mathbf{v}_i \cdot d\mathbf{J}_i.$$

Prema obrascu (3.5.8.1 — 4) koji važi za materijalnu tačku može se za promenu brzine u intervalu (t_0, t) ma koje materijalne tačke sistema napisati

$$(9) \quad \mathbf{v}_i(t) - \mathbf{v}_{i0} = \frac{1}{m_i} \mathbf{J}_i(t).$$

Unošenjem vrednosti \mathbf{v}_i odavde u (8) dobiće se za elementarni rad pri udaru obrazac

$$(10) \quad dA = \sum_{i=1}^N \left[\frac{1}{m_i} \mathbf{J}_i(t) + \mathbf{v}_{i0} \right] \cdot d\mathbf{J}_i.$$

Vrednost impulsa u trenutku $t_0 + \tau$ obeležimo kratko sa \mathbf{J}_i , tj. neka bude $\mathbf{J}_i(t_0 + \tau) = \mathbf{J}_i$, onda se integracijom relacije (10) u intervalu od t_0 do $t_0 + \tau$ dobiva za ukupni rad udarnih sila za vreme trajanja udara obrazac

$$(11) \quad A = \sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{2m_i} \mathbf{J}_i^2 + \mathbf{v}_{i0} \cdot \mathbf{J}_i \right).$$

Međutim, s obzirom na (9), ako se stavi $\mathbf{v}_i(t_0 + \tau) = \mathbf{v}_{i1}$, biće

$$\frac{1}{m_i} \mathbf{J}_i = \mathbf{v}_{i1} - \mathbf{v}_{i0}$$

i pošto je

$$\frac{1}{m_i} \mathbf{J}_i^2 = \frac{1}{m_i} \mathbf{J}_i \cdot \mathbf{J}_i,$$

može se najzad napisati

$$(12) \quad A = \sum_{i=1}^N \frac{\mathbf{v}_{i1} + \mathbf{v}_{i0}}{2} \cdot \mathbf{J}_i.$$

Ova relacija predstavlja *Kelvinov obrazac* za rad udarnih sila.

Dalamberov princip za udar. — Ako su u relaciji (3.3.1.1 — 4)

$$(13) \quad \sum_{i=1}^N (\mathbf{F}_i - m_i \mathbf{w}_i) \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0.$$

koja predstavlja *Dalamberov princip*, \mathbf{F}_i udarne sile, onda se množenjem te relacije diferencijalom vremena dt dobiva

$$(14) \quad \sum_{i=1}^N (\mathbf{F}_i dt - m_i d\mathbf{v}_i) \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0.$$

Integracijom ove relacije u intervalu od t_0 do $t_0 + \tau$ dobiće se

$$(15) \quad \sum_{i=1}^N [\mathbf{J}_i - m_i (\mathbf{v}_{i1} - \mathbf{v}_{i0})] \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0,$$

koja predstavlja *izraz Dalamberovog principa za udar*, gde je \mathbf{v}_{i0} brzina tačke čija je masa m_i u trenutku udara, a $\mathbf{v}_{i1} = \mathbf{v}(t_0 + \tau)$ brzina te i -te tačke posle udara.

U analogiji sa *Dalamberovom silom inercije*, vektor $-m_i (\mathbf{v}_{i1} - \mathbf{v}_{i0})$ naziva se *inercioni udarni impuls te tačke*, a $\mathbf{J}_i - m_i (\mathbf{v}_{i1} - \mathbf{v}_{i0})$ je *izgubljeni udarni impuls te tačke*. Prema tome *Dalamberov princip* se može iskazati rečima: *Ukupni virtualni rad izgubljenih udarnih impulsa jednak je nuli.*

Ako se sa $\Delta \mathbf{v}_i = \mathbf{v}_{i1} - \mathbf{v}_{i0}$ obeleži ukupna promena brzine tačke čija je masa m_i pri udaru, može se obrazac (15) napisati pomoću Dekartovih pravouglanih koordinata u obliku

$$(16) \quad \sum_{i=1}^N [(I_{ix} - m_i \Delta \dot{x}_i) \delta x + (I_{iy} - m_i \Delta \dot{y}_i) \delta y + (I_{iz} - m_i \Delta \dot{z}_i) \delta z] = 0,$$

gde je $\Delta \mathbf{v}_i = \{\Delta \dot{x}_i, \Delta \dot{y}_i, \Delta \dot{z}_i\}$.

3.5.8.3. Udar sistema o nepokretnu vezu

Ako je m_i ($i = 1, 2, \dots, N$) neki materijalni sistem koji se kreće pod dejstvom datih aktivnih sila i zadržavajućih veza, diferencijalne jednačine kretanja tačaka tog sistema biće

$$(1) \quad m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = \mathbf{F}_i, \quad (i = 1, 2, \dots, N)$$

pri čemu smo ovde sa \mathbf{F}_i označili rezultante svih sila (aktivnih i reakcija veza) koje dejstvuju na tačke uočenog sistema. Sem zadržavajućih veza čije su reakcije uključene u jednačine kretanja (1) neka je sloboda sistema ograničena i jednom nezadržavajućom skleronomnom vezom

$$(2) \quad f(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N) \equiv f(\mathbf{r}_i) \geq 0.$$

U trenutku t_0 kaže se da je sistem *udario o vezu*, ako u tom trenutku koordinate tačaka sistema (svih ili samo nekih od njih) mesto nejednakosti (2) zadovoljavaju jednakost

$$f(\mathbf{r}_i) = 0.$$

Sam proces udara može se podeliti u dve faze. Obe faze traju veoma kratko tako da se impulsi konačnih sila \mathbf{F}_i iz relacije (1) za vreme trajanja udara mogu zanemariti. Faze udara određene su sa tri trenutka, t_0 , $t_1 = t_0 + \tau_1$ i $t_0 + \tau = t_1 + \tau_2$; $\tau = \tau_1 + \tau_2$.

Prva faza počinje u trenutku t_0 kad tačke sistema dospevaju na vezu. Ako su konačne jednačine kretanja sistema

$$(3) \quad \mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(t), \quad (i = 1, 2, \dots, N)$$

veza (2) je za $t < t_0$ izražena nejednakošću

$$(4) \quad f[\mathbf{r}_i(t)] > 0.$$

U trenutku t_0 vektori položaja $\mathbf{r}_i(t_0) = \mathbf{r}_{i0}$ pretvaraju nejednakost (4) u jednakost

$$(5) \quad f[\mathbf{r}_i(t_0)] = 0.$$

To je *trenutak udara* ili *trenutak uspostavljanja veze*. Trenutak udara se određuje kao najmanja pozitivna nula jednačine

$$(6) \quad f[\mathbf{r}_i(t)] = 0.$$

Brzine $\dot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{v}_i$ tačaka sistema u trenutku t_0 su *brzine dolaska* na vezu.

Brzine dolaska nisu moguće brzine za vezu (2). Uslov koji brzine tačaka sistema treba da zadovoljavaju da bi bile moguće, u slučaju unilateralne veze, je

$$(7) \quad \frac{df}{dt} = \sum_{i=1}^N \text{grad}_i f \cdot \mathbf{v}_i \geq 0.$$

Da je ovo tačno odmah se uviđa na ovaj način. Naime, u slučaju unilateralne veze (2), koja se kad se vektori položaja pojedinih tačaka materijalnog sistema posmatraju kao funkcije vremena, tj. $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(t)$, može kratko napisati

$$(8) \quad f(t) \geq 0,$$

očigledno je da, dok veza ne deluje, nema ograničenja kretanju i sistem se kreće kao slobodan. Međutim, ako je sistem stupio u trenutku t_0 na vezu, biće

$$(9) \quad f(t_0) = 0.$$

Posle toga u nekom trenutku $t_0 + \Delta t$ može biti

$$(10) \quad f(t_0 + \Delta t) \geq 0$$

tj. sistem može ostati na vezi ali može se i odvojiti od veze (osloboditi). Oduzimanjem (9) od (10) i deobom sa Δt može se napisati

$$(11) \quad \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t} \geq 0.$$

Odavde se međutim određivanjem granične vrednosti za $\Delta t \rightarrow 0$ dobiva traženi uslov koji brzine tačaka materijalnog sistema zadovoljavaju u slučaju skleronomne unilateralne veze u obliku (7), što smo i hteli da pokažemo.

Dok pre dolaska brzine tačkaka sistema moraju zadovoljavati uslov

$$(12) \quad \frac{df}{dt} = \sum_{i=1}^N \text{grad}_i f \cdot \mathbf{v}_i > 0,$$

u trenutku dolaska brzine više ne ispunjavaju taj uslov, jer ih veza sprečava da nastave kretanje prema jednačinama (3), tako da je

$$(13) \quad \left(\frac{df}{dt}\right)_0 = \sum_{i=1}^N \text{grad}_i f \cdot \mathbf{v}_{i0} < 0.$$

Za vreme prve faze udara, u vremenskom razmaku (t_0, t_1) , $t_1 = t_0 + \tau_1$, na tačke sistema veza deluje silom reakcije konačnog impulsa koja nemoguće brzine \mathbf{v}_{i0} pretvara u moguće \mathbf{v}_{i1} koje će zadovoljavati uslov (7), tako da u trenutku $t_0 + \tau_1$, na kraju prve faze, bude

$$(14) \quad \left(\frac{df}{dt}\right)_1 = \sum_{i=1}^N \text{grad}_i f \cdot \mathbf{v}_{i1} = 0.$$

Ako je veza idealna, sila reakcije veze koja deluje na tačku m_i je, prema (3.2.3 — 9)

$$(15) \quad \mathbf{R}_i = \lambda \text{grad}_i f,$$

pa su diferencijalne jednačine kretanja za vreme prve faze

$$(16) \quad m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = \mathbf{F}_i + \lambda \text{grad}_i f.$$

Ako se ove jednačine pomnože diferencijalom vremena dt i izvrši integraljenje u vremenskom intervalu (t_0, t_1) u kome se odigrava prva faza dobiće se

$$(17) \quad m_i \mathbf{v}_{i1} - m_i \mathbf{v}_{i0} = \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{F}_i dt + \int_{t_0}^{t_1} \lambda \text{grad}_i f dt.$$

Impulsi konačnih sila \mathbf{F}_i u tom vremenskom razmaku su beskonačno mali i zanemarljivi. Kako se za vreme udara koordinate tačkaka sistema ne menjaju i kako je uočena veza skleronomna, to će $\text{grad}_i f$ za vreme prve faze udara biti nepromenljivo. Stoga će impulsi udarnih sila reakcije biti određeni obrascem

$$(18) \quad \mathbf{J}_{i1} = \text{grad}_i f \int_{t_0}^{t_1} \lambda dt = \Lambda_1 \text{grad}_i f,$$

gde smo stavili

$$\Lambda_1 = \int_{t_0}^{t_1} \lambda dt.$$

Relacija (17) predstavlja promenu količine kretanja tačkaka sistema za vreme prve faze udara.

Na kraju prve faze sistem ili nastavlja da se kreće po vezi ili vezu opet napušta. U prvom slučaju udar je završen u trenutku t_1 i tačke sistema nastavljaju da se kreću po vezi (2) kao po bilateralnoj vezi. U drugom slučaju nastupa druga faza udara u kojoj se u vremenskom intervalu (t_1, t_2) , gde je $t_2 = t_0 + \tau$, a

$\tau = \tau_1 + \tau_2$, brzine \mathbf{v}_{i1} menjaju i postaju ponovo nemoguće (sa stanovišta jed - n a k o s t i (6), tj. veza ponovo prestaje da djeluje i brzine zadovoljavaju nejednakost oblika (12), tako da je na kraju druge faze, u trenutku t_2 ,

$$(19) \quad \left(\frac{df}{dt}\right)_2 = \sum_{i=1}^N \text{grad}_i f \cdot \mathbf{v}_{i2} > 0.$$

U drugoj fazi udara na tačke sistema djeluju sile reakcije (15) sa impulsima

$$(20) \quad \mathbf{J}_{i2} = \int_{t_1}^{t_2} \lambda \text{grad}_i f dt = \text{grad}_i f \int_{t_1}^{t_2} \lambda dt = \Lambda_2 \text{grad}_i f,$$

gde je

$$\Lambda_2 = \int_{t_1}^{t_2} \lambda dt,$$

pa je promena količine kretanja u drugoj fazi

$$(21) \quad m_i \mathbf{v}_{i2} - m_i \mathbf{v}_{i1} = \mathbf{J}_{i2}.$$

Brzine \mathbf{v}_{i2} na kraju druge faze udara su *brzine odlaska* sa veze.

Za idealne veze su, prema (18) i (20), impulsi kolinearni sa gradijentima veze pa se stoga za udar o idealnu vezu kaže da je *idealna*.

Ukupna promena količine kretanja tačaka sistema za vreme udara je $m_i \mathbf{v}_{i2} - m_i \mathbf{v}_{i0}$. Sabiranjem relacija (17) i (21) dobiće se obrazac

$$(22) \quad m_i \mathbf{v}_{i2} - m_i \mathbf{v}_{i0} = \mathbf{J}_{i1} + \mathbf{J}_{i2} = \mathbf{J}_i,$$

koji odgovara teoremi količine kretanja za udar (3.5.8.2 — 1).

Da bi se odredio trenutak t_2 odlaska i brzina \mathbf{v}_{i2} odlaska, potrebno je taj trenutak odrediti iz nejednakosti (19) a to nije moguće. Stoga je za određivanje odlaznih brzina neophodno uvesti neku dopunsku pretpostavku. Ta pretpostavka mora biti saglasna sa eksperimentalnim podacima i odnosi se na karakter udara. Impulsi \mathbf{J}_{i1} i \mathbf{J}_{i2} su kolinearni ali brzine odlaska i dolaska ne moraju biti jednake veličine, kao ni intenziteti tih impulsa. Stoga se može pretpostaviti da se veličine udarnih impulsa u prvoj i drugoj fazi udara nalaze u izvesnom određenom odnosu

$$(23) \quad \frac{J_{i2}}{J_{i1}} = \frac{\Lambda_2}{\Lambda_1} = \varepsilon,$$

a koeficijent ε se određuje eksperimentalnim putem i naziva se *koeficijent uspostavljanja (restitucije)*. Kad je koeficijent uspostavljanja poznat može se s obzirom na prethodnu relaciju napisati

$$(24) \quad \mathbf{J}_{i2} = \varepsilon \mathbf{J}_{i1},$$

pa se iz (22) dobiva

$$(25) \quad m_i \mathbf{v}_{i2} - m_i \mathbf{v}_{i0} = (1 + \varepsilon) \mathbf{J}_{i1},$$

odakle se mogu odrediti brzine odlaska kad su množioc Λ_1 i Λ_2 impulsnih reakcija (18) i (20) poznati.

U slučaju udara materijalne tačke o nepokretnu površ koeficijent uspostavljanja ima veoma jednostavnu geometrijsku interpretaciju. Neka je $f(x, y, z) = 0$ jednačina površi i neka je \mathbf{v}_0 dolazna brzina uočene materijalne tačke na tu površ. Dolazna brzina obrazuje sa normalom \mathbf{n} po-

vrši ugao $180^\circ - \alpha$, pri čemu je (sl. 170) α (udarni ugao), a odlazna brzina $\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}(t_0 + \tau)$ obrazuje sa normalom \mathbf{n} ugao β (odbojni ugao); α i β su oštri uglovi. I dolazna i odlazna brzina mogu se rastaviti u po dve komponente, duž normale \mathbf{n} na površ (v_{0n} , v_{2n}) i u tangentnoj ravni površi (v_{0t} , v_{2t}), pri čemu su (v_{0n} , v_{2n}) i (v_{0t} , v_{2t}) normalne projekcije brzina \mathbf{v}_0 i \mathbf{v}_2 na pravac normale i na tangentsku ravan. Algebarske vrednosti tih komponenta biće, ako su v_0 i v_2 intenziteti dolazne i odlazne brzine

$$(26) \quad \begin{aligned} v_{0n} &= -v_0 \cos \alpha, & v_{0t} &= v_0 \sin \alpha; \\ v_{2n} &= v_2 \cos \beta, & v_{2t} &= v_2 \sin \beta. \end{aligned}$$

Brzina \mathbf{v}_1 tačke na kraju prve faze udara nalazi se u tangentskoj ravni površi, jer je tada prema (14)

$$\left(\frac{df}{dt}\right)_1 = \text{grad } f \cdot \mathbf{v}_1 = 0.$$

Prema tome ako se relacije (17) i (21), koje za jednu materijalnu tačku glase

$$(27) \quad m \mathbf{v}_1 - m \mathbf{v}_0 = \mathbf{J}_1,$$

$$m \mathbf{v}_2 - m \mathbf{v}_1 = \mathbf{J}_2,$$

pomnože skalarno jediničnim vektorom $\mathbf{n} = \text{grad } f / |\text{grad } f|$ normale na vezi dobiće se relacije

$$-mv_{0n} = J_1, \quad mv_{2n} = J_2.$$

Prema (23) i (26) može se onda napisati

$$(28) \quad \frac{J_2}{J_1} = -\frac{v_{2n}}{v_{0n}} = \frac{v_2 \cos \beta}{v_0 \cos \alpha} = \varepsilon.$$

Razmera projekcija brzina u tangentskoj ravni biće

$$(29) \quad \frac{v_{2t}}{v_{0t}} = \frac{v_2 \sin \beta}{v_0 \sin \alpha} = 1 - \lambda,$$

gde je λ koeficijent tangentskog trenja. I taj se koeficijent određuje eksperimentalno za svaki par tela pri udaru (ovde materijalna tačka i nepokretna površ).

Kako je na osnovu (26)

$$\text{tg } \alpha = -\frac{v_{0t}}{v_{0n}}, \quad \text{tg } \beta = \frac{v_{2t}}{v_{2n}},$$

može se s obzirom na (28) i (29) napisati

$$(30) \quad \frac{\text{tg } \alpha}{\text{tg } \beta} = \frac{\varepsilon}{1 - \lambda}.$$

Uopšte razlikuju se naredni granični slučajevi vrednosti koeficijenata uspostavljanja i koeficijenata trenutnog trenja:

$\varepsilon = 0$, tela su neelastična, udar je potpuno neelastičan;

$\varepsilon = 1$, tela su elastična, udar je potpuno elastičan;

$\lambda = 0$, tela su glatka, udar je idealan;

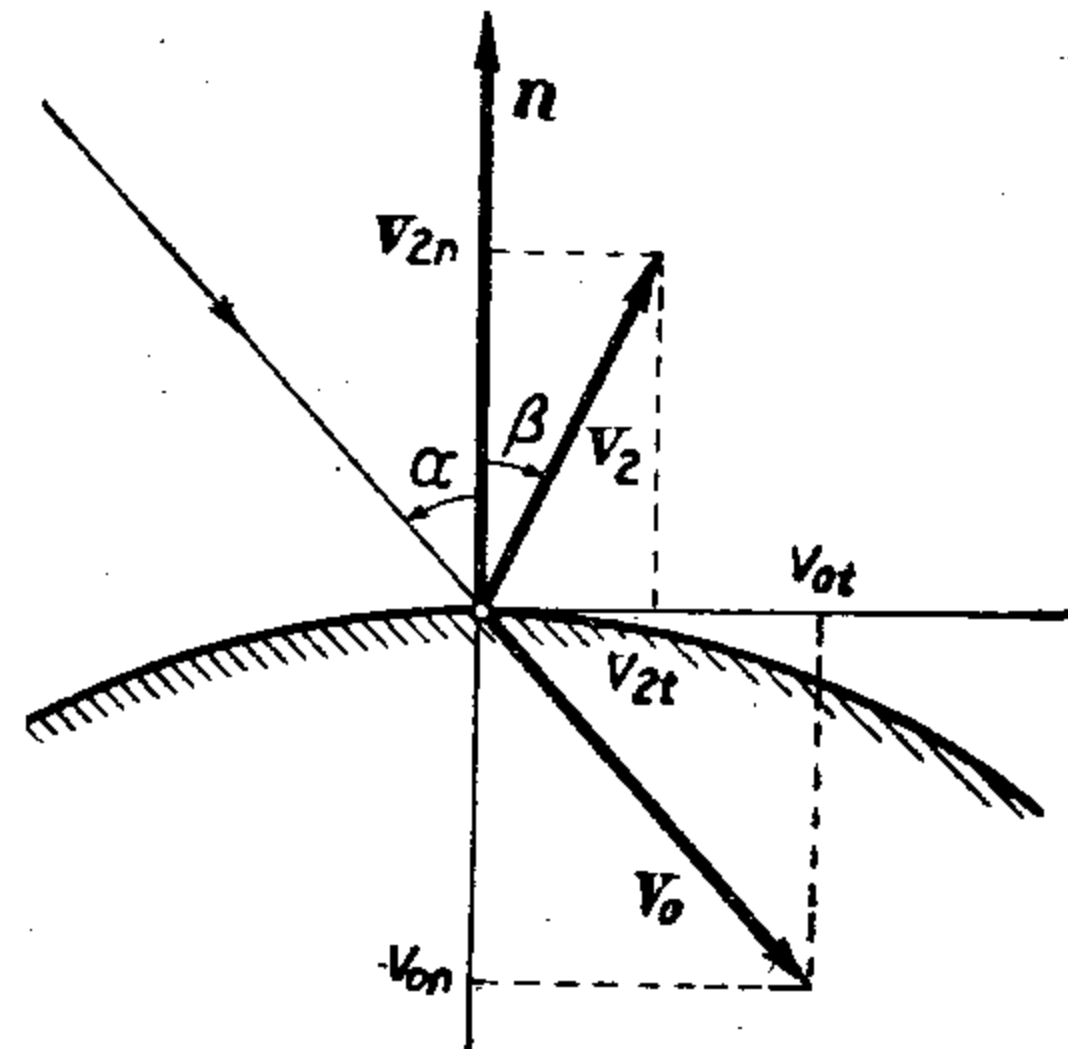
$\lambda = 1$, tela su potpuno hrapava.

Na osnovu raznih ispitivanja koeficijenti ε i λ ostaju uvek u narednim granicama

$$(31) \quad 0 \leq \varepsilon \leq 1, \quad 0 \leq \lambda \leq 1.$$

U slučaju udara materijalne tačke o nepokretnu površ obično se uzima da je udar idealan, tj da je $\lambda = 0$. Tada se ukupna promena količine kretanja \mathbf{J} u toku udara dobiva sabiranjem izraza (27), koji određuju impulse u toku prve i druge faze udara, dakle

$$(32) \quad m \mathbf{v}_2 - m \mathbf{v}_0 = \mathbf{J}_1 + \mathbf{J}_2 = \mathbf{J}.$$



Slika 170

Projiciranjem ove relacije na tangentnu ravan (skalarnim množenjem jediničnim vektorom \mathbf{t} u tangentnoj ravni) dobiva se s obzirom na (29)

$$\mathbf{J} \cdot \mathbf{t} = mv_2 \sin \beta - mv_0 \sin \alpha = 0.$$

Prema tome je u slučaju idealnog udara ukupni trenutni impuls \mathbf{J} kolinearano sa normalom površi na mestu udara, pa je tada $\mathbf{J} = J \mathbf{n}$.

Ako se jednačina (32) projicira na normalu površi dobiće se s obzirom na (26) i (28)

$$J = mv_2 \cos \beta + mv_0 \cos \alpha = mv_0(1 + \varepsilon) \cos \alpha,$$

pa se za ukupni impuls pri idealnom udaru materijalne tačke o nepokretnu površ može napisati najzad obrazac

$$(33) \quad \mathbf{J} = mv_0(1 + \varepsilon) \cos \alpha \mathbf{n}.$$

Kad je udar materijalne tačke o nepokretnu površ idealan ($\lambda = 0$) i potpuno elastičan ($\varepsilon = 1$) iz (28) i (29) se dobiva

$$|v_0| \cos \alpha = |v_2| \cos \beta; \quad |v_0| \sin \alpha = |v_2| \sin \beta,$$

i najzad s obzirom na obrazac (30), koji se u ovom slučaju svodi na

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \beta,$$

dobivamo

$$|v_0| = |v_2|.$$

Dakle, za idealan i potpuno elastičan udar materijalne tačke o nepokretnu površ veličine dolazne i odlazne brzine su jednake i te brzine obrazuju sa normalom na površ, u tački udara jednake uglove.

U trenutku dolaska na vezu kinetička energija materijalnog sistema je

$$T_0 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i v_{i0}^2,$$

na kraju prve faze udara kinetička energija će biti

$$T_1 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i v_{i1}^2,$$

i najzad na kraju druge faze, u trenutku odlaska sa veze, ona iznosi

$$T_2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i v_{i2}^2.$$

Promena kinetičke energije u toku prve i druge faze biće onda određena relacijama

$$(34) \quad T_1 - T_0 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (v_{i1}^2 - v_{i0}^2),$$

$$(35) \quad T_2 - T_1 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (v_{i2}^2 - v_{i1}^2),$$

pa je ukupna promena kinetičke energije za vreme udara

$$(36) \quad T_2 - T_0 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (v_{i2}^2 - v_{i0}^2).$$

Ako se relacije (17) i (21) pomnože skalarno vektorom \mathbf{v}_{i1} i izvrši sabiranje po svim tačkama sistema, pošto se iskoriste obrasci (18) i (20) dobiće se

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N m_i (v_{i1}^2 - \mathbf{v}_{i0} \cdot \mathbf{v}_{i1}) &= \Lambda_1 \sum_{i=1}^N \text{grad}_i f \cdot \mathbf{v}_{i1}, \\ \sum_{i=1}^N m_i (\mathbf{v}_{i2} \cdot \mathbf{v}_{i1} - v_{i1}^2) &= \Lambda_2 \sum_{i=1}^N \text{grad}_i f \cdot \mathbf{v}_{i1}. \end{aligned}$$

Međutim, s obzirom na (14), pošto su brzine \mathbf{v}_{i1} moguće brzine za bilateralnu vezu $f = 0$, biće

$$(37) \quad \begin{aligned} \sum_{i=1}^N m_i (v_{i1}^2 - \mathbf{v}_{i0} \cdot \mathbf{v}_{i1}) &= 0, \\ \sum_{i=1}^N m_i (\mathbf{v}_{i2} \cdot \mathbf{v}_{i1} - v_{i1}^2) &= 0. \end{aligned}$$

Ako se prva od ovih relacija oduzme od (34) dobiće se

$$(38) \quad T_1 - T_0 = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (\mathbf{v}_{i1} - \mathbf{v}_{i0})^2,$$

a ako se druga od relacija (37) oduzme od (35) biće

$$(39) \quad T_2 - T_1 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (\mathbf{v}_{i2} - \mathbf{v}_{i1})^2.$$

Promena brzine, $\mathbf{v}_{i1} - \mathbf{v}_{i0} = \mathbf{u}_{i1}$, u prvoj fazi udara naziva se *izgubljena brzina*, a promena brzine u drugoj fazi, $\mathbf{v}_{i2} - \mathbf{v}_{i1} = \mathbf{u}_{i2}$, je *dobivena brzina*. Odgovarajuće promene kinetičke energije u prvoj i drugoj fazi su

$$(40) \quad T_1 - T_0 = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i u_{i1}^2 \equiv T_{10},$$

$$(41) \quad T_2 - T_1 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i u_{i2}^2 \equiv T_{21}.$$

Relacije (40) i (41) predstavljaju *prvu i drugu Karnoovu (Carnot) teoremu*. Prva teorema tvrdi da se u prvoj fazi udara kinetička energija sistema smanjuje za veličinu kinetičke energije koja odgovara izgubljenim brzinama, dok druga teorema tvrdi da se u drugoj fazi udara kinetička energija sistema povećava za veličinu kinetičke energije koja odgovara dobivenim brzinama.

Ako se uvede ukupna izgubljena brzina pri udaru obrascem

$$\mathbf{v}_{i2} - \mathbf{v}_{i0} = \mathbf{u}_i,$$

kinetička energija koja odgovara ukupnim izgubljenim brzinama biće

$$(42) \quad T_{02} = \frac{1}{2} \sum_{i=2}^N m_i (\mathbf{v}_{i2} - \mathbf{v}_{i0})^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i u_i^2.$$

Prema obrascima (22) i (25) ta se energija može izraziti i obrascem

$$(43) \quad T_{02} = \frac{(1 + \varepsilon)^2}{2} \sum_{i=1}^N \frac{1}{m_i} J_{i1}^2.$$

Ukupna promena kinetičke energije pri udaru (36) sistema o nepokretnu vezu može se izračunati sabiranjem relacija (38) i (39), a ako se pri tome iskoriste i relacije (17), (18), (21) i (24) dobiće se

$$(44) \quad T_2 - T_0 = \frac{\varepsilon^2 - 1}{2} \sum_{i=1}^N \frac{1}{m_i} J_{i1}^2.$$

Relacije (43) i (44) ukazuju na zavisnost promene kinetičke energije od koeficijenta uspostavljanja i udarnih impulsa u prvoj fazi udara. Ako se iz tih dvaju relacija eliminišu udarni impulsi dobiće se *Karnoov obrazac*

$$(45) \quad T_2 - T_0 = -\frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon} T_{02},$$

koji izražava *generalisanu Karnoovu teoremu* o promeni ukupne kinetičke energije pri udaru o nepokretnu vezu: *Pri udaru materijalnog sistema o nepokretnu vezu ukupna kinetička energija u trenutku napuštanja veze jednaka je ukupnoj kinetičkoj energiji sistema u trenutku dolaska na vezu umanjenoj za $\frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon} T_{02}$, gde je T_{02} kinetička energija sistema koja odgovara ukupnim izgubljenim brzinama.*

Iz obrasca (45) se vidi da za potpuno elastičan udar ($\varepsilon = 1$) uopšte nema gubitka kinetičke energije. Za potpuno neelastičan udar ($\varepsilon = 0$) je taj gubitak najveći

$$T_2 - T_0 = -T_{02}.$$

Međutim za takav udar je, prema (24), $\mathbf{J}_{i2} = \mathbf{0}$, a onda prema (21) biće $\mathbf{v}_{i2} = \mathbf{v}_{i1}$, što znači da pri potpuno neelastičnom udaru posle isteka prve faze brzine tačaka sistema ostaju i dalje upravne na gradijent veze. Usled toga tačke ne napuštaju vezu a sama veza deluje dalje na sistem kao zadržavajuća ($f = 0$).

3.5.8.4. Dejstvo udarnih sila na kruto telo

Opšte formulacije (3.5.8.2 — 2, 3), teorema količine kretanja i teorema kinetičkog momenta za udar koje važe za materijalni sistem mogu se neposredno primeniti na kruto telo. Za kruto telo je, prema (3.5.1.2 — 11)

$$(1) \quad \mathbf{k} = \text{grad}_{\mathbf{v}_A} T = m \mathbf{v}_C,$$

$$(2) \quad \mathbf{l}^A = \text{grad}_{\boldsymbol{\omega}} T.$$

Ako u nekom vremenskom intervalu (t_0, t_1) na kruto telo dejstvuje udarni impuls \mathbf{J} sa udarnim momentom $\mathbf{L}^A(\mathbf{J}) = \mathbf{L}^A$, teoreme količine kretanja i kinetičkog momenta za udar dovode do narednih vektorskih relacija za kruto telo

$$(3) \quad \mathbf{K}_2 - \mathbf{K}_0 = m(\mathbf{v}_{C_2} - \mathbf{v}_{C_0}) = \mathbf{J},$$

$$(4) \quad \mathbf{l}_2^A - \mathbf{l}_1^A = \text{grad}_{\omega_2} T - \text{grad}_{\omega_0} T = \mathbf{L}^A.$$

Projiciranjem relacije (3) na ose nepokretnog koordinatnog sistema $Oxyz$ dobiće se tri skalarnе jednačine

$$(5) \quad \begin{aligned} m(\dot{x}_{C_2} - \dot{x}_{C_0}) &= J_x, \\ m(\dot{y}_{C_2} - \dot{y}_{C_0}) &= J_y, \\ m(\dot{z}_{C_2} - \dot{z}_{C_0}) &= J_z, \end{aligned}$$

iz kojih se može odrediti promena brzine centra inercije tela pri udaru, ako je \mathbf{J} poznat vektor.

Projiciranjem relacije (4) na ose pokretnog koordinatnog sistema $A\xi\eta\zeta$, ako se za pokretni pol uzme centar inercije tela, prema (3.5.1.3 — 16) dobiće se tri skalarnе jednačine

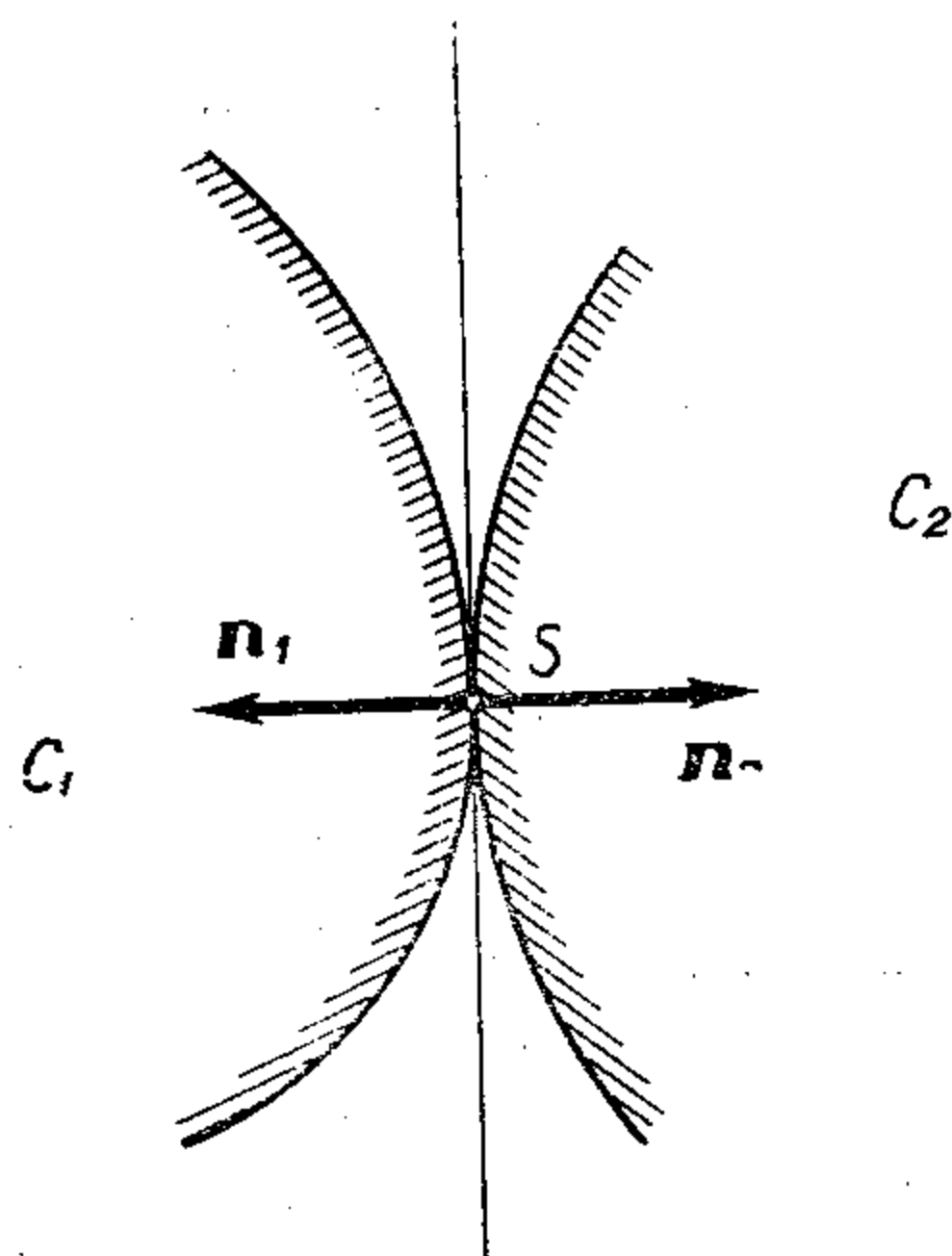
$$(6) \quad \begin{aligned} I_{\xi}^C(p_2 - p_0) + \Pi_{\xi\eta}^C(q_2 - q_0) + \Pi_{\xi\zeta}^C(r_2 - r_0) &= L_{\xi}^C, \\ \Pi_{\eta\xi}^C(p_2 - p_0) + I_{\eta}^C(q_2 - q_0) + \Pi_{\eta\zeta}^C(r_2 - r_0) &= L_{\eta}^C, \\ \Pi_{\zeta\xi}^C(p_2 - p_0) + \Pi_{\zeta\eta}^C(q_2 - q_0) + I_{\zeta}^C(r_2 - r_0) &= L_{\zeta}^C. \end{aligned}$$

Iz ovih se relacija mogu odrediti promene vektora trenutne ugaone brzine kad je poznat moment $\mathbf{L}(\mathbf{J})$ udarnog impulsa.

3.5.8.5. Sudar dva tela

Neka se dva tela kreću tako da su im brzine centara inercije C_i ($i = 1, 2$) date vektorima \mathbf{v}_{C_i} , a trenutne ugaone brzine vektorima $\boldsymbol{\omega}_i$. Ako u nekom trenutku t_0 dođe do udara jednog tela o drugo kaže se da je došlo do njihovog *sudara*. Osnovni zadatak u proučavanju sudara jeste da se odrede brzine centara inercije i trenutne ugaone brzine, tj. vektori $\mathbf{v}_{C_{i2}}$ i $\boldsymbol{\omega}_{i2}$ oba tela u trenutku završetka sudara, kad su poznati $\mathbf{v}_{C_{i0}}$ i $\boldsymbol{\omega}_{i0}$ oba tela u trenutku t_0 sudara kao i vrednost ϵ koeficijenta uspostavljanja.

U trenutku sudara površi tela se dodiruju u jednoj tački, *tački sudara* S i u toj tački imaju zajedničku tangentnu ravan (sl. 171). Impulsi reakcija (pretpostavljamo da je sudar idealan) u trenutku sudara jednaki su i kolinearni sa normalom na zajedničku tangentnu ravan u tački sudara, ali su suprotno orijentisani. Ako se stavi da je normala na tangentnu ravan usmerena ka telu 1 određena vektorom $\mathbf{n}_1 = \mathbf{n}$, za telo 2 biće $\mathbf{n}_2 = -\mathbf{n}$. Udarni impulsi biće onda



Slika 171

$$(1) \quad \mathbf{J}_1 = J\mathbf{n}, \quad \mathbf{J}_2 = J\mathbf{n}_2 = -J\mathbf{n}.$$

Neka je položaj tačke udara u telu 1 određen vektorom položaja $\vec{\rho}_1 = \vec{C_1S}$ i u telu 2 vektorom položaja $\vec{\rho}_2 = \vec{C_2S}$ u odnosu na odgovarajuće centre masa tela, C_1 i C_2 .

Prema (3.5.8.4 — 3 i 4) promene količine kretanja i kinetičkog momenta za vreme udara biće

$$(2) \quad m_1 \Delta \mathbf{v}_{C_1} = \mathbf{J}, \quad m_2 \Delta \mathbf{v}_{C_2} = -\mathbf{J},$$

$$(3) \quad \Delta \mathbf{L}_1 = \vec{\rho}_1 \times \mathbf{J}, \quad \Delta \mathbf{L}_2 = \vec{\rho}_2 \times \mathbf{J}_2 = -\vec{\rho}_2 \times \mathbf{J},$$

gde je m_i masa i -tog tela, $\mathbf{v}_{C_i} = \mathbf{v}_{C_i2} - \mathbf{v}_{C_i0}$ promena brzine centra masa C_i i -tog tela, a

$$\Delta \mathbf{L}_i = \mathbf{I}_{i2}^{C_i} - \mathbf{I}_{i0}^{C_i}$$

je promena kinetičkog momenta i -tog tela pri sudaru.

Za celokupni sistem od dva tela prilikom sudara količina kretanja i kinetički moment sistema ostaju nepromenjeni.

Sabiranjem dve relacije (2) dobiće se neposredno da je

$$(4) \quad m_1 \Delta \mathbf{v}_{C_1} + m_2 \Delta \mathbf{v}_{C_2} = \mathbf{J} - \mathbf{J} = \mathbf{0},$$

čime je prvi deo tvrđenja dokazan. Za dokaz drugog dela tvrđenja neka je C centar inercije celog sistema, tj. za oba tela koja su se sudarila, tako da su centri inercije C_1 i C_2 određeni u odnosu na C vektorima $\vec{CC_1}$ i $\vec{CC_2}$. Tada je

$$\vec{CC_1} = \vec{CS} - \vec{C_1S}, \quad \vec{CC_2} = \vec{CS} - \vec{C_2S}.$$

Kad se promeni pol, prema obrascu (3.5.1.3 — 5) za i -to telo biće

$$\mathbf{I}_i^C = \mathbf{I}_i^{C_i} + \vec{CC_i} \times m_i \mathbf{v}_{C_i},$$

tako da se promena kinetičkog momenta i -tog tela za pol C može izraziti obrascem

$$\Delta \mathbf{L}_i^C = \Delta \mathbf{L}_i^{C_i} + \vec{CC_i} \times m_i \Delta \mathbf{v}_{C_i},$$

a s obzirom na (2) i (3) biće

$$\Delta \mathbf{L}_i^{C_i} + \vec{CC_i} \times m_i \Delta \mathbf{v}_{C_i} = \vec{\rho}_i \times \mathbf{J}_i + \vec{CC_i} \times \mathbf{J}_i.$$

Ukupna promena kinetičkog momenta za oba tela zajedno dobiće se sabiranjem ovih relacija za dva tela, tako da je

$$\Delta \mathbf{L}_1^{C_1} + \vec{CC_1} \times m_1 \Delta \mathbf{v}_{C_1} + \Delta \mathbf{L}_2^{C_2} + \vec{CC_2} \times m_2 \Delta \mathbf{v}_{C_2} = \vec{CD} \times \mathbf{J} + \vec{CD} \times (-\mathbf{J}) = \mathbf{0},$$

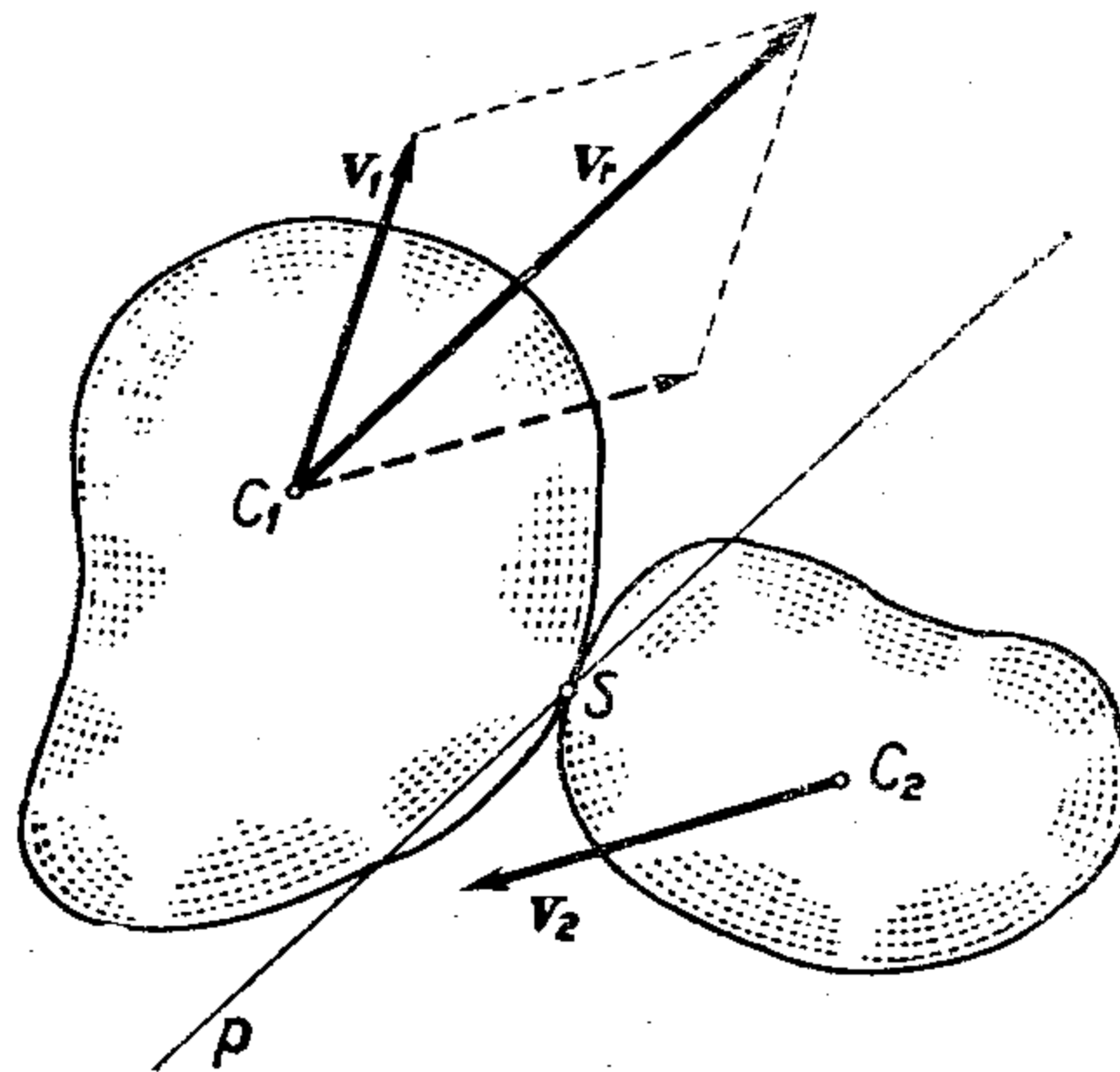
a time je i drugi deo tvrđenja dokazan.

Za određivanje pet veličina, četiri vektora $\Delta \mathbf{v}_{C_1}$, $\Delta \mathbf{v}_{C_2}$, $\Delta \boldsymbol{\omega}_1$ i $\Delta \boldsymbol{\omega}_2$ i jednog skalara J na raspolaganju su četiri vektorske jednačine (2) i (3). Za određivanje intenziteta trenutnog impulsa J potrebna je još jedna skalarna relacija. Za to se mogu iskoristiti Karnoove teoreme o promeni kinetičke energije pri udaru.

U opštem slučaju nalaženje intenziteta udarnog impulsa J veoma je složeno. Međutim u slučaju tzv. centralnog sudara taj je problem nešto jednostavniji.

Prava p (sl. 172) koja prolazi kroz tačku sudara S a koja je paralelna relativnoj brzini $\mathbf{v}_{C_1} - \mathbf{v}_{C_2}$ centara masa u početnom trenutku t_0 sudara zove se *prava linija*.

sudara. Sudar će biti *centralni*, ako ova prava p prolazi kroz centre mase oba tela inače je *necentralni* (*ekscentrični*). Osim toga je sudar *normalan* (*upravan*), ako je prava sudara upravna na elementarnoj površini dodira tela pri sudaru, inače je *kos*.



Slika 172

Dve faze sudara ovde se sastoje iz prve, od trenutka t_0 dodira do trenutka t_1 najvećeg priljublivanja oba tela, i druge koja traje od trenutka t_1 do trenutka t_2 ponovnog odvajanja tela.

Pri centralnom normalnom sudaru brzine \mathbf{v}_{C_1} i \mathbf{v}_{C_2} centara inercije oba tela su kolinearne pa su uglovi α i β (udarni i odbojni ugao) za oba tela koje vektori brzine centara mase tela obrazuju sa pravom p sudara jednaki, a obrasci (3.5.8.3 — 28, 29) mogu se stoga napisati u jednostavnom obliku (ulaze samo relativne brzine)

$$(5) \quad \varepsilon = \frac{v_{C_2 n_2} - v_{C_1 n_2}}{v_{C_2 n_0} - v_{C_1 n_0}}, \quad 1 - \lambda = \frac{v_{C_2 t_2} - v_{C_1 t_2}}{v_{C_2 t_0} - v_{C_1 t_0}}$$

U slučaju upravnog centralnog sudara neka m_1 i m_2 budu mase tela koja se kreću translatorno brzinama čije su algebarske vrednosti v_1 i v_2 do sudara a znak imaju prema smeru po pravoj sudara. Neka brzine tih tela posle sudara budu \bar{v}_1 i \bar{v}_2 i neka je v zajednička brzina u trenutku najvećeg priljublivanja. Tada, pošto se pri sudaru spoljašnje konačne sile ne uzimaju u obzir, a pošto se količina kretanja pri sudaru ne menja, biće

$$(6) \quad m_1 \bar{v}_1 + m_2 \bar{v}_2 = (m_1 + m_2) v = m_1 v_1 + m_2 v_2,$$

odakle je

$$(7) \quad v = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}.$$

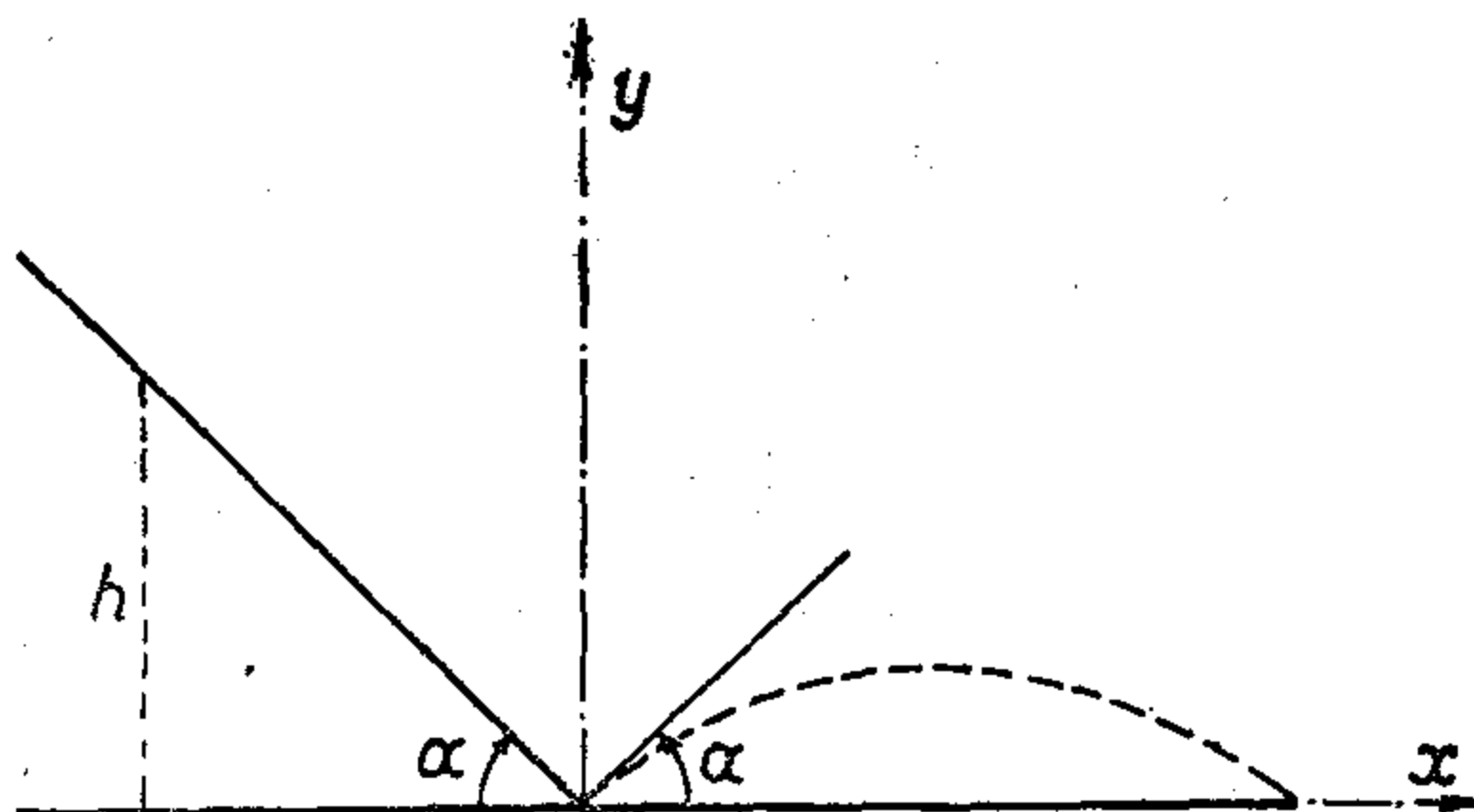
Ako se iskoristi prvi obrazac (5) dobiće se za brzinu tela u trenutku odvajanja najzad obrasci

$$\bar{v}_1 = v + \varepsilon (v_2 - v_1) \frac{m_2}{m_1 + m_2},$$

$$\bar{v}_2 = v + \varepsilon (v_1 - v_2) \frac{m_1}{m_1 + m_2}.$$

Primeri i zadaci

1. Teška tačka M kreće se bez trenja niz strmu ravan nagnutu prema horizontalnoj ravni Π pod uglom α (sl. 173). Tačka M polazi iz stanja mira sa visine h iznad ravni Π . Udar tačke o ravan Π je idealan i potpuno elastičan. Odrediti trenutak i položaj sledećeg udara tačke M o ravan Π .



Slika 173

Iz integrala energije dobiva se brzina tačke u trenutku udara u ravan Π . Integral energije je

$$\frac{1}{2} m v_1^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = U_1 - U_0,$$

gde je $U = -mgy$ funkcija sile tačke M . Pošto je udar idealan i potpuno elastičan odbojni ugao β jednak je udarnom uglu α a brzina tačke se ne menja, tako da se problem dalje svodi na problem kosog hica odakle se nalazi udaljenje položaja drugog udara od položaja prvog

$$x = 2h \sin 2\alpha,$$

kao i vreme T proteklo između ta dva udara, $T = 2\sqrt{2h/g} \sin \alpha$.

2. Teška materijalna tačka M je pomoću nerastegljivog konca dužine a vezana za nepomičnu tačku O . Ako je tačka M puštena bez početne brzine iz početnog položaja A (sl. 174) sa visine h iznad nivoa tačke O da slobodno padne, ona će u izvesnom trenutku prestati da se kreće kao slobodna. Odrediti na kojoj će visini tačka M nastaviti da se kreće kao slobodna.

Za koordinatni sistem Oxy (u vertikalnoj ravni) na slici 174 funkcija sile uočene tačke M je

$$U = -mgy, \quad U_0 = -mgh.$$

U položaju B tačka M , padajući kao slobodna po putanji AB , prestaje da bude slobodna. U tačku B stiže brzinom v_B koja se može dobiti iz integrala energije

$$\frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = mgh + mgh, \quad v_0 = 0,$$

tj.

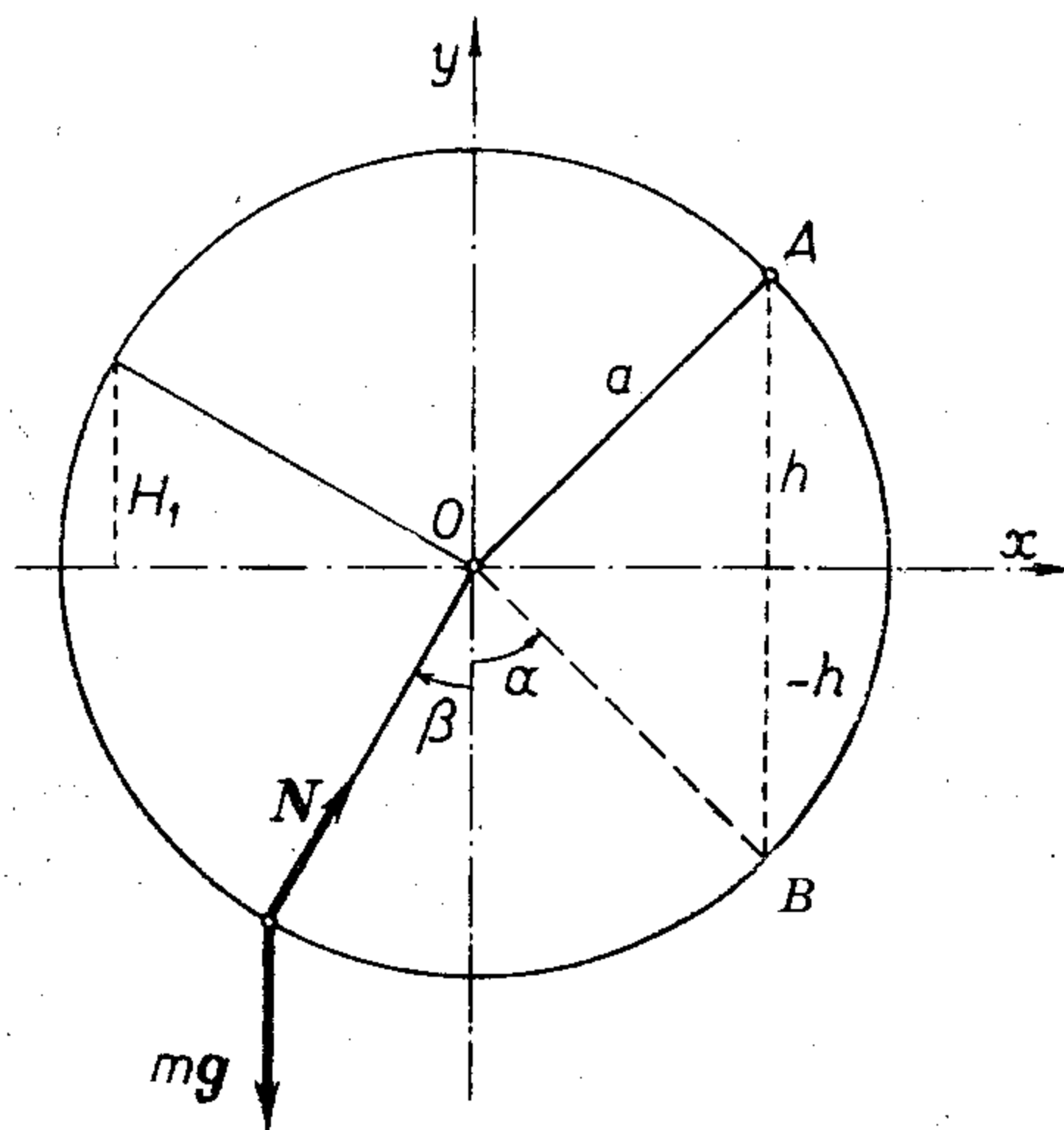
$$v_B^2 = 4gh.$$

U tački B materijalna tačka trpi potpuno neelastičan udar i nastavlja da se kreće po krugu brzinom

$$v_1 = v_B \sin \alpha, \quad \cos \alpha = \frac{h}{a}.$$

Za kretanje po krugu postoji integral energije

$$\frac{1}{2} mv^2 - \frac{1}{2} mv_1^2 = -mgy - mgh$$



Slika 174

iz koga se dobiva da bi se tačka M , kad bi krug predstavljao bilateralnu vezu, zastavila na visini ($v = 0$)

$$H_1 = \frac{v_1^2}{2g} - h = (2 \sin^2 \alpha - 1) h.$$

Vidi se da je

$$H_1 \leq h.$$

Da bi nastupio trenutak kada tačka opet postaje slobodna treba da je visina zastavljanja iznad nivoa tačke O a ispod nivoa najviše tačke kruga, tj.

$$0 < H_1 < a,$$

a to će biti za

$$2 \sin^2 \alpha - 1 > 0, \quad 0 < h < a.$$

Drugi uslov se svodi, zbog $\cos \alpha = h/a$, na

$$0 < \cos \alpha < 1.$$

Otuda se dobiva

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

(za $\alpha = \frac{\pi}{2}$ biće $h = a \cos \alpha = 0$). Pošto je $h = a \cos \alpha < a$ (jer je $\alpha \neq 0$) to je gornji interval potreban i dovoljan za ispunjenje traženog uslova.

Pošto je veza nezadržavajuća, teška tačka M postaje opet slobodna u položaju u kome je reakcija veze jednaka nuli. Da bi se ta visina odredila potrebno je izračunati normalnu reakciju iz prirodne diferencijalne jednačine kretanja u odnosu na normalu

$$\frac{mv^2}{a} = -mg \cos \beta + R.$$

Kako je iz integrala energije

$$v^2 = v_1^2 - 2g(h+y),$$

biće

$$\frac{R}{m} = \frac{v_1^2 - 2g(h+y)}{a} + g \cos \beta = 0, \quad \cos \beta = -\frac{y}{a},$$

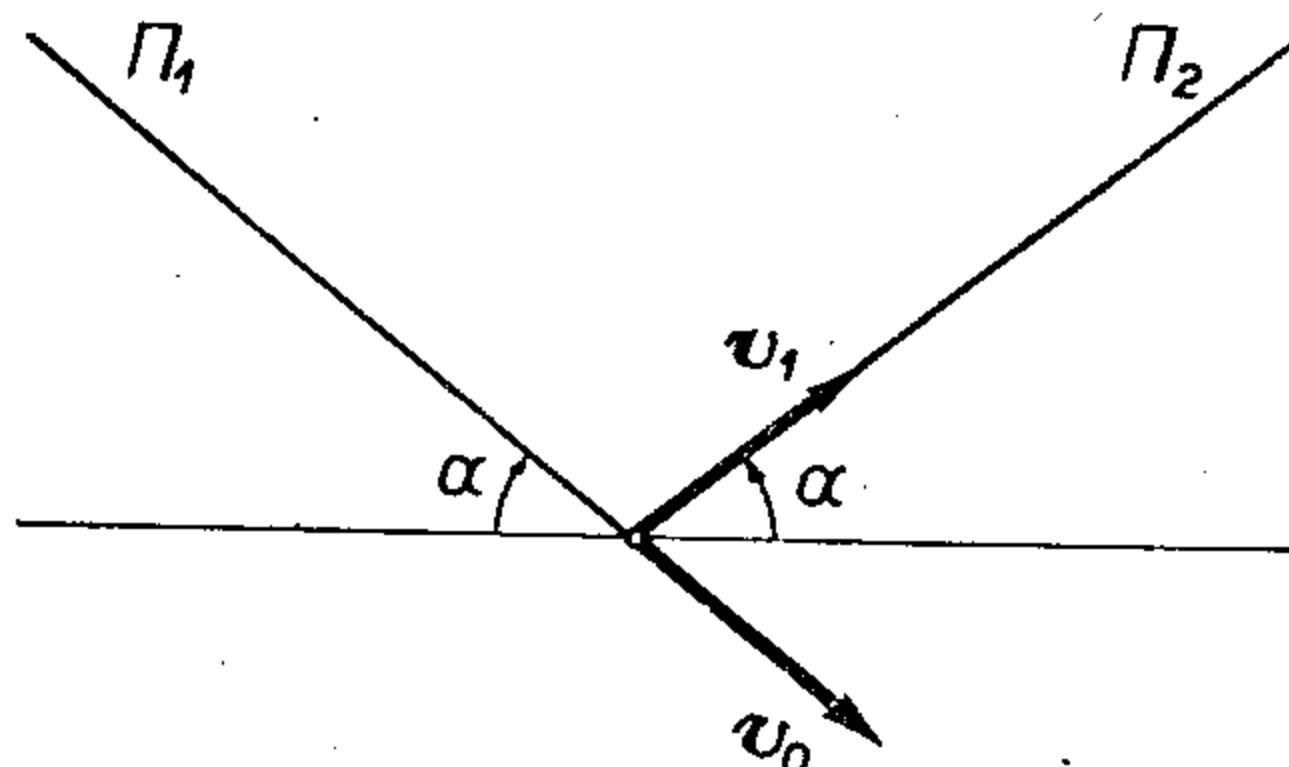
pa se dobiva

$$H = y = \frac{v_1^2 - 2gh}{3g} = \frac{2}{3} (2 \sin^2 \alpha - 1) h.$$

3. Dve kose ravni Π_1 i Π_2 sa zajedničkom horizontalnom pravom L , nagnute su obe pod uglom $\alpha < \frac{\pi}{4}$ prema horizontalnoj ravni. Teška materijalna tačka M , spuštajući se niz ravan Π_1 udara o ravan Π_2 brzinom v_0 . Udar je idealan i potpuno neelastičan. Ravan Π_2 je hrapava. Pokazati da ugao α i koeficijent trenja μ moraju biti u relaciji

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha + \mu}{\operatorname{tg} \alpha - \mu} = 1 + \cos 4\alpha,$$

da bi brzina tačke M pri udaru u ravan Π_1 bila $v_0/\sqrt{2}$.



Slika 175

Brzina v_1 kojom tačka M počinje da se kreće po strmoj ravni Π_2 , ima, kao što se vidi sa slike 175, veličinu

$$v_1 = v_0 \cos 2\alpha.$$

Diferencijalna jednačina kretanja tačke M pri penjanju uz ravan Π_2 je

$$m \frac{dv}{dt} = -mg \sin \alpha - \mu |R_N|, \quad |R_N| = mg \cos \alpha$$

$$\frac{dv}{dt} = -g (\sin \alpha + \mu \cos \alpha),$$

odakle se dobiva da se tačka zaustavlja pošto pređe put $\left(\frac{dv}{dt} = v \frac{dv}{ds}\right)$:

$$s_1 = \frac{v_0^2 \cos^2 2\alpha}{2g (\sin \alpha + \mu \cos \alpha)}.$$

Zatim, prilikom spuštanja, diferencijalna jednačina glasi

$$m \frac{dv}{dt} = -mg \sin \alpha + \mu |R_N|, \quad |R_N| = mg \cos \alpha$$

pa se dobiva da tačka M udara o ravan Π_1 brzinom

$$v_2^2 = 2g (\sin \alpha - \mu \cos \alpha) s_1.$$

Naravno, da bi do tog udara došlo, odnosno da se tačka ne bi zaustavila usled dejstva sile trenja pre dolaska do ravni Π_1 , mora biti

$$\sin \alpha - \mu \cos \alpha = 0.$$

Kada se još u izrazu za v_2^2 stave vrednosti za s_1 i $v_2 = v_0/\sqrt{2}$, dobiva se

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha + \mu}{\operatorname{tg} \alpha - \mu} = 1 + \cos 4\alpha.$$

4. Dve kose ravni Π_1 i Π_2 sa zajedničkom graničnom horizontalnom pravom L , oslanjaju se duž L na horizontalnu ravan prema kojoj su obe nagnute za isti ugao $\alpha < \frac{\pi}{2}$. Teškoj materijalnoj tački M , koja se nalazi na visini h nad pravom

L i podjednako je udaljena od obe strme ravni saopštena je početna brzina v_0 upravna na pravu L . Tačka će udariti o jednu od dve strme ravni, zatim će udariti o drugu i nastaviti da se kreće stalno odbijajući se čas od jedne čas od druge strme ravni. Odrediti v_0 tako da se tačka M stalno kreće po istoj paraboli. Udari tačke o ravni Π_1 i Π_2 su idealni i potpuno elastični. Odrediti period kretanja tačke.

O d g o v o r: $v_0 = 2gh \sin^2 \alpha (1 + \sin^2 \alpha)^{-1/2}$,

$$T = 4 \left[\frac{2h}{g(1 + \sin^2 \alpha)} \right]^{1/2} [(1 + 2 \sin^2 \alpha \operatorname{tg}^2 \alpha)^{1/2} - \sin \alpha \operatorname{tg} \alpha].$$

5. Homogeni štap AB dužine $2a$ nalazi se na glatkoj horizontalnoj ravni. Udar impulsa \mathbf{P} saopšten je štapu u tački na rastojanju b od njegovog centra a sam impuls je horizontalan i upravan na štap. Naći kretanje štapa.

Prema jednačinama (3.5.8.4 — 3, 4) biće, pošto je $\mathbf{v}_C = \mathbf{0}$ i $\boldsymbol{\omega}_0 = \mathbf{0}$,

$$m\mathbf{v}_C = \mathbf{P}, \quad \mathbf{l}^C = \mathbf{q} \times \mathbf{P} = \mathbf{L}^C,$$

gde je m masa štapa, \mathbf{q} vektor položaja tačke udara prema centru štapa a \mathbf{v} brzina centra inercije štapa posle udara. Za ravansko kretanje štapa je $l^C = I^C \omega = \frac{1}{3} ma^2 \omega$, gde je ω ugaona brzina štapa posle udara. Sem toga je $|\mathbf{q} \times \mathbf{P}| = bP$, a vektori \mathbf{l}^C i \mathbf{L}^C su kolnearni pa se može napisati

$$\frac{1}{3} ma^2 \omega = bP .$$

Štap će posle udara početi da se kreće u ravni početnom translatorskom brzinom

$$v_C = \frac{P}{m}$$

u pravcu dejstva impulsa \mathbf{P} i da se obrće oko centra inercije u horizontalnoj ravni ugaonom brzinom

$$\omega = \frac{3bP}{ma^2} .$$

6. Dva jednaka štapa AB i BC mogu slobodno da se obrću oko tačke B . Oba štapa nalaze se u miru na pravoj liniji na glatkoj horizontalnoj ravni. Tački A je u jednom trenutku saopšten udar u pravcu upravnom na AB . Pokazati da će posle udara brzine v_{A2} i v_{B2} biti u razmeri $v_{A2} : v_{B2} = \frac{7}{5}$.

7. Dva jednaka homogena neelastična diska, oba mase m i poluprečnika a , nalaze se na glatkoj horizontalnoj ravni. Jedan disk se obrće oko svog nepomičnog centra O stalnom ugaonom brzinom ω a drugi se kreće translatorsno stalnom brzinom v usmerenom ka centru O prvog diska. Pokazati da će gubitak kinetičke energije pri sudaru iznositi $\frac{m}{2} (v^2 + a^2 \omega^2 / 5)$.

E. UVOD U SPECIJALNU TEORIJU RELATIVNOSTI

4.1. Prostor i vreme u klasičnoj (Njutnovoj) mehanici. Galilejeva transformacija

U toku vekova razvoja nauke od Euklida preko Galileja i Njutna stvorilo se shvatanje prema kome je *prostor* u kome se posmatraju mehaničke pojave *tro-dimenzioni euklidski kontinuum* koji je *homogen* i *izotropan*. Osnovne osobine takvog prostora su u stvari matematičke apstrakcije prostornih osobina onoga što se zove kruto telo. Između ostalog pri tome se pretpostavlja:

1) postojanje nepromenljivog krutog merila (etalona) koji se ne menja pri kretanju;

2) mogućnost da se čitav uočeni prostor posmatra prema nekom Dekartovom pravouglom koordinatnom sistemu.

Smatra se da dužina pri prelazu od jednog Dekartovog pravouglom sistema kao sistema referencije na drugi neki takav isti sistem ostaje *invarijantna*. Međutim, prelaz od jednog takvog sistema u drugi takav sistem može se uvek postići, kako je poznato, kretanjem Dekartovog pravouglom sistema kao krutog tela a ono se svodi na: a) pomeranje početka od koga se računaju koordinate, i b) obrtanje datog koordinatnog sistema oko tog početka u prostoru.

Transformacija koordinata (x^1, x^2, x^3) neke tačke prostora, posmatrane u odnosu na Dekartov pravougli sistem $Ox^1x^2x^3$, u koordinate (X^1, X^2, X^3) te iste tačke, ali posmatrane u odnosu na Dekartov pravougli koordinatni sistem $CX^1X^2X^3$, zovu se *ortogonalne* i definisane su, kako znamo jednačinama

$$(1) \quad X^i = a_j^i x^j + b^i, \quad (i, j = 1, 2, 3)$$

gde konstantni koeficijenti a_j^i zadovoljavaju npr. jednačine

$$(2) \quad \sum_j a_i^j a_k^j = \delta_{ik} \begin{cases} = 1, & \text{za } i = k \\ = 0, & \text{za } i \neq k \end{cases}$$

a determinanta koeficijenata je

$$(3) \quad |a_j^i| = 1.$$

Transformacija (1) može se obrnuti — rešiti po x^i pa se dobiva

$$(4) \quad x^i = \alpha_j^i X^j + \beta^i,$$

gde sistem koeficijenata α_j^i ima slične osobine kao i sistem koeficijenata a_j^i i stoji sa njim u potpuno određenoj vezi.

Transformacija (1) odn. (4) ostavlja dužine očuvane, tj.

$$(5) \quad \delta_{ij} (x_{(2)}^j - x_{(1)}^j)^2 = \delta_{ij} (X_{(2)}^j - X_{(1)}^j)^2,$$

gde su donjim indeksom 1 obeležene koordinate jedne krajnje tačke, a indeksom 2 druge krajnje tačke uočene dužine. Usled očuvanosti dužina pri ovakvim transformacijama ostaju očuvani i svi uglovi, pa i oblik i veličina figura (*kongruencija*).

U klasičnoj mehanici se, pored prostora kao trodimenzionog euklidskog kontinuuma, posmatra, potpuno nezavisno od prostora, *jednodimenzioni kontinuum — vreme*. Vreme teče *apsolutno*, tj. nezavisno od posmatranja u odnosu na ovaj ili onaj sistem referencije. Dakle,

$$(6) \quad t = T,$$

ako je t vreme u odnosu na jedan sistem referencije a T u odnosu na neki drugi. Stoga ostaju pri svim transformacijama očuvani i *vremenski intervali*, tj. uvek je

$$(7) \quad T_{(2)} - T_{(1)} = t_{(2)} - t_{(1)}.$$

Pri tome se smatra da na svim mestima postoje *sinhroni (istovremeni) događaji*, ali se pitanje *kako se ta sinhronost utvrđuje ne postavlja uopšte*.

U pogledu osobina prostora i vremena kao osnovnih pojmova mehanike, pa naravno i osnovnog pojma *mase*, odn. (sile) u klasičnoj mehanici bitnu ulogu igraju *Njutnovi osnovni zakoni mehanike*, koji kao aksiome treba da odrede osnovne pojmove prostora, vremena i mase. U tom smislu su naročito važni prvi i drugi Njutnov zakon. O Njutnovim zakonima je bilo govora u odeljku (2.1), ali su oni tamo bili formulisani onako otprilike kako ih je sam Njutn formulisao. Sad ćemo ih, zadržavajući njihov sadržaj, formulisati ovako:

I. *Postoji sistem referencije u kome se telo, na koje ne dejstvuju nikakve sile, kreće pravolinijski i jednoliko, tj. neubrzano.*

Ovo je sad *zakon inercije* a svaki sistem referencije u kome on važi je *inercioni (inercijalni) sistem*. Tako, ako su koordinate neke tačke x^i određene u odnosu na Dekartov pravougli sistem koordinata $Ox^1x^2x^3$, i na nju ne dejstvuju nikakve sile, onda mora biti (ovde crta označava izvod po vremenu)

$$(8) \quad \ddot{x}^i = 0.$$

II. *U inercionom sistemu brzina promene količine kretanja (izvod količine kretanja po vremenu) proporcionalna je sili koja dejstvuje i orijentisana je isto kao ona (ima isti pravac i smer).*

Kako je količina kretanja materijalne tačke (tela) mase m definisana kao mx'^i , i kako se u klasičnoj mehanici smatra da je

$$m > 0 \quad \text{i} \quad \frac{dm}{dt} = 0,$$

tj. da je masa pozitivna i nepromenljiva u toku vremena, drugi Njutnov zakon, koji se može napisati u obliku

$$(9) \quad \frac{d(mx'^i)}{dt} = f^i,$$

gde su sa f^i obeležene koordinate sile u odnosu na dati Dekartov pravougli koordinatni sistem, svodi se na tzv. *osnovne jednačine klasične dinamike* u obliku

$$(10) \quad mx''^i = f^i.$$

Na ovaj način je utvrđeno da su *ubrzanje tela i sila koja dejstvuje jednako orijentisani vektori na istoj osnovi (kolinearni)* i to je definicija sile u klasičnoj mehanici.

Nije potrebno naročito dokazivati da će svi Dekartovi pravougli koordinatni sistemi, koji miruju jedan prema drugom, biti inercioni, ako je jedan od njih, koji bilo, inercioni sistem. I zaista pri prelazu od koordinatnog sistema $Ox^1x^2x^3$ na $CX^1X^2X^3$ pomoću transformacije (1) od jednačina (8) dobiće se jednačine

$$(11) \quad X''^i = 0,$$

a to znači da zakon inercije ostaje u važnosti i za ovaj sistem.

Međutim, uočimo sad dva Dekartova pravougla koordinatna sistema: jedan $Ox^1x^2x^3$, koji smatramo da miruje, i drugi $\bar{O}\bar{x}^1\bar{x}^2\bar{x}^3$, čije su ose stalno paralelne osama prvog, ali čiji se koordinatni početak \bar{O} kreće ma kako u odnosu na prvi, tj. drugi koordinatni sistem se kreće translatorno prema prvom koordinatnom sistemu. Neka konačne jednačine kretanja početka \bar{O} u odnosu na prvi koordinatni sistem budu

$$(12) \quad \xi^i = \xi^i(t),$$

gde su $\xi^i(t)$ ma koje funkcije vremena. Tada se može postaviti pitanje, *postoje li pokretni inercioni sistemi?* Određivanje novih koordinata \bar{x}^i pomoću starih x^i biće sad očigledno

$$(13) \quad \bar{x}^i = x^i - \xi^i, \quad (i = 1, 2, 3)$$

odakle proističe

$$(14) \quad \bar{x}'^i = x'^i - \xi'^i, \text{ odnosno } x'^i = \bar{x}'^i + \xi'^i.$$

Ove jednačine određuju tzv. *adicionu teoremu brzina* klasične mehanike. One kazuju da je brzina x'^i tačke, u odnosu na posmatrača (laboratoriju u kojoj se vrše posmatranja i merenja) koji miruje u nepokretnom sistemu (kratko sistemu S), jednaka algebarskom zbiru brzine \bar{x}^i te iste tačke u odnosu na posmatrača koji se kreće zajedno sa pokretnim sistemom (kratko sistemom \bar{S}) i brzine ξ'^i sistema \bar{S} prema sistemu S .

Za ubrzanje neke tačke u odnosu na sisteme S i \bar{S} dobiva se sad

$$(15) \quad \bar{x}''^i = x''^i - \xi''^i.$$

Odavde je odmah jasno da sistem \bar{S} u opštem slučaju nije inercioni sistem, iako je to sistem S i obrnuto. Zaista, ako u odnosu na sistem S važe jednačine (8), u odnosu na sistem \bar{S} važiće jednačine

$$(16) \quad \bar{x}'''^i = -\xi'''^i,$$

pa dinamičke jednačine kretanja (10) u odnosu na pokretni sistem u ovom slučaju izgledaju

$$(17) \quad m \bar{x}'''^i = -m \xi'''^i.$$

Dakle, direktno kao posledica ubrzanog kretanja sistema \bar{S} pojavljuje se sila $-m \xi'''^i$ koje u sistemu S nema. Sile $-m \xi'''^i$ se zovu stoga *inercione sile*. Posmatrač koji se kreće zajedno sa sistemom \bar{S} može čisto mehaničkim putem (posmatranjem mehaničkih procesa i mehaničkim merenjem) da utvrdi svoje kretanje prema okolini koja miruje i bez posmatranja te okoline, već samo na osnovu onoga ξ'''^i .

Ako se, međutim, sistem \bar{S} kreće prema sistemu S jednoliko i pravolinijski (bez ubrzanja), tj. ako je

$$(18) \quad \xi^i = a^i t,$$

gde su a^i konstante, tada će biti

$$(19) \quad \xi'^i = a^i, \quad \xi''^i = 0,$$

pa se jednačine (14) odn. (16) svode na

$$(20) \quad \bar{x}'^i = x'^i - a^i, \quad \bar{x}''^i = 0.$$

Prema tome, ovakav pokretni sistem \bar{S} je inercioni. Za posmatrača u sistemu \bar{S} , koji je izolovan od okoline prema kojoj se kreće, nema nikakve mogućnosti da merenjem samo u sistemu \bar{S} utvrdi svoje kretanje.

Dakle, ako se sistem \bar{S} kreće jednoliko i pravolinijski prema sistemu S koji se smatra da miruje, transformacija (13) s obzirom na (18) dobiva izgled

$$(21 a) \quad \bar{x}^i = x^i - a^i t. \quad (i = 1, 2, 3)$$

Ako se tome doda još jednakost

$$(21 b) \quad \bar{t} = t,$$

što izričito podvlači pretpostavku klasične mehanike da je vreme kao promenljiva potpuno nezavisno od izbora koordinatnog sistema i ima istu vrednost u svima, dobiva se tzv. *Galilejeva transformacija*. U odnosu na Galilejevu transformaciju (21 a, b) ostaju osnovne jednačine klasične (Njutnove) dinamike kao i ostale dinamičke jednačine očuvane — *invarijantne po obliku*.

Tako, osnovne jednačine klasične dinamike (10) Galilejevom transformacijom prelaze u jednačine

$$(22) \quad m \bar{x}''^i = \bar{f}^i,$$

pri čemu se Dekartove koordinate f^i vektora sile, posmatrane u odnosu na sistem S , transformišu u slučaju Galilejeve transformacije tako da bude

$$(23) \quad \bar{f}^i = f^i,$$

a masa m je apsolutno nezavisna od koordinatnog sistema.

Galilejeva transformacija ostavlja i dužine očuvane, jer se odmah dobiva da će biti

$$(24) \quad \delta_{ij} (\bar{x}_{(2)}^j - \bar{x}_{(1)}^j)^2 = \delta_{ij} (x_{(2)}^j - x_{(1)}^j)^2.$$

Ove činjenice, koje su posledica usvojenih pretpostavki, ističu se i kao *princip relativnosti klasične mehanike* ili *Galilej-Njutnov princip relativnosti* i formulišu ovako:

Osnovne jednačine dinamike su invarijantne u odnosu na Galilejevu transformaciju. To znači — osnovne jednačine dinamike ne zavise od toga da li se posmatraju u odnosu na neki sistem referencije, koji se smatra da je u miru, ili u odnosu na koji drugi sistem referencije koji se prema ovom kreće jednoliko i pravolinijski.

Međutim, svi pojmovi klasične mehanike nisu invarijantni u odnosu na Galilejevu transformaciju. Tako, npr. Galilejeva transformacija ne ostavlja po pravilu brzine nepromenjenim. Prema tome kinetička energija tela

$$(25) \quad \frac{1}{2} m \sum_{i=1}^3 (x'^i)^2,$$

određena prema sistemu S , menja se i postaje posle Galilejeve transformacije u odnosu na pokretni sistem \bar{S}

$$(26) \quad \frac{1}{2} m \sum_{i=1}^3 (\bar{x}'^i + a^i)^2.$$

Dakle, klasična definicija kinetičke energije nije invarijantna u odnosu na Galilejevu transformaciju. Čak, kad je kinetička energija nekog pokretnog tela konstantna, postoji među koordinatnim sistemima, koji se kreću jednoliko i pravolinijski jedan prema drugom, uvek jedan u odnosu na koji će kinetička energija tela biti jednaka nuli.

4.2. Relativističko shvatanje prostora i vremena. Pojam sinhronosti. Konstantnost brzine svetlosti

Iz prethodnih izlaganja se vidi da su mehanički procesi posmatrani sa stanovišta klasične mehanike invarijantni prema Galilejevoj transformaciji. Međutim, protiv izuzetne apsolutne uloge vremena u klasičnoj mehanici prvenstveno, a zatim i u smeru traženja neke transformacije opštije od Galilejeve, koja bi obuhvatala npr. i prostiranje talasa, počele su se razvijati nove ideje i to pre svega kod Poenkarea (H. Poincaré) i Lorenca (N. H. Lorentz). To je dovelo Ajnštajna da u svom radu „Zur Elektrodynamik bewegter Körper“ (Prilog elektrodinamici pokretnih tela), *Annalen der Physik*, 17 (1905) iznese svoje gledište kako se mogu izvesti neka uopštenja, koja će omogućiti da se ne samo mehaničke pojave već i elektrodinamičke (one koje su određene Meksvelovim jednačinama), obuhvate jednom transformacijom koja će sve te pojave ostavljati invarijantnim u odnosu na sve koordinatne sisteme koji se jedan u odnosu na drugi kreću jednoliko i pravolinijski. Pri tome se misli naravno samo na one elektromagnetske pojave koje se tumače talasnom prirodom a ne na nuklearne procese. Naime, u klasičnoj fizici se ranije pretpostavljalo da elektromagnetske talase prenosi *etar*, neka hipotetična supstanca protivrečnih osobina.

Tako su stvoreni novi osnovi mehanike, nazvane *relativistička (Ajnštajnova) mehanika*, ili tačnije *specijalna teorija relativnosti*. U toj novoj mehanici treba opet imati pred očima kako će se nekim sistemom osnovnih zakona (aksioma, postulata) odrediti osnovni pojmovi prostora, vremena i mase ili sile.

U specijalnoj teoriji relativnosti se usvaja da je prostor trodimenzioni euklidski kontinuum sa mogućnošću posmatranja u odnosu na Dekartov pravougli sistem kao sistem referencije i koji je kao i u klasičnoj mehanici homogen i izotropan, ali se pitanje pojma vremena rešava sasvim drukčije. Vreme ostaje jedno-dimenzioni kontinuum, ali više nije apsolutna promenljiva, nezavisna od sistema referencije u kome se posmatra i stoga, videćemo kasnije, može zajedno sa prostorom da obrazuje novi uopšteni jedinstveni prostor tzv. *čtetvorodimenzioni svet*. Za Ajnštajnovu koncepciju vremena od presudnog su značaja dve činjenice.

Prva se sastoji u tome, što se ogledima nije mogla utvrditi zavisnost brzine prostiranja svetlosti od toga da li se prostiranje posmatra u odnosu na neki sistem referencije koji smatramo da miruje ili u odnosu na sistem koji se prema ovom kreće. U tom pogledu je naročito značajan Majkelson-Morlijev eksperiment (Michelson-Morley), izveden prvi put 1887. godine i kasnije ponavljan više puta, da bi se utvrdila brzina Zemlje prema etru odn. da bi se utvrdilo da li i kako brzina prostiranja svetlosti zavisi od brzine kretanja sistema referencije u odnosu

na onaj koji se posmatra. Tako na primer, ako se pretpostavi da se svetlosni talasi prostiru u etru koji miruje prema Zemlji i Zemlja uzme kao pokretni sistem referencije, tada bi na osnovu adicione teoreme brzina klasične mehanike morala brzina svetlosti posmatrana u odnosu na Zemlju biti u smeru kretanja Zemlje $c-v$, a u suprotnom smeru $c+v$, ako je $c = 300\,000$ km/sec (tačnije 299 800 km/sec) brzina svetlosti, $v = 30$ km/sec (tačnije 29,8 km/sec) brzina Zemlje po njenoj putanji oko Sunca.

Međutim, vrlo tačna merenja, radi kojih su bili konstruisani i naročiti instrumenti (Majkelsonov interferometar, jer je trebalo razliku u brzinama utvrditi interferencijom svetlosnih talasa), nisu dala nikakve razlike u jednom i u drugom slučaju. Brzina svetlosti c pokazala se nezavisna od kretanja sistema referencije, tj. ona je u odnosu na sve sisteme referencije ostala ista. Ajnštajn je tu eksperimentalnu činjenicu iskoristio i u osnovu svojih razmatranja uneo *postulat o konstantnosti brzine svetlosti u vakuumu*, koji se ovako može formulisati:

Brzina prostiranja svetlosti u vakuumu u svim pravcima je ista i nezavisna od kretanja samog svetlosnog izvora.

Na taj način hipoteza o nekakvoj sredini — etru — u kojoj se prenose elektromagnetski i svetlosni talasi postala je nepotrebna.

Uočimo dva naša ranija Dekartova pravouglava koordinatna sistema S i \bar{S} koji se jedan u odnosu na drugi kreću u vakuumu jednoliko i pravolinijski i zamislimo tačkast svetlosni izvor koji emituje svetlost iz zajedničkog početka u trenutku poklapanja oba sistema ($O \equiv \bar{O}$). Tada će, ako se vreme u oba sistema računa od trenutka emisije svetlosti, svetlost za t sekunada dostići u sistemu S sfernim talasom do sfere

$$(1) \quad x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = 0,$$

a u odnosu na sistem \bar{S} za \bar{t} sekunada do sfere

$$(1') \quad \bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \bar{z}^2 - c^2 \bar{t}^2 = 0,$$

gde je c , brzina svetlosti u vakuumu, univerzalna apsolutna konstanta.

Prema tome, i na osnovu ostalih dosadašnjih izlaganja, u novoj teoriji osnovne karakteristike prostora i vremena određene su zahtevima:

- 1) da se svako telo na koje ne dejstvuje sila kreće jednoliko i pravolinijski, i
- 2) da se odredi takva transformacija koja će levu stranu jednačine (1) pretvarati u levu stranu jednačine (1'), tj. ostvarivati

$$(2) \quad x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = \bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \bar{z}^2 - c^2 \bar{t}^2,$$

kad se sistem \bar{S} kreće jednoliko i pravolinijski u odnosu na sistem S koji se smatra u miru.

Odmah je jasno da se drugi zahtev ne može postići pomoću Galilejeve transformacije, ali se ne može ostvariti ni nekom drugom transformacijom, ako se uzme da se vreme pri prelazu od jednog sistema referencije na drugi ne menja, kao što je to slučaj u klasičnoj mehanici, tj. kad se uzme da je $\bar{t} = t$.

Druga činjenica je u tome, što se sad prvi put svesno postavlja pitanje *sinhronosti (istovremenosti)* dva događaja na raznim mestima. Kako smo videli, klasična mehanika pretpostavlja da sinhronost događaja na raznim mestima postoji, ali ne daje nikakvo objašnjenje kako se to utvrđuje. Ajnštajn postavlja prosto

pitanje: na koji se način može utvrditi sinhronost dva događaja na raznim mestima, odn. na koji se način može utvrditi da dva časovnika na raznim, pa čak i vrlo udaljenim, mestima pokazuju isto vreme? Fizički je jasno da ta dva časovnika treba uporediti a sem svetlosnih i radio-talasa drugih nekih brzih signala za to nema. Svetlosni signali se, međutim, ne prostiru trenutno. Prema tome, ako je u trenutku emitovanja svetlosnog signala u mestu A vreme jednako t_A , a mesto B je udaljeno od mesta A za AB , onda se ovako razmišlja. Svetlosni signal emitovan u A u trenutku t_A dolazi u B u trenutku t_B i tamo se odmah reflektuje prema A i dolazi u mesto A u trenutku \bar{t}_A . Ako brzina svetlosti ne zavisi od smera prostiranja, što se uzima kao dokazano (postulat o izotropnosti prostora), onda mora biti

$$t_B - t_A = \bar{t}_A - t_B,$$

tj.

$$(3) \quad t_B = \frac{t_A + \bar{t}_A}{2}.$$

Dakle, ovako određeno vreme t_B mora pokazivati časovnik u mestu B u trenutku dolaska signala emitovanog iz A , ako časovnici u oba mesta rade sinhrono. Posle ovako utvrđene sinhronosti događaja, zasnovane na brzini prostiranja svetlosti, tačno je da kad časovnik u A radi sinhrono sa časovnikom u B a ovaj sa časovnikom u C , onda i časovnici u A i C rade sinhrono itd.

Usvajanjem prethodnih osobina prostora i vremena postaje jasno:

1) da se trodimenzioni prostorni kontinuum posmatran u sistemu u kome miruje može smatrati kao euklidski u punom smislu reči; i

2) da se u jednom sistemu referencije u kome miruju može zamisliti da svi časovnici rade sinhrono.

Međutim, svetlost i zakoni prostiranja svetlosti sad igraju osnovnu ulogu u definisanju ne samo vremena već i prostornih pojmova preko načina merenja geometrijskih veličina. Već u klasičnoj mehanici se konstantnost merila (etalona) dužine kontroliše sravnjivanjem sa dužinom svetlosnih talasa. Prenošanjem merila mogu se u stvari utvrditi samo vrlo kratka rastojanja. Merenje većih rastojanja na Zemlji se izvodi pomoću triangulacije, a ona se zasniva na pretpostavci o pravolinijskom prostiranju svetlosti. U astronomskim razmerama rastojanja se određuju isključivo pomoću brzine prostiranja svetlosti. I vrlo važan način određivanja rastojanja radiolokacijom zasniva se na prostiranju radio-talasa. Prema tome, geometrija (merenje dužina) zasnovana na osobinama krutih tela nije sigurno dovoljna pa je očigledno da se merenje dužina mora sasvim zasnovati na brzini prostiranja svetlosti.

Kako se svetlosni i radio-talasi prostiru sfernim talasima treba naći takvu transformaciju koja će relaciju (2) ostavljati invarijantnom.

4.3. Lorencova transformacija

Nova transformacija koja ispunjava zahteve postavljene u prethodnom paragrafu nosi po svom pronalazaču ime *Lorencova transformacija*. Međutim, pre nego što pristupimo određivanju same Lorencove transformacije, da podvučemo da ona ne znači samo da takva transformacija treba da ostavi oblik jednačine (4.2—1) i (4.2—1') nepromenjen već i svake druge jednačine oblika

$$(1) \quad s^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2.$$

Naime, tražena transformacija će zadovoljavati uslov (4.2—2), pa prema tome zaista ostavlja invarijantnom svaku vrednost s^2 uočene kvadratne forme, a ne samo njenu vrednost jednaku nuli. Ako se uoče, kako se to kaže, dve beskonačno bliske tačke i beskonačno mali interval vremena, tada pri Lorencovoj transformaciji ostaje invarijantan izraz

$$(2) \quad ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2.$$

Nije potrebno ni naglašavati da se kao osnovna kvadratna forma, čija se invarijantnost pri Lorencovoj transformaciji zahteva, može uzeti i

$$(3) \quad \sigma^2 = c^2 t^2 - (x^2 + y^2 + z^2),$$

odn.

$$(4) \quad d\sigma^2 = c^2 dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2)$$

i da je za to dovoljna ista transformacija kao u prethodnom slučaju.

Određivanje Lorencove transformacije može se naravno postaviti sasvim opšte, pa kad se uvedu oznake

$$(5) \quad x = x^1, \quad y = x^2, \quad z = x^3, \quad ic t = x^4,$$

odn.

$$(5') \quad \bar{x} = \bar{x}^1, \quad \bar{y} = \bar{x}^2, \quad \bar{z} = \bar{x}^3, \quad ic \bar{t} = \bar{x}^4,$$

tražiti da se očuva invarijantnost kvadratne forme

$$s^2 = \delta_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta.$$

Tada se traži homogena linearna transformacija oblika

$$(6) \quad \bar{x}^\alpha = \lambda_\beta^\alpha x^\beta, \quad (\alpha, \beta = 1, 2, 3, 4)$$

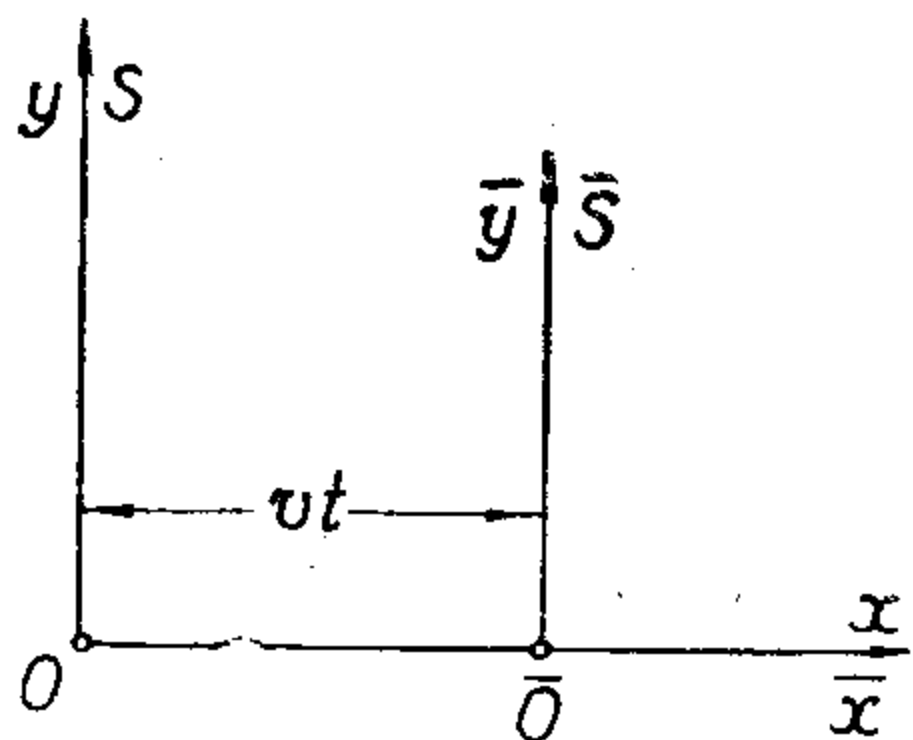
gde su λ_β^α konstantni, jer sistem \bar{S} zadržava stalnu orijentaciju u prostoru (jednolika i pravolinijska translacija bez rotacije). Ti koeficijenti zadovoljavaju uslove

$$(7) \quad \lambda_\gamma^\alpha \lambda_\beta^\gamma = \delta_\beta^\alpha,$$

odn.

$$(7') \quad \lambda_\alpha^\gamma \lambda_\gamma^\beta = \delta_\alpha^\beta,$$

kojih ima deset različitih, jer se pri razmeni indeksa α i β uočena jednačina ne menja. Uslovi (7) odn. (7') su tzv. uslovi ortogonalnosti transformacije (6), ali ona ipak *nije ortogonalna* u pravom smislu reči, već *unitarna* (*pseudo-ortogonalna*), jer sve promenljive x^α nisu realne.



Slika 176

Nas, međutim, i ne interesuje opšti oblik Lorencove transformacije, već ma koji njen specijalni slučaj da bismo odatle mogli izvesti određene zaključke o osobinama prostora i vremena posmatranih u odnosu na jednoliko kretanje sistema. Radi toga ćemo uočiti slučaj, kad se sistem \bar{S} kreće jednoliko i pravolinijski stalnom brzinom v u odnosu na S i to tako da se u početnom trenutku vremena ($t = \bar{t} = 0$) oba sistema poklapaju a kretanje izvodi u smeru x -ose (sl. 176) (z -osa se zamišlja upravno na ravni Oxy). Na taj način će koordinate početka \bar{O} sistema \bar{S} u odnosu na sistem S u nekom trenutku vremena \bar{t} biti

$$(8) \quad x = vt, \quad y = z = 0.$$

U ovom specijalnom slučaju Galilejeva transformacija bi glasila

$$(9) \quad \bar{x} = x - vt, \quad \bar{y} = y, \quad \bar{z} = z, \quad \bar{t} = t.$$

Izraz (4.2—2) se u našem specijalnom slučaju svodi na

$$(10) \quad x^2 - c^2 t^2 = \bar{x}^2 - c^2 \bar{t}^2$$

jer će, pri uvedenim pretpostavkama, i u novoj transformaciji biti

$$(11) \quad \bar{y} = y, \quad \bar{z} = z,$$

kao i u slučaju Galilejeve transformacije.

Naime, sigurno je da npr. $y = 0$ povlači $\bar{y} = 0$, jer se ose x i \bar{x} poklapaju. Međutim, ako je tako, mora biti uopšte

$$(12) \quad \bar{y} = ay,$$

gde je a neka konstanta koja može zavisiti i od brzine v sistema \bar{S} u odnosu na sistem S . Unapred se ne sme pretpostaviti da će biti baš svako $\bar{y} = y$, jer se ne zna da li pri kretanju moraju ostati očuvani pravi uglovi. Ako se zatim razmeni uloga sistema S i \bar{S} , može se na sličan način zaključiti da će biti

$$(13) \quad y = a\bar{y},$$

pri čemu ostaje ista konstanta a , jer se pretpostavlja izotropnost uočenog prostora. Izmnožavanjem levih strana i desnih strana dolazi se do zaključka da mora biti $a = \pm 1$. Znak minus ne dolazi u obzir, jer za $v \rightarrow 0$ treba da se dobije $\bar{y} = y$, pa stoga važi prva od jednačina (11). I druga se izvodi na isti način.

Prema tome, treba tražiti onu transformaciju koja ostvaruje (10). Da bismo to postigli uvešćemo slično kao maločas imaginarnu promenljivu

$$(14) \quad ict = u,$$

pa se onda (10) pretvara u

$$(15) \quad x^2 + u^2 = \bar{x}^2 + \bar{u}^2,$$

gde smo stavili

$$(16) \quad ic\bar{t} = \bar{u}.$$

Za pretvaranje izraza $\bar{x}^2 + \bar{u}^2$ u izraz $x^2 + u^2$ dovoljna je naredna unitarna transformacija

$$(17) \quad \begin{aligned} \bar{x} &= x \cos \varphi + u \sin \varphi, \\ \bar{u} &= -x \sin \varphi + u \cos \varphi. \end{aligned}$$

Prethodna transformacija je po obliku ortogonalna, ali se taj naziv po pravilu upotrebljava samo za transformacije realnih promenljivih. Kako je za početak \bar{O} koordinatnog sistema \bar{S} tj. za $\bar{x} = 0$ uvek $x = vt$, odn. na osnovu (14)

$$(18) \quad \text{za } \bar{x} = 0 \text{ biće } x = \frac{vu}{ic}.$$

Kad se ove dve odgovarajuće vrednosti unesu u prvu od jednačina (17) dobiće se

$$0 = \frac{vu}{ic} \cos \varphi + u \sin \varphi,$$

odakle se posle skraćivanja sa u dobiva

$$(19) \quad \operatorname{tg} \varphi = i \frac{v}{c}.$$

Odatle opet, prema poznatim obrascima iz trigonometrije

$$\cos^2 \varphi = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}, \quad \sin^2 \varphi = \frac{\operatorname{tg}^2 \varphi}{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi},$$

dobivamo

$$(20) \quad \cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad \sin \varphi = \frac{i \frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Dakle, transformacija promenljivih \bar{x} i \bar{u} u promenljive x i u izgleda

$$(21) \quad \bar{x} = \frac{x + i \frac{v}{c} u}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad \bar{u} = \frac{u - i \frac{v}{c} x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Najzad, u prvobitnim koordinatama tražena transformacija, kad se uzme u obzir (11), mora biti

$$(22) \quad \begin{aligned} \bar{x} &= \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \\ \bar{y} &= y, \\ \bar{z} &= z, \\ \bar{t} &= \frac{t - \frac{v}{c^2} x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \end{aligned}$$

jer negativan znak ispred kvadratnog korena ne dolazi u obzir, pošto za $v \rightarrow 0$ mora biti $\bar{x} = x$.

Transformacija (22) je ona tražena i s obzirom da se odnosi na jedan specijalan slučaj pravolinijske i jednolike translacije sistema \bar{S} u odnosu na sistem S zove se i *specijalna Lorencova transformacija*.

Da napomenemo da se vrlo često u literaturi razmera brzine kretanja sistema \bar{S} prema sistemu S i brzine svetlosti obeležava sa β , tj.

$$(23) \quad \frac{v}{c} = \beta.$$

Lorencovu transformaciju je izveo prvo holandski fizičar Lorenc pre nego što je Ajnštajn 1905. god. postavio svoju specijalnu teoriju relativnosti. Međutim,

kod njega \bar{t} nije tumačeno kao vreme u odnosu na pokretni koordinatni sistem \bar{S} već je označavalo isključivo neku pomoćnu formalnu veličinu.

Lorencova transformacija (22) ima očigledno naredne osobine:

1) U slučaju $v \ll c$ biće $\beta \approx 0$ i Lorencova transformacija se pretvara u Galilejevu.

2) Kad $v \rightarrow c$ tada $\bar{x} \rightarrow \infty$ i $\bar{t} \rightarrow \infty$, a ako se pretpostavi da je $v > c$, dobivaju se imaginarne vrednosti. To odmah pokazuje da su brzine jednake brzini svetlosti ili veće od nje isključene.

3) U obrascu koji određuje transformaciju vremena pojavljuje se i koordinata prostora x . To pokazuje da je vreme sad sigurno vezano sa prostorom i da dva događaja koji su sinhroni u odnosu na sistem S u miru ne moraju to biti u odnosu na sistem \bar{S} .

4) Ona je regularna. Njena je determinanta jedinična. Ona ima svojstva grupe. Istina identična transformacija postoji samo u graničnom slučaju, kad je $v = 0$.

Inverzna transformacija specijalne Lorencove transformacije (22) može se dobiti direktno, kad se pođe od razmenjenih uloga sistema S i \bar{S} , a može se dobiti i rešavanjem jednačina (22) po x, y, z i t . Ona glasi

$$(22') \quad \begin{aligned} x &= \frac{\bar{x} + v\bar{t}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \\ y &= \bar{y}, \\ z &= \bar{z}, \\ t &= \frac{\bar{t} + \frac{v}{c^2}\bar{x}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \end{aligned}$$

U literaturi se nalazi više načina izvođenja specijalne Lorencove transformacije. Ovde ćemo pokazati još jedan način izvođenja koji ne upotrebljava imaginarne veličine.

Uoči se jednolika i pravolinijska translacija koordinatnog sistema \bar{S} u odnosu na sistem S kao maločas, tj. sistem \bar{S} se u početnom trenutku ($\bar{t} = t = 0$) poklapa sa sistemom S pa počinje da se kreće tako da se ose x i \bar{x} stalno poklapaju. U takvom slučaju biće koordinate početka O ($\bar{x} = \bar{y} = \bar{z} = 0$) sistema \bar{S} u odnosu na sistem S , kako smo već videli

$$(24) \quad x = vt, \quad y = z = 0,$$

a koordinate početka O ($x = y = z = 0$) sistema S u odnosu na sistem \bar{S} biće

$$(25) \quad \bar{x} = -v\bar{t}, \quad \bar{y} = \bar{z} = 0,$$

što je očigledno.

Najprostija transformacija, koja pri ovim početnim uslovima zadovoljava (10) sigurno je

$$(26) \quad \bar{x} = \lambda(x - vt),$$

gde je λ neka konstanta koja može zavistiti od konstantne brzine v . Sa druge strane, kad se promene uloge sistema S i \bar{S} , treba da bude

$$(27) \quad x = \lambda(\bar{x} + v\bar{t}),$$

gde se izborom iste konstante λ pretpostavlja da postoji izotropija prostora u kome se posmatra kretanje sistema S i \bar{S} . Ako se sad u jednačinu (27) unese za \bar{x} vrednost iz jednačine (26) pa ona reši po \bar{t} , dobiće se

$$(28) \quad \begin{aligned} x &= \lambda[\lambda(x - vt) + v\bar{t}], \\ x &= \lambda^2 x - \lambda^2 vt + \lambda v\bar{t}, \\ \bar{t} &= \frac{1}{\lambda v} (x - \lambda^2 x + \lambda^2 vt) = \lambda \left[t - \frac{x}{v} \left(1 - \frac{1}{\lambda^2} \right) \right]. \end{aligned}$$

Unošenjem vrednosti (26) i (28) za \bar{x} i \bar{t} u (10) i svodenjem na nulu dobiva se

$$x^2 - c^2 t^2 - \lambda^2 (x^2 - 2vtx + v^2 t^2) + c^2 \lambda^2 \left[t^2 - \frac{2tx}{v} \left(1 - \frac{1}{\lambda^2} \right) + \frac{x^2}{v^2} \left(1 - \frac{1}{\lambda^2} \right)^2 \right] = 0,$$

a to je identičnost po x i t , jer treba da bude zadovoljena za sve moguće vrednosti tih promenljivih. Prema tome, koeficijenti uz x^2 , tx i t^2 moraju biti jednaki nuli. Njihovim izjednačavanjem sa nulom dobivaju se tri naredne jednačine

$$(29) \quad \begin{aligned} 1 - \lambda^2 + \frac{c^2 \lambda^2}{v^2} - \frac{2c^2}{v^2} + \frac{c^2}{v^2 \lambda^2} &= 0, \\ \lambda^2 v - \frac{c^2 \lambda^2}{v} \left(1 - \frac{1}{\lambda^2} \right) &= 0, \\ -c^2 - v^2 \lambda^2 + c^2 \lambda^2 &= 0. \end{aligned}$$

Iz poslednje, kao najlakše, dobiva se odmah

$$\lambda^2 = \frac{c^2}{c^2 - v^2} = \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}},$$

odn.

$$\lambda = \frac{1}{\pm \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Negativan znak otpada, pošto kad je $v = 0$, mora prema našim pretpostavkama biti $\bar{x} = x$ (vidi jednačinu (26)), pa je

$$(30) \quad \lambda = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

što posle unošenja u (26) i (28) daje opet Lorencovu transformaciju.

Sve tri jednačine (29) daju istu vrednost za λ , što se može lako proveriti, jer se, npr. unošenjem nađene vrednosti za λ iz treće jednačine u prvu i drugu one identično svode na nulu.

4.4. Kontrakcija dužine. Relativnost simultanosti i sukcesije događaja. Dilatacija vremena

Zamislimo neko kruto telo dužine l (neku šipku, ili prosto geometrijski — neku duž) postavljenu duž ose x u sistemu S , u kome miruje, i jedan njegov kraj A pada u tačku x_1 a drugi B u tačku x_2 ($x_2 > x_1$), onda se njegova dužina može odrediti izrazom

$$(1) \quad l_0 = x_2 - x_1.$$

Postavlja se pitanje, koliku dužinu treba pripisati ovom predmetu u odnosu na posmatrača koji se kreće sa sistemom \bar{S} . U klasičnoj mehanici je ova dužina ostajala, posle Galilejeve transformacije, očuvana. Ovde će, međutim, u odnosu na sistem \bar{S} , dužina biti

$$(2) \quad l = \bar{x}_2 - \bar{x}_1,$$

pri čemu su koordinate \bar{x}_1 i \bar{x}_2 određene u istom trenutku (simultano) po vremenu sistema \bar{S} .

Lorenцова transformacija koordinata x_1 i x_2 daje

$$x_1 = \frac{\bar{x}_1 + v \bar{t}_1}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

$$x_2 = \frac{\bar{x}_2 + v \bar{t}_2}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Ako se obrazuje razlika $x_2 - x_1$, pri uslovu simultanosti $\bar{t}_2 = \bar{t}_1$, dobiće se

$$l_0 = x_2 - x_1 = \frac{\bar{x}_2 - \bar{x}_1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{l}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

odn.

$$(3) \quad l = l_0 \sqrt{1 - \beta^2}.$$

Prema tome, prva važna posledica Lorenčove transformacije i novo odstupanje od klasične mehanike je u tome što ista duž (šipka, štap) ima različite dužine, posmatrana u odnosu na razne sisteme referencije koji se kreću jedan u odnosu na drugi. Najveću dužinu će predmeti imati u sistemu u kome sami miruju, nezavisno od toga da li se inače taj sistem kreće ili smatra u miru. U odnosu na sistem koji se kreće jednoliko i pravolinijski dužina se skraćuje u razmeri $\sqrt{1 - \beta^2}$. Ona izgleda utoliko kraća ukoliko je $\beta = v/c$ veće, tj. ukoliko je brzina kretanja sistema \bar{S} prema sistemu S veća. Jasno je odmah pri tom da se skraćuju samo one dužine tela (dimenzije) koje su paralelne pravcu kretanja sistema. Dimenzije upravne na pravac kretanja ostaju nepromenjene, jer je stalno $\bar{y} = y$ i $\bar{z} = z$. Dakle, svako telo koje miruje u odnosu na sistem S pokazuje skraćenje u smeru kretanja, za posmatrača koji se kreće relativno prema S zajedno sa sistemom \bar{S} .

Zapremina V nekog tela merena iz sistema \bar{S} (odnosno od strane posmatrača koji miruje u \bar{S} i kreće se zajedno sa tim sistemom u odnosu na S) biće

$$(4) \quad \bar{V} = V_0 \sqrt{1 - \beta^2},$$

gde V_0 obeležava njegovu zapreminu u miru, tj. u odnosu na sistem S . Samim tim postaje jasno da sve naše koncepcije o dovođenju do poklapanja objekata i o njihovoj kongruenciji u smislu euklidske geometrije treba revidirati. *Stavovi euklidske geometrije, prema tome, važe isključivo za figure i tvorevine, koje su relativno ledna prema drugoj u miru.*

Ipak pogrešno bi bilo prethodno skraćivanje dužina usled kretanja shvatiti kao nešto apsolutno, kao neku suštinsku promenu prirode materijalnih objekata. Objektivne realne osobine štapa ili šipke ostaju. Ovde se radi samo o tome kako, s obzirom na uvedeni način merenja, zasnovan na brzini prostiranja svetlosti, izgleda dužina tih predmeta u odnosu na razne sisteme referencije.

Da je tako najbolje ćemo se uveriti, ako sad uočimo isti predmet od maločas, ali koji miruje u sistemu \bar{S} (bez obzira što se sam sistem kreće i predmet zajedno sa njim) i kome je sad u tom sistemu dužina

$$l_0 = \bar{x}_2 - \bar{x}_1,$$

a traži se njegova dužina posmatrana iz sistema S . Pri tome naravno treba pročitati koordinate x_1 i x_2 krajeva uočenog predmeta opet simultano ($t_2 = t_1$), ali sad u odnosu na vreme u sistemu S i odrediti

$$l = x_2 - x_1.$$

Iz

$$\bar{x}_1 = \frac{x_1 - vt_1}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

$$\bar{x}_2 = \frac{x_2 - vt_2}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

pri $t_2 = t_1$ dobiva se

$$l_0 = \bar{x}_2 - \bar{x}_1 = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{l}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

tj. opet

$$(5) \quad l = l_0 \sqrt{1 - \beta^2}$$

samo su uloge sistema S i \bar{S} promenjene. Dakle, dužina *istog* predmeta, kad miruje u S , izgleda kraća posmatrana iz sistema \bar{S} a drugi put opet, kad u \bar{S} miruje duža.

Prema tome, najveća je dužina ona, određena prema sistemu referencije u kome predmet miruje i ona se zove njegova *prava (sopstvena) dužina* ili *dužina pri mirovanju*. Skraćivanje dužine pokretnih objekata u smeru kretanja zove se *relativistička ili Lorencova kontrakcija dužine*.

Obrasci (3) i (5), koji određuju kontrakciju pokretnog objekta pokazuju, da ako se brzina kretanja približava brzini svetlosti, dužine u smeru kretanja teže nuli, a za vrednost $v > c$, ona postaje imaginarna. To opet pokazuje da je *brzina*

svetlosti u relativističkoj mehanici gornja granica brzine koju mogu dostići materijalni objekti.

Već smo ranije pomenuli da simultanost dva događaja posmatrana u sistemu S , ne znači da će oni biti simultani i u sistemu \bar{S} . I zaista neka su na dva razna mesta (uzećemo radi uprošćenja objašnjenja oba na x -osi) x_1 i x_2 događaji simultani, tj. $t_1 = t_2$, biće u odnosu na sistem \bar{S}

$$(6) \quad \bar{t}_1 = \frac{t_1 - \frac{v}{c^2}x_1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \bar{t}_2 = \frac{t_1 - \frac{v}{c^2}x_2}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

pa je očigledno zbog $x_1 \neq x_2$ i vreme $\bar{t}_1 \neq \bar{t}_2$. Kratko, ta dva događaja, simultana za posmatrača koji miruje u sistemu S , nisu simultani u sistemu \bar{S} , koji se u odnosu na S kreće jednoliko i pravolinijski. Dakle, simultanost je relativan pojam.

Relativnost sukcesije dva događaja na istom mestu se odnosi uglavnom na relativne dužine vremenskih intervala. Tako, ako se na istom mestu x_1 u sistemu S posmatra vremenski interval

$$(7) \quad \Delta t = t_2 - t_1,$$

tj. ako neki tačan časovnik otkucava dva signala u tom intervalu, biće veličina tog intervala, određena u odnosu na sistem \bar{S} , s obzirom na obrasce (6) i činjenicu da je $x_2 = x_1$

$$(8) \quad \Delta \bar{t} = \bar{t}_2 - \bar{t}_1 = \frac{t_2 - t_1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\Delta t}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

To znači da se *vremenski interval, meren u sistemu \bar{S} koji se kreće jednoliko i pravolinijski konstantnom brzinom v u odnosu na sistem S , produžava u razmeri $\sqrt{1-\beta^2}$* , tj. časovnik u sistemu \bar{S} zakašnjava u odnosu na časovnik u S .

Najbrže ide časovnik, odn. najbrže se odvijaju procesi u sistemu u kome časovnik miruje i vreme koje on pokazuje je *pravo (sopstveno) vreme* određenog intervala.

Ako se neki idealan časovnik (sa tačnim mehanizmom) kreće nejednolikom brzinom prema inercionom sistemu, *pretpostavlja se da ubrzanje nema uticaja na hod časovnika*, tj. da vreme u svakom trenutku zavisi samo od trenutne brzine v u tom uočenom trenutku.

Produženje vremena, kad se ono meri u odnosu na pokretni sistem, zove se *dilatacija vremena*.

I ovde se ne radi o nekoj suštinskoj promeni objektivne dužine vremenskog intervala, već o merenju vremena u raznim sistemima referencije, kad se oni kreću jedan u odnosu na drugi, a kad je to merenje zasnovano na brzini prostiranja svetlosti.

Dakle, sukcesija (poredak) dva događaja na istom mestu ostaje uvek očuvana pri Lorencovoj transformaciji.

I sukcesija dva događaja na raznim mestima zavisi od stanja kretanja posmatrača. Neka su npr. u sistemu S , na mestima x_1 i x_2 uočena dva događaja u trenucima t_1 i t_2 pri čemu je $t_2 > t_1$, odn. $\Delta t = t_2 - t_1 > 0$. Tada će odnosni

interval vremena $\Delta \bar{t} = \bar{t}_2 - \bar{t}_1$ u sistemu \bar{S} biti

$$(9) \quad \Delta \bar{t} = \bar{t}_2 - \bar{t}_1 = \frac{t_2 - t_1 - \frac{v}{c^2} (x_2 - x_1)}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Da bi $\Delta \bar{t}$ bilo uopšte realno, mora, kako smo već videli, biti svakako $v < c$, tj. $\beta < 1$. Ali, ako treba da bude $\Delta \bar{t} > 0$, tj. ako treba sukcesija događaja da ostane očuvana, onda mora biti i

$$t_2 - t_1 > \frac{v}{c^2} (x_2 - x_1),$$

tj.

$$c(t_2 - t_1) > \frac{v}{c} (x_2 - x_1),$$

što će sigurno biti zadovoljeno, pošto je $v/c < 1$, kad bude

$$(10) \quad c(t_2 - t_1) > x_2 - x_1,$$

tj.

$$c > u,$$

ako se stavi

$$(11) \quad \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = u.$$

Ovde u ima dimenziju brzine i može se tumačiti kao brzina prostiranja nekog impulsa iz x_1 u x_2 za vreme od t_1 do t_2 . Na ovaj se način nedvosmisleno utvrđuje očuvanost sukcesije dva događaja na mestima, koja se nalaze na takvom rastojanju Δx da ga svetlost može preći, za vreme Δt tj. kad je $u < c$.

Međutim, sukcesija dva događaja u malom intervalu vremena $\Delta t > 0$ na vrlo velikom rastojanju Δx , koje svetlost ne može da pređe u uočenom intervalu vremena, tj. kad je

$$(12) \quad \frac{\Delta x}{\Delta t} = u > c,$$

može se obrnuti, iako se sad u ne može tumačiti kao brzina prostiranja neke pojave u prirodi. Naime, ako bi zaista postojala neka brzina prostiranja veća od brzine svetlosti, onda bi se ona morala usvojiti za definiciju sinhronosti a ne brzina svetlosti.

Npr., ako se zamisle dva događaja: jedan na Zemlji u trenutku t_1 i jedan na nekoj eventualnoj planeti zvezde Proxima Centauri u trenutku t_2 pri čemu je, u odnosu na neki galaktički sistem S u kome časovnici na oba mesta rade sinhrono, $t_2 - t_1 = \Delta t = 1$ godina, biće $u = 4,3$ svetlosne godine u sekundi (rastojanje Zemlja — Proxima Centauri iznosi oko 4,3 svetlosne godine).

Tada će u svim sistemima \bar{S} koji se kreću brzinom v u odnosu na sistem S , kad je

$$(13) \quad \frac{c}{4,3} < v < c,$$

nastupiti inverzija događaja, tj. biće

$$\Delta \bar{t} < 0,$$

pa će događaj na udaljenoj planeti posmatran iz sistema \bar{S} prethoditi događaju sa Zemlje. Naime, vidi se da će u tom slučaju izraz

$$\Delta t - \frac{v}{c^2} \Delta x = \Delta t \left(1 - \frac{uv}{c^2} \right)$$

postati negativan.

Za ovakve događaje postoji uvek i sistem \bar{S} koji se kreće takvom brzinom v , da bude $uv/c^2 = 1$ ($\Delta \bar{t} = 0$), pa da su ta dva događaja u odnosu na taj sistem simultana. Takve događaje Fok naziva *kvazisimultani* (vidi В. А. Фок: Теория пространства, времени и тяготения).

Ova razmatranja pokazuju da su *uzrok (pre)* i *posledica (posle)*, sa stanovišta teorije relativnosti, i *vremenski i prostorno uslovljeni*. Drugim rečima, dva događaja na raznim mestima mogu biti samo onda uzrok i posledica, ako se zbivaju u razmaku vremena, koji je jednak ili veći od onog razmaka potrebnog svetlosti da pređe rastojanje između tih mesta, naravno, pod pretpostavkom da ne postoji ni jedna pojava koja se prostire brže od svetlosti. Tako, npr. nijedan događaj na maločas pomenutoj planeti ne može se smatrati kao posledica nekog događaja sa Zemlje ako se ovaj nije dogodio pre 4,3 godine. Svi ostali događaji su *neposredno nezavisni jedan od drugog*.

4.5. Transformacija brzine. Relativistička adicione teorema brzina

Uočimo opet naše standardne sisteme S i \bar{S} . Neka u^i ($i = 1, 2, 3$) bude brzina neke tačke u odnosu na sistem S , tj.

$$(1) \quad u^1 = \frac{dx}{dt}, \quad u^2 = \frac{dy}{dt}, \quad u^3 = \frac{dz}{dt},$$

a u odnosu na sistem \bar{S} neka to bude \bar{u}^i , a to sad znači

$$(2) \quad \bar{u}^1 = \frac{d\bar{x}}{d\bar{t}}, \quad \bar{u}^2 = \frac{d\bar{y}}{d\bar{t}}, \quad \bar{u}^3 = \frac{d\bar{z}}{d\bar{t}}.$$

Ako se Lorencova transformacija (4.3—22) napiše u diferencijalnom obliku, biće

$$(3) \quad \begin{aligned} d\bar{x} &= \frac{dx - v dt}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \\ d\bar{y} &= dy, \\ d\bar{z} &= dz, \end{aligned}$$

$$d\bar{t} = \frac{dt - \frac{v}{c^2} dx}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Kad se u (2) unesu ove vrednosti za $d\bar{x}$, $d\bar{y}$, $d\bar{z}$ i $d\bar{t}$ dobiće se

$$\bar{u}^1 = \frac{dx - v dt}{dt - \frac{v}{c^2} dx}, \quad \bar{u}^2 = \frac{dy \sqrt{1 - \beta^2}}{dt - \frac{v}{c^2} dx}, \quad \bar{u}^3 = \frac{dz \sqrt{1 - \beta^2}}{dt - \frac{v}{c^2} dx},$$

a to posle deobe brojilaca i imenilaca diferencijalom vremena dt daje

$$(4) \quad \begin{aligned} \bar{u}^1 &= \frac{u^1 - v}{1 - \frac{u^1 v}{c^2}}, \\ \bar{u}^2 &= \frac{u^2 \sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \frac{u^1 v}{c^2}}, \\ \bar{u}^3 &= \frac{u^3 \sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \frac{u^1 v}{c^2}}. \end{aligned}$$

To su obrasci koji pokazuju kako se transformiše brzina tačke pri Lorencovoj transformaciji.

Inverzna transformacija, pri prelazu od brzine date tačke u u odnosu na sistem \bar{S} na onu u u odnosu na sistem S , dobiva se odmah, kad se v zameni sa $-v$, a nadvučene i nenadvučene brzine razmene. Tako će se dobiti

$$(5) \quad \begin{aligned} u^1 &= \frac{\bar{u}^1 + v}{1 + \frac{\bar{u}^1 v}{c^2}}, \\ u^2 &= \frac{\bar{u}^2 \sqrt{1 - \beta^2}}{1 + \frac{\bar{u}^1 v}{c^2}}, \\ u^3 &= \frac{\bar{u}^3 \sqrt{1 - \beta^2}}{1 + \frac{\bar{u}^1 v}{c^2}}. \end{aligned}$$

Ovi drugi transformacioni obrasci se naravno mogu dobiti i direktnim rešavanjem jednačina (4).

Dobiveni obrasci se razlikuju od klasičnih i prelaze u ove, kad $c \rightarrow \infty$ i kad $\beta \rightarrow 0$.

Ono što naročito treba istaći, to je da se u dva razna sistema referencije, koji se jedan u odnosu na drugi kreću jednoliko i pravolinijski, u opštem slučaju razlikuju i same transverzalne brzine, tj. one u pravcima upravnim na pravac kretanja sistema \bar{S} prema sistemu S .

Ako brzina u^i (vektor \mathbf{u}) nije kolinearna sa x -osom već sa njom obrazuje ugao α , a to znači da brzina \mathbf{u} nije kolinearna sa brzinom \mathbf{v} kretanja sistema \bar{S} u odnosu na sistem S , biće kvadrat intenziteta \bar{u} brzine \bar{u}^i (vektora \mathbf{u}), kad se uzme u obzir da je $u^1 = u \cos \alpha$, gde je u intenzitet brzine u^i

$$(\bar{u})^2 = (\bar{u}^1)^2 + (\bar{u}^2)^2 + (\bar{u}^3)^2 = \frac{(u)^2 - 2uv \cos \alpha + v^2 - \frac{v^2}{c^2} [(u^2)^2 + (u^3)^2]}{\left(1 - \frac{uv}{c^2} \cos \alpha\right)^2}.$$

Ovo se, međutim, može klasičnim vektorskim oznakama, kad se uzme u obzir da je u u odnosu na sistem S , prema pretpostavci, $\mathbf{v} = \{v, 0, 0\}$, napisati u obliku obrasca

$$(6) \quad (\bar{u})^2 = \frac{(\mathbf{u} - \mathbf{v})^2 - \frac{(\mathbf{u} \times \mathbf{v})^2}{c^2}}{\left(1 - \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{c^2}\right)^2}$$

koji pokazuje kako se određuje intenzitet brzine \bar{u} koja se dobiva slaganjem brzine u uočene tačke u u odnosu na sistem S i brzine v sistema \bar{S} u odnosu na sistem S . Kad su vektori \mathbf{u} i \mathbf{v} kolinearni ($\alpha = 0$) tada će biti

$$(\bar{u})^2 = \frac{(\mathbf{u} - \mathbf{v})^2}{\left(1 - \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{c^2}\right)^2}$$

odn.

$$(7) \quad \bar{u} = \frac{u - v}{1 - \frac{uv}{c^2}}$$

To je *relativistička adicione teorema brzina*.

Odmah se vidi da se ona razlikuje od klasične, koja u našem slučaju glasi

$$\bar{u} = u - v,$$

ali se vidi odmah i to da za $u \ll c$ i $v \ll c$, ona prelazi u klasičnu. To još jednom pokazuje da je *klasična mehanika* u odnosu na relativističku — *mehanika malih brzina*.

Relativistička adicione teorema brzina (7) se može odmah dobiti i iz prvog transformacionog obrasca (4), ako se uzme u obzir da je $\mathbf{u} \parallel \mathbf{v}$ ($u^1 = u$, $u^2 = u^3 = 0$).

Razmenom uloga sistema \bar{S} i S dobiće se odmah

$$(8) \quad u = \frac{\bar{u} + v}{1 + \frac{\bar{u}v}{c^2}},$$

kao obrazac koji određuje resultantnu brzinu, u odnosu na posmatrača koji miruje u S , neke tačke koja se kreće brzinom \bar{u} u odnosu na \bar{S} . Ona sad nije jednaka zbiru brzine tačke u odnosu na \bar{S} i brzine sistema \bar{S} u odnosu na sistem S .

Ako se na osnovu (8) izračuna $c^2 - (u)^2$, dobiće se

$$(9) \quad c^2 - (u)^2 = c^2 - \frac{(\bar{u} + v)^2}{\left(1 + \frac{\bar{u}v}{c^2}\right)^2} = \frac{c^2[c^2 - (\bar{u})^2] \cdot [c^2 - v^2]}{(c^2 + \bar{u}v)^2}$$

Odavde se može zaključiti:

1. Ako je $\bar{u} < c$ i $v < c$, desna strana je pozitivna, pa prema tome i $u < c$. Drugim rečima, intenzitet rezultante dve brzine, obe manje od c , je i sam manji

od c . Ovo pokazuje da ni jedna tačka u odnosu na inercioni sistem S ne može dostići brzinu veću od brzine svetlosti ma koliko puta uzastopno mi dodavali brzine (samo ako su ove manje od c). U tom smislu je u relativističkoj mehanici brzina svetlosti beskonačna utoliko što se konačnim brojem sabiraka manjih od brzine svetlosti sama brzina svetlosti ne može nikad dostići.

2. Iz obrasca (9) vidi se ovo: za $\bar{u} = c$ ili $v = c$ dobiva se $u = c$. To znači dodavanje ma koje brzine brzini svetlosti c ima kao rezultat samo brzinu svetlosti a ne veću. Ovo se uostalom vidi odmah iz adicione teoreme (8) odakle je npr. za $\bar{u} = c$ odmah

$$u = \frac{c + v}{1 + \frac{v}{c}} = \frac{c(c + v)}{c + v} = c.$$

Ovo je sve u saglasnosti sa početnom pretpostavkom da je brzina svetlosti ista za sve posmatrača i nepokretne i pokretne.

4.6. Četvorodimenzioni svet. Sopstveno vreme pokretnog objekta

Pošto je iz prethodnih izlaganja jasna povezanost prostora i vremena u relativističkoj mehanici, prirodno je ne posmatrati više položaje (x, y, z) tačaka u prostoru izolovano od trenutaka (t) vremena u kome se posmatranje vrši. Stoga ćemo odsad imati pred očima stalno skupove (x, y, z, t) i zvaćemo ih *dogadjaji*.

U tom smislu, ako se uoče dva dogadjaja (kad se posmatra nešto na dva različita mesta u dva različita trenutka vremena — naravno na časovnicima koji u tom smislu rade sinhrono — dogadjaj (x_1, y_1, z_1, t_1) i dogadjaj (x_2, y_2, z_2, t_2) pa odredi

$$(1) \quad s^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - c^2 (t_2 - t_1)^2$$

ili

$$(2) \quad \sigma^2 = c^2 (t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2,$$

tada se s odnosno σ zove *konačni interval između dva dogadjaja*.

Kako se odmah vidi on u izvesnom smislu odgovara rastojanju dve tačke klasične geometrije. Za dva bliska (susedna) dogadjaja može se kvadrat odnosnog *elementarnog intervala* izraziti u obliku

$$(3) \quad ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2,$$

ili

$$(4) \quad d\sigma^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2.$$

Ovako definisani konačni odn. elementarni interval između dva dogadjaja, koji je na osnovu naših izlaganja invarijanta u odnosu na Lorencovu transformaciju, ostaje očuvan u inercionim sistemima.

Ako se sad uvedu oznake

$$(5) \quad x = x^1, \quad y = x^2, \quad z = x^3, \quad ct = x^4,$$

(ranije smo u (4.3—5) stavili $x^4 = ict$), može se kvadratna diferencijalna forma (4), ako se na njoj zadržimo, napisati u obliku

$$(6) \quad d\sigma^2 = -(dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 + (dx^4)^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta. \quad (\alpha, \beta = 1, 2, 3, 4)$$

Pri tome je $g_{\alpha\beta}$ dvaput kovarijantni tenzor, određen narednom dijagonalnom matricom

$$(7) \quad \{g_{\alpha\beta}\} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Odmah se vidi da je

$$(8) \quad g^{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta},$$

tj. odnosni inverzni, dvaput kontravarijantni, tenzor $g^{\alpha\beta}$ identičan je polaznom tenzoru.

H. Minkovski (Minkowski) je, onda, s obzirom na ove činjenice predložio jednu geometrijsku interpretaciju specijalne teorije relativnosti, koja se ukratko sastoji u ovome: $d\sigma^2$ se posmatra kao metrička forma četvorodimenzionog prostora čije su tačke — događaji ali definisani skupovima (x, y, z, ct) tj. skupovima (x^1, x^2, x^3, x^4) . Ovaj naročiti četvorodimenzioni prostor, određen metrikom (6) Minkovski je nazvao „svet“. Danas se on obično naziva *prostor-vreme ili prostorno-vremenski kontinuum*.

Specijalna teorija relativnosti je zasnivanjem merenja na brzini svetlosti unela u geometrijski prostor klasične mehanike i uopšte u geometrijske i kinematičke pojave fiziku u širem smislu. Geometrization ovog novog sad fizičkog prostora je njegovo ponovno interpretiranje sa čisto geometrijskog stanovišta.

Pre nego što se analiziraju zaključci koji se na ovoj interpretaciji zasnivaju u vezi sa zahtevima relativističke mehanike da svi zakoni fizike (mehanike i elektrodinamike) imaju isti oblik u odnosu na sve inercione sisteme, tj. da su invarijantni u odnosu na Lorencovu transformaciju, treba naročito podvući neke činjenice.

Pretpostavka je bila da je trodimenzioni prostor klasične i kasnije relativističke mehanike bio euklidski. Šta to znači dovoljno je poznato. Između ostalog to znači da se takav prostor može posmatrati u odnosu na takav sistem koordinata u kome će metrička forma prostora (kvadrat linijskog elementa) biti čist *aritmetički zbir* kvadrata diferencijala pojedinih koordinata, tj. metrička forma takvog prostora je *pozitivno definitna*. Međutim, metrička forma (6) relativističkog prostora-vremena *nije* pozitivno definitna. Ona je *indefinitna*. Ona ostaje indefinitna, naravno, i ako se ne podeli od $d\sigma^2$ već od ds^2 . To znači da prostor-vreme nije euklidski prostor. Takav prostor se zove *pseudo-euklidski*, jer postoje koordinatni sistemi u odnosu na koje se metrička forma prostora svodi na *algebarski zbir* kvadrata diferencijala koordinata. U prostor-vremenu, dakle, ne postoji sistem u pravom smislu ortogonalnih koordinata, već samo unitarnih. Naime, ako se sa \mathbf{e}_i ($i = 1, 2, 3$) obeleže jedinični vektori nekog Dekartovog koordinatnog sistema, tada se njihova ortogonalnost izražava obrascima

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}.$$

Međutim, ako sa \mathbf{u}_α ($\alpha = 1, 2, 3, 4$) obeležimo jedinične vektore onog koordinatnog sistema kome odgovara kvadratna forma (6), biće

$$\mathbf{u}_\alpha \cdot \mathbf{u}_\beta = \varepsilon \delta_{\alpha\beta},$$

gde je za $\alpha, \beta = 1, 2, 3$ uvek $\varepsilon = -1$, a za $\alpha, \beta = 4$, $\varepsilon = +1$, pa je prema tome, npr.

$$\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1 = -1.$$

Ovakva generalisana ortogonalnost — pseudo-ortogonalnost — jer se svodi na pravu ako se uvedu imaginarni vektori, zove se *unitarnost*.

Još nešto treba odmah uočiti. A to je: i ovaj četvorodimenzioni kontinuum ostaje *homogen*, ali on *više ne može biti izotropan*. On se polazeći od neke tačke (dogadaja) ponaša istina na isti način u tri u užem smislu prostorna pravca ali on se uvek ponaša drukčije u pravcu vremenske ose.

Dalje, u običnom trodimenzionom prostoru sistem jednačina

$$(9) \quad x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t),$$

gde je t neki definisani parametar, određuje krivu liniju (jednodimenzioni pot-prostor uočenog prostora). Ako je t vreme, onda je to, kako znamo, kriva linija trajektorije klasične mehanike. U četvorodimenzionom svetu (prostor-vremenu) sistem od četiri jednačine

$$(10) \quad x^1 = x^1(\tau), \quad x^2 = x^2(\tau), \quad x^3 = x^3(\tau), \quad x^4 = x^4(\tau),$$

gde je τ opet neki definisani parametar, određuje opet neki jednodimenzioni pot-prostor, sad prostor-vremena, i zove se po Minkovskom *svetska linija*. Ako se parametru τ da naročito vremensko tumačenje, ovakva svetska linija se može tumačiti kao kriva linija trajektorije prostorno-vremenske tačke (dogadaja).

Mesto metričke forme (4) može se očigledno kao nova invarijanta uočiti

$$(11) \quad d\tau^2 = \frac{d\sigma^2}{c^2} = dt^2 - \frac{1}{c^2} (dx^2 + dy^2 + dz^2),$$

jer je brzina svetlosti apsolutna invarijanta teorije relativnosti. Ako su, dalje, uočena dva bliska dogadaja: prolazak nekog pokretnog tela, posmatranog u sistemu S u trenutku t (vreme sistema S) kroz tačku $A(x, y, z)$ pa zatim malo kasnije u trenutku $t + dt$ kroz blisku tačku $B(x + dx, y + dy, z + dz)$, biće

$$(12) \quad \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} = u^2$$

kvadrat brzine uočenog tela u odnosu na sistem S . Na osnovu toga može se sad (11) napisati u obliku

$$d\tau^2 = dt^2 \left(1 - \frac{u^2}{c^2} \right),$$

odakle je

$$(13) \quad d\tau = dt \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}$$

i najzad

$$(14) \quad \tau = \int \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} dt,$$

pri čemu se integracija izvodi duž određene svetske linije.

Sve dok je $u < c$ (a to je za brzine materijalnih tela tačno) $d\tau$ i τ su realni, imaju dimenziju vremena i predstavljaju invarijante. Treba zapaziti naročito da je τ invarijanta, ma da ni u ni dt nisu invarijante.

Ako se ovde podsetimo usvojene hipoteze (odjeljak 4.4) o tome da rad časovnika ne zavisi od ubrzanja kojim se časovnik kreće, već samo od trenutnih brzina, tada izrazi (13) odn. (14) određuju vremenske intervale (elementarni i ko-

načni) događaja duž određene svetske linije, a τ se zove *sopstveno vreme* (interval sopstvenog vremena) za uočeno telo u pokretu. dt je *element sopstvenog vremena* tog tela koje se kreće.

U specijalnoj teoriji relativnosti svako pokretno telo ima, dakle, svoje vreme. To znači, ako se neko telo kreće u odnosu na sistem S i pređe put od mesta A do mesta B u intervalu vremena $t_2 - t_1$ za posmatrača koji miruje u sistemu S , onda kad to kretanje posmatra neko ko se kreće zajedno sa uočenim telom, idealni časovnik koji se nalazi na pokretnom telu pokazivaće da je isti taj vremenski interval sad

$$\tau = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} dt$$

i, prema tome, ne poklapa se sa intervalom $t_2 - t_1$.

Opet je za $u \ll c$ (pri kretanju tela malim brzinama) $dt^2 \approx d\tau^2$ i $\tau \approx t_2 - t_1$. U tome je i objašnjenje zašto klasična mehanika, koja poznaje samo male brzine, nije dovela do pogrešnih rezultata, ma da je smatrala vreme t pa i sam diferencijal dt kao invarijantu.

Iz (13) se dobiva

$$(15) \quad \frac{d\tau}{dt} = \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

odn.

$$(16) \quad \frac{dt}{d\tau} = \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = \gamma(u),$$

jer je c konstantno a u može biti i promenljivo.

Postavlja se još pitanje, s obzirom da prostor-vreme nije izotropno, kakvog su karaktera intervali od nekog datog događaja do drugih događaja u njegovoj bližoj i daljoj okolini.

Tako, ako uočimo neki događaj — tačku u četvorodimenzionom svetu — i u njemu smestimo početak O četvorodimenzionog koordinatnog sistema, dakle uočimo događaj $(0, 0, 0, 0)$ pa posmatramo ma koji drugi događaj $P(x^1, x^2, x^3, x^4 = ct)$, tada je, kako znamo

$$\sigma^2 = (x^4)^2 - [(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2],$$

$$s^2 = (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 - (x^4)^2.$$

Trodimenzioni čisto prostorni interval — rastojanje odnosnih običnih prostornih tačaka O i P , tj.

$$s^2 = (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2,$$

je uvek realan za realne vrednosti koordinata x^1, x^2, x^3 i može biti jednak nuli samo, kad je $P \equiv O$. Međutim, konačni intervali događaja σ odn. s ili odgovarajući elementarni intervali $d\sigma$ i ds mogu, što se odmah vidi, za realne vrednosti koordinata x^1, x^2, x^3, x^4 biti realni i imaginarni.

Ako je, npr.

$$\sigma^2 > 0,$$

tj.

$$(17) \quad (x^4)^2 > (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2,$$

tada se u klasi ovakvih događaja nalaze i oni (lokalni) za koje je $x^1 = x^2 = x^3 = 0$, čiji je interval određen samo koordinatom $x^4 = ct$. Za takve događaje biće

$$\sigma^2 = c^2 t^2,$$

što posle deobe apsolutnom konstantom c^2 daje

$$\frac{\sigma^2}{c^2} = t^2$$

pa imamo čist vremenski razmak. Ovakvi intervali se stoga zovu *vremenskog karaktera* — *slični vremenu (time-like)*. Kad se uoči neposredna okolina uzetog događaja i kvadrat elementarnog intervala $d\sigma$ napiše u obliku

$$(18) \quad d\sigma^2 = dt^2 (c^2 - u^2),$$

gde je (12)

$$u^2 = \frac{(dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2}{dt^2},$$

tada svi intervali koji zadovoljavaju uslov $c > u$ uvek mogu da se protumače kao vremenskog karaktera. Pri tome, kad se u tumači kao brzina prostiranja nekog impulsa, tada je oblast događaja koji su sa datim događajima povezani intervalima vremenskog karaktera ona oblast u kojoj su događaji koji mogu biti sa datim događajem u kauzalnoj vezi i ako ne moraju, tj. mogu biti uzrok i posledica.

Sa druge strane, ako je $d\sigma$ imaginarno, tj.

$$\sigma^2 < 0,$$

pa dakle,

$$s^2 > 0$$

i

$$(19) \quad (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 > (x^4)^2,$$

tada se u klasi ovih događaja nalaze i svi simultani događaji $x^4 = 0$, kojima kao interval odgovara čisto prostorno rastojanje. Drukčije posmatrano sad je to klasa pojava za koje je $u > c$ i obuhvata sve događaje koji se ne mogu tumačiti kao uzrok i posledica, nisu u kauzalnoj vezi. Ovakvi intervali su *prostornog karaktera* — *slični rastojanju (prostoru) (space-like)*.

Najzad, očigledno je da ove dve klase događaja razdvaja jedna naročita klasa događaja čiji je interval od uočenog događaja σ , odn. s jednak nuli (brzina u prostiranja impulsa jednaka brzini svetlosti c), tj. za koje važi

$$(20) \quad (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 - (x^4)^2 = 0.$$

Ovo je površ u četvorodimenzionom prostoru-vremenu i može se smatrati u analogiji sa trodimenzionim prostorom kao konusna površ sa x^4 — osom kao osom i zove se *svetlosni konus*.

4.7. Brzina i ubrzanje u relativističkoj mehanici

Ranije u odeljku o transformaciji brzine i relativističkoj adicioj teoremi bila je brzina tačke u odnosu na sistem S određena sa

$$(1) \quad u^i = \frac{dx^i}{dt}, \quad (i = 1, 2, 3)$$

a u odnosu na sistem \bar{S} sa

$$(2) \quad \bar{u}^i = \frac{d\bar{x}^i}{dt}$$

U poređenju sa obrascima (4.5—1) i (4.5—2) ovde su samo neznatno izmenjene oznake. Obrasci (4.5—4) odnosno (4.5—5) davali su odnosne transformacione obrasce vektora brzine u^i u vektor \bar{u}^i i obrnuto. Ovako definisanu prostornu brzinu zvaćemo sad potpunije *trobrzina* ili *trovektor brzine*, prosto zato što ima tri koordinate.

Ubrzanje uočene tačke se onda može u odnosu na sistem S definisati obrascima.

$$(3) \quad w^i = \frac{du^i}{dt} = \frac{d^2 x^i}{dt^2} \quad (i = 1, 2, 3)$$

a obrascima

$$(4) \quad \bar{w}^i = \frac{d\bar{u}^i}{d\bar{t}} = \frac{d^2 \bar{x}^i}{d\bar{t}^2}$$

u odnosu na sistem \bar{S} .

Ovako definisano ubrzanje je *troubznanje* ili *trovektor ubrzanja*. Očigledno je da se u odnosu na sistem S u kome posmatrač (laboratorija) miruje ove definicije brzine i ubrzanja poklapaju sa onima iz klasične mehanike.

Međutim, ako se prostor-vreme uoči kao jedinstven četvorodimenzioni svet, tada se u analogiji sa običnim prostorom, svaki skup $(x^1, x^2, x^3, x^4 = ct)$ može smatrati kao vektor položaja u ovom generalisanom prostoru. Ovaj vektor sad ima četiri koordinate i za razliku od običnog vektora položaja — *trovektora položaja* — zove se *četvorovektor položaja*.

Prema tome, može se dalje, u analogiji sa odnosnim pojmovima brzine i ubrzanja u trodimenzionom prostoru, koji je potprostor četvorodimenzionog sveta i to čist euklidski potprostor, definisati i *četvorobrзина* U^α ($\alpha = 1, 2, 3, 4$) i *četvoroubznanje* W^α . Pri ovom uopštenju izbor definicije mora pre svega ispunjavati uslov da (x^1, x^2, x^3, x^4) bude četvorovektor a ne neki složeniji objekt. Sa druge strane je

$$(5) \quad u^\alpha = \frac{dx^\alpha}{dt} = \{u^i, c\}, \quad \begin{array}{l} (\alpha = 1, 2, 3, 4) \\ (i = 1, 2, 3) \end{array}$$

pa predstavlja prost skup koordinata obične prostorne brzine i brzine svetlosti.

Definicija koja će davati nešto novo, ali pored navedenih uslova zadovoljavati i uslove koje zahteva svako razumno uopštenje, dobićemo kad se *četvorobrзина* U^α ili *četvorovektor brzine* definiše obrascima

$$(6) \quad \frac{dx^\alpha}{d\tau} = U^\alpha, \quad (\alpha = 1, 2, 3, 4)$$

tj. izvodima koordinata četvorovektora položaja po sopstvenom vremenu.

Ovo je sigurno vektor, pošto je $d\tau$, kako smo već pokazali, invarijanta u odnosu na Lorencovu transformaciju. Vezu između četvorobrzone i trobrzone nije teško uspostaviti. Biće

$$(7) \quad U^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\tau} = \frac{dx^\alpha}{dt} \frac{dt}{d\tau} = u^\alpha \frac{dt}{d\tau},$$

pa pošto je (4.6 — 16)

$$\frac{dt}{d\tau} = \gamma(u),$$

dobiće se naredna veza (kad se mesto $\gamma(u)$ piše samo γ)

$$(8) \quad U^\alpha = \gamma u^\alpha = \frac{u^\alpha}{\sqrt{1 - \frac{(u)^2}{c^2}}}$$

ili

$$(8') \quad U^\alpha = \gamma \{u^i, c\} = \{\gamma u^i, \gamma c\}.$$

Potpuno ispisane te veze izgledaju

$$\begin{aligned} U^1 &= \frac{u^1}{\sqrt{1 - \frac{(u)^2}{c^2}}}, & U^2 &= \frac{u^2}{\sqrt{1 - \frac{(u)^2}{c^2}}}, \\ U^3 &= \frac{u^3}{\sqrt{1 - \frac{(u)^2}{c^2}}}, & U^4 &= \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{(u)^2}{c^2}}}. \end{aligned}$$

Oдавде se odmah vide izvesne osobine četvorobrzine svetske tačke (događaja).

1. Ona je određena intenzitetom u obične prostorne tačke i njenim koordinatama u^i .

2. Ovako definisana, četvorobrzina je nužno vektor vremenskog karaktera, jer ima realne vrednosti samo za $u < c$. To znači da se četvorobrzina može odrediti samo za vektore položaja vremenskog karaktera.

3. Četvorobrzina ne može nikad da se anulira, jer joj je četvrta koordinata različita od nule.

4. *Intenzitet četvorobrzine je konstantan i jednak brzini svetlosti.*

Ovo nije teško potvrditi, jer je

$$\begin{aligned} (9) \quad (U)^2 &= g_{\alpha\beta} U^\alpha U^\beta = U^\alpha U_\alpha \\ &= -(U^1)^2 - (U^2)^2 - (U^3)^2 + (U^4)^2 \\ &= \frac{c^2 - u^2}{1 - \frac{u^2}{c^2}} = c^2. \end{aligned}$$

Ovo u isto vreme pokazuje da koordinate vektora četvorobrzine nisu međusobno nezavisne.

U potvrdu ispravnosti ovakve generalizacije pojma brzine može se navesti i činjenica, koju takođe nije teško proveriti, da se Lorencovom transformacijom četvorobrzine ponovo dolazi do istih, ranije izvedenih, transformacionih obrazaca trobrzine i do Ajnštajnovе adicione teoreme brzina.

Kao *četvoroubziranje* ili četvorovektor ubrzanja definiše se onda

$$(10) \quad W^\alpha = \frac{dU^\alpha}{d\tau} = \frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2},$$

tj. izvod četvorobrzine po sopstvenom vremenu pokretnog objekta.

Prethodni obrasci se mogu dalje s obzirom na (8) izraziti u obliku

$$(11) \quad W^\alpha = \frac{dU^\alpha}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \gamma \frac{dU^\alpha}{dt} = \gamma \frac{d}{dt} \{\gamma u^i, \gamma c\},$$

gde je opet stavljeno mesto $\gamma(u)$ samo γ .

Četvoroubziranje je sigurno vektor, pošto je četvorobrzina U^α vektor a $d\tau$ je invarijanta u odnosu na Lorencovu transformaciju. Osim toga četvoroubziranje je jednako nuli uvek onda kad je to i troubrziranje. Naime, tada je

$$\frac{du^i}{d\tau} = \gamma \frac{du^i}{dt} = 0,$$

pa ako je $u \neq 0$ biće $\gamma \neq 0$ te mora biti

$$\frac{du^i}{dt} = 0 \quad \text{i} \quad u = \text{const.}$$

To, međutim znači da je i

$$\frac{d\gamma}{dt} = 0$$

pa se iz (11) dobiva u takvom slučaju

$$W^\alpha = \{0, 0, 0, 0\}.$$

Ako se pomoću metričkog tenzora $g_{\alpha\beta}$ (4.6—7) prostora-vremena obrazuje skalarni proizvod vektora četvorobrzine i četvoroubziranja, dobiće se

$$(12) \quad g_{\alpha\beta} U^\alpha W^\beta = U^\alpha W_\alpha = 0.$$

Prema tome, četvorovektori brzine i ubrzanja u prostor-vremenu su uvek upravni jedan na drugom.

Tačnost prethodnog tvrđenja može se lako dokazati. Naime, s obzirom na (4.6—6) i (4.6—11) biće

$$g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = c^2 d\tau^2,$$

a odatle je

$$(13) \quad g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} = g_{\alpha\beta} U^\alpha U^\beta = U^\alpha U_\alpha = (U)^2 = c^2,$$

što samo potvrđuje u drugom vidu ono što smo već našli (9) da je kvadrat intenziteta četvoroubziranja jednak kvadratu brzine svetlosti. Diferencijacijom relacije (13) po τ a s obzirom da je metrički tenzor $g_{\alpha\beta}$ simetričan, dobiva se

$$g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{d^2 x^\beta}{d\tau^2} = g_{\alpha\beta} U^\alpha W^\beta = U^\alpha W_\alpha = 0$$

što je i trebalo dokazati.

Naravno da se tačnost obrasca (12) može dokazati i prostije, kad se uzme u obzir, da će, s obzirom na izraz koji definiše kvadrat linijskog elementa $d\tau$

u prostor-vremenu, skalarni proizvod vektora U^a i W^a biti određen izrazom

$$\begin{aligned}
 & -U^1 W^1 - U^2 W^2 - U^3 W^3 + U^4 W^4 = \\
 & = \gamma \left[-U^1 \frac{dU^1}{dt} - U^2 \frac{dU^2}{dt} - U^3 \frac{dU^3}{dt} + U^4 \frac{dU^4}{dt} \right] = 2\gamma \frac{d(U)^2}{dt} = 2\gamma \frac{dc^2}{dt} = 0,
 \end{aligned}$$

pošto je

$$W^a = \frac{dU^a}{d\tau} = \gamma \frac{dU^a}{dt}.$$

4.8. Relativistički pojam mase i sile. Četvorovektor količine kretanja i sile. Relacija između mase i energije

I masa je osnovni pojam klasične mehanike. Ona se ne može običi ni u relativističkoj mehanici. Poznato je (2.1) da masa u klasičnoj mehanici ima trostruko značenje: 1) kao neki materijalni sadržaj tela „količina materije“ — *sopstvena masa tela*; 2) kao otpor kretanju tela odn. prema promeni brzine — *inerciona masa*; i 3) kao osetljivost tela prema dejstvu gravitacije, kao mera jačine privlačenja — *teška (gravitaciona) masa*.

Klasična mehanika je prećutno uvek pretpostavljala da se ove tri ovako različito shvaćene mase tela poklapaju. I isto onako, kako se u klasičnoj mehanici olako prelazilo preko pojmova sinhronosti događaja i apsolutnosti vremena, isto tako se nije ni pitanje ovih raznolikih shvatanja mase raspravljalo. Osim toga masa nije shvatana samo kao izvesna relacija koja povezuje materiju sa prostorom i vremenom, već da je *ona nezavisno od vremena rasprostrta u trodimenzionom prostoru*. Ranije smo (4.1) već naveli da je masa za klasičnu mehaniku nenegativna i da je u toku vremena nepromenljiva.

Ajnštajn je jasno pokazao da je ovako površno shvatanje pojma mase nedozvoljeno. I tačnost toga mišljenja pokazuje jedno prosto razmišljanje. Naime, u klasičnoj mehanici se bar čisto teorijski moglo zamisliti neograničeno povećavanje brzine nekog tela pod dovoljno trajnim dejstvom konstantne (ma i konačne) sile, pri čemu je ona „količina materije“ u telu ostala netaknuta. Međutim, sad je stvar drukčija, jer je najveća brzina koja se uopšte može postići, tako smo usvojili, brzina svetlosti. To onda znači da se inercija tela (otpor ubrzanju) povećava preko svih granica, kad se brzina tela približava brzini svetlosti. Šta to onda treba da znači, da li se u istoj meri povećava i „količina materije“, što bi svakako moralo biti, ako se uzme da sopstvena masa i inerciona masa tela ostaju jednake.

Iz specijalne teorije relativnosti proizlazi da *sopstvena masa i inerciona masa* nisu u opštem slučaju jednake tačnije nisu *ekvivalentne*. Pored toga Ajnštajn je pokazao kasnije da je obrnuto *ekvivalentnost inercione i teške mase tela suštinska za fizičke procese u prirodi*. Ipak na tom pitanju dokazivanje ekvivalentnosti teške i inercione mase ne možemo se ovde zadržavati.

Pojam sile \mathbf{f} je u Njutnovoj mehanici, ako se pojam mase usvoji kao osnovni, smatran kao izvedeni pojam i definisan kao izvod količine kretanja $m\mathbf{u}$ po vremenu

$$(1) \quad \frac{d(m\mathbf{u})}{dt} = \mathbf{f},$$

pri čemu je m masa tela u smislu klasične mehanike, \mathbf{u} vektor trobrzine i t vreme u smislu klasične mehanike, što odgovara vremenu u odnosu na sistem u kome

posmatrač miruje. Vektorska jednačina (1) izražena u odnosu na neki Dekartov sistem koordinata može se napisati s obzirom na (4.1—9) u obliku

$$(2) \quad \frac{d(mu^i)}{dt} = \frac{dp^i}{dt} = f^i,$$

gde su oznake sasvim jasne.

Kako je u klasičnoj mehanici masa m smatrana kao konstantna, iz ovih poslednjih jednačina se odmah dobiva

$$(3) \quad m \frac{d\mathbf{u}}{dt} = m \mathbf{w} = \mathbf{f},$$

odn.

$$(4) \quad mw^i = f^i.$$

Pri tome su masa (u smislu inerciona) i ubrzanje određivani naravno podle izbora odgovarajućih jedinica merenja. Sila je, dakle, bila mera dejstva jednog tela na drugo.

Ne samo maločas pomenuta brzina u^i već i ubrzanje w^i i količina kretanja

$$(5) \quad mu^i = p^i$$

su trovektori.

U relativističkoj mehanici se sila ne može definisati tačno kao u klasičnoj mehanici, pošto se zasad u stvari još ne zna tačno kako treba shvatiti masu. Ipak, i ovde, kao i kod ostalih pojmova dosad, polazna osnova mora biti klasična mehanika. Specijalna teorija relativnosti predstavlja samo nadgradnju, dopunu i uopštenje klasične mehanike, pa stoga uvek za $u \ll c$ mora sve da se svodi na klasičnu mehaniku.

Stoga se u specijalnoj teoriji relativnosti usvaja i drugi i treći Njutnov zakon, ali drugi zakon u formulaciji koja odgovara obrascu (1), a nipošto obrascu (3), jer se tamo čine određene pretpostavke o masi tela. Rečima je ono što se usvaja od drugog Njutnovog zakona navedeno već u (4.1).

Pri tome treba stalno imati na umu da je *brzina promene izvoda po vremenu onog sistema u kome se posmatranje vrši.*

Treći Njutnov zakon zadržava svoju, iz klasične mehanike poznatu, formulaciju, i on se vrlo često u slučaju direktnog dodira tela koristi za izvođenje zavisnosti mase tela od njegove brzine (videti za to npr. Румер Ю. Б. — Рыбкин М. С.: Теория относительности).

Mi ćemo ovde, da bismo došli do zavisnosti mase pokretnog objekta od njegove brzine i do uopštenja pojma količine kretanja i sile za četvorodimenzioni svet, postupiti na naredni način.

Jasno je da se, s obzirom na sve ono što smo rekli da se prenosi iz klasične mehanike u relativističku mehaniku, sigurno time usvaja i *zakon o održanju količine kretanja* (kaže se i impulsa). Naime, u klasičnoj mehanici, kad je neki materijalni sistem izolovan, tj. kad na njega nema uticaja spolja, biće $\mathbf{f} = \mathbf{0}$, pa se onda iz (1) dobiva

$$(6) \quad \mathbf{p} = m\mathbf{u} = \text{const.}$$

U analogiji sa trovektorom p^i količine kretanja, koji je kolinearan trobrzini u^i ($i = 1, 2, 3$) pokretnog tela, zahteva se *prvo*, da i četvorovektor P^α ($\alpha = 1, 2, 3, 4$) bude kolinearan četvorovektoru U^α . To znači može se napisati

$$(7) \quad P^\alpha = m_0 U^\alpha,$$

gde je m_0 neka skalarna invarijanta (promenljiva ili nepromenljiva što je zasad neodređeno) koja ima fizičku dimenziju mase klasične mehanike.

Drugo, što se još traži jeste da ovaj četvorovektor ostaje za izolovani materijalni sistem konstantan, tj. da mora biti

$$(8) \quad \frac{dP^\alpha}{d\tau} = 0.$$

Izvod se i ovde traži po sopstvenom vremenu τ kao i kod svih ranijih generalizacija, jer je sopstveno vreme sigurno invarijanta za uočeni sistem. Međutim, kako je onda

$$\frac{dP^\alpha}{d\tau} = \frac{dP^\alpha}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \gamma \frac{dP^\alpha}{dt} = 0$$

biće, pošto je $\gamma \neq 0$, i

$$(9) \quad \frac{dP^\alpha}{dt} = 0,$$

gde je t vreme sistema S u kome posmatrač miruje.

Ali, ako je količina kretanja izolovanog materijalnog sistema stalna, onda to mora biti i invarijanta m_0 . I zaista, biće

$$\frac{dP^\alpha}{d\tau} = \frac{d(m_0 U^\alpha)}{d\tau} = \frac{dm_0}{d\tau} U^\alpha + m_0 \frac{dU^\alpha}{d\tau} = 0.$$

Kako U^α nije jednako nuli, posle množenja ove jednačine četvorobrinom U_α , dobiva se

$$(10) \quad \frac{dm_0}{d\tau} U_\alpha U^\alpha + m_0 U_\alpha \frac{dU^\alpha}{d\tau} = 0.$$

Prema (4.7—13) je

$$U_\alpha U^\alpha = (U)^2 = c^2$$

pa stoga

$$\frac{d}{d\tau} (U_\alpha U^\alpha) = \frac{dc^2}{d\tau} = 2 U_\alpha \frac{dU^\alpha}{d\tau} = 0.$$

Tako se iz jednačine (10) dolazi odmah do zaključka, da pri usvojenim pretpostavkama i definicijama mora biti

$$\frac{dm_0}{d\tau} = \gamma \frac{dm_0}{dt} = 0$$

a pošto je $\gamma \neq 0$,

$$(11) \quad \frac{dm_0}{dt} = 0.$$

Dakle, ova masa m_0 izolovanog materijalnog sistema je konstantna u odnosu na vreme t sistema S u kome posmatrač miruje. Ona se zove masa *mirovanja* uočenog materijalnog sistema, jer je karakteristična za uočeni sistem kad on miruje. To je njegova *prava (sopstvena) masa*.

Zaključak (11) je očigledno ekvivalentan usvajanju zakona o održanju mase izolovanog sistema u klasičnoj mehanici.

Za četvorovektor P^α količine kretanja može se, s obzirom na (4.7—8), napisati

$$P^\alpha = m_0 U^\alpha = m_0 \gamma u^\alpha = \frac{m_0 u^\alpha}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}.$$

Ako se stavi

$$(12) \quad m = m_0 \gamma = \frac{m_0}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = m(u),$$

biće prve tri koordinate četvorovektora količine kretanja

$$(13) \quad P^i = m_0 U^i = m_0 \gamma u^i = m u^i.$$

Veličina m ima ovde fizičku dimenziju mase, zavisi od intenziteta u brzine kretanja tela i zove se *relativna masa* tela. Ona za $u \rightarrow c$ postaje beskonačno velika, a za $u \ll c$ daje $m \approx m_0$, tj. svodi se na pravu masu tela, odn. sasvim se neznatno razlikuje od nje. Relativna masa tela, kako se vidi iz (12), raste sa brzinom kretanja tela, ali čak i pri brzinama kosmičkih projektila npr. od 12 km/sec, ova masa se menja samo za 8 jedinica na osmom decimalnom mestu tj. za $8 \cdot 10^{-8}$ prvobitne mase, a to je zanemarljivo bez obzira na veličinu same polazne mase. Očigledno samo velike brzine kretanja od desetina i više hiljada kilometara, a naročito brzine bliske brzini svetlosti, znatno utiču na promenu ove mase tela pri kretanju.

Uočimo sad izvode prve tri koordinate P^i četvorovektora količine kretanja po vremenu t sistema S koji se smatra da je u miru, pa ćemo iz relacije (13) dobiti

$$(14) \quad \frac{dP^i}{dt} = \frac{d(mu^i)}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 u^i}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \right).$$

Oдавde je odmah jasno da se za vrlo male brzine ($u \ll c$), pošto se tada m gotovo ne razlikuje od *konstantne* mase mirovanja (sopstvene mase tela) m_0 , može sa dovoljnom tačnošću pisati

$$(15) \quad \frac{d(mu^i)}{dt} = m \frac{du^i}{dt} = f^i,$$

gde je f^i Njutnova sila. I tako se za Njutnovu silu f^i može u relativističkom obliku napisati

$$(16) \quad \frac{dP^i}{dt} = \frac{dp^i}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 u^i}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \right) = f^i. \quad (i = 1, 2, 3)$$

Dakle, u dinamici malih brzina, ali i samo u tom slučaju, može se inerciona masa m klasične dinamike smatrati kao konstantna i jednaka sopstvenoj masi tela m_0 .

Na osnovu toga može se sad napisati

$$(17) \quad P^i = m_0 U^i = mu^i = p^i,$$

što pokazuje da trovektor p^i impulsa ima koordinate jednake sa prve tri koordinate četvorovektora P^α impulsa, tj. da je

$$(18) \quad P^\alpha = \{p^i, P^4\}.$$

Sama četvrta koordinata P^4 četvorovektora količine kretanja može se izraziti na naredni način

$$(19) \quad P^4 = m_0 U^4 = \frac{m_0 c}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \frac{1}{c} \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \frac{1}{c} mc^2 = \frac{E}{c},$$

gde je

$$(20) \quad E = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}.$$

Kako E ima dimenziju energije, zove se *ukupna (totalna) energija* tela koje se kreće brzinom u^i . Prema tome, u teoriji relativnosti svakom telu (materijalnom sistemu ili materijalnoj tački), čija je količina kretanja trovektor $p^i = P^i$ ($i = 1, 2, 3$), pripada nužno i energija

$$(21) \quad E = c P^4,$$

pošto je c i inače univerzalna konstanta.

Totalna energija E uočenog materijalnog sistema nije konstantna, već na osnovu (20), zavisi od brzine kretanja tog sistema, tj.

$$(22) \quad E = E(u).$$

Ako se uočeni materijalni sistem, koji se u odnosu na sistem S kreće brzinom u^i , posmatra u odnosu na neki sistem koji se kreće zajedno sa materijalnim sistemom, prema kome će, dakle, materijalni sistem mirovati ($u^i = 0$, $u = 0$), tada se iz (20) dobiva *energija E_0 mirovanja* tog sistema, pri čemu je

$$(23) \quad E_0 = E(0) = m_0 c^2.$$

Ova relacija pokazuje važnu činjenicu: 1) da i masi m_0 materijalnog tela koje miruje odgovara energija E_0 jednaka proizvodu te mase i kvadrata brzine svetlosti; 2) da i energiji E_0 mirovanja nekog tela odgovara uvek neka masa po obrascu

$$(24) \quad m_0 = \frac{E_0}{c^2},$$

što je poznato kao *inercija energije*.

Ukupna energija E tela biće jednaka energiji mirovanja E_0 više obična kinetička energija T , tj.

$$(25) \quad E = E_0 + T.$$

Međutim, s obzirom na (20) i (23) može se T izraziti sad na naredni način

$$(26) \quad T = E - E_0 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} - m_0 c^2 = m_0 c^2 \left[\frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} - 1 \right] = \\ = m_0 c^2 (\gamma - 1),$$

što je u saglasnosti sa klasičnom mehanikom, jer je za $u = 0$ uvek i $T = 0$, kako i treba da bude.

Kad se $(1 - (u)^2/c^2)^{-1/2}$ razvije u red po stepenima od $(u)^2/c^2$, dobiće se

$$(27) \quad \left(1 - \frac{(u)^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} \frac{(u)^2}{c^2} + \frac{3}{8} \frac{(u)^4}{c^4} + \dots$$

Za $u \ll c$, kad je $(u)^2/c^2$ vrlo malo, može se sa dovoljnom tačnošću zadržati samo na prva dva člana reda. Unošenjem u (26) te približne vrednosti za $(1 - (u)^2/c^2)^{-1/2}$ dobiva se

$$(28) \quad T \approx m_0 c^2 \frac{1}{2} \cdot \frac{(u)^2}{c^2} = \frac{m_0 (u)^2}{2} \approx \frac{m (u)^2}{2}.$$

Dakle, za male brzine tela dobiva se stvarno već poznati izraz za živu silu (kinetičku energiju) iz klasične mehanike, jer je tada i $m_0 \approx m$.

Između trovektora p^i količine kretanja i ukupne energije E nekog tela postoji određena veza. Ona se dobiva polazeći od činjenice da je s obzirom na (7) i (4.7—13)

$$(P)^2 = g_{\alpha\beta} P^\alpha P^\beta = P^\alpha P_\alpha = m_0^2 U^\alpha U_\alpha = m_0^2 c^2 = m_0 E_0.$$

Međutim, s obzirom na (4.6—7) i na činjenicu da je $p^i = P^i$ ($i = 1, 2, 3$) može se $(P)^2$ izraziti i na ovaj način

$$P^\alpha P_\alpha = -P^i P_i + P^4 P_4 = -p^i p_i + (P^4)^2 = -(p)^2 + \frac{E^2}{c^2} = m_0^2 c^2,$$

gde je

$$(p)^2 = p^i p_i$$

kvadrat intenziteta trovektora količine kretanja datog tela. Na taj način se, najzad, dolazi do tražene relacije

$$(29) \quad (p)^2 - \frac{E^2}{c^2} + m_0^2 c^2 = 0,$$

ili

$$(30) \quad (p)^2 = m^2 c^2 - m_0^2 c^2 = c^2 (m^2 - m_0^2),$$

$$|p| = c \sqrt{m^2 - m_0^2}.$$

Na kraju pored klasične sile — trovektora sile, može se uvesti i četvorovektor *Ajnštajnovе sile* ili tačnije *sile Minkovskog*. U analogiji sa četvorovektorima brzine i ubrzanja, a s obzirom na zakon o održanju četvorovektora količine kretanja i na činjenicu što u odnosu na Lorencovu transformaciju f^i nisu koordinate vektora, a dt nije skalarna invarijanta, četvorovektor sile se definiše jednačinom

$$(31) \quad \frac{dP^\alpha}{d\tau} = F^\alpha,$$

gde se, kao i ranije kao nezavisno promenljiva pojavljuje sopstveno vreme pokretnog objekta. I odmah se dobiva

$$\frac{dP^\alpha}{d\tau} = \frac{dP^\alpha}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \gamma \frac{dP^\alpha}{dt} = F^\alpha,$$

pri čemu je

$$(32) \quad \gamma \frac{dP^i}{dt} = \gamma \frac{dp^i}{dt} = \gamma f^i = F^i$$

i

$$(33) \quad \gamma \frac{dP^4}{dt} = \frac{\gamma}{c} \frac{dE}{dt} = \gamma mc = F^4.$$

Prema tome biće

$$(34) \quad F^\alpha = \gamma \frac{d}{dt} \{p^i, cm\} = \gamma \left\{ f^i, c \frac{dm}{dt} \right\}.$$

Definicione jednačine (31) mogu se izraziti u obliku

$$(35) \quad F^\alpha = \frac{dP^\alpha}{d\tau} = \frac{d(m_0 U^\alpha)}{d\tau} = m_0 \frac{dU^\alpha}{d\tau} = m_0 \frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} = m_0 W^\alpha,$$

što pokazuje da se i četvorovektor sile može smatrati kao proizvod mase (ali sad konstantne mase mirovanja tela) i četvorovektora ubrzanja.

Ako se iz (35) izračuna četvorovektor sile i unese u (4.7—12) dobiće se

$$(36) \quad U_{\alpha} F^{\alpha} = U^{\alpha} F_{\alpha} = 0,$$

a to pokazuje da je četvorovektor sile, koja dejstvuje na neko telo u prostor-vremenu stalno upravna na četvorobrzini tog tela.

Međutim, kako je (vidi obrazac 4.7—8')

$$U^{\alpha} = \gamma \{u^i, c\},$$

to obrazac (36) daje, kad se uzme u obzir (34),

$$\gamma^2 \left[-u^i f_i + c^2 \frac{dm}{dt} \right] = 0,$$

pa je zbog $\gamma \neq 0$ najzad

$$(37) \quad c^2 \frac{dm}{dt} = u^i f_i = \mathbf{u} \cdot \mathbf{f}.$$

Ova relacija je od prvorazrednog značaja za koncepcije relativističke mehanike. Ona sad baca posebnu svetlost na relaciju između trosile i troubrzanja. I zaista, ako se u jednačini (2), koja definiše trosilu, izvrši naznačeno diferencijaljenje po vremenu i uzme u obzir da masa m sad ne može da se smatra kao nezavisna od vremena, dobiće se s obzirom na (37)

$$(38) \quad f^i = m \frac{du^i}{dt} + \frac{dm}{dt} u^i = m w^i + \frac{u^j f_j}{c^2} \cdot u^i$$

ili u simboličnom obliku

$$(39) \quad \mathbf{f} = m \mathbf{w} + \frac{\mathbf{f} \cdot \mathbf{u}}{c^2} \mathbf{u}.$$

To pokazuje da u relativističkoj mehanici ubrzanje (troubzranje) u opštem slučaju nije kolinearno sa silom (trosilom).

Ta sila će biti kolinearna ubrzanju, što se odmah vidi, samo kad je 1) $\mathbf{f} \perp \mathbf{u}$ — sila upravna na brzini; 2) $\mathbf{f} \parallel \mathbf{u}$ — sila paralelna brzini; i najzad, 3) kad je brzina trenutno jednaka nuli ($\mathbf{u} = \mathbf{0}$).

Pri tome je u slučaju $\mathbf{f} \perp \mathbf{u}$

$$(40) \quad f^i = m w^i = m_0 \gamma w^i,$$

pa izraz za silu ima isti oblik kao u Njutnovoju mehanici sa tom razlikom što je sad vrednost mase m u svakom trenutku zavisna od brzine tela i menja se sa promenom brzine — nije konstantna.

U slučaju $\mathbf{f} \parallel \mathbf{u}$, biće $\mathbf{f} = \lambda \mathbf{u}$ odn. $f^i = \lambda u^i$, gde je λ neki multiplikator, pa se dobiva

$$f^i = m w^i + \frac{u^2}{c^2} f^i$$

i dalje onda

$$f^i \left(1 - \frac{u^2}{c^2} \right) = m w^i,$$

što najzad dovodi do izraza

$$(41) \quad f^i = \frac{m}{1 - \frac{u^2}{c^2}} w^i = m_0 \gamma^3 w^i.$$

Kad se uporede ovi izrazi (40) i (41) vidi se da je inerciona masa tela (relacija između vektora trosile i vektora troubrzanja) u jednom i u drugom slučaju različita. Stoga se ona u prvom slučaju kad je sila upravna na brzinu, zove *transverzalna masa* a ona druga, kad je sila paralelna brzini, *longitudinalna*. Razlika ove dve mase je kod elektrona utvrđena i eksperimentalnim putem.

4.9. Geodezijske linije u prostorno-vremenskom kontinuumu

Ako se uzme da je prostorno-vremenski kontinuum Minkovskog određen metrikom (4.6—6)

$$d\sigma^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \quad (\alpha, \beta = 1, 2, 3, 4)$$

kojoj odgovara metrički tenzor (4.6—7), onda je jasno da je ta metrika pseudo-ortogonalna i da su koordinate metričkog tenzora konstantne.

U takvom prostoru jednačina geodezijske linije ima oblik

$$(1) \quad \frac{d^2 x^\alpha}{d\sigma^2} = 0,$$

(vidi: Anđelić — Tenzorski račun). Prema tome u tom prostoru duž takve linije biće (što se odmah dobiva integracijom)

$$(2) \quad \frac{dx^\alpha}{d\sigma} = a^\alpha,$$

gde su a^α konstante koje, kao koordinate jediničnog tangentnog četvorovektora, zadovoljavaju uslov

$$g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\sigma} \frac{dx^\beta}{d\sigma} = 1,$$

odn. u slučaju našeg naročitog tenzora (4.6—7), uslov

$$\sum_{\alpha} g_{\alpha\alpha} \left(\frac{dx^\alpha}{d\sigma} \right)^2 = 1,$$

tj. eksplicitno

$$(3) \quad (a^4)^2 - \sum_i (a^i)^2 = 1.$$

Posle još jedne integracije iz jednačine (2) se dobiva

$$(4) \quad x^\alpha = a^\alpha \sigma + b^\alpha,$$

gde su b^α takođe konstante. Iz jednačina (2) i (4) vidi se da geodezijske linije u prostoru Minkovskog imaju u svima tačkama isti pravac i da predstavljaju uopštenje pravih linija iz običnog trodimenzionog euklidskog prostora.

Ako se uvedu nove konstante q^i ($i = 1, 2, 3$) kao razmere tri obične prostorne koordinate a^i prema vremenskoj a^4 , tj. stavi

$$(5) \quad q^i = \frac{a^i}{a^4} = \frac{dx^i}{dx^4},$$

što je ekvivalentno sa

$$(6) \quad dx^i = q^i dx^4,$$

mogu se jednačine (4) razdvojiti u dve grupe i napisati u obliku

$$(7) \quad x^i = q^i (x^4 - b^4) + b^i, \quad x^4 = a^4 \sigma + b^4,$$

što je lako proveriti.

Uslov (3) se posle deobe sa $(a^4)^2$ pretvara u

$$(8) \quad 1 - \sum_i \left(\frac{a^i}{a^4} \right)^2 = 1 - \sum_i (q^i)^2 = 1 - q^2 = 1 - \frac{u^2}{c^2},$$

gde je

$$q^2 = \sum \frac{dx^i}{dx^4} \frac{dx^i}{dx^4} = \frac{1}{c^2} \sum \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^i}{dt} = \frac{u^2}{c^2}$$

i gde u označava intenzitet trobrzine uočene materijalne tačke. Kako mora biti $u < c$ ($d\sigma^2 > 0$), da bi $d\sigma$ bilo realno naše geodezijske linije su vremenskog karaktera.

S obzirom da je

$$(9) \quad d\tau^2 = \frac{d\sigma^2}{c^2} = dt^2 \left(1 - \frac{u^2}{c^2} \right) = dt^2 (1 - q^2),$$

jednačina geodezijske linije u prostoru koji je određen metrikom $d\sigma^2$ može se napisati u obliku

$$(10) \quad \frac{d^2 x^a}{c^2 d\tau^2} = \frac{d^2 x^a}{d\tau^2} = \frac{d^2 (m_0 x^a)}{d\tau^2} = \frac{d(m_0 U^a)}{d\tau} = \frac{dP^a}{d\tau} = F^a = 0.$$

Međutim, prema (4.8—8) i (4.8—35) ovo pokazuje da geodezijske linije vremenskog karaktera u prostorno-vremenskom kontinuumu predstavljaju kretanje materijalne tačke po inerciji, tj. bez uticaja spoljašnjih sila. Takva geodezijska linija opisuje istoriju (ukupnost događaja) uočene materijalne tačke, ako se ona kreće po inerciji.

Za sve sisteme, koji se jedan prema drugom kreću jednoliko i pravolinijski, $\frac{d^2 x^a}{d\sigma^2}$ je invarijanta, pa prethodni zaključak ostaje u važnosti za sve takve sisteme u prostoru Minkovskog.

Sve koordinate vektora četvorobrziine duž geodezijske linije su konstantne

$$U^a = \frac{dx^a}{d\tau} = c \frac{dx^a}{d\sigma} = ca;$$

istoga je četvoroubzranje duž takve linije nula — vektor.

Na samom svetlosnom konusu ($u = c$), koji razdvaja oblast intervala vremenskog karaktera od oblasti intervala prostornog karaktera, biće

$$1 - q^2 = 0,$$

što s obzirom na (4.6—6) i (9) daje

$$(11) \quad g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} = 0$$

i definiše tzv. *nultu geodezijsku liniju*. Prema tome, nulta geodezijska linija u prostorno-vremenskom kontinuumu predstavlja kretanje čestice duž svetlosnog zraka (istoriju kretanja svetlosnog fotona).

REGISTAR

Afel, 198
 akcija, 118,
 aksoid, nepokretni, 94
 aksoid, pokretni, 94
 amortizacija, čista (prigušenje), 140
 amortizacija, kritična, 141
 amplituda, 14
 amplituda normalnog eliptičkog integrala, 226
 analogije, 120
 anomalija, ekscentrična, 200
 anomalija, prava, 192
 apocentar, 198
 apogeum, 198

Balistika, spoljna, 153
 baza, vektorska, 5
 baza, vektorska, kontravarijantna, 11
 baza, vektorska, kovarijantna, 11
 brahistohronost, 253
 brzina, 17
 brzina, apsolutna, 105
 brzina, dobivena, 533
 brzina, dolazna, 523, 525, 528
 brzina do udara, 523
 brzina, eliptična, 195
 brzina, hiperbolična, 195
 brzina, izgubljena, 533
 brzina, karakteristična, 195
 brzina klizanja, 365, 458
 brzina, kosmička, prva, 194
 brzina, kosmička, druga, 195
 brzina, kosmička, treća, 196
 brzina kotrljanja, 91
 brzina, kružna, 194
 brzina, odlazna, 523, 525, 530
 brzina oslobodavanja, 195
 brzina, parabolična, 195
 brzina pola, 80
 brzina posle udara, 523
 brzina, prenosna, 105
 brzina promene veličine, 22
 brzina rashoda mase, 176
 brzina, relativna, 105
 brzina skretanja potega, 22
 brzina skretanja ose, 170
 brzina svetlosti, 548
 brzina tačke, 17
 brzina tačke krutog tela, 80
 brzina, radijalna (uzdužna), 22
 brzina, sektorska, 23
 brzina, srednja, 17
 brzina, transverzalna (poprečna, azimutna),

brzina tela, 83
 brzina tela, trenutna ugaona, 80
 brzina, ugaona, 22
 brzina, ugaona, srednja, 23
 brzine, generalisane, 19

Centar mase (inercije), 308, 309
 centar konačne rotacije, 63
 centar oscilovanja, 495
 centar rotacije (obrtnja), trenutni, 88
 centar sile, 186
 centar sile, trenutni, 100
 centimetar (cm), 119
 centroida, nepokretna (baza), 90
 centroida, pokretna (ruleta), 90

Čestica (particula), 118
 četvorobrzina, 567
 četvoroubrazanje, 567, 568
 četvorovektor količine kretanja, 571
 četvorovektor položaja, 567
 četvorovektor sile, 575
 čigra, 508

Dejstvo sila na kruto telo, 519, 520
 dejstvo (akcija) u Hamiltonovom smislu, 428
 dejstvo (akcija) u Lagranževom smislu, 431
 dejstvo udarnih sila, 534
 dekrement, logarimatski, 16
 devijacija, istočna, 296
 dijagram brzine, 35
 dijagram puta, 34
 dijagram put-brzina, 38
 dijagram tangentnog (putanjskog) ubrzanja, 36
 dilatacija vremena, 557
 dimenzija veličine, 119
 din (dyn), 119
 dinamika, Njutnova, 117
 događaji, 562
 događaji, kvazisimultani, 559
 događaji, sinhroni (istovremeni), 544
 domet, najveći, 151
 dužina ekvivalentnog matematičkog klatna, 494
 dužina fizičkog klatna, redukovana, 494
 dužina invarijantna, 543
 dužina luka u generalisanim koordinatama, 8
 dužina, prava (sopstvena), 556
 dužina pri mirovanju, 556
 džul (joule), 170

Efekt, giroskopski, 512
 efekt rada (snaga), 173
 ekscentričnost konusnog preseka, 192
 eksponenti dimenzija, 119
 ekstremala, 254
 element dejstva, 428
 element, linijski, kinematički, 383
 element sopstvenog vremena, 565
 elipsa inercije, 344
 elipsa inercije, normirana (Kulmanova), 345
 elipsograf, 64
 elipsoid, giracioni (Mek-Kalehov), 340, 341
 elipsoid inercije, 340
 elongacija, 14
 energija, kinetička, 174
 energija, kinetička, krutog tela, 445
 energija, kinetička, rotaciona, 448
 energija, kinetička, sistema, 368
 energija, kinetička, translatorna, 448
 energija mirovanja, 574
 energija potencijalna, 172, 400
 energija slobodna, 401
 energija totalna (ukupna), 175, 400
 erg, 170
 etar, 547, 548

Faza oscilacije, početna, 15
 figure, Lisažuove, 15
 forma, pozitivna, definitna, 435, 563
 forma, indefinitna, 563
 frekvencija (učestanost), 14
 frekvencija, kružna, 14
 funkcija delta, Dirakova, 306
 funkcija, eliptička, Jakobijeva, 226
 funkcija, generalisana (distribucija), 306
 funkcija, Hamiltonova, 404
 funkcija, karakteristična, 431
 funkcija, Lagranževa, 401
 funkcija, pseudoperiodna, 226
 funkcija, Rautova, 406
 funkcija, Rejljeva, disipativna, 440
 funkcija sile, 172, 399
 funkcije, eliptične, 221
 funkcije, eliptične, osnovne, 226

Giroskop, 508
 giroskop, sferni, 508
 giroskop, slobodan od precesije, 511
 giroskop, uravnotežen, 509
 gradijent, delimični, 358, 360
 gram, 119
 gravisfera, 196
 gustina masa, linijska, 308
 gustina masa, površinska, 308
 gustina srednja, 305
 gustina u datoj tački, 305

Herpolhodijska, 94
 hitac kosi, 150, 153, 297
 hitac kosi u otpornoj sredini, 153
 hitac vertikalni, 130, 178, 296
 hodograf brzine, 18

Impuls sile, elementarni, 164, 388
 impuls sile, konačni, 164, 389
 impuls, srednji, 524

impuls, trenutni, 523
 impuls, udarni, inercijalni, 527
 impuls, udarni, izgubljeni, 527
 impulsi, generalisani, 402
 inercija energije, 574
 inercija tela, 118
 integral energije, 175, 218, 249, 292, 399
 integral kinetičkog momenta, 167, 218, 393
 integral količine kretanja, 165, 389
 integral površine, 168, 394
 integral prve vrste, normalni, eliptički, 224
 integral prve vrste, potpuni, eliptički, 225
 integrali, ciklički, 402
 integrali diferencijalnih jednačina kretanja,
 prvi, 127, 386
 intenzitet četvorobrzine, 568
 intenzitet vektora krivine, 435
 interval između dva događaja, konačni, 562
 interval između dva događaja, elementarni,
 562
 intervali prostornog karaktera, 566
 intervali vremenskog karaktera, 566
 izohronost, 253
 izvod, kovarijantni, 73
 izvod vektora, apsolutni (Bjankijev), 105
 izvodi kontravarijantnih i kovarijantnih vek-
 tora, apsolutni, 33
 izvor sile, 118

Jedinice merenja, osnovne, 119
 jedinice mehaničkih veličina, izvedene, 119
 jednačina, balistička, glavna, 154
 jednačina dinamike, osnovna vektorska, 118,
 544
 jednačina, frekventna (sekularna), 441
 jednačina kinetostatike, opšta, 419
 jednačina kretanja tačke, vektorska, ko-
 načna, 7
 jednačina varijacionog računa, Ojler-Lagran-
 ževa, 256
 jednačina Meščerskog, 176
 jednačina, modifikovana, Keplerova, 200
 jednačina neprekidnosti, 390, 392
 jednačine hiperpovršni, 363
 jednačine, kanonske (Hamiltonove), 403, 405
 jednačine klasične dinamike, osnovne, 118,
 544
 jednačine kretanja, diferencijalne, sa multi-
 plikatorima veze, 213, 246, 378
 jednačine kretanja, diferencijalne, skalarne,
 121, 453
 jednačine kretanja krutog tela, diferencijalne,
 452
 jednačine kretanja krutog tela, konačne, 54
 jednačine kretanja krutog tela, Lagranževe,
 diferencijalne, 456
 jednačine kretanja krutog tela, slobodnog, 453
 jednačine kretanja krutog tela, vezanog, 457
 jednačine kretanja, Lagranževe, prve vrste,
 213, 246, 378, 458
 jednačine kretanja, Lagranževe, druge vrste,
 213, 216, 248, 381
 jednačine kretanja materijalne tačke, dife-
 rencijalne, 121
 jednačine kretanja materijalne tačke, Lagran-
 ževe, 122

- jednačine kretanja materijalne tačke, kontravarijantne, 124
 jednačine kretanja materijalne tačke, kovarijantne, 123
 jednačine kretanja materijalne tačke po glatkim linijama, 245,
 jednačine kretanja materijalnog sistema, diferencijalne, 366, 377
 jednačine kretanja, prirodne, 122, 145, 218, 271, 307
 jednačine kretanja, Rautove, 406, 407
 jednačine kretanja sistema, konačne, vektorske, 356
 jednačine kretanja, skalarne, diferencijalne, 121
 jednačine malih oscilacija, diferencijalne, 438
 jednačine obrtanja krutog tela, Ojlerove, 455, 501
- Kilogram (kg)**, 119
kilopond (kp), 120
kilovat (kW), 173
kilovatčas (kWh), 175
 klatno, cikloidno, 250
 klatno, fizičko, 494
 klatno, eliptičko, 411
 klatno, Fukoovo, 298
 klatno, konusno, 228
 klatno, matematičko, 256
 klatno, sferno, 221
 koeficijent dinamičnosti prinude, 148
 koeficijent otpora, 138
 koeficijent tangentnog trenja, 531
 koeficijent trenja, kinetički, 281
 koeficijent trenja, statički, 283
 koeficijenti inercije, 340
 koeficijenti, inercioni (kvaziinercioni), 439
 koeficijenti krutosti sistema, statički, 439
 koeficijenti metričke forme, 9
 koeficijenti, restitucioni (kvazielastični), 439
 koeficijenti uspostavljanja, (restitucije), 439, 530
 koeficijenti uticaja, statički, 439
 količina kretanja krutog tela, 449
 količina kretanja materijalne tačke, 164
 komponenta brzine, rotaciona, 80
 komponenta brzine, translatorna, 80
 komponenta pomeranja, rotaciona, 69, 80
 komponenta pomeranja, translatorna, 69, 80
 komponenta ubrzanja, aksipetalna, 99
 komponenta ubrzanja, prenosna, 107
 komponenta ubrzanja, relativna, 107
 komponenta ubrzanja, rotaciona, 99
 komponenta vektora, 3
 konfiguracija, 46, 356
 kongruencija, 544
 konstanta, apsolutna, univerzalna, 548
 konstanta gravitacije, univerzalna, 187
 konstante, Grinilove, 503
 kontinuum, 305, 543
 kontinuum, jednodimenzioni — vreme, 544
 kontinuum, prostorno-vremenski, 563
 kontinuum, trodimenzioni, euklidski, 543, 563
 kontinuum, trodimenzioni, euklidski, homogen, 543
- kontinuum, trodimenzioni, euklidski izotropan, 543
 kontrakcija dužine, 555, 556
 konus, svetlosni, 566
 konvencija za sabiranje, Ajnštajnova, 12
 koordinate brzine, kontravarijantne, 20
 koordinate brzine, kovarijantne, 20
 koordinate brzine, krivolinijske (generalisane), 20
 koordinate brzine, fizičke, 20
 koordinate, brzine, tačke, Dekartove, pravouglo, 82
 koordinate, cikličke, 402
 koordinate gradijenta, generalisane, 213
 koordinate, krivolinijske, vektora krivine trajektorije, 433
 koordinate vektora elementarne rotacije, 74
 koordinate krutog tela, 51
 koordinate metričkog tenzora, 9
 koordinate, nezavisne, 214, 305, 356
 koordinate, normalne, 440
 koordinate, polarne, 5
 koordinate, ravanske, 4
 koordinate sile, generalisane, 121
 koordinate sile, kontravarijantne, 124
 koordinate sile, kovarijantne, 123
 koordinate tačke, 3, 6
 koordinate tačke, opšte, generalisane, 3
 koordinate ubrzanja, kontravarijantne, 32, 33
 koordinate ubrzanja, kovarijantne, 31, 33
 koordinate vektora položaja, 6
 korak zavoja, 67
 korak zavrtnja, 67
 kotrljanje bez klizanja, 91
 krak inercije, 332
 kretanje, apsolutno, 104
 kretanje, desno, zavojno, 66
 kretanje, direktno, 13
 kretanje, inverzno (obrnuto), 54
 kretanje, izoenergetsko, 175
 kretanje, izohrono (jednakovremeno), 426
 kretanje, jednoliko, 13
 kretanje, Kardanovo, 64
 kretanje, keplerovsko, 192
 kretanje, konzervativno, 175
 kretanje, kružno jednoliko, 14
 kretanje krutog tela, ravansko, 462
 kretanje, krivolinijsko, 13
 kretanje, kvaziperiodno, 140
 kretanje, levo, zavojno, 66
 kretanje matematičkog klatna, 259, 261, 262
 kretanje, neporemećeno (osnovno), 437
 kretanje, neslobodno (prinudno), 207
 kretanje, nutaciono, 512
 kretanje, opšte promenljivo, 13
 kretanje, oscilatorno, 14, 259
 kretanje, periodno, 14
 kretanje po inerciji, 118
 kretanje, poremećeno, 437
 kretanje, povratno (retrogradno), 13, 17
 kretanje, prenosno, 104
 kretanje, prenosno, stacionarno, 291
 kretanje, ravansko, 55, 60, 64, 462
 kretanje, relativno, 104, 290
 kretanje, sferno, 55, 65
 kretanje, sinhrono (istovremeno), 426

- kretanje, složeno, 95
 kretanje sa trenjem, 280
 kretanje, asimptotski stabilno, 437
 kretanje, stabilno po Ljapunovu, 437
 kretanje tačke, pravolinijsko, 13, 128
 kretanje, tačke, krivolinijsko, 150
 kretanje, tačke, promenljivo, 13
 kretanje, translatorno (translacija), 55
 kretanje, ubrzano, 28
 kretanje, usporeno, 28
 kretanje, zavojno (helikoidno), 55, 66
 krivina, geodezijska, 218
 krivina, normalna, 218
 krivina, prva, 435
 krivina trajektorije, 435
 krug, Lahirov, 103
 krug, Mor-Landov, 345
 krug, prelazni (granični), 103
 krug prevoja, 103
 krugovi, Bresovi, 103
 krutost opruge, 134
 kvadrat brzine, 17
- Ležišta**, 491, 521
 linija, balistička, 153, 154
 linija čvorova, 49
 linija, geodezijska, 218, 577
 linija, geodezijska, nulta, 579
 linija, glatka, 244
 linija, hrapava, 280
 linija, koordinatna, 4
 linija sudara, prava, 536
 linija, svetska, 564
 linije, geodezijske, 577
 linije, zavojne (zavojnice, helise), 66
 loksodroma, 42
- Masa**, 117, 570
 masa, celokupna, 306
 masa, gravitaciona, 120, 570
 masa, inerciona, 118, 570
 masa, longitudinalna, 577
 masa, mirovanja, 572
 masa, relativna, 573
 masa, sopstvena, 117, 570, 572
 masa, transverzalna, 577
 matrica inercije, 340, 343
 matrica inercije, inverzna, 343
 mehanika, klasična, 117, 561
 mehanika, kvantna, 117
 mehanika, relativistička (Ajnštajnova), 117, 547
 metar (m), 119
 metarkilopond (mkp), 170
 množilac (multiplikator) veze, 211, 244
 model prirodne pojave, 118
 modul eliptičnog integrala, 224
 moment, giroskopski, 512,
 moment, glavni, 520
 moment inercije, 331
 moment, kinetički, 166, 392
 moment, kinetički, krutog tela, 450
 moment, kinetički, u odnosu na osu, 166
 moment količine kretanja, 166
 moment masa, centrifugalni (devijacioni), 333
- moment masa, kvadratni, aksijalni, 331
 moment masa, kvadratni, planarni, 332
 moment masa, kvadratni, polarni, 331
 moment masa, linearni, planarni, 309
 moment masa, linearni, polarni, 309
 moment sila, rezultatni, 392
 moment sistema, vektorski, statički, 309
 momenti inercije, geometrijski, 334
 momenti inercije, glavni centralni, 341
 momenti inercije, glavni u prostoru, 346
 momenti, statički, 309
 multiplikator veze, 211, 244
- Njutn** (newton, oznaka n), 119
 normala, geodezijska, 217
 normala na površ, 217
- Obrazac**, Bineov, 188, 190
 obrazac Ciolkovskog, 177
 obrazac, Freneov, 28
 obrazac, Karnoov (Carnot), 534
 obrazac, Kelvinov, 527
 obrazac, Ojlerov, 58
 obrazac, Ojler-Savarijev, 104
 obrazac, Rodrigov, 60
 obrazac, Volisov, 227
 obrtanje (rotacija), 56
 obrtanje krutog tela oko nepokretne ose, 489
 obrtanje vektora, jednoliko, 22
 odstupanje, infinitezimalno, 427
 odstupanje (devijacija), statičko, 148
 ogledanje tela na ravni, 76
 osa, figurna, 508
 osa, giroskopska, 508
 osa, glavna, inercionog sistema, 337
 osa inercije, glavna, 339, 341
 osa inercije, glavna centralna, 339
 osa, kinetička, 508
 osa obrtanja (rotacije), 57
 osa oscilovanja, 495
 osa, permanentna, 493
 osa, precesiona, 510
 osa rotacije, trenutna, 80, 508
 osa, slobodna, 494
 osa, zavojna (helikoidna), trenutna, 93
 oscilacija, harmonijska, 14
 oscilacija, prigušena (amortizovana), 16
 oscilacija, prosta, prinudna, 145
 oscilacije, amortizovane, 441
 oscilacije, glavne, 441
 oscilacije, kvaziperiodne, 16
 oscilacije, male, matematičkog klatna, 261
 oscilacije, male, materijalnog sistema, 437
 oscilacije, male, oko položaja stabilne ravnoteže, 438
 oscilacije, male, sa jednim stepenom slobode, 441
 oscilacije, prinudne, 144, 443, 444
 oscilacije, prinudne, linearnog oscilatora, 443
 oscilacije, slobodne, 441
 oscilacije, sopstvene, 145, 441
 oscilator, harmonijski, 442
 oscilator, linearni, 442
 oscilator, linearni, sa trenjem, 442
 ose generalisanih koordinata, 5

- ose inercije, glavne, 341
ose, konjugovane, 495
- Pad, slobodni, 130, 295
parabola, Najlova (semikubna), 296
parabola sigurnosti, 152
parametri, dinamički, 474
pericentar, 198
perigeum, 198
perihel, 198
period lebdenja, 145
period oscilacije, 14
period prinudne oscilacije, 145
period sistema, sopstveni, 442
period sopstvene oscilacije, 145
pojam mase, relativistički, 570
pojam sile, relativistički, 570
pojmovi dinamike, osnovni, 117
pol, 3
pol brzina, trenutni, 88
pol, pokretni, 47
polje Njutnove sile gravitacije, 186
polje sile, 171
polje, vektorsko, 71
polhodija, 94
položaj krutog tela, 46
položaj stabilne ravnoteže, 438
položaj tačke, 4
položaj tačke krutog tela, 51
pomeranje, moguće, elementarno, 264
pomeranje, virtualno, 264, 362
poremećaji kretanja, 437
postulat o konstantnosti brzine u vakuumu, 548
potencijal gravitacionog polja, 187
potencijal kinetički, 401
potencijal sile, 172
potencijal sistema, 400
površ, glatka, 212
površ, hrapava, 280
površ, ekvipotencijalna (nivoska), 173
površ, koordinatna, 4
površ, savrešeno hrapava, 458
pravilo, Fukoovo, 512
precesija, pseudoregularna, 513
precesija, regularna, 510, 511
prevrtanje (inverzija) ravne figure, 76
princip, D'alambertov, 418, 527
princip, Galilej-Njutnov, 546
princip, Gausov, najmanje prinude, 420, 422
princip, Hamiltonov, 427, 428
princip, Hercov, najmanje krivine, 432, 436
princip, Lagranžev, virtualnog rada, 420
princip, Mopertiji-Lagranžev, najmanjeg dejstva, 430, 431
princip, relativnosti klasične mehanike, 546
princip, Toričelijeve, 420
princip virtualnih pomeranja, 420
princip, diferencijalni, 417, 418
princip, ekstremalni, 417
princip, integralni, 417, 425
princip mehanike, opšti, 417
princip, varijacioni, 417
prinuda, 207
prinuda, Gausova, 422
pritisci, 492
pritisci kinetostatički u ležištima, 481
problem, statički neodređen, 521
proizvod inercije, 331, 333
projekcije brzine, 19
projekcije ubrzanja, 30
promena kinetičke energije, konačna, 175
promena stacionarna, 172
promenljive, Hamiltonove (kanonske), 404
promenljive, Lagranževe, 403
prostor, 117
prostor, vreme, 563
prostor, fazni, 404
prostor, konfiguracioni, 363
prostor, nepokretni, 54
prostor, obvojni, 382
prostor, pokretni, 54
prostor, pseudoeuklidski, 563
prostor-vreme, 563
prostori, reonomni, 383
put, direktni, stvarni, 425
put, pređeni, 7
put tačke, 7
putanja tačke, 7
putanja sistema, 425
putevi zaobilazni, 425
- Rad, elementarni, 170, 396
rad sila izgubljenih, 418
rad sila udarnih, 526
rad reakcije idealne veze, virtualni, 265
ravan, Laplasova, invarijabilna, 313
ravnoteža krutih tela, 519
razlika, fazna 15
razmera sličnosti, 120
reakcija, 118
reakcija normalna, 211, 244, 263, 280
reakcija veze, 208
reakcije, dinamičke (pritisci), 492
reakcije, statičke, 492
redukcija sistema, 403
relacija između mase i energije, 570
revolucija, 194, 199
rezonancija, 146, 149
rezultanta sila, aktivnih, 388
rotacija, elementarna, 60
rotacija krutog tela, 55
rotacija, rezultatna, 79
ruleta, 90
- Sekunda (sec), 119
sfera dejstva Zemljine gravitacije, 196
sila, 118
sila, centripetalna, 123
sila, elastična, 130
sila inercije, fiktivna, 290
sila, izgubljena, 418
sila, konzervativna, 172, 400
sila, Koriolisova, 290
sila, odbojna (repulsivna), 134, 186
sila, otporna, 146
sila, položajna (poziciona), 131
sila, poremećajna (perturbaciona), 145, 443
sila, potencijalna, 172, 401
sila, prenosna, 290
sila, prinudna, 144
sila, privlačna (atraktivna), 130, 186

- sila reakcije veze (pasivna sila), 208, 244, 375
 sila, reaktivna, 176
 sila trenja, 280, 281, 376
 sila trenja, statička, 282
 sila, udarna, 523
 sila univerzalne gravitacije, Njutnova, 187
 sila, živa, 174
 sile, centralne, 186
 sile, disipativne, 438, 440
 sile, fiktivne, 290
 sile, generalisane, 121, 171
 sile, giroskopske, 438
 sile, inercione, 290
 sile Minkovskog (Ajnštajnovce), 575
 sile, otporne, 137
 sile, spoljašnje, 366
 sile, unutrašnje, 366
 sile, zapreminske, 390
 simbol, Kristofelov prve vrste, 31
 simbol, Kristofelov druge vrste, 32
 simbol, Kronekerov, 10
 simetrija, osna (aksijalna), 76
 sinhronost, 548
 sistem, autonomni, 407
 sistem, dinamički neodreden, 460
 sistem, dinamički simetričan, 343
 sistem, diskretni, 305
 sistem, holonoman, 364
 sistem, inercioni, 290, 544,
 sistem, inercioni, pokretni, 545
 sistem, izolovan, 389
 sistem, konzervativan, 396
 sistem koordinata, krivolinijski, 4
 sistem koordinata, ortogonalan (pravougli), 4
 sistem koordinata, pravolinijski, Dekartov, 4
 sistem, koordinatni, pokretni, 48
 sistem, koordinatni, nepokretni, 48
 sistem, materijalni, 305
 sistem, mernih jedinica, osnovni naučni (CGS), 119
 sistem mernih jedinica, (m-kg-sec), osnovni praktični, 119
 sistem mernih jedinica, osnovni tehnički, 120
 sistem, neholonoman, 364
 sistem referencije, 4
 sistem sila, paralelnih, 523
 sistem sila, ravanskih, 522
 sistem sila, statički jednak (ekvivalentan), 520
 sistem, slobodan, 356
 sistem, vezan (neslobodan), 357
 slaganje konačnih rotacija oko nepokretnih osa, 78
 slaganje rotacija oko nepokretne ose, 75
 slaganje translacija, 75
 sličnost, dinamička, 120
 sličnost, geometrijska, 120
 sličnost, kinematička, 120
 slučaj kretanja tela oko nepokretne tačke, Lagranžev, 504
 slučaj kretanja tela oko nepokretne tačke, Ojlerov, 502
 slučaj kretanja tela oko nepokretne tačke, S. Kovalevske, 506
 snaga (efekt), 173
 snaga, konjska (KS), 174
 spreg, 392, 520
 spreg, kinematički, 96
 sredina, neprekidna (kontinuum), 305
 stepen slobode, 47, 56, 58, 61, 356, 439
 sudar, 535
 sudar, centralni, 537
 sudar, normalan (upravan), 537
 sudar dva tela, 535
 sudar, necentralni (ekscentrični), 537
 svet, četvorodimenzioni, 562
 Tačka, materijalna, 118
 tačka promenljive mase, 176
 tačka, neslobodna (vezana), 207
 tačka, reprezentativna, 363
 tačka, slobodna, 207
 tačka sudara, 535
 tangenta na putanju, 217
 tautohronost, 253
 telo, centralno (nepokretno), 200
 telo, čvrsto, 46, 305
 telo, fluidno, 305
 telo, homogeno, 305
 telo, kruto, 46, 305
 telo, materijalno, 305
 telo, mehanički čvrsto, 46
 telo, nehomogeno, 305
 tenzor elementarne rotacije, 74
 tenzor, metrički, 9
 tenzor, metrički, kontravarijantan, 11
 tenzor, metrički, kovarijantan, 11
 tenzor, metrički, kovarijantno konstantan, 386
 tenzor, osnovni, 9
 tenzor površi, metrički (osnovni), 216
 teorema, adicijona za brzine, 545
 teorema, adicijona za brzine, relativistička, 561
 teorema, Hajgens-Štajnerova, 337
 teorema, Karnoova, generalisana, 534
 teorema, Karnoova, prva i druga, 533
 teorema, Kelvinova, 175, 527
 teorema kinetičke energije, 174
 teorema kinetičkog momenta, 167, 169, 525
 teorema količine kretanja, 164, 525
 teorema, Lagranževa, 438
 teorema, Ležen-Dirihleova, 438
 teoreme dinamike materijalne tačke, opšte, 164
 teoreme dinamike, opšte, primenjene na udar, 524
 teoreme, opšte, o kretanju materijalnog sistema, 386
 teoreme, Papos-Guldinove, 317
 teorija relativnosti, 117
 teorija relativnosti, specijalna, 54
 teža, 119
 težina, 119
 težina, normalna, 120
 težište, 312
 torzor, 95
 trajektorija, 7
 trajektorija, inverzna, 55
 transformacija, Galilejeva, 546

transformacija, koordinatna, 3
 transformacija, Lorencova, 549
 transformacija, Lorencova, specijalna, 552
 transformacija, recipročna (inverzna), 3
 transformacija, unitarna (pseudoortogonalna), 550
 transformacije, ortogonalne, 543
 transformacije, statičke, 520
 translacija, 55
 translacija, krivolinijska, 55
 translacija, pravolinijska, 55
 trenje, 212, 244, 280
 trenutak, početni, 8, 127
 trenutak (moment) udara, 525, 528
 trenutak uspostavljanja veze, 528
 triedar, prirodni, 122
 trobrzina (trovektor brzine), 567
 troubrzanje (trovektor ubrzanja), 567
 trovektor položaja, 567

Ubrzanje, 27, 97
 ubrzanje, aksipetalno, 98
 ubrzanje, apsolutno, 106
 ubrzanje, centripetalno, 28
 ubrzanje, generalisano, 27, 34
 ubrzanje, Koriolisovo, 107
 ubrzanje, normalno, 28
 ubrzanje, radijalno (uzdužno), 34
 ubrzanje, relativno, 106
 ubrzanje, rotaciono, 98
 ubrzanje, tangentno, 28
 ubrzanje teške tačke, vertikalno, 295
 ubrzanje, translatorno, 98
 ubrzanje, transverzalno (poprečno), 34
 ubrzanje, ugaono, 27
 ubrzanje Zemljine teže (Zemljine gravitacije), 119, 194, 293
 udar, 523
 udar, idealan, 530, 531
 udar, potpuno elastičan, 531
 udar, potpuno neelastičan, 531
 udar sistema o nepokretnu vezu, 527, 530
 ugao, amplitudni, 260
 ugao, elevacioni, 152
 ugao nutacije, 49
 ugao obrtanja, 58
 ugao precesije, 49
 ugao sopstvene rotacije, 49
 uglovi, Ojlerovi, 49
 unitarnost, 564
 uporednici sfernog klatna, granični, 223
 uslovi za brzinu, 209, 243, 358
 uslovi ortogonalnosti, 550
 uslovi, početni, 127
 uslovi za ubrzanje, 211, 243, 360, 361
 uspon zavojnice, 67

Varijacija brzine, 426
 varijacija, druga, 427
 varijacija funkcije, 426
 varijacija generalisanih koordinata, 425
 varijacija pomeranja, moguća, 264, 362
 varijacija, prva, 427
 vat (Watt — W), 173

vektor elementarne rotacije, 60
 vektor, glavni, 520
 vektor, osnovni, 5
 vektor položaja, 3
 vektor trenutnog ugaonog ubrzanja, 97
 vektor ubrzanja pokretnog pola, 97
 vektori, ortonormirani, 47
 vektori, osnovni, kontravarijantni, 212
 verzor konačne rotacije, 60
 veze, 207
 veze, cele (holonomne, konačne), 357
 veze, diferencijalne (kinematičke, neholonomne), 207, 357
 veze, dvostrane (bilateralne, zadržavajuće), 208, 356
 veze, geometrijske (konačne, holonomne), 207
 veze, idealne, 212, 244, 376
 veze, jednostrane (unilateralne, nezadržavajuće), 208, 357
 veze, nestacionarne (reonomne), 207, 357
 veze, semiholonomne, 207
 veze, stacionarne (skleronomne), 207, 357
 visina zavojnog hoda, 67
 vrednost brzine, algebarska, 17
 vrednost udarnog impulsa, srednja, 524
 vrednost udarne sile, srednja, 523
 vrednosti, karakteristične, matrice inercije, 346, 347
 vreme, 117
 vreme, apsolutno, 544
 vreme obilaženja, 199, 201
 vreme obilaženja satelita (siderička revolucija), 201
 vreme obrtanja, 22
 vreme, pravo (sopstveno), 557, 562, 565

Zadatak Ciolkovskog, 178
 zadatak inverzni, 127
 zadaci direktni, 126
 zakon dejstva sile, 186
 zakon inercije, 117, 118, 544
 zakon kinetičke energije, 174, 292, 396
 zakon kinetičkog momenta (momenta količine kretanja), 392, 395
 zakon količine kretanja, 387, 388
 zakon konačnog priraštaja količine kretanja 389
 zakon konzervacije (održanja-uravnoteženosti), 386
 zakon o kretanju centra masa, 388
 zakon o nezavisnosti dejstva sila, 118
 zakon o održanju (konzervaciji) količine kretanja, 166, 389, 571
 zakon o održanju (konzervaciji) mase, 392
 zakon o održanju (konzervaciji) mehaničke energije, 175, 400
 zakon puta, 7
 zakon trenja, 280
 zakoni dinamike, Njutnovi, osnovni, 117, 544
 zakoni, Keplerovi, 193, 200, 375
 zavojnice, kružne, 66
 zavrt, 67
 zavrtanj, kinematički (torzor), 95

