# Poremećeno kretanje

Dinamika Sunčevog sistema - šk. 2024/25

# Sadržaj

1. Gausove jednačine
2. Lagranžove jednačine
3. Problem n-tela

# Gausove jednačine

- $\frac{da}{dt} = \frac{2a^2}{Gm}\frac{dE}{dt} = \frac{2}{n\sqrt{1-e^2}}\left[T + e(T\cos f + R\sin f)\right]$
- $\frac{de}{dt} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{na}\left[R\sin f + T\left(\cos f + \cos u\right)\right]$
- $\frac{d\Omega}{dt} = \frac{rW\sin(\omega+f)}{h\sin i} = \frac{W}{na\sqrt{1-e^2}\sin i}\left(\frac{r}{a}\right)\sin(\omega+f)$
- $\frac{di}{dt} = \frac{rW\cos(\omega+f)}{h} = \frac{W}{na\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{r}{a}\right)\cos(\omega+f)$
- $\frac{d\omega}{dt} = -\cos i\frac{d\Omega}{dt} + \frac{\sqrt{1-e^2}}{nae}\left(-R\cos f + +T(\sin f - \frac{\sin u}{\sqrt{1-e^2}})\right)$
- $\frac{d\varpi}{dt} = \sin^2(i/2)\frac{d\Omega}{dt} + \frac{\sqrt{1-e^2}}{nae}\left(-R\cos f + T(\sin f - \frac{\sin u}{\sqrt{1-e^2}})\right)$
- $\frac{d\lambda}{dt} = \frac{d\Omega}{dt} + \frac{d\omega}{dt} + n - \frac{3}{\sqrt{1-e^2}}\frac{1}{a}\left(T + e(T\cos f + R\sin f)\right)$

# Lagranžove jednačine

- Prilikom izvodjenja Gaussovih jednačina, do diferencijalnih jednačina promene putanjskih elemenata u vremenu došli smo razlaganjem sile poremećaja na tri komponente: radijalnu, transferzalnu i normalnu.
- Kada je sila poremećaja konzervativna, pomenuti pristup nije pogodan.
- Zato u tom slučaju koristimo Lagranžove jednačine, koje daju promene elemenata u vremenu izražene preko funkcije poremećaja $\mathfrak{R}$.

# Lagranžove jednačine

- $\frac{da}{dt} = -\frac{2}{na}\frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \epsilon}$
- $\frac{de}{dt} = -\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e}\left(\frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \varpi} + (1-\sqrt{1-e^2})\frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \epsilon}\right)$
- $\frac{d\Omega}{dt} = -\frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i}\frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial i}$
- $\frac{di}{dt} = \frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i}\left(\frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \Omega} + 2\sin^2\frac{i}{2}\frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \varpi} + \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \epsilon}\right)$
- $\frac{d\varpi}{dt} = -\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e}\frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial e} - \frac{\tan(i/2)}{na^2\sqrt{1-e^2}}\frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial i}$
- $\frac{d\epsilon}{dt} = \frac{2}{na}\frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial a} - \frac{\sqrt{1-e^2}(1-\sqrt{1-e^2})}{na^2 e}\frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial e} - \frac{\tan(i/2)}{na^2\sqrt{1-e^2}}\frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial i}$

# Problem n-tela

- Teorija kretanja predstavljena problemom 2-tela predstavlja odličnu prvu aproksimaciju stvarnog kretanja objekata u Sunčevom sistemu.
- Medjutim, gravitacioni uticaji ostalih tela prisutnih u našem planetarnom sistemu nikako nisu zanemarljivi.
- Tu pre svega mislimo na gravitacione uticaje osam velikih planeta, mada u odredjenim situacijama i uticaji manje masivnih objekata mogu biti od značaja.
- Tako dolazimo do problema **n-tela**

# Diferencijalne jednačine kretanja

- Diferencijalne jednačine kretanja u problemu n-tela možemo dobiti na sličan način kao i u problemu 2-tela.
- Neka je $\vec{R}_\odot$ vektor položaja Sunca u nekom inercijalnom koordinatnom sistemu, a vektor položaja $i$-tog tela u tom istom sistemu sa $\vec{R}_i$ $(i = 1..n-1)$
- U tom slučaju, vektor položaja i-tog tela u odnosu na Sunce biće $\vec{r}_i = \vec{R}_i - \vec{R}_\odot$
- Označimo takodje i masu Sunca sa $M_\odot$, a mase ostalih tela sa $m_i$
- Neka su još moduli relativnih položaja i-tog tela u odnosu na j-to telo dati kao $r_{ik} = r_{ki} = |\vec{r}_i - \vec{r}_k| = |\vec{r}_k - \vec{r}_i|$

# Diferencijalne jednačine kretanja

- U gore navedenim oznakama, diferencijalna jednačina kretanja i-tog tela u odnosu na Sunce biće:
- $\frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2} = -G(M_\odot + m_i)\frac{\vec{r}_i}{r_i^3} + \sum_{k\neq i;k=1}^{n-1} Gm_k \left(\frac{\vec{r}_k - \vec{r}_i}{r_{ik}^3} - \frac{\vec{r}_k}{r_k^3}\right)$,
- Drugi član sa desne strane gornje jednačine može se zapisati i kao gradijent potencijala
- $\frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2} = -G(M_\odot + m_i)\frac{\vec{r}_i}{r_i^3} + \nabla\mathfrak{R}_i, \quad i = 1..n-1$
- gde je $\nabla\mathfrak{R}_i(r_i, r_k) = \sum_{k\neq i;k=1}^{n-1} Gm_k \left(\frac{\vec{r}_k - \vec{r}_i}{r_{ik}^3} - \frac{\vec{r}_k}{r_k^3}\right)$, $i = 1..n-1$
- Na osnovu definicije gradijenta biće:
  $\mathfrak{R}_i(r_i, r_k) = \sum_{k\neq i;k=1}^{n-1} Gm_k \left(\frac{1}{r_{ik}^3} - \frac{\vec{r}_i \cdot \vec{r}_k}{r_k^3}\right)$