Poremećaji kretanja

October 28, 2024

Dinamika Sunčevog sistema - šk. 2024/25

Sadržaj

Poremećaji kretanja

- U prethodnom periodu razmatrali smo problem 2-tela i odredili neke karakteristike takvog kretanja
- Iako su mnogi zaključci iz problema 2-tela od velikog značaja za razumevanje stvarnog kretanja, u praksi, skoro po pravilu imamo više od dva tela u sistemu
- Srećna okolnost u Sunčevom sitemu (koja važi i u većini drugih planetarnih sistema) jeste ta da preko 99% mase sitema otpada na masu centralnog objekta, tj. zvezde.
- Iz tog razloga, uticaji ostalih tela su značajno manji, pa se stvarno kretanje se može predstaviti kao problem 2-tela plus poremećaji kretanja.

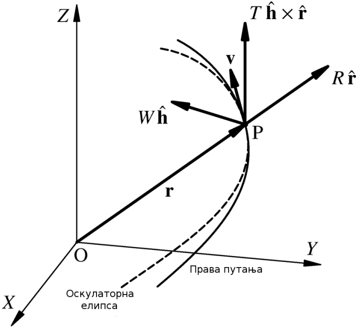
Poremećaji kretanja

- Uopšteno govoreći, nezavisno od toga šta izaziva poremećaje u kretanju nekog tela, teoriji poremećaja možemo pristupiti na dva klasična načina.
- Prvi način je u vezi sa takozvanim Gausovim jednačinama i tipično se koristi u slučajevima **kada sila poremećaja nije konzervativna**, već na primer izaziva impulsivne promene kao što je to slučaj npr. prilikom sudara dva tela.
- Drugi način, koji se zasniva na Lagranževim jednačinama, primenjuje se **kada je sila poremećaja konzervativna**, kao što je to u opštem slučaju sila gravitacije, pod uslovom da nema bliskih prilaza izmedju tela u sistemu.

Opšta forma poremećaja

- U prisustvu poremećajnih sila, dolazi do varijacije veličina koje su u problemu 2-tela očuvane, kao što su energija E i ugaoni momenat h.
- Ovo dovodi do odgovarajućih promena putanjskih elemenata.
- Da bi dobili izraze za promenu putanjskih elemenata u vremenu, posmatrajmo poremećeno Keplerovo kretanje $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\frac{GM}{r^3}\vec{r} + \vec{F}$
- Kako efekat poremećaja u velikoj meri zavisi od njihovog pravca s jedne strane, i geometrije same putanje sa druge strane, u praksi je neophodno $\vec{F}$ raščlaniti na tri medjusobno normalne komponente

Komponente poremećajne sile $\vec{F}$



Tradicionalno te tri komponente su:

- Radijalna komponenta R, u pravcu vektora $\vec{r} = r\hat{r}$;
- Normalna komponenta W, u pravcu vektora ugaonog momenta $\vec{h} = h\hat{h}$, normalna na ravan kretanja;
- Transverzalna komponenta T, u ravni kretanja, odredjena vektorom $\hat{h} \times \hat{r}$

Gausove jednačine - promena velike poluose putanje

- Promena energije po jedinici mase $E = -\frac{Gm}{2a} = \frac{v^2}{2} - \frac{Gm}{r}$ odredjena je sa $\frac{dE}{dt} = F \cdot v$, pa zavisi od jačine sile poremećaja.
- Na osnovu izraza za radijalnu i transferzalnu komponentu brzine u polarnim koordinatama, sledi:
  $\frac{dE}{dt} = Rv_r + Tv_t = [R(e \sin f) + T(1 + e \cos f)] \frac{Gm}{h}$
- Iz gornjeg izraza za promenu velike poluose dobijamo:
  $\frac{da}{dt} = \frac{2a^2}{Gm} \frac{dE}{dt} = \frac{2}{n\sqrt{1-e^2}} [T + e(T \cos f + R \sin f)]$
- Kod putanja gde $e \to 0$, biće $\frac{da}{dt} = \frac{2T}{n} + O(e)$.
- Ovde primećujemo da je transverzalna komponenta poremećaja T najefikasnija u promeni veličine putanje.

Promena ugaonog momenta

- Promena ugaonog momenta uzrokovana je obrtnim momentom koji deluje na telo.
- Po definiciji, obrtni moment $\vec{\tau}$ je vektorski proizvod izmedju radijalnog vektora $\vec{r}$ i sile $\vec{F}$ koja deluje na telo: $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$
- Kada je sila $\vec{F}$ izražena preko radijalne, transverzalne i normalne komponente, samo transverzalna komponenta T doprinosi promeni ugaonog momenta.
- Zato imamo da je $\frac{d\vec{h}}{dt} = \vec{r} \times T(\hat{h} \times \hat{r}) = rT\hat{h}$, odnosno $\frac{dh}{dt} = rT$ kada se posmatra samo intezitet vektora

Gausove jednačine - promena ekscentriciteta

Ukupni ugaoni moment h, menja se usled komponente obrtnog momenta rT kolinearne sa h:

- $\frac{dh}{dt} = F \cdot (\hat{h} \times \hat{r}) = rT$

Diferenciranjem izraza , dobijamo promenu h u funkciji promena orbitalnih elemenata: $rT = \frac{dh}{dt} = \frac{Gm}{2h}\left[(1-e^2)\frac{da}{dt} - 2ea\frac{de}{dt}\right]$

Ako znamo da važi i $r = a(1 - e\cos(u))$, gde je u ekscentrična anomalija i iskoristimo i prethodno dobijeni izraz za $\frac{da}{dt}$, biće:

- $\frac{de}{dt} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{na}\left[R\sin f + T\left(\cos f + \cos u\right)\right]$

Primećujemo da jedino komponente sile poremećaja koje leže u ravni kretanja mogu menjati ekscentricitet putanje.

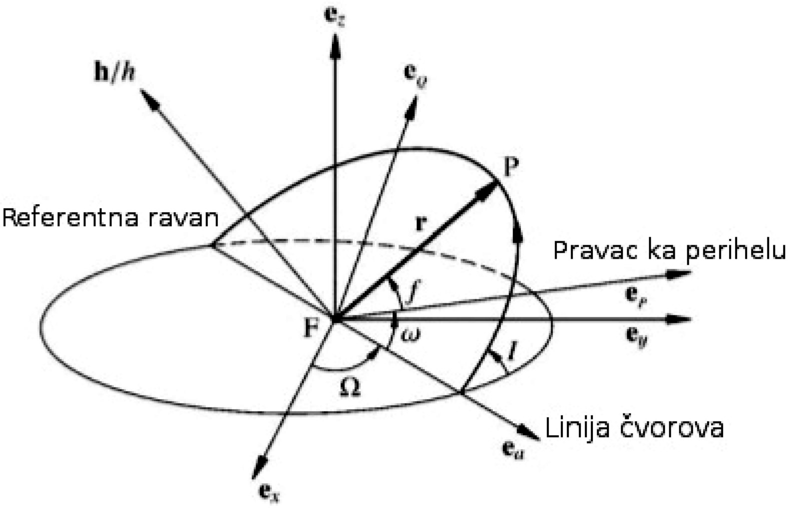
Uticaj normalne komponente poremećaja

- Kada postoji normalna komponenta poremećajne sile W, javlja se dodatni obrtni moment koji menja pravac vektora ugaonog momenta $\vec{h}$. Zbog toga, jedinični vektor $\hat{h}$ neće ostati konstantan, već će se rotirati, što menja orijentaciju ravni kretanja.
- Normalna komponenta W može izazvati precesiju ili promenu ravni u kojoj se nalazi ugaoni moment, ali ne povećava niti smanjuje njegovu vrednost.

Uticaj normalne komponente poremećaja

- Znači, kada je $W \neq 0$ prostorna orijentacija ravni kretanja, odredjen vektorom $\hat{h}$ (odnosno nagibom ravni kretanja i i longitudom uzlaznog čvora Ω), može se menjati.
- U tom slučaju javlja se komponenta obrtnog momenta normalna na h: $h\frac{d\hat{h}}{dt} = W(r \times \hat{h})$
- Prema tome, jedinični vektor $\hat{h}$ menja se ugaonom brzinom $\frac{W}{h}r$
- Ako projektujemo vektor obrtanja na ravan kretanja, dobićemo komponentu $rW\sin(\omega + f)$ duž linije čvorova i komponentu $rW\cos(\omega + f)$ koja takodje leži u ravni kretanja i normalna je na prvu komponentu.

Vektori



$\mathbf{e}_z$
$\mathbf{h}/h$
$\mathbf{e}_Q$
P
Referentna ravan
$\mathbf{r}$
Pravac ka perihelu
f
$\mathbf{e}_P$
F
ω
$\mathbf{e}_y$
I
Ω
Linija čvorova
$\mathbf{e}_a$
$\mathbf{e}_x$

Gausove jednačine - promena longitude uzlaznog čvora

- Komponenta $rW\cos(\omega + f)$ izaziva precesiju vektora $\vec{h}$ oko normale na referentnu ravan, što menja položaj uzlaznog čvora.
- $\frac{d\Omega}{dt} = \frac{rW\sin(\omega+f)}{h\sin i} = \frac{W}{na\sqrt{1-e^2}\sin i}\left(\frac{r}{a}\right)\sin(\omega + f)$
- Ova jednačina opisuje promenu longitude uzlaznog čvora Ω u odnosu na vreme pod uticajem komponente poremećajne sile W koja deluje normalno na ravan orbite.

Gausove jednačine - promena nagiba putanjske ravni

- Komponenta $rW\cos(\omega + f)$ utiče na orijentaciju same ravni orbite u prostoru. Pošto deluje normalno na liniju čvorova, njeno dejstvo se manifestuje kao rotacija ravni orbite oko linije čvorova, što izaziva promenu nagiba ravni kretanja u odnosu na referentnu ravan.
- $\frac{di}{dt} = \frac{rW\cos(\omega+f)}{h} = \frac{W}{na\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{r}{a}\right)\cos(\omega + f)$
- Ova jednačina opisuje promenu nagiba orbite i u odnosu na vreme, uzrokovanu komponentom poremećajne sile W koja deluje normalno na ravan orbite.

Gausove jednačine - promena argumenta perihela

- Polazna jednačina za promenu argumenta perihela dolazi iz izraza za promenu vektora ekscentriciteta $\vec{e}$ u prisustvu perturbativne sile $\vec{F}$
- $\frac{d\vec{e}}{dt} = \frac{1}{\mu}\left(\vec{F} \times \vec{h}\right) + \frac{\vec{r}\cdot\vec{F}}{\mu}\vec{e}$
- Kroz projekciju $\frac{d\vec{e}}{dt}$ na odgovarajuće ose u ravni orbite i upotrebom izraza za promene Ω, i, i e, može se izvesti izraz za promenu argumenta perihela.
- $\frac{d\omega}{dt} = -\cos i \frac{d\Omega}{dt} + \frac{\sqrt{1-e^2}}{nae}\left(-R\cos f + T\sin f\right)$
- Kada se u obzir uzmu i sekulani članovi, biće:
- $\frac{d\omega}{dt} = -\cos i \frac{d\Omega}{dt} + \frac{\sqrt{1-e^2}}{nae}\left(-R\cos f + +T(\sin f - \frac{\sin u}{\sqrt{1-e^2}})\right)$

Gausove jednačine - promena longitude perihela

- Kako je $\varpi = \Omega + \omega$, pa samim tim i $\frac{d\varpi}{dt} = \frac{d\Omega}{dt} + \frac{d\omega}{dt}$, jednačinu za promenu longitude perihela dobijamo iz jednačina promene uzlaznog čvora i argumenta perihela.
- $\frac{d\varpi}{dt} = (1 - \cos i)\frac{d\Omega}{dt} + \frac{\sqrt{1-e^2}}{nae}(-R\cos f + T\sin f)$
- Kako je $\sin(i/2) = \sqrt{\frac{1-\cos i}{2}}$, jednačinu možemo zapisati i kao:
- $\frac{d\varpi}{dt} = \sin^2(i/2)\frac{d\Omega}{dt} + \frac{\sqrt{1-e^2}}{nae}(-R\cos f + T\sin f)$
- Ako uznemo i zanemareni član koji potiče od sekularnih i oskulatornih efekata biće:
- $\frac{d\varpi}{dt} = \sin^2(i/2)\frac{d\Omega}{dt} + \frac{\sqrt{1-e^2}}{nae}\left(-R\cos f + T(\sin f - \frac{\sin u}{\sqrt{1-e^2}})\right)$

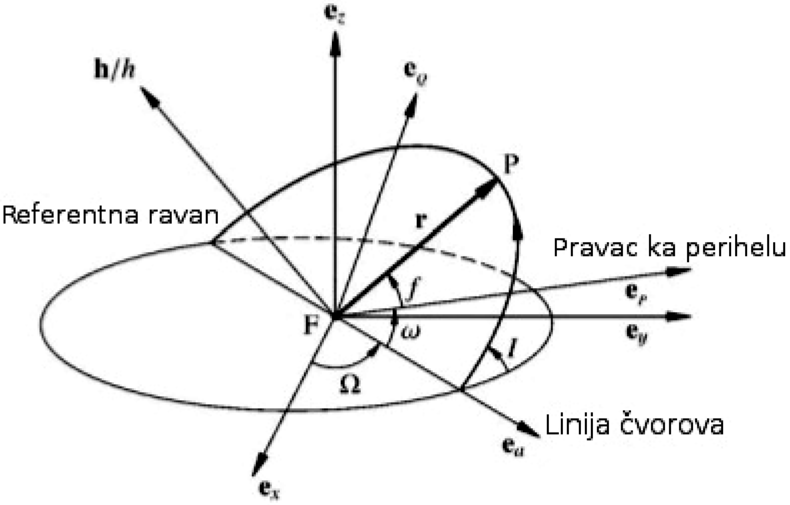
Gausove jednačine - promene brzih uglova

- Kada se radi o dobijanju jednačine za promenu srednje anomalije M ili srednje longitude λ, generalno govoreći tu je situacija složenija
- To je pre svega zato što ove veličine i u problemu 2-tela, znači i bez prisustva poremećaja zavise od vremena.
- Izvedimo ovde samo aproksimativne izraze pretpostavljajući da se srednja longituda λ menja pod uticajem poremećajne sile.
- Srednju longitudu definišemo kao $\lambda = \Omega + \omega + M$, pa je samim tim $\frac{d\lambda}{dt} = \frac{d\Omega}{dt} + \frac{d\omega}{dt} + \frac{dM}{dt}$
- Kako je $M = n(t - t_0)$, biće $\frac{dM}{dt} = n + \frac{dn}{dt}(t - t_0)$
- Čemu je jednako $\frac{dn}{dt}$?

Gausove jednačine

- Imamo da je $n = \sqrt{\frac{Gm}{a^3}}$
- Izvod po vremenu biće $\frac{dn}{dt} = -\frac{3}{2}\frac{n}{a}\frac{da}{dt}$
- Zamenom izraza za $\frac{da}{dt}$ dobijamo
  $\frac{dn}{dt} = -\frac{3}{2}\frac{n}{a} \cdot \frac{2}{n\sqrt{1-e^2}}\left(T + e(T\cos f + R\sin f)\right)$
- Daljim sredjivanjem imamo
  $\frac{dn}{dt} = -\frac{3}{\sqrt{1-e^2}}\frac{1}{a}\left(T + e(T\cos f + R\sin f)\right)$

Vektori



$\mathbf{e}_z$
$\mathbf{h}/h$
$\mathbf{e}_Q$
P
Referentna ravan
r
Pravac ka perihelu
$\mathbf{e}_P$
f
F
ω
$\mathbf{e}_y$
I
Ω
Linija čvorova
$\mathbf{e}_a$
$\mathbf{e}_x$

Pregled Gausovih jednačina

- $\frac{da}{dt} = \frac{2a^2}{Gm}\frac{dE}{dt} = \frac{2}{n\sqrt{1-e^2}}\left[T + e(T\cos f + R\sin f)\right]$
- $\frac{de}{dt} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{na}\left[R\sin f + T\,(\cos f + \cos u)\right]$
- $\frac{d\Omega}{dt} = \frac{rW\sin(\omega+f)}{h\sin i} = \frac{W}{na\sqrt{1-e^2}\sin i}\left(\frac{r}{a}\right)\sin(\omega + f)$
- $\frac{di}{dt} = \frac{rW\cos(\omega+f)}{h} = \frac{W}{na\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{r}{a}\right)\cos(\omega + f)$
- $\frac{d\omega}{dt} = -\cos i\frac{d\Omega}{dt} + \frac{\sqrt{1-e^2}}{nae}\left(-R\cos f + +T(\sin f - \frac{\sin u}{\sqrt{1-e^2}})\right)$
- $\frac{d\varpi}{dt} = \sin^2(i/2)\frac{d\Omega}{dt} + \frac{\sqrt{1-e^2}}{nae}\left(-R\cos f + T(\sin f - \frac{\sin u}{\sqrt{1-e^2}})\right)$
- $\frac{d\lambda}{dt} = \frac{d\Omega}{dt} + \frac{d\omega}{dt} + n - \frac{3}{\sqrt{1-e^2}}\frac{1}{a}\left(T + e(T\cos f + R\sin f)\right)$

Kraj

Gausove jednačine: promena ugaonog momenta i obrtni moment

- Izraz $\frac{dh}{dt} = rT$ smo mogli dobiti i na nešto drugačiji način, polazeći od toga da se specifični ugaoni moment može izraziti kao $h = rv_t$
- Diferenciranjem po vremenu dobijamo $\frac{dh}{dt} = \frac{d}{dt}(rv_t) = \frac{dr}{dt}v_t + r\frac{dv_t}{dr}$
- Kako medjutim samo transverzalna komponenta poremećajne sile T može izazvati promenu brzine v_t, biće $\frac{dh}{dt} = r\frac{dv_t}{dt}$
- Po Njutnovom zakonu, transverzalna komponenta sile T izaziva ubrzanje tangencijalne brzine v_t prema: $T = m\frac{dv_t}{dt}$, pa deljenjem obe strane sa masom m dobijamo da je ubrzanje $\frac{dv_t}{dt}$ jednako $\frac{T}{m}$
- Iz h je već eliminisana masa, pa će važiti: $\frac{dh}{dt} = r\frac{T}{m} = rT$