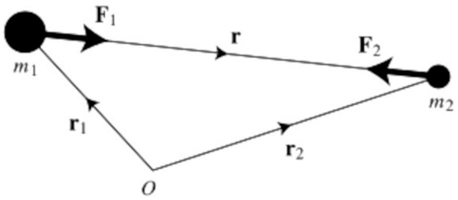
Uvod u dinamiku malih tela

Dinamika Sunčevog sistema - šk. 2024/25

Sadržaj

Problem 2-tela

- Neka je dat sistem dva tela, masa m_1 i m_2, i neka su u nekom inercijalnom koordinatnom sistemu njihovi vektori položaja $\mathbf{r}_1$ i $\mathbf{r}_2$ (kao na slici dole)



- Sile gravitacije $\mathbf{F}_1$ i $\mathbf{F}_2$ koje deluju na mase m_1 i m_2 su istog inteziteta, ali suprotnog smera
- $\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2 = G\frac{m_1 m_2}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r}$

Diferencijalne jednačine kretanja u problemu 2-tela

- Pod pretpostavkom da izmedju dva tela mase m_1 i m_2 deluje samo sila gravitacije, onda će ukupna sila u sistemu biti jednaka sili gravitacije
- $m_1\ddot{\mathbf{r}}_1 = \quad G\frac{m_1 m_2}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r}$
- $m_2\ddot{\mathbf{r}}_2 = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r}$

Diferencijalne jednačine kretanja u problemu 2-tela

- Pod pretpostavkom da izmedju dva tela mase m_1 i m_2 deluje samo sila gravitacije, onda će ukupna sila u sistemu biti jednaka sili gravitacije
- $m_1\ddot{\mathbf{r}}_1 = \quad G\frac{m_1 m_2}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r}$
- $m_2\ddot{\mathbf{r}}_2 = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r}$
- Ako prvu jednačinu skratimo sa m_1, a drugu sa m_2 i oduzmemo prvu od druge dobijamo: $\ddot{\mathbf{r}}_2 - \ddot{\mathbf{r}}_1 = \frac{-G(m_1+m_2)}{r^3}\mathbf{r}$
- Ako zbir masa (tj. ukupnu masu sistema) označimo sa $m = m_1 + m_2$, poslednji izraz možemo zapisati i kao: $\ddot{\mathbf{r}} = \frac{-Gm}{r^3}\mathbf{r}$
- Kako poslednja jednačina uključuje samo relativni vektor položaja $\mathbf{r}$, ona predstavlja diferencijalnu jednačinu kretanja jednog tela u odnosu na drugo

Centar masa sistema

- Sabiranjem jednačina $m_1\ddot{\mathbf{r}}_1 = G\frac{m_1 m_2}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r}$ i $m_2\ddot{\mathbf{r}}_2 = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r}$ dobijamo: $m_1\ddot{\mathbf{r}}_1 + m_2\ddot{\mathbf{r}}_2 = 0$
- Leva strana gornje jednačine je zapravo centar masa sistema.
- Ako sa $\mathbf{R}$ označimo vektor položaja centra masa sistema u datom inercijalnom koordinatnom sistemu, njegove koordinate biće: $\mathbf{R} = \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1+m_2}$
- Tako dobijamo da važi: $m\ddot{\mathbf{R}} = m_1\ddot{\mathbf{r}}_1 + m_2\ddot{\mathbf{r}}_2 = 0.$
- Integracijom gornje jednačine sledi: $m\dot{\mathbf{R}} = m_1\dot{\mathbf{r}}_1 + m_2\dot{\mathbf{r}}_2 = const.$, tj. centar masa sistema kreće ravnomerno pravolinijski!
- Primetimo da izrazi $m_1\dot{\mathbf{r}}_1$ i $m_2\dot{\mathbf{r}}_2$ predstavljaju linearne momente prvog, odnosno drugog tela
- Gornji izraz pokazuje da je zbir pojedinačnih momenata uvek isti (očuvan), što je direktna posledica zakona očuvanja

Specifični ugaoni momenat

- Specifični ugaoni momenat: $\mathbf{h} = \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}$
- Diferenciranjem po vremenu, prema pravilu o diferenciranju vektorskog proizvoda, dobijamo:
- $\frac{d}{dt}(\mathbf{h}) = \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) = \mathbf{r} \times \frac{d\dot{\mathbf{r}}}{dt} + \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \dot{\mathbf{r}}$
- kako je vektorski proizvod paralelnih (antiparalelnih) vektora jednak nuli, sledi da je $\dot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{r}} = 0$

Specifični ugaoni momenat

- Specifični ugaoni momenat: $\mathbf{h} = \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}$
- Diferenciranjem po vremenu, prema pravilu o diferenciranju vektorskog proizvoda, dobijamo:
- $\frac{d}{dt}(\mathbf{h}) = \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) = \mathbf{r} \times \frac{d\dot{\mathbf{r}}}{dt} + \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \dot{\mathbf{r}}$
- kako je vektorski proizvod paralelnih (antiparalelnih) vektora jednak nuli, sledi da je $\dot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{r}} = 0$
- šta je sa $\mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}}$

Specifični ugaoni momenat

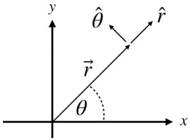
- Specifični ugaoni momenat: $\mathbf{h} = \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}$
- Diferenciranjem po vremenu, prema pravilu o diferenciranju vektorskog proizvoda, dobijamo:
- $\frac{d}{dt}(\mathbf{h}) = \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) = \mathbf{r} \times \frac{d\dot{\mathbf{r}}}{dt} + \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \dot{\mathbf{r}}$
- kako je vektorski proizvod paralelnih (antiparalelnih) vektora jednak nuli, sledi da je $\dot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{r}} = 0$
- šta je sa $\mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}}$
- U ovom slučaju, sila koja deluje na telo je gravitaciona sila, koja uvek deluje prema centru mase sistema. Pošto gravitaciona sila (i ubrzanje) uvek deluje duž linije koja povezuje telo i centar mase, $\mathbf{r}$ i $\ddot{\mathbf{r}}$ su paralelni vektori.
- zato važi i da je $\mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}} = 0$

Specifični ugaoni momenat

- Specifični ugaoni momenat: $\mathbf{h} = \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}$
- Diferenciranjem po vremenu, prema pravilu o diferenciranju vektorskog proizvoda, dobijamo:
- $\frac{d}{dt}(\mathbf{h}) = \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) = \mathbf{r} \times \frac{d\dot{\mathbf{r}}}{dt} + \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \dot{\mathbf{r}}$
- kako je vektorski proizvod paralelnih (antiparalelnih) vektora jednak nuli, sledi da je $\dot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{r}} = 0$
- šta je sa $\mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}}$
- U ovom slučaju, sila koja deluje na telo je gravitaciona sila, koja uvek deluje prema centru mase sistema. Pošto gravitaciona sila (i ubrzanje) uvek deluje duž linije koja povezuje telo i centar mase, $\mathbf{r}$ i $\ddot{\mathbf{r}}$ su paralelni vektori.
- zato važi i da je $\mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}} = 0$
- samim tim biće: $\frac{d}{dt}(\mathbf{h}) = 0$, tj. $\mathbf{h} = const$

Polarne koordinate i kretanje u ravni

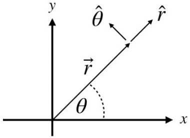
- Posmatrajmo sada kretanje u polarnim koordinatama (r, Θ)



$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}$$

- Vektor položaja **r** tela u polarnim koordinatama može se izraziti kao: $\mathbf{r} = r\hat{\mathbf{r}}$, gde je $\hat{\mathbf{r}}$ jedinični vektor u radijalnom pravcu (od centra ka telu).
- U polarnim koordinatama, brzina tela $\dot{\mathbf{r}}$ može se izraziti kao zbir radijalne i transverzalne komponente brzine
- Prvi izvod vektora položaja $\mathbf{r} = r\hat{\mathbf{r}}$ po vremenu daje: $\dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\hat{r} + r\frac{d\hat{r}}{dt}$
- Kako je $\frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt} = \dot{\theta}\hat{\theta}$, možemo napisati i $\dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\hat{\mathbf{r}} + r\dot{\theta}\hat{\theta}$

Polarne koordinate i kretanje u ravni



$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}$$

- Radijalna komponenta brzine $v_r = \dot{r}$ jeste brzina duž pravca r i odražava promenu udaljenosti od centra.
- Transverzalna komponenta brzine $v_t = r\dot{\Theta}$ jeste brzina u pravcu tangente na putanju, koja se javlja kao posledica rotacionog kretanja oko centra.

Ugaoni momenat u polarnim koordinatama

- Podsetimo se, specifični ugaoni momenat definišemo kao $\mathbf{h} = \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}$
- Kako izgleda taj izraz u polarnim koordinatama?
- $\dot{\mathbf{r}} = v_r \hat{r} + v_t \hat{\theta}$
- $\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = r\hat{r} \times (v_r \hat{r} + v_t \hat{\theta}) = r v_t (\hat{r} \times \hat{\theta})$
- $\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = r v_t \hat{\mathbf{n}}$, gde je $\hat{\mathbf{n}}$ jedinični vektor u pravcu normale na ravan kretanja.
- $\mathbf{h} = \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = r v_t \hat{\mathbf{n}} = r r \dot{\Theta}$
- $\mathbf{h} = r^2 \dot{\Theta}$
- Gornji izraz ekvivalentan je II Keplerovom zakonu, gde je h dvostruka sektorska brzina.

Energija tela, II integral kretanja

- Da bi dobili II integral kretanja, pomnožimo najpre sa $\dot{\mathbf{r}}$ diferencijalnu jednačinu relativnog kretanja dva tela: $\dot{\mathbf{r}} \cdot \ddot{\mathbf{r}} + \frac{Gm}{r^3}(\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}) = 0$
- Podsetimo se da prema pravilu o diferenciranju vektora važi: $\frac{d}{dt}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{A} \cdot \frac{d\mathbf{B}}{dt} + \frac{d\mathbf{A}}{dt} \cdot \mathbf{B}$, za neka dva vektora $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$
- Imajući u vidu gornje pravilo, pomenuti izraz možemo zapisati i kao: $\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}}) + \frac{Gm}{r^3}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) = 0$
- Primetimo da važe i sledeći izrazi: $\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}}) = \frac{d}{dt}\left(\frac{v^2}{2}\right)$ i $\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) = \frac{d}{dt}\left(\frac{r^2}{2}\right)$

Energija tela, II integral kretanja

- Tako dobijamo: $E = \frac{v^2}{2} - \frac{Gm}{r} = const.$
- Ovo je zapravo izraz za ukupnu mehaničku energiju tela u gravitacionom polju koji predstavlja zbir kinetičke $\frac{v^2}{2}$ i potencijalne energije $-\frac{Gm}{r}$
- Ukupna mehanička energija tela E je konstantna tokom kretanja u gravitacionom polju

Ukupna energija sistema

- U izrazu za ukupnu energiju tela pojavljuje se relativna brzina kretanja jednog tela u odnosu na drugo.
- Stvarno kretanje se medjutim odvija oko centra masa.
- U tom slučaju, kretanje sistema dva tela može se razložiti na kretanje centra mase sistema kao celine i relativno kretanje tela

Ukupna energija sistema

- U izrazu za ukupnu energiju tela pojavljuje se relativna brzina kretanja jednog tela u odnosu na drugo.
- Stvarno kretanje se medjutim odvija oko centra masa.
- U tom slučaju, kretanje sistema dva tela može se razložiti na kretanje centra mase sistema kao celine i relativno kretanje tela
- To znači da se ukupna energija sistema dva tela (E_{tot}) sastoji se od kinetičke energije oba tela i potencijalne energije koja nastaje usled gravitacione interakcije izmedju tih tela.
- Ukupna kinetička energija dva tela: $T = \frac{1}{2} m_1 \dot{r}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{r}_2^2$
- Gravitaciona potencijalna energija: $U = -\frac{G m_1 m_2}{r}$

Ukupna energija sistema

- Ako u izraz za ukupnu kinetičku energiju $\dot{r}_1$ i $\dot{r}_2$ zamenimo izrazima $\dot{\mathbf{r}}_1 = \dot{\mathbf{R}} + \frac{m_2}{m_1+m_2}\dot{\mathbf{r}}$ i $\dot{\mathbf{r}}_2 = \dot{\mathbf{R}} - \frac{m_1}{m_1+m_2}\dot{\mathbf{r}}$, dobijamo:
- $T = \frac{1}{2}m\dot{R}^2 + \frac{1}{2}\mu_r\dot{r}^2$, , gde je $\mu_r = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$ tzv. *redukovana masa*.
- $T_{\mathrm{CM}} = \frac{1}{2}m\dot{R}^2$ predstavlja kinetička energiju usled kretanja centra masa
- $T_{\mathrm{rel}} = \frac{1}{2}\mu_r\dot{r}^2$ je kinetička energija relativnog kretanja
- Ukupna energija sistema: $E_{\mathrm{tot}} = \frac{1}{2}m\dot{R}^2 + \left(\frac{1}{2}\mu_r\dot{r}^2 - \frac{Gm_1 m_2}{r}\right)$
- Ako poslednji izraz iskombinujemo sa izrazom za ukupnu energiju relativnog kretanja, dobijamo: $E_{\mathrm{tot}} = \frac{1}{2}m\dot{R}^2 + \mu_r E$

Efektivni potencijal

- Efektivni potencijal je koncept koji se koristi za pojednostavljivanje analize kretanja tela u centralnom polju sile poput gravitacionog polja, kada telo ima ugaoni moment.
- Korišćenjem efektivnog potencijala, možemo proučavati kretanje u jednoj dimenziji.
- Objedinjuje efekte gravitacione i centrifugalne sile, koja nastaje usled rotacionog kretanja.
- Možemo definisati efektivni potencijal kao deo ukupne energije sistema koji zavisi samo od radijalng rastojanja r. Zato predstavlja zbir gravitacione potencijalne energije i "tangencijalne" kinetičke energije.
- $V(r) = U + T_{tan}$

Efektivni potencijal

- Gravitaciona potencijalna energija data je sa: $U(r) = -\frac{Gm}{r}$
- Sa druge strane, kinetička energija po jedinici mase može se izraziti kao $T = \frac{1}{2}v^2$, gde je v ukupna brzina tela.
- U polarnim koordinatama, prethodni izraz ekvivalentan je $T = \frac{1}{2}\left(\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2\right)$, gde drugi član predstavlja tangencijalnu brzinu od koje potiče tangencijalna kinetička energija.
- Kako je $h = r^2\dot{\theta}$, sledi $\dot{\theta} = \frac{h}{r^2}$.
- Korišćenjem izraza za $\dot{\theta}$, dobijamo za tangencijalnu kinetičku energiju: $T_{\tan} = \frac{1}{2}(r\dot{\theta})^2 = \frac{1}{2}\frac{h^2}{r^2} = \frac{h^2}{2r^2}$
- Sledi da je $V(r) = -\frac{Gm}{r} + \frac{h^2}{2r^2}$
- Posmatran po jedinici mase, efektivni potencijal biće: $V(r) = -\frac{Gm}{r} + \frac{h^2}{2r^2}$

Ukupno radijalno ubrzanje i efektivni potencijal

- Da bi došli do veze izmedju ukupnog radijalnog ubrzanja i efektivnog potencijala, najpre treba da odredimo ukupno radijalno ubrzanje koje se javlja kao rezultat dejstva gravitacione i centrifugalne sile.
- Prvi korak u tom pravcu je da iz diferencijalne jednačine relativnog kretanja u problemu dva tela, izdvojimo samo radijalnu komponentu ubrzanja.
- Kako je $\dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\hat{\mathbf{r}} + r\dot{\theta}\hat{\theta}$, sledi $\ddot{\mathbf{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{\mathbf{r}} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{\theta}$

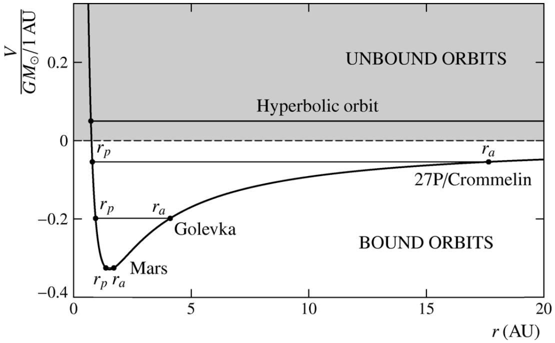
Ukupno radijalno ubrzanje i efektivni potencijal

- Da bi došli do veze izmedju ukupnog radijalnog ubrzanja i efektivnog potencijala, najpre treba da odredimo ukupno radijalno ubrzanje koje se javlja kao rezultat dejstva gravitacione i centrifugalne sile.
- Prvi korak u tom pravcu je da iz diferencijalne jednačine relativnog kretanja u problemu dva tela, izdvojimo samo radijalnu komponentu ubrzanja.
- Kako je $\dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\hat{\mathbf{r}} + r\dot{\theta}\hat{\theta}$, sledi $\ddot{\mathbf{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{\mathbf{r}} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{\theta}$
- Radijalna komponenta ubrzanja je $\ddot{r} - r\dot{\theta}^2$, gde $\ddot{r}$ predstavlja gravitaciono, a $r\dot{\theta}^2$ centrifugalno ubrzanje
- Kako je $h = r^2\dot{\theta}$, sledi $\dot{\theta} = \frac{h}{r^2}$
- Zamenom $\dot{\theta}$ u radijalnu komponentu ubrzanja dobijamo: $r\dot{\theta}^2 = r\left(\frac{h}{r^2}\right)^2 = \frac{h^2}{r^3}$

Efektivni potencijal

- Zamenom $\dot{\theta}$ u radijalnu komponentu ubrzanja dobijamo: $r\dot{\theta}^2 = r\left(\frac{h}{r^2}\right)^2 = \frac{h^2}{r^3}$
- Prvi član radijalnog ubrzanja potiče od gravitacione sile i ona deluje prema centru
- Zato će ukupna radijalna komponenta ubrzanja biti: $\ddot{r} = \frac{h^2}{r^3} - \frac{Gm}{r^2}$
- Ukupno radijalno ubrzanje predstavlja negativni gradijent efektivnog potencijala $\ddot{r} = -\frac{dV(r)}{dr}$.
- $V(r) = -\frac{Gm}{r} + \frac{h^2}{2r^2}$

Efektivni potencijal



Keplerovske putanje

- Kako da rešimo diferencijalnu jednačinu $\ddot{r} = \frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{h^2}{r^3} - \frac{Gm}{r^2}$
- Ako najpre uvedemo smenu $r = 1/u$, jednačina postaje $\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = \frac{Gm}{h^2}$
- Ovo je jednačina harmonijskog oscilatora, pa je njeno rešenje $u(\theta) = \frac{Gm}{h^2} + A\cos(\theta - \omega)$, gde je A konstanta integracije, a ω neki vid "faze" oscilovanja.

Keplerovske putanje

- Kako da rešimo diferencijalnu jednačinu $\ddot{r} = \frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{h^2}{r^3} - \frac{Gm}{r^2}$
- Ako najpre uvedemo smenu $r = 1/u$, jednačina postaje $\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = \frac{Gm}{h^2}$
- Ovo je jednačina harmonijskog oscilatora, pa je njeno rešenje $u(\theta) = \frac{Gm}{h^2} + A\cos(\theta - \omega)$, gde je A konstanta integracije, a ω neki vid "faze" oscilovanja.
- Ako se sada vratimo na r, dobijamo: $r(\theta) = \frac{1}{\frac{Gm}{h^2} + A\cos(\theta-\omega)}$
- Ekscentricitet e je geometrijska karakteristika Keplerovih putanja i definiše se u ovom kontekstu kao $e = A \cdot \frac{h^2}{Gm}$
- Ako sada izrazimo konstantu A preko e i zamenimo u jednačinu kretanja dobijamo: $r(\theta) = \frac{h^2/Gm}{1+e\cos(\theta-\omega)}$

Keplerovske putanje

- $r(\theta) = \frac{h^2/Gm}{1+e\cos(\theta-\omega)}$
- Gornja jednačina daje opšti oblik konusnog preseka u polarnim koordinatama. Vrednosti ekscentriciteta odredjuju da li se radi o eliptičnoj ($e < 1$), paraboličnoj ($e = 1$) ili hiperboličnoj putanji ($e > 1$).
- Rastojanje r svoju minimalnu vrednost dostiže u perihelu putanje, tj. za $\theta = \omega$, i u tom trenutku iznosi: $r_p = \frac{h^2}{Gm(1+e)}$
- Pošto je u trenutku prolaska kroz perihel $\dot{r} = 0$, brzina ima samo tangencijalnu komponentu koja je data sa: $v_p = \frac{h}{r_p} = \frac{Gm(1+e)}{h}$

Keplerovske putanje

- Ako izraze za brzinu u perihelu v_p ubacimo u jednačinu za energiju $E = \frac{v^2}{2} - \frac{Gm}{r}$ i iskoristimo vezu $h = v_p r_p$, dobijamo sledeću vezu: $e^2 = 1 + \frac{2Eh^2}{(Gm)^2}$
- Ona nam pokazuje da je ukupna energija negativna, jednaka nuli ili pozitivna za eliptičnu, paraboličnu i hiperboličnu putanju respektivno.

Eliptične putanje

Eliptične putanje

- Na osnovu karakteristika elipse imamo da je $a = \frac{r_p + r_a}{2}$, što nam dalje daje da je $a = \frac{h^2}{Gm(1-e^2)}$

Eliptične putanje

- Na osnovu karakteristika elipse imamo da je $a = \frac{r_p + r_a}{2}$, što nam dalje daje da je $a = \frac{h^2}{Gm(1-e^2)}$
- Ako iskoristimo i formulu za ekscentricitet $e^2 = 1 + \frac{2Eh^2}{(Gm)^2}$, dobijamo: $a = -\frac{h^2/Gm}{2Eh^2/(Gm)^2} = -\frac{Gm}{2E}$

Eliptične putanje

- Na osnovu karakteristika elipse imamo da je $a = \frac{r_p + r_a}{2}$, što nam dalje daje da je $a = \frac{h^2}{Gm(1-e^2)}$
- Ako iskoristimo i formulu za ekscentricitet $e^2 = 1 + \frac{2Eh^2}{(Gm)^2}$, dobijamo: $a = -\frac{h^2/Gm}{2Eh^2/(Gm)^2} = -\frac{Gm}{2E}$
- Ako poslednji izraz ubacimo u jednačinu za energiju $E = \frac{v^2}{2} - \frac{Gm}{r}$, dobijamo: $v^2 = Gm\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)$

Eliptične putanje

- Konačno, ako iskoristimo izraze $h = rv_t$, $r = \frac{h^2/Gm}{1+e\cos(\theta-\omega)}$ i $f = \theta - \omega$, dobijamo izraze za radijalnu i transferzalnu komponentu brzine:

Eliptične putanje

- Konačno, ako iskoristimo izraze $h = rv_t$, $r = \frac{h^2/Gm}{1+e\cos(\theta-\omega)}$ i $f = \theta - \omega$, dobijamo izraze za radijalnu i transferzalnu komponentu brzine:
- $v_r = \dot{r} = \frac{h^2}{Gm}\frac{e\sin f}{(1+e\cos f)^2}\frac{df}{dt} = \frac{Gm}{h}e\sin f$

Eliptične putanje

- Konačno, ako iskoristimo izraze $h = rv_t$, $r = \frac{h^2/Gm}{1+e\cos(\theta-\omega)}$ i $f = \theta - \omega$, dobijamo izraze za radijalnu i transferzalnu komponentu brzine:
- $v_r = \dot{r} = \frac{h^2}{Gm}\frac{e\sin f}{(1+e\cos f)^2}\frac{df}{dt} = \frac{Gm}{h}e\sin f$
- $v_t = r\dot{\theta} = \frac{h}{r} = \frac{Gm}{h}(1 + e\cos f)$

Integrali kretanja

- U problemu dva tela u klasičnoj mehanici, integrali kretanja su veličine koje ostaju konstantne tokom kretanja dva tela. Ove konstante proizlaze iz simetrija i zakona očuvanja u sistemu.
- Ukupni ugaoni momenat
- Ukupna energija sistema
- Laplasov (Laplasov-Runge-Lencov) vektor
- Laplasov vektor **e** može se definisati kao: $\mathbf{e} = \frac{\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{h}}{Gm} - \frac{\mathbf{r}}{r}$
- Laplasov vektor **e** je usmeren duž *apsidne linije* (prava koja prolazi kroz perihel i afel orbite), a njegova intezitet je jednak ekscentricitetu putanje, e.

Pomoćni slajd 1/2

Brzina centra mase može se izraziti kao: $\dot{\mathbf{R}} = \frac{m_1 \dot{\mathbf{r_1}} + m_2 \dot{\mathbf{r_2}}}{m_1 + m_2}$

Relativna brzina izmedju dva tela je: $\dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r_1}} - \dot{\mathbf{r_2}}$

Da bismo došli do izraza za $\dot{\mathbf{r_1}}$ i $\dot{\mathbf{r_2}}$, izvodimo ove brzine tako da ih izrazimo pomoću $\dot{\mathbf{R}}$ i $\dot{\mathbf{r}}$

Ako izrazimo $\dot{\mathbf{r_1}}$ preko $\dot{\mathbf{r_2}}$ biće: $\dot{\mathbf{r_1}} = \dot{\mathbf{r_2}} + \dot{\mathbf{r}}$

Zatim unesemo ovo u izraz za $\dot{\mathbf{R}}$, što daje: $\dot{\mathbf{R}} = \frac{m_1(\dot{\mathbf{r_2}} + \dot{\mathbf{r}}) + m_2 \dot{\mathbf{r_2}}}{m_1 + m_2}$

$$\dot{\mathbf{R}} = \frac{(m_1 + m_2)\dot{\mathbf{r_2}} + m_1 \dot{\mathbf{r}}}{m_1 + m_2}.$$

Rešavanjem po $\dot{\mathbf{r_2}}$, dobijamo:

$$\dot{\mathbf{r_2}} = \dot{\mathbf{R}} - \frac{m_1}{m_1 + m_2}\dot{\mathbf{r}}.$$

Pomoćni slajd 2/2

Koristimo zatim izraz za $\dot{\mathbf{r}}_2$ da izračunamo $\dot{\mathbf{r}}_1$:

$$\dot{\mathbf{r}}_1 = \dot{\mathbf{r}}_2 + \dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{R}} - \frac{m_1}{m_1 + m_2}\dot{\mathbf{r}} + \dot{\mathbf{r}},$$

$$\dot{\mathbf{r}}_1 = \dot{\mathbf{R}} + \frac{m_2}{m_1 + m_2}\dot{\mathbf{r}}.$$

Dakle, izrazi za brzine pojedinačnih tela su:

$$\dot{\mathbf{r}}_1 = \dot{\mathbf{R}} + \frac{m_2}{m_1 + m_2}\dot{\mathbf{r}},$$

$$\dot{\mathbf{r}}_2 = \dot{\mathbf{R}} - \frac{m_1}{m_1 + m_2}\dot{\mathbf{r}}.$$