

Алгебарска топологија

Хомологија

$$\text{Top}_0 \xrightarrow{\pi_1} \text{Gr}$$

Хомологија и кохомологија

$$n \in \mathbb{N}_0, \text{Top} \xrightarrow{H_n} \text{Ab}$$

R - комутативан прстен за јединицу $R\text{-mod}$
 $\text{Ab} = \mathbb{Z}\text{-Mod}$, R - главни-идеални домен

Организација курса

- I Увод у хомолошку алгебру
- II Сингуларна хомологија
- III Топички комплекси и топичка хомологија
- IV Симуплицијална хомологија
- V Хомологија и коефицијенти

I Увод у хомолошку алгебру

Ланчанци комплекси

$$n \in \mathbb{N}, \text{Top} \longrightarrow \text{Catb} \leftarrow \text{категорија ланчаних комплекса}$$

$$\begin{array}{ccc} & \searrow & \downarrow H_n \\ H_n & \xrightarrow{\quad} & \text{Ab} \end{array}$$

- ⑤ Ланчанци комплекси Абелових група и хомоморфизма или низ Абелових група $\{C_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ и низ хомоморфизма $\{\partial_n \mid \partial_n: C_n \rightarrow C_{n-1}, n \in \mathbb{Z}\}$ такав да је

$$\begin{aligned} (\forall n \in \mathbb{Z}) \quad \partial_n \circ \partial_{n+1} &= 0 & (\partial_n \circ \partial_{n+1}: C_{n+1} \rightarrow C_{n-1}) \\ & \text{"} & \uparrow \quad \uparrow \\ & (\partial_{n+1}(\partial_n(a))) & \end{aligned}$$

$$C: \dots \rightarrow C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \rightarrow \dots$$

$$Z_n(C) := \ker \partial_n \leq C_n$$

$\uparrow$ елементи ове подргрупе

називамо n -циклима

$$B_n(C) := \text{Im } \partial_{n+1} \leq C_n$$

$\uparrow$ елементи ове подргрупе

називамо n -границима

$$\partial_{n+1} \circ \partial_n = 0 \Leftrightarrow B_n(C) \leq Z_n(C)$$

⑤ $\mathcal{C}$ - ланчашти комплекс, не $\mathbb{Z}$

$$H_n(\mathcal{C}) := Z_n(\mathcal{C}) / B_n(\mathcal{C})$$

H_n - n -та хомолошка група ланчаштог комплекса $\mathcal{C}$.

Примери:

$$1) \quad \begin{array}{ccccccccccc} & & C_6 & & C_5 & & C_4 & & C_3 & & C_2 & & C_1 & & C_0 \\ & & & & \xrightarrow{e_5} & & \xrightarrow{e_4} & & \xrightarrow{e_3} & & \xrightarrow{e_2} & & \xrightarrow{e_1} & & \\ \cdots & \rightarrow & 0 & \rightarrow & \mathbb{Z}_5 & \xrightarrow{0} & \mathbb{Z} & \xrightarrow{e_5} & \mathbb{Z} & \xrightarrow{e_4} & \mathbb{Z}_3 & \xrightarrow{e_3} & 0 & \xrightarrow{e_2} & \mathbb{Z}_2 & \xrightarrow{e_1} & \mathbb{Z}_4 & \rightarrow & 0 & \rightarrow \cdots \end{array}$$

$$H_n(\mathcal{C}) = 0 \text{ за } n > 6 \text{ и } n < 0.$$

$$H_0(\mathcal{C}) = \mathbb{Z}_4 / \text{Im } e_1 = \mathbb{Z}_4 / \{0, 2\} \cong \mathbb{Z}_2$$

$$H_1(\mathcal{C}) = 0/0 \cong 0$$

$$H_2(\mathcal{C}) = 0$$

$$H_3(\mathcal{C}) = \mathbb{Z}_3 / \mathbb{Z}_3 \cong 0$$

$$H_4(\mathcal{C}) = {}^3\mathbb{Z} / {}_6\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_2$$

$$H_5(\mathcal{C}) = 0/0 = 0$$

$$H_6(\mathcal{C}) = \mathbb{Z}_5/0 \cong \mathbb{Z}_5$$

$$2) \quad C_i \cdots \rightarrow 0 \rightarrow C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \rightarrow 0 \rightarrow \cdots$$

C_1 је сподогна Абелова група са базом $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ($C_1 \cong \mathbb{Z}^4$)

C_0 је сподогна Абелова група са базом a, b, c ($C_0 \cong \mathbb{Z}^3$)

$$\partial_1(\alpha) := b - a$$

$$\partial_1(\beta) := c - b$$

$$\partial_1(\gamma) := a - c$$

$$\partial_1(\delta) := a - c$$

$$k\alpha + l\beta + m\gamma + n\delta \in \ker \partial_1$$

$$\Leftrightarrow k(b-a) + l(c-b) + m(a-c) + n(a-c) = 0 \text{ и } C_0$$

$$\Leftrightarrow (-k+m+n)a + (k-l)b + (l-m-n)c = 0 \text{ и } C_0$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{ccc} -k + & m + n = 0 & \Leftrightarrow -k & + m + n = 0 \\ k - l & = 0 & k - l & = 0 \\ l - m - n = 0 & & -k + l & = 0 \end{array}$$

↑
у сподогној
групи су снова
независни

Узглед је $\kappa\alpha + \kappa\beta + (\kappa-\eta)\gamma + \eta\delta = \underbrace{\kappa(\alpha+\beta+\gamma)}_{\text{сподина над два генератора}} + \eta(\delta-\gamma)$

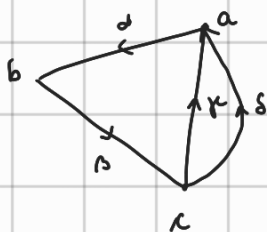
$$H_1(\mathcal{C}) = \ker \partial_1 \cong \mathbb{Z}^2$$

За слику посматрамо базу $\{a, b-a, c-b\}$

припадају слици и све у слици је исписано са два два елемента.

$$\Rightarrow \text{Im } \partial_1 = \mathbb{Z} \langle b-a \rangle \oplus \mathbb{Z} \langle c-b \rangle$$

$$H_0(\mathcal{C}) = C_0 / \text{Im } \partial_1 = \mathbb{Z} \langle a \rangle \oplus \mathbb{Z} \langle b-a \rangle \oplus \mathbb{Z} \langle c-b \rangle / \mathbb{Z} \langle b-a \rangle \oplus \mathbb{Z} \langle c-b \rangle = \mathbb{Z} \langle [a] \rangle \cong \mathbb{Z}$$



$$3) \mathcal{C}_i \dots \rightarrow 0 \rightarrow C_2 \xrightarrow{\partial_2} C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \rightarrow 0 \dots$$

C_0, C_1, ∂_1 из претходног примера

$$C_2 = \mathbb{Z} \langle d \rangle$$

$$\partial_2(d) := \delta - \gamma$$

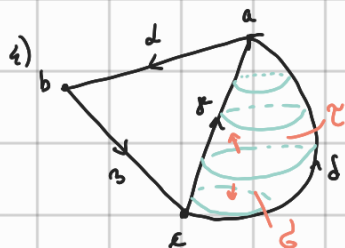
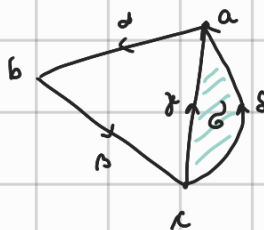
$$H_0(\mathcal{C}) = \mathbb{Z} \langle [a] \rangle \cong \mathbb{Z}$$

$$\ker \partial_1 = \mathbb{Z} \langle \alpha + \beta + \gamma \rangle \oplus \mathbb{Z} \langle \delta - \gamma \rangle$$

$$\text{Im } \partial_2 = \mathbb{Z} \langle \delta - \gamma \rangle$$

$$H_1(\mathcal{C}) = \ker \partial_1 / \text{Im } \partial_2 = \mathbb{Z} \langle [\alpha + \beta + \gamma] \rangle \cong \mathbb{Z}$$

$$H_2(\mathcal{C}) = \ker \partial_2 / 0 = 0$$



$$\mathcal{C}_i \dots \rightarrow 0 \rightarrow C_2 \xrightarrow{\partial_2} C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \rightarrow 0 \dots$$

$$C_2 = \mathbb{Z} \langle d \rangle \oplus \mathbb{Z} \langle \tau \rangle$$

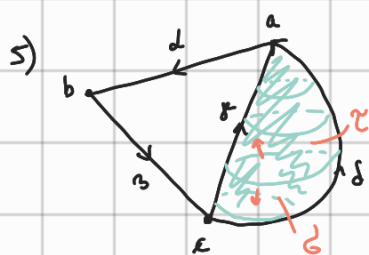
$$\partial_2(d) = \delta - \gamma$$

$$\partial_2(\tau) = \gamma - \delta$$

$$H_0(\mathcal{C}) \cong \mathbb{Z}$$

$$H_1(\mathcal{C}) \cong \mathbb{Z} \text{ јер су } \partial_2(d) \text{ и } \partial_2(\tau) \text{ линеарно зависни}$$

$$H_2(\mathcal{C}) \cong \ker \partial_2 = \mathbb{Z} \langle d + \tau \rangle \cong \mathbb{Z}$$



$$\dots 0 \rightarrow C_3 \xrightarrow{\partial_3} C_2 \xrightarrow{\partial_2} C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \rightarrow 0 \dots$$

$C_0, C_1, C_2, \partial_1, \partial_2$ као у претходном примеру

$$C_3 = \mathbb{Z}\langle x \rangle$$

$$\partial_3(x) = \delta + \epsilon$$

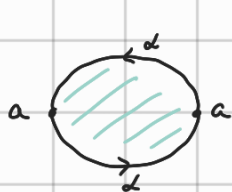
$$H_0(\mathcal{C}) \cong \mathbb{Z}$$

$$H_1(\mathcal{C}) \cong \mathbb{Z}$$

$$H_2(\mathcal{C}) \cong \text{Ker } \partial_2 / \text{Im } \partial_3 = \mathbb{Z}\langle \delta + \epsilon \rangle / \mathbb{Z}\langle \delta + \epsilon \rangle = 0$$

$$H_3(\mathcal{C}) = \text{Ker } \partial_3 = 0$$

6)



$$\delta \mapsto 2\delta \quad \delta \mapsto a - a$$

$$\mathcal{C}: \dots 0 \rightarrow \mathbb{Z}\langle \delta \rangle \xrightarrow{\partial_2} \mathbb{Z}\langle \delta \rangle \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z}\langle a \rangle \rightarrow 0 \rightarrow \dots$$

$$H_0(\mathcal{C}) \cong \mathbb{Z}$$

$$H_1(\mathcal{C}) \cong \mathbb{Z} / 2\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_2$$

$$H_2(\mathcal{C}) = 0$$

④ Нека су $\mathcal{C}$ и $\mathcal{D}$ ланчашти комплекси. Ланчашто пресликавање $\Phi: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ јавља

низ хомоморфизама $\{\Phi_n: C_n \rightarrow D_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ т.д. $(\forall n \in \mathbb{Z}) \Phi_{n-1} \circ \partial_n = \partial'_{n-1} \circ \Phi_n$

$$\mathcal{C}: \dots \rightarrow C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \rightarrow \dots \quad \partial - \text{границни оператори}$$

$$\begin{array}{ccccc} \Phi_{n+1} \downarrow & & \Phi_n \downarrow & & \Phi_{n-1} \downarrow \\ \mathcal{D}: \dots & \rightarrow & D_{n+1} & \xrightarrow{\partial'_{n+1}} & D_n & \xrightarrow{\partial'_n} & D_{n-1} & \rightarrow \dots \end{array}$$

Φ_i - ланчашто пресликавање

елементи језгра су ланци,

а елементи слике су границе.

⑤ Постоји категорија $\mathcal{C}at_{\mathcal{C}}$ чији су објекти ланчашти комплекси, а морфизми ланчашта пресликавања.

$$\Phi: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D} \text{ ланчашто, } n \in \mathbb{Z}$$

$$\downarrow H_n(\Phi): H_n(\mathcal{C}) \rightarrow H_n(\mathcal{D}) = Z_n(\mathcal{D}) / B_n(\mathcal{D}) \sim \Phi_*$$

$$Z_n(\mathcal{C}) / B_n(\mathcal{C})$$

$$\downarrow \psi$$

$$[z]$$

$$\Phi_*[z] := [\Phi_n(z)]$$

⑤ ϕ_* је добро дефинисано.

Доказ: 1° $\phi_n(z) \in Z_n(\mathcal{D})$? ($z \in Z_n(\mathcal{C})$)

$$\left. \begin{array}{l} z, \tilde{z} \in Z_n(\mathcal{C}) \\ z - \tilde{z} \in B_n(\mathcal{C}) \end{array} \right\} \Rightarrow \phi_n(z) - \phi_n(\tilde{z}) \in B_n(\mathcal{D}) \leftarrow \text{представници исте класе имају исту слику}$$

1° $\partial_n \phi_n z = \phi_{n-1} \partial_n z = \phi_{n-1}(0) = 0 \Rightarrow z \in Z_n(\mathcal{D})$ по дефиницији.

2° $\phi_n(z) - \phi_n(\tilde{z}) = \phi_n(z - \tilde{z}) = \phi_n \underbrace{\partial_{n+1} c}_{\text{Im } \partial_{n+1}} = \underbrace{\partial_{n+1} \phi_{n+1} c}_{\phi_{n+1}} \in B_n(\mathcal{D})$

⊛ Покажите да је ϕ_* хомоморфизам.

□

⑤ Ето $H_n \rightarrow H_n$ је један коваријантни функтор.

3

⑥ $\phi, \psi: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ ланчана пресликавања.

ϕ је ланчано хомотопно са ψ (у ознаци $\phi \simeq \psi$) ако постоји низ хомоморфизма

$S = \{S_n: C_n \rightarrow D_{n+1}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ такав да $\phi_n - \psi_n = S_{n-1} \partial_n + \partial_{n+1} S_n$ за све $n \in \mathbb{Z}$.

овај низ називамо ланчана хомотопија, пишемо $S: \phi \simeq \psi$.

$$\rightarrow C_{n+1} \rightarrow C_n \rightarrow C_{n-1} \rightarrow \dots$$

$$\begin{array}{ccccccc} \downarrow \downarrow & \swarrow S_n & \downarrow \phi_n & \downarrow \psi_n & \swarrow S_{n+1} & \downarrow \downarrow \\ \rightarrow D_{n+1} & \rightarrow & D_n & \rightarrow & D_{n-1} & \rightarrow \dots \end{array}$$

⑤ $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ ланчани комплекси, $\simeq$ је релација еквиваленције на $\text{Mor}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$.

Доказ: (P) $0: \phi \simeq \phi$

(C) $S: \phi \simeq \psi \Rightarrow -S: \psi \simeq \phi$

(⊕) $S: \phi \simeq \psi, T: \psi \simeq \theta \Rightarrow S+T: \phi \simeq \theta$

⑥ Пишемо ϕ_* али то је много различитице, али скваћемо јди према томе где пише

$$\rightarrow C_{n+1} \xrightarrow{\partial} C_n \xrightarrow{\partial} C_{n-1} \rightarrow \dots$$

$$\begin{array}{ccccccc} \phi \downarrow \downarrow & \swarrow S_n & \downarrow \phi & \downarrow \psi & \swarrow S_{n+1} & \downarrow \downarrow \\ \rightarrow D_{n+1} & \xrightarrow{\partial} & D_n & \xrightarrow{\partial} & D_{n-1} & \xrightarrow{\partial} & \dots \end{array}$$

(циклотом комутира $\Leftrightarrow \phi \partial = \partial \phi$)

⑤ $\phi \pm \psi \Rightarrow \phi_* = \psi_* : H_n(\mathbb{C}) \rightarrow H_n(\mathbb{D})$ за сва $n \in \mathbb{Z}$.

Доказ: $[z] \in H_n(\mathbb{C})$, $z \in Z_n(\mathbb{C})$

$$\begin{aligned} \phi_*[z] - \psi_*[z] &= [\phi z] - [\psi z] \\ &= [\phi z - \psi z] \\ &= [\underbrace{S \partial z}_0 + \underbrace{2S z}_{\in B_n(\mathbb{D})}] = 0 \text{ у } Z_n(\mathbb{D})/B_n(\mathbb{D}) \end{aligned}$$

□

$\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ фамилија абелових група

$\prod_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ је бесконачна абелова група.

↓ копроизвод у Ab.

$$\prod_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \supseteq \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda := \left\{ x \in \prod_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \mid x_\lambda = 0 \text{ за све осим коначно много } \lambda \in \Lambda \right\}$$

$\{e^\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ фамилија ланчаштих кокомплекса

$$\left(\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} e^\lambda \right)_n := \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} C_n^\lambda \quad e^\lambda \text{ има своје } \partial^\lambda \text{ и то је по координатама само.}$$

ланчашти кокомплекси

⑤ $n \in \mathbb{Z}$, $\{e^\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ фамилија ланчаштих кокомплекса

$$\Rightarrow H_n\left(\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} e^\lambda\right) \cong \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} H_n(e^\lambda), \quad H_n\left(\prod_{\lambda \in \Lambda} e^\lambda\right) \cong \prod_{\lambda \in \Lambda} H_n(e^\lambda).$$

Тачни низови

④ $N: \dots \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow \dots$ низ абелових група и хомоморфизма.

Низ N је тачан на месту B ако је $\text{im } f = \ker g$

Низ је тачан ако је тачан на свим местима која су између других два.

(ако је неограничен онда тачан свуда)

$$C: \dots \rightarrow C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \rightarrow \dots \quad \text{Im } \partial_{n+1} \subseteq \ker \partial_n$$

Бесконечни низ је тачан ако је ланчашти кокомплекс са хомологијама 0 по свим местима.

⑤ $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D$ тачан низ

а) g је епиморфизам („на“) $\Leftrightarrow h=0$

б) g је мономорфизам („у“) $\Leftrightarrow f=0$

в) g је изоморфизам $\Leftrightarrow f=0, h=0$ тачан низ

Зачем: g је епиморфизам $\Leftrightarrow \text{im } g = C \xrightarrow{\downarrow} \ker h = C \Leftrightarrow h=0$

g је мономорфизам $\Leftrightarrow \ker g = 0 \Leftrightarrow \text{im } f = 0 \Leftrightarrow f=0$

□

⑥ Краћак тачан низ (КТН) јесте тачан низ облика:

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{j} C \rightarrow 0$$

тачан на месту $A \Leftrightarrow i$ је „у“

тачан на месту $C \Leftrightarrow j$ је „на“

тачан на $B \Leftrightarrow \text{im } i = \ker j$

Пример: а) $A, C \in \mathcal{A}_b$

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{i_1} A \oplus C \rightarrow C \xrightarrow{\pi_2} 0$$

$$i_1(a) := (a, 0), \quad \pi_2(a, c) := c$$

б) $m \geq 2$

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot m} \mathbb{Z} \xrightarrow{j_m} \mathbb{Z}_m \rightarrow 0 \quad \downarrow (\text{mod } m)$$

$$3) \quad 0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{f} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{g} \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

$$f = (1_{\mathbb{Z}}, -1_{\mathbb{Z}}), \quad g(k) = (k, -k)$$

г) $A \leq B$

$$0 \rightarrow A \hookrightarrow B \rightarrow B/A \rightarrow 0$$

$$b \mapsto b+A \quad (\text{додељимо природно класу})$$

⑦ Ако имамо тип који КТН

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{j} C \rightarrow 0$$

$$\rightarrow C = \text{im } j \cong B / \ker j = B / i(A) \quad \text{тј. пружање сваки КТН је као у г)}$$

↑ 1. теорема о изоморфизму

$$5) 0 \rightarrow \mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{Z}_4 \rightarrow \mathbb{Z}_2 \rightarrow 0$$

$\mathbb{Z}_4 \neq \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ (то је локална примера)

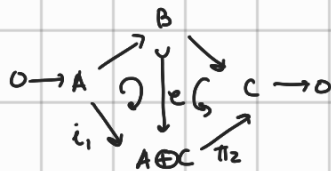
⑤ Крајњак тачан низ $0 \rightarrow A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{j} C \rightarrow 0$ се зове ако је $i(A)$ директан сабирак у B (пошто је $G \leq B$ тд је $i(A) \oplus G = B$)

↑ када имамо две подгрупе исте групе онда је ово унутрашња директна сума (тј. сабирам сваки са својим и јединичном репрезентацијом)

⑥ КТН: $0 \rightarrow A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{j} C \rightarrow 0$, следи да 4 указују међусобно еквивалентно:

1) (КТН) се зове

2) $\exists$ изоморфизам $e: B \rightarrow A \oplus C$ тд. комутира дијаграм:



3) $\exists$ хомоморфизам $p: B \rightarrow A$ такав да је $p \circ i = 1_A$.

4) $\exists$ хомоморфизам $s: C \rightarrow B$ такав да је $j \circ s = 1_C$.

Доказ: (1) $\Rightarrow$ (3) $b \in B, p(b) = p(i(a) + g) := a$

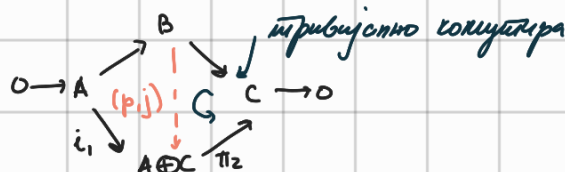
↑ $\exists a \in A, \exists g \in G$ (добро дефинисано због јединичности)
↑ због i је „1-1“

p је хомоморфизам: $b_1, b_2 \in B, b_{1,2} = i(a_{1,2}) + g_{1,2}$

$$\begin{aligned} p(b_1 + b_2) &= p(i(a_1) + g_1 + i(a_2) + g_2) \\ &\stackrel{\text{комутативност и } i \text{ је хомоморфа}}{=} p(i(a_1 + a_2) + g_1 + g_2) \\ &= a_1 + a_2 = p(b_1) + p(b_2) \end{aligned}$$

$$a \in A, p(i(a)) = a \quad \forall$$

(3) $\Rightarrow$ (2):



$i(a)$
 $a \xrightarrow{i} i(a)$
 $a \xrightarrow{(p, j)} a \oplus 0$
о хр је тачан, и тако привујено комутира

(p, j) је „ $1-1$ “:

$$b \in B, (pb, jb) = (0, 0)$$

$$pb = 0, jb = 0$$

$$b \in \ker j = \operatorname{im} i$$

$$\Rightarrow b = ia \text{ за неки } a \in A$$

$$0 = pb = pia = a$$

$$b = ia = i(0) = 0$$

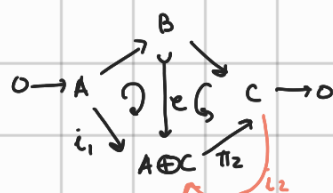
(p, j) је „ H_A “ $(a, c) \in A \oplus C$

$$\{b \in B \mid jb = c, j(b - ia) = jb - c\}$$

$$(p, j)(b + i(a - pb)) = (p(b + ia - ipb), j(b + ia - ipb))$$

$$= (pb + a - pb, jb) = (a, c)$$

(2) $\Rightarrow$ (4):



$$\Lambda = \mathbb{C}^1 \circ i_2$$

$$j \circ \Lambda = j \circ \mathbb{C}^1 \circ i_2 = \pi_2 \circ i_2 = 1_C$$

(4) $\Rightarrow$ (1): $0 \rightarrow A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{j} C \rightarrow 0$

$$i(A) \oplus \Lambda(C) \stackrel{?}{=} B \quad (\Leftrightarrow B = i(A) + \Lambda(C) \text{ и } i(A) \cap \Lambda(C) = 0)$$

$$\Lambda = j \circ \Lambda = 1_C$$

$$b \in B, b = b - \Lambda j b + \Lambda j b$$

$$\ker j = i(A)$$

$$j(b - \Lambda j b) = jb - j \Lambda j b = jb - jb = 0$$

$$b \in i(A) \cap \Lambda(C), b = ia, 0 = jia - jb = j \Lambda c = c$$

$$b = \Lambda c \Rightarrow c = 0 \Rightarrow b = \Lambda(0) = 0.$$

□

⑨ Ако је КТН $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ цела, онда је $B \cong A \oplus C$

Менџк доплати: доказати да не важи обротно.

$0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ је КТН и $B \cong A \oplus C$ али се низ не цела.

Примери: 1) $0 \rightarrow A \xrightarrow{i_1} A \oplus C \xrightarrow{\pi_2} C \rightarrow 0$ не цета се

2) $0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{m} \mathbb{Z} \xrightarrow{f_m} \mathbb{Z}_m \rightarrow 0$ цета се

3) $0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{+} \mathbb{Z} \rightarrow 0$ цета се

4) $0 \rightarrow A \hookrightarrow B \rightarrow B/A \rightarrow 0$ (сушине ошито може бди)

5) $0 \rightarrow \mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{Z}_4 \rightarrow \mathbb{Z}_2 \rightarrow 0$ не цета се

⑤ (КТН) $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$

Ако је C слободна, онда се КТН цета.

Доказ: C је слободна ако има базу $\{b_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$.

$\{b_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ је база $\Leftrightarrow (\forall c \in C)$ на јединствени начин се записује у облику

$$c = d_1 b_{\lambda_1} + d_2 b_{\lambda_2} + \dots + d_n b_{\lambda_n}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \Lambda \text{ међусобно различити}$$

и $d_i \in \mathbb{Z}$.

$\lambda \in \Lambda, \Delta(b_\lambda) := x_\lambda$ (x_λ производни који се слика у b_λ ка j (j је „но“))

↑ како год дефинисали јединствено се проширију до хомоморф.

$$j \circ \Delta = \text{id}_C : C \rightarrow C$$

$\lambda \in \Lambda, j \circ \Delta(b_\lambda) = j x_\lambda = b_\lambda = \text{id}_C(b_\lambda)$ (на базним се поклапају па мора свуда) $\square$

⑥ $C \cong \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} \mathbb{Z}$ (еквивалентна дефиниција слободне групе)

подгрупа слободне је слободна (иљепко доказати или у Рајмону)

6

⑦ $\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E}$ — локосити комплекси

$\Phi: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}, \Psi: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$ локосити пресликавања

Узмемо да је $0 \rightarrow \mathcal{C} \xrightarrow{\Phi} \mathcal{D} \xrightarrow{\Psi} \mathcal{E} \rightarrow 0$ је крајњи ланачи из локоситних комплекса

или је $(\forall n \in \mathbb{Z}) \quad 0 \rightarrow C_n \xrightarrow{\Phi_n} D_n \xrightarrow{\Psi_n} E_n \rightarrow 0$ КТН одговарајућих група.

$$\begin{array}{ccccccc}
& \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
0 & \rightarrow & C_{n+2} & \xrightarrow{\Phi} & D_{n+2} & \xrightarrow{\Upsilon} & E_{n+2} \rightarrow 0 \\
& \partial \downarrow & & \partial \downarrow & & \partial \downarrow & \\
0 & \rightarrow & C_{n+1} & \xrightarrow{\Phi} & D_{n+1} & \xrightarrow{\Upsilon} & E_{n+1} \rightarrow 0 \\
& \partial \downarrow & & \partial \downarrow & & \partial \downarrow & \\
0 & \rightarrow & C_n & \xrightarrow{\Phi} & D_n & \xrightarrow{\Upsilon} & E_n \rightarrow 0 \\
& \partial \downarrow & & \partial \downarrow & & \partial \downarrow & \\
0 & \rightarrow & C_{n-1} & \xrightarrow{\Phi} & D_{n-1} & \xrightarrow{\Upsilon} & E_{n-1} \rightarrow 0 \\
& \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
& \vdots & & \vdots & & \vdots &
\end{array}$$

① (Основна теорема хомологической алгебры; цикл-цикл лема)

$$0 \rightarrow C \xrightarrow{\Phi} D \xrightarrow{\Upsilon} E \rightarrow 0 \text{ КТН логический коммутативный.}$$

Тогда $(\forall n \in \mathbb{Z}) (\exists \text{ гомоморфизм } \partial: H_{n+1}(E) \rightarrow H_n(C))$ так что да ж

$$\begin{array}{c}
\text{мыз} \quad \dots \rightarrow H_{n+1}(E) \xrightarrow{\partial} H_n(C) \xrightarrow{\Phi_*} H_n(D) \xrightarrow{\Upsilon_*} H_n(E) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(C) \rightarrow \dots \\
\text{где } \underbrace{H_n(C) \xrightarrow{\Phi_*} H_n(D) \xrightarrow{\Upsilon_*} H_n(E)}_{\text{где } \text{мыз } \text{у } \text{хомологий}}
\end{array}$$

(Метод доказательства, чей принцип по диаграмме, diagram chasing)

$$\text{Доказ: } n \in \mathbb{Z}, \partial: H_{n+1}(E) \rightarrow H_n(C)$$

$$x = [a], a \in Z_{n+1}(E)$$

$$\begin{array}{ccc}
b & \xrightarrow{\Upsilon} & a \\
\downarrow \partial & & \downarrow \partial \\
\Phi x = \partial b & \xrightarrow{\Upsilon} & 0
\end{array}$$

$$\Upsilon \text{ ж. н. л. (КТН)} \rightarrow (\exists b \in D_{n+1}) \Upsilon b = a$$

$$\Upsilon \partial b = \partial \Upsilon b = \partial a = 0$$

$$\Rightarrow \partial b \in \ker \Upsilon = \text{im } \Phi \Rightarrow (\exists c \in C_n) \Phi c = \partial b$$

$\Phi \text{ ж. н. л.}$

$$\partial(x) := [c], \text{ проверяем что } c \text{ цикл: } \Phi \partial c = \partial \Phi c = \partial \partial b = 0 \Rightarrow \partial c = 0$$

$$\Rightarrow c \in H_n(C)$$

$$x = [a] = [\tilde{a}], a, \tilde{a} \in Z_{n+1}(E)$$

$$\begin{array}{ccc}
\tilde{b} & \xrightarrow{\Upsilon} & \tilde{a} \\
\downarrow \partial & & \downarrow \partial \\
\Phi \tilde{x} = \partial \tilde{b} & \xrightarrow{\Upsilon} & 0
\end{array}$$

$$[c] \stackrel{?}{=} [\tilde{x}] \text{ у } H_n(C)$$

$$c - \tilde{x} \in B_n(C)$$

$$a - \tilde{a} = \partial e \text{ за некое } e \in E_{n+2}$$

$$\Upsilon d = e \text{ за некое } d \in D_{n+2}$$

$$\Upsilon(\underbrace{b - \tilde{b} - \partial d}_{D_{n+1}}) = a - \tilde{a} - \partial \Upsilon d = a - \tilde{a} - \partial e = 0.$$

$$\Rightarrow b - \tilde{b} - \partial d \in \ker \Upsilon = \text{im } \Phi$$

$$\Rightarrow b - \tilde{b} - \partial d \in \Phi z \text{ за некое } z \in C_{n+1}$$

$$\partial z \stackrel{?}{=} c - \tilde{c}$$

$$\partial \partial z = \partial \phi z = \partial(b - \tilde{b} - \partial d) = \partial b - \partial \tilde{b}$$

$$\phi(x - \tilde{x}) = \partial b - \partial \tilde{b} \neq 0 \Rightarrow \text{функција добро дефинисана.}$$

$$\partial \text{ је хомоморфизам: } \partial(x+y) \stackrel{?}{=} \partial x + \partial y$$

$$x+y = [a] + [a']$$

$$= [a + a']$$

$$\begin{array}{ccc} b+b' & \mapsto & a+a' \\ \downarrow & & \\ x+x' & \xrightarrow{\phi} & \partial b + \partial b' \end{array} \quad \leftarrow \text{ све редови су хомоморфизми} \\ \text{па ће бити хомоморфизам}$$

Почао из: (лични на прва два места су за докази)

$$\text{личност од } H_n(\mathbb{Z}) : \text{im } \psi_x \stackrel{?}{=} \ker \partial$$

$$\varepsilon: \partial \circ \psi_x \stackrel{?}{=} 0$$

$$\sigma \in H_n(\mathbb{D})$$

$$\begin{array}{ccc} b & \mapsto & \tau b \\ b \in Z_n(\mathbb{D}) & \rightarrow & \downarrow \\ 0 & \mapsto & 0 \end{array}$$

$$\sigma = [b], b \in Z_n(\mathbb{D}), \partial \psi_x[b] = \partial[\tau b] = [0] = 0$$

$$\varepsilon: x \in \ker \partial, x = [x], x \in Z_n(\mathbb{Z})$$

$$\partial x = [x] = 0$$

$$\begin{array}{ccc} \mu & & \beta \mapsto d \\ \downarrow \partial & & \downarrow \partial \\ x & \xrightarrow{\phi} & \beta \end{array}$$

$$\partial(\beta - \phi \mu) = \underbrace{\partial \beta}_{=0} - \partial \phi \mu = \partial \beta - \phi \partial \mu - \partial \beta - \phi x = \partial \beta - \partial \beta = 0 \Rightarrow \beta - \phi \mu \text{ је цикл.}$$

$$\psi_x[\beta - \phi \mu] = [\tau \beta - \underbrace{\tau \phi \mu}_0] = [x] = x.$$

□

⑤ (природност цикл-звез ком.)

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Ако је} & 0 & \rightarrow & \mathcal{C} & \xrightarrow{\phi} & \mathcal{D} & \xrightarrow{\psi} & \mathcal{E} & \rightarrow & 0 \\ & \downarrow \alpha & & \textcircled{I} & \downarrow \phi & \textcircled{II} & \downarrow \psi & \downarrow x & & \\ & 0 & \rightarrow & \mathcal{C}' & \xrightarrow{\phi'} & \mathcal{D}' & \xrightarrow{\psi'} & \mathcal{E}' & \rightarrow & 0 \end{array}$$

коммутативан дијаграм ланцајних комплекса и ланцајних пресликавања

т.е. су водоравни изови КТН ланцајних комплекса, онда комутација дијаграма:

$$\begin{array}{ccccccccccc} \cdots & \rightarrow & H_n(\mathcal{C}) & \xrightarrow{\partial} & H_n(\mathcal{C}) & \xrightarrow{\phi_*} & H_n(\mathcal{D}) & \xrightarrow{\psi_*} & H_n(\mathcal{E}) & \xrightarrow{\partial} & H_{n-1}(\mathcal{C}) & \rightarrow \cdots \\ & & & & \textcircled{I} & & & & \textcircled{II} & & & \\ \cdots & \rightarrow & H_n(\mathcal{C}') & \xrightarrow{\partial'} & H_n(\mathcal{C}') & \xrightarrow{\phi'_*} & H_n(\mathcal{D}') & \xrightarrow{\psi'_*} & H_n(\mathcal{E}') & \xrightarrow{\partial'} & H_{n-1}(\mathcal{C}') & \rightarrow \cdots \end{array}$$

① и ② комутација из функцијорјанизације, а ③ треба да се докаже (докази). □

⌚ (итиндрова пст-кени)

Ано сва 4 дијагноза компјутирају и торњи и доњи

$A_1 \xrightarrow{f_1} A_2 \xrightarrow{f_2} A_3 \xrightarrow{f_3} A_4 \xrightarrow{f_4} A_5$ из этих точек и до:

$h_1 \downarrow \quad G \quad h_2 \downarrow \quad G \quad h_3 \downarrow \quad G \quad h_4 \downarrow \quad G \quad h_5 \downarrow$

$B_1 \xrightarrow{g_1} B_2 \xrightarrow{g_2} B_3 \xrightarrow{g_3} B_4 \xrightarrow{g_4} B_5$ 8) h_2 u h_4 „ h_2 “, h_5 „ h_5 “ $\Rightarrow$ h_3 je „ h_3 “

(b) h_1, h_2, h_4, h_5 изоморфизми $\Rightarrow h_3$ је изоморфизам.

Зокре: (5) $b \in B_3$

$$\text{III} \quad h_3(d + f_2 y) = h_3 d + g_2 h_2 y = h_3 d + b - h_3 d = b$$

$$g_3(b - h_3 \alpha) = 0$$

$$h_2 \downarrow$$

$$\rho \xrightarrow{g_2} \rho - h_3 d$$

I

$$\begin{array}{ccccc}
 & f_3 & & f_4 & \\
 \alpha & \longrightarrow & a & \longrightarrow & f_4 a \\
 & & \downarrow h_4 & & \downarrow h_5 \\
 \beta & \longrightarrow & g_3 \beta & \longrightarrow & g_3 g_4 \beta
 \end{array}$$

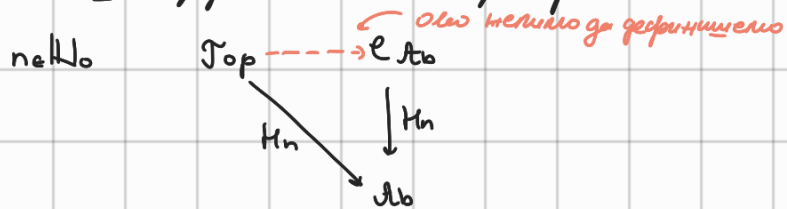
(I, II, III редослед корак)

ош ош за дома ти

D

II Сингуларна хомологија

Хомолошке групе тополошких простора



$$\chi \mapsto c(\chi)$$

$$f: \chi \rightarrow \psi \mapsto f_{\#}: c(\chi) \rightarrow c(\psi)$$

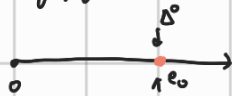
$$H_n(\chi) := H_n(c(\chi))$$

$$n \in \mathbb{N}_0, \Delta^n := \{ (t_0, t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid t_0, t_1, \dots, t_n \geq 0, t_0 + t_1 + \dots + t_n = 1 \} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$$

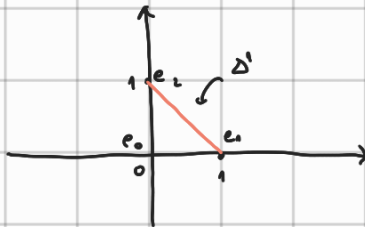
$\uparrow$ стандардни n -симплекс $e_i := (0, \dots, 1, \dots, 0, 0)$
 $\uparrow$ i

$\uparrow$ посматрајући топологију.

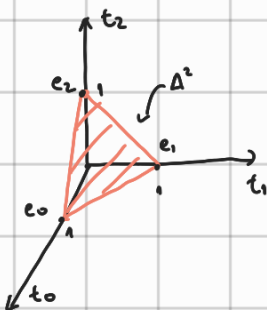
$n=0$:



$n=1$:



$n=2$:



⊙ X тополошки простор, $n \in \mathbb{N}_0$. Непрекидно преликавање $G: \Delta^n \rightarrow X$ је сингуларни n -симплекс у X .

$$\Delta_n(X) := \{ G: \Delta^n \rightarrow X \mid G \text{ је непрекидно} \} = C(\Delta^n, X)$$

$$c(\chi): \dots \rightarrow C_n(X) \rightarrow C_{n-1}(X) \rightarrow \dots \rightarrow C_0(X) \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow \dots \rightarrow 0 \rightarrow \dots$$

$$n \in \mathbb{N}_0, C_n(X) := F[\Delta_n(X)] = \bigoplus_{G \in \Delta_n(X)} \mathbb{Z} \langle G \rangle, n < 0 \quad C_n(X) := 0$$

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot G_i \longleftarrow \text{ово је један } n\text{-симплекс у } X$$

$$\Delta_0(X) = X \quad \begin{array}{c} \Delta^0 \xrightarrow{z} \Delta^1 \\ \text{---} \quad \text{---} \\ \text{---} \quad \text{---} \end{array}$$

$$\Delta_1(X) \hookrightarrow C(I, X)$$

$$\omega \circ \theta \longleftarrow \omega$$

$$\begin{array}{ccc} \Delta^1 & \xrightarrow{\partial} & X \\ \theta \left(\begin{array}{c} \uparrow \\ \theta^{-1} \\ 1 \end{array} \right) & & \nearrow \partial \circ \theta^{-1} \end{array}$$

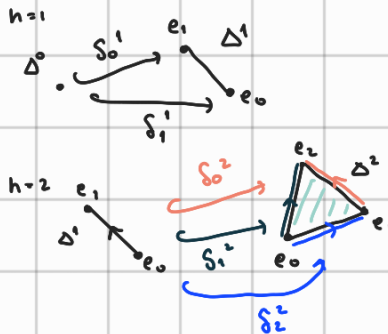
$$\theta(t_0, t_1) = t$$

$$\theta^{-1}(t) = (1-t, t)$$

$$\begin{array}{ccc} \Delta^{n-1} & \xrightarrow{\delta_i^n} & \Delta^n \\ & \downarrow \partial & \\ & X & \end{array}$$

$$0 \leq i \leq n \quad \delta_i^n: \Delta^{n-1} \hookrightarrow \Delta^n$$

$$\delta_i^n(t_0, t_1, \dots, t_{n-1}) := (t_0, \dots, t_{i-1}, 0, t_i, t_{i+1}, \dots, t_{n-1})$$



$$\textcircled{L} \quad 0 \leq i < j \leq n+1 \quad \delta_j^{n+1} \circ \delta_i^n = \delta_i^{n+1} \circ \delta_{j-1}^n$$

$$\text{Loc 3: } (t_0, t_1, \dots, t_{n-1}) \xrightarrow{\delta_{j-1}^n} (t_0, \dots, t_{j-2}, 0, t_{j-1}, \dots, t_{n-1})$$

$$\delta_i^n \downarrow$$

$$\delta_i^{n+1} \downarrow$$

$$(t_0, \dots, t_{i-1}, 0, t_i, \dots, t_{n-1}) \xrightarrow{\delta_j^{n+1}} (t_0, \dots, t_{i-1}, 0, t_i, \dots, t_{j-2}, 0, t_{j-1}, \dots, t_{n-1})$$

□

$$n \in \mathbb{N}, \quad \partial: C_n(X) \rightarrow C_{n-1}(X)$$

$$\partial \in \Delta_n(X), \quad \partial(\partial) := \sum_{i=0}^n \underbrace{(-1)^i}_{\in \mathbb{Z}} \underbrace{\partial \circ \delta_i^n}_{\in \Delta_{n-1}(X)} \in C_{n-1}(X)$$

$$\begin{array}{ccc} h=1 & \Delta^1 & \xrightarrow{\partial} \boxed{\text{Diagram of } \partial \Delta^1} \\ \Delta^0 \cdot \begin{array}{c} \nearrow \delta_0^1 \\ \searrow \delta_1^1 \end{array} & & \end{array}$$

$$\partial \partial = \partial \circ \delta_0^1 - \partial \circ \delta_1^1 = \partial(e_1) - \partial(e_0)$$

$$\begin{array}{ccc} h=2 & \Delta^2 & \xrightarrow{\partial} \boxed{\text{Diagram of } \partial \Delta^2} \\ \Delta^2 \cdot \begin{array}{c} \nearrow \delta_0^2 \\ \nearrow \delta_1^2 \\ \searrow \delta_2^2 \end{array} & & \end{array}$$

$$\partial \partial = \partial \circ \delta_0^2 - \partial \circ \delta_1^2 + \partial \circ \delta_2^2$$

$$\textcircled{5} \quad \mathcal{C}(X): \dots \rightarrow \mathcal{C}_{n+1}(X) \xrightarrow{\partial} \mathcal{C}_n(X) \xrightarrow{\partial} \mathcal{C}_{n-1}(X) \xrightarrow{\partial} \dots \rightarrow \mathcal{C}_1(X) \xrightarrow{\partial} \mathcal{C}_0(X) \rightarrow 0 \dots \rightarrow 0 \rightarrow \dots$$

решите поочередно коммутативность, т.е. $\partial \circ \partial = 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

$$\text{Доказ.} \quad \partial \in \Delta_{n+1}(X), \quad \partial(\partial b) = \partial \left(\sum_{j=0}^{n+1} (-1)^j \partial \circ s_j^{n+1} \right) = \sum_{j=0}^{n+1} (-1)^j \partial(\partial \circ s_j^{n+1}) = \sum_{j=0}^{n+1} (-1)^j \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i \partial \circ s_j^{n+1} \circ s_i^n =$$

$$= \sum_{j=0}^{n+1} \sum_{i=0}^{j-1} (-1)^{i+j} \partial \circ s_j^{n+1} \circ s_i^n + \sum_{j=1}^{n+1} \sum_{i=j}^{n+1} (-1)^{i+j} \partial \circ s_j^{n+1} \circ s_i^n$$

заметим, что $i \neq j$

$$= \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^{j-1} (-1)^{i+j} \partial \circ s_j^n \circ s_i^n + \sum_{i=0}^n \sum_{j=i}^n (-1)^{i+j} \partial \circ s_i^{n+1} \circ s_j^n$$

$\sum_{0 \leq i \leq j \leq n}$ ← обе суммы равны
 имеют разные знаки $\Rightarrow = 0$

□

9

Пример: $X = \mathbb{R}$

$$\Delta_n(\mathbb{R}) = \{ \phi: \Delta^n \rightarrow \mathbb{R} \} = \{ c_n \}$$

$$\mathcal{C}(\mathbb{R}): \dots \rightarrow \mathbb{Z}\langle c_{n+1} \rangle \rightarrow \mathbb{Z}\langle c_n \rangle \rightarrow \dots \rightarrow \mathbb{Z}\langle c_1 \rangle \xrightarrow{\partial} \mathbb{Z}\langle c_0 \rangle \rightarrow 0 \dots$$

$$\partial(c_n) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \phi \circ s_i^n = \sum_{i=0}^n (-1)^i c_{n-1} = \begin{cases} 0, & n \text{ нечетно} \\ c_{n-1}, & n \text{ четно} \end{cases}$$

$$\mathcal{C}(\mathbb{R}): \dots \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z} \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z} \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

$$H_n(\mathbb{R}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & n=0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$$

Напомним: Δ^n — симплекс и $X = \emptyset$

$$\mathcal{C}(\emptyset): \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow \dots \rightarrow 0 \rightarrow \dots$$

$$H_n(\emptyset) = 0 \text{ для всех } n \in \mathbb{Z}$$

$f: X \rightarrow Y$ непрерывно, $f_\#: \mathcal{C}(X) \rightarrow \mathcal{C}(Y)$ ланглендса

$$\dots \rightarrow \mathcal{C}_n(X) \xrightarrow{\partial} \mathcal{C}_{n-1}(X) \rightarrow \dots \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad \phi \in \Delta_n(X)$$

$$\begin{array}{ccc} f_\# \downarrow & \mathcal{C} & f_\# \downarrow \\ \dots & \rightarrow & \mathcal{C}_n(Y) \rightarrow \mathcal{C}_{n-1}(Y) \end{array}$$

$$f_\#(\phi) := \underbrace{f \circ \phi}_{\Delta_n(Y) \in \mathcal{C}_n(Y)} \quad \begin{array}{ccc} \Delta^n & \xrightarrow{\phi} & X \\ & \searrow f & \downarrow f \\ & & Y \end{array}$$

$$\phi \xrightarrow{\partial} \sum_{i=0}^n (-1)^i \phi \circ s_i^n$$

$$\downarrow$$

$$\downarrow f_\#$$

$$f \circ \phi \xrightarrow{\partial} \sum_{i=0}^n (-1)^i f \circ \phi \circ s_i^n$$

← защита коммутативности

$$\textcircled{5} \quad \begin{array}{l} \mathcal{T}op \xrightarrow{c} \mathcal{C}at \\ \chi \mapsto c(\chi) \\ f \mapsto f_{\#} \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} \mathcal{T}op \xrightarrow{c} \mathcal{C}at \\ \chi \mapsto c(\chi) \\ f \mapsto f_{\#} \end{array}} \right\} \text{ово је коваријантни функтор.}$$

Доказ: $(1_{\chi})_{\#} \stackrel{!}{=} 1_{c(\chi)}$, али брзо лако бити

$$\begin{array}{ccc} \chi \xrightarrow{f} \psi & c(\chi) \xrightarrow{f_{\#}} c(\psi) \\ \downarrow f_{\circ g} & \downarrow g_{\#} \\ \chi & \xrightarrow{(g \circ f)_{\#}} c(\psi) \end{array} \quad \leftarrow \text{можемо брзо лако бити}$$

$$\chi \xrightarrow{c} c(\chi) \xrightarrow{H_n} H_n(\chi)$$

$$f: \chi \rightarrow \psi \xrightarrow{c} f_{\#}: c(\chi) \rightarrow c(\psi) \xrightarrow{H_n} \underbrace{(f_{\#})_{\#}}_{f_{\#}}: H_n(\chi) \rightarrow H_n(\psi)$$

$$\sum_{k=1}^m \lambda_k \omega_k \in \underbrace{\sum_{\Delta_n(\chi)} \Delta_n(\chi)}_{\Delta_n(\chi)} = Z_n(c(\chi)) = Z_n(\chi)$$

$$f_{\#} \left[\sum_{k=1}^m \lambda_k \omega_k \right] = \left[f_{\#} \left(\sum_{k=1}^m \lambda_k \omega_k \right) \right] = \left[\sum_{k=1}^m \lambda_k (f_{\#} \omega_k) \right] \neq \sum_{k=1}^m \lambda_k [f_{\#} \omega_k]$$

$$n=0: \Delta_0(\chi) = \chi \quad f_{\#} \left[\sum_{k=1}^m \lambda_k x_k \right] = \left[\sum_{k=1}^m \lambda_k f(x_k) \right] = \sum_{k=1}^m \lambda_k [f(x_k)]$$

χ тополошки простор $\{ \chi_{\lambda} \}_{\lambda \in \Lambda}$ фамилија компактних путева повезаности од χ

$$\Delta_n(\chi) \hookrightarrow \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} \Delta_n(\chi_{\lambda}) \xrightarrow{\text{дјекција}} C_n(\chi) = F[\Delta_n(\chi)] \cong F\left(\bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} \Delta_n(\chi_{\lambda})\right) \cong \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} F[\Delta_n(\chi_{\lambda})] = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} C_n(\chi_{\lambda})$$

$$\boxed{c(\chi) \cong \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} c(\chi_{\lambda})}$$

$$\Rightarrow \boxed{H_n(\chi) \cong \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} H_n(\chi_{\lambda})}, n \in \mathbb{Z}$$

⑤ X лyчнo пoлeзaн, тaкa $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$. Пpи тoм, зa пpoизвoльнo $x \in X = \Delta_0(X)$, $[x] \in H_0(X)$ являeтcя гeнepaтop oт $H_0(X)$.

Пoмoгe, $x, y \in X$, $[x] = [y]$.

Лoгичнo, aкo Y лyчнo пoлeзaн и $f: X \rightarrow Y$ нeпpexиdнo, oтдa я $f_*: H_0(X) \rightarrow H_0(Y)$ изoмopфизм, $f_*([x]) = [f(x)]$.

Интepнaльнo, aкo я юм $X=Y$, пy. $f: X \rightarrow X$, oтдa я $f_* = \text{id}_{H_0(X)}$.

Дoкaз: $C_1(X) \xrightarrow{d} C_0(X) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \rightarrow 0$

$$H_0(X) = C_0(X) / \text{im } d, \quad \varepsilon(x) = 1 \text{ зa aкe } x \in X = \Delta_0(X)$$

$$\varepsilon\left(\sum_{k=1}^m \lambda_k x_k\right) = \sum_{k=1}^m \lambda_k$$

$$\text{im } d \stackrel{?}{=} \ker \varepsilon:$$

$$\Leftarrow: \phi \in \Delta_1(X)$$

$$\varepsilon \circ \phi = \varepsilon(\phi(e_1) - \phi(e_0))$$

$$\Rightarrow: \sum_{k=1}^m \lambda_k x_k \in \ker \varepsilon \Leftrightarrow \sum_{k=1}^m \lambda_k = 0$$

и нyчнyюм мo м: $m=1 \Rightarrow \lambda_1 = 0 \quad \lambda_1 x_1 = 0 \in \text{im } d$

$$m \geq 2: \sum_{k=1}^m \lambda_k x_k = \underbrace{\lambda_1 x_1 - \lambda_1 x_2}_{\lambda_1(x_1 - x_2) \in \text{im } d} + \underbrace{(\lambda_1 + \lambda_2) x_2}_{\in \text{im } d \text{ по UV}} + \sum_{k=3}^m \lambda_k x_k$$

X лyчнo пoлeзaн $\Rightarrow \lambda_1(x_1 - x_2) \in \text{im } d$



$$H_0(X) = C_0(X) / \ker \varepsilon \cong \text{im } \varepsilon = \mathbb{Z}$$

$$\begin{matrix} \psi \\ [x] \end{matrix} \xrightarrow{\text{⊗} \leftarrow \text{зaбoдe cлeдy}} \begin{matrix} \psi \\ 1 \end{matrix}$$

□

⑥ X лyчнo пoлeзaн пpocтop и, $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ кoмплeтнaя cлyчaйнaя пoлeзaнoкa.

$\rightarrow H_0(X)$ я cлoбoднa cтeлoвa гpyппa кyдa я являeтcя бaзa $\{[x_\lambda] \mid \lambda \in \Lambda\}$, гдe $x_\lambda \in x_\lambda$

бyдeт кoжe тoчкe.

из изoмopфизмa $= \mathbb{Z}\langle [x_\lambda] \rangle$

$$\text{Дoкaз: } H_0(X) \cong \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} H_0(x_\lambda)$$

□

$$x_0 \in X$$



Хуревитц-хомоморфизм

$$h: \pi_1(X, x_0) \rightarrow H_1(X)$$

$$\theta(t_0, t_1) = t_1$$

$$w \circ \theta \in \Delta_1(X) \subset C_1(X)$$

$$g(w \circ \theta) = x_0 - x_0 = 0$$

$$h[w] := [w \circ \theta] \leftarrow \text{има још показати, даи прих кајачко овоко.}$$

$$[w_1] = [w_2] \Rightarrow w_1 \theta - w_2 \theta \in B_1(X)$$

$$\text{im}(g: C_1(X) \rightarrow C_1(X))$$

Пропозиција: $f: X \rightarrow Y, x_0 \in X$

$$\pi_1(X, x_0) \xrightarrow{f_*} \pi_1(Y, f(x_0))$$

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X, x_0) & \xrightarrow{f_*} & \pi_1(Y, f(x_0)) \\ \downarrow h & \hookrightarrow & \downarrow h \\ H_1(X) & \xrightarrow{f_*} & H_1(Y) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} [w] & \xrightarrow{f_*} & [f_* w] \\ \downarrow & \hookrightarrow & \downarrow \\ [w \circ \theta] & \xrightarrow{f_*} & [f_* w \circ \theta] \end{array}$$

⊕ (Хуревитц-теорема) Ако је X путно повезан, $x_0 \in X$, тада:

$h: \pi_1(X, x_0) \rightarrow H_1(X)$ је епиморфизам, а $\ker h = \pi_1(X, x_0)'$ ← извод групе

$$\pi_1(X, x_0) \xrightarrow{h} H_1(X)$$

$$\pi_1(X, x_0) \xrightarrow{h} H_1(X)$$

$$\text{Јакче, } H_1(X) \cong \pi_1^{ab}(X, x_0).$$

(Доказ прегледати)

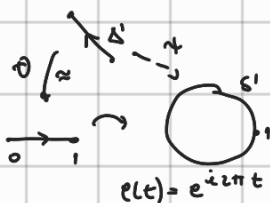
□

Примери: 1) $H_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$

$$H_1(S^1) = \mathbb{Z} \langle [\gamma] \rangle$$

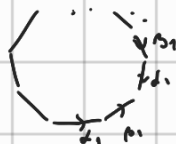
$$\gamma: \Delta^1 \rightarrow S^1$$

$$\gamma(t_0, t_1) = e^{i2\pi t_1}$$



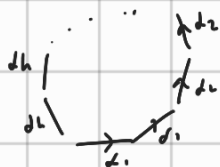
$$2) g \in H_0, H_1(H_g) \cong \mathbb{Z} \langle [\alpha_1] \rangle \oplus \mathbb{Z} \langle [\beta_1] \rangle \oplus \dots \oplus \mathbb{Z} \langle [\alpha_g] \rangle \oplus \mathbb{Z} \langle [\beta_g] \rangle \cong \mathbb{Z}^{2g}$$

↑ повороти



$$3) h \in H_1, H_1(Hh) \cong \mathbb{Z}^{h-1} \oplus \mathbb{Z}_2$$

Nh :



$$H_1(Nh) = \mathbb{Z} \langle [d_1] \rangle \oplus \dots \oplus \mathbb{Z} \langle [d_{n-1}] \rangle \oplus \mathbb{Z}_2 \langle [d_1 + \dots + d_n] \rangle$$

① $f, g: X \rightarrow Y$ непрерывно

$$f \simeq g \Rightarrow f_* = g_*: H_n(X) \rightarrow H_n(Y) \text{ за все } n \in \mathbb{N}_0.$$

Доказ: (скинча) $f \simeq g \stackrel{?}{\Rightarrow} f_{\#} \simeq g_{\#} \Rightarrow (f_{\#})_* = (g_{\#})_*$
 $f_{\#}, g_{\#}: \mathcal{C}(X) \rightarrow \mathcal{C}(Y)$

$$\dots \rightarrow C_{n+1}(X) \xrightarrow{\partial} C_n(X) \xrightarrow{\partial} C_{n-1}(X) \rightarrow \dots$$

$$f_{\#} \downarrow \begin{matrix} \text{ } \\ \text{ } \end{matrix} \downarrow g_{\#} \quad \begin{matrix} S \\ \text{ } \end{matrix} \quad f_{\#} \downarrow \begin{matrix} \text{ } \\ \text{ } \end{matrix} \downarrow g_{\#} \quad \begin{matrix} S \\ \text{ } \end{matrix} \quad f_{\#} \downarrow \begin{matrix} \text{ } \\ \text{ } \end{matrix} \downarrow g_{\#}$$

$$\dots \rightarrow C_{n+1}(Y) \rightarrow C_n(Y) \rightarrow C_{n-1}(Y) \rightarrow \dots$$

$$S\partial + \partial S = f_{\#} - g_{\#} \leftarrow \text{это это доказываемо за help } S, \text{ которую смо}$$

$$\partial \in \Delta_n(X)$$

$$0 \leq j \leq n \quad \Delta^{n+1} \xrightarrow{\ell_j^n} \Delta^n \times I$$

$$S(\partial) = \sum_{j=0}^n (-1)^j (F \circ (\partial \times \mathbb{1}_I) \circ \ell_j^n)$$

$$\begin{matrix} \Delta^n \times I \\ \downarrow \partial \times \mathbb{1}_I \\ X \times I \\ \downarrow F \\ Y \end{matrix}$$

$$\ell_j^n(t_0, \dots, t_{n+1}) := \left(\overbrace{t_0, t_1, \dots, t_{j-1}, t_j + t_j^n, t_{j+2}, \dots, t_{n+1}}^{\Delta^n}, \underbrace{t_j^n + t_{j+2} + \dots + t_{n+1}}_{\approx \mathbb{I}} \right)$$

□

② $X \simeq Y \Rightarrow H_n(X) \cong H_n(Y) \text{ за все } n \in \mathbb{N}_0.$

$$\text{Доказ: } X \xrightleftharpoons[f]{g} Y$$

$$g \circ f \simeq \mathbb{1}_X$$

$$f \circ g \simeq \mathbb{1}_Y$$

$$g_* \circ f_* = (g \circ f)_* = (\mathbb{1}_X)_* = \mathbb{1}_{H_n(X)}$$

$$f_* \circ g_* = \dots = \mathbb{1}_{H_n(Y)}$$

f_* и g_* — взаимно обратные гомоморфизмы

□

$$③ X \simeq * \Rightarrow H_n(X) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, n=0 \\ 0, n \neq 0 \end{cases}$$

Редукована хомологија

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{T}_{op} & \xrightarrow{\tilde{e}} & \mathcal{C}A\mathcal{L} \\ & \searrow & \downarrow H_n \\ & \tilde{H}_n & \rightarrow \mathcal{A}\mathcal{L} \end{array}$$

χ тополошки простор, $\tilde{e}(\chi): \dots \rightarrow C_n(\chi) \xrightarrow{\partial} C_{n-1}(\chi) \rightarrow \dots \xrightarrow{\partial} C_1(\chi) \xrightarrow{\partial} C_0(\chi) \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z} \rightarrow 0 \rightarrow \dots$
 $\epsilon(\sum_{k=1}^m \lambda_k x_k) := \sum_{k=1}^m \lambda_k \rightarrow \epsilon \circ \partial = 0 \quad \checkmark \rightarrow$ ово може потврдити директно.

$$\tilde{H}_n(\chi) := H_n(\tilde{e}(\chi)), n \in \mathbb{Z}$$

$\uparrow$ n -та редукована хомолошка група од χ .

$$n \geq 1 \rightarrow \tilde{H}_n(\chi) = H_n(\chi)$$

$$n=0 \Rightarrow \tilde{H}_0(\chi) = \ker \epsilon / \text{im} \partial \leq C_0(\chi) / \text{im} \partial = H_0(\chi)$$

$$\tilde{H}_n(\emptyset) = \begin{cases} 0, & n \neq -1 \\ \mathbb{Z}, & n = -1 \end{cases}$$

⑤ $\chi \neq \emptyset \rightarrow H_0(\chi) \cong \tilde{H}_0(\chi) \oplus \mathbb{Z}$, $\tilde{H}(\chi)$ је стандардна одредена група чија је једна база

$\{[x_{\lambda_0}] - [x_{\lambda_1}] \mid \lambda \in \Lambda \setminus \{\lambda_0\}\}$ где је $\{x_{\lambda}\}_{\lambda \in \Lambda}$ скуп свих комиторијалних путева произвољности од χ , $x_{\lambda} \in \chi_{\lambda}$ и произвољно $\lambda_0 \in \Lambda$ произвољног избора.

$$\text{Замети: } C_1(\chi) \xrightarrow{\partial} C_0(\chi) \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z} \rightarrow 0 \quad (\epsilon \text{ је "нормирање" ???})$$

$$\begin{array}{ccc} \text{im} \partial \subseteq \ker \epsilon & \xrightarrow{\bar{\epsilon}} & \ker \bar{\epsilon} = \ker \epsilon / \text{im} \partial = \tilde{H}_0(\chi) \\ & \searrow & \uparrow \\ & C_0(\chi) / \text{im} \partial & \end{array}$$

$$0 \rightarrow \tilde{H}_0(\chi) \hookrightarrow H_0(\chi) \xrightarrow{\bar{\epsilon}} \mathbb{Z} \rightarrow 0 \quad \text{стандардна}$$

$$\Rightarrow H_0(\chi) \cong \tilde{H}_0(\chi) \oplus \mathbb{Z} \quad (\text{из универзалне одредбе})$$

$$H_0(\chi) = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} \mathbb{Z} \langle [x_{\lambda}] \rangle = \mathbb{Z} \langle [x_{\lambda_0}] \rangle \oplus \bigoplus_{\lambda \in \Lambda \setminus \{\lambda_0\}} \mathbb{Z} \langle [x_{\lambda_0}] - [x_{\lambda}] \rangle$$

$$\bar{\epsilon}([x_{\lambda_0}] - [x_{\lambda}]) = \epsilon(x_{\lambda_0}) - \epsilon(x_{\lambda}) = 1 - 1 = 0$$

$$\tilde{e}([x_{\lambda_0}]) = 1$$

$$\Rightarrow \bigoplus_{\lambda \in \Lambda \setminus \{\lambda_0\}} \mathbb{Z} \langle [x_{\lambda_0}] - [x_{\lambda}] \rangle = \tilde{H}_0(\chi)$$

□

$f: X \rightarrow Y$ неперекрываемо.

$$\tilde{C}(X): \dots \rightarrow C_n(X) \xrightarrow{\partial} C_{n-1}(X) \rightarrow \dots \xrightarrow{\partial} C_1(X) \xrightarrow{\partial} C_0(X) \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z} \rightarrow 0 \rightarrow \dots$$

$$\begin{array}{ccccccc} f_* \downarrow & \subset & f_* \downarrow & \subset & f_* \downarrow & \subset & f_* \downarrow \\ \tilde{C}(X): \dots & \rightarrow & C_n(Y) & \xrightarrow{\partial} & C_{n-1}(Y) & \rightarrow \dots & \xrightarrow{\partial} C_1(Y) \xrightarrow{\partial} C_0(Y) \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z} \rightarrow 0 \rightarrow \dots \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \xrightarrow{\epsilon} & 1 \\ f_* \downarrow & & \downarrow \\ f_*(x) & \mapsto & 1 \end{array} \quad \leftarrow \text{због овога редом идентичитет на другом крају.}$$

$$n \geq 1 \quad H_n(X) \xrightarrow{f_*} H_n(Y)$$

"

"

$$\tilde{H}_n(X) \xrightarrow{f_*} \tilde{H}_n(Y)$$

$$n=0 \quad H_0(X) \xrightarrow{f_*} H_0(Y)$$

$\uparrow$

$\subset$

$\uparrow$

$$\tilde{H}_0(X) \xrightarrow{f_*} \tilde{H}_0(Y)$$

① $f \circ g \Rightarrow f_* = g_* : \tilde{H}_n(X) \rightarrow \tilde{H}_n(Y)$. (важни докази)

② $X \simeq Y \Rightarrow \tilde{H}_n(X) \cong \tilde{H}_n(Y)$ за све $n \in \mathbb{Z}$

$X \simeq * \Rightarrow \tilde{H}_n(X) = 0$ за све $n \in \mathbb{Z}$.

или за X важи ово ~~или су нулети~~



12

Репрезентативна хомологија

$\text{Top}^2 \leftarrow$ категорија тополошких парова

објекти: (X, A) где X тополошки простор и $A \subseteq X$

морфизми: $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ тј. $f: X \rightarrow Y$ непрекинуто и $f(A) \subseteq B$.

$$\begin{array}{ccc} \text{Top} & \hookrightarrow & \text{Top}^2 \xrightarrow{\epsilon} \text{Set} \\ & \searrow & \downarrow H_n \\ & & \text{Ab} \end{array} \quad , \quad X \mapsto (X, \emptyset) \text{ као објектима у } \text{Top}^2$$

$$\begin{array}{ccc} & & \downarrow H_n \\ & & \text{Ab} \\ \uparrow H_n & \nearrow H_n & \\ \text{Ab} & & \end{array}$$

(X, A) топологичен пар $i: A \hookrightarrow X \rightarrow i_*: \mathcal{C}(A) \rightarrow \mathcal{C}(X)$ (индуковано пачиса)

$$i_*: C_n(A) \rightarrow C_n(X)$$

$$\partial \in \Delta_n(A), \Delta^n \xrightarrow{\partial} A$$

$$\begin{array}{ccc} & \searrow \partial & \downarrow i \\ i_*(\partial) & \xrightarrow{\partial} & X \end{array}$$

i_* е мономорфизам (кр i е i_{n-1})

$$C_n(A) \cong i_*^{-1}(C_n(X)) \subseteq C_n(X)$$

ограничаване до i $\bar{\partial}$: $C_n(A) \subseteq C_n(X)$

$$C_n(X, A) = C_n(X) / C_n(A)$$

$$\partial \in \Delta_n(A) \Rightarrow \partial \bar{\partial} = \sum_{i=1}^n (-1)^i \partial \circ \sigma_i \in C_{n-1}(A) \subseteq C_{n-1}(X)$$

$$\begin{array}{ccc} C_n(X) & \xrightarrow{\partial} & C_{n-1}(X) \\ \downarrow & \bar{\partial} & \downarrow \\ C_n(X) / C_n(A) & \xrightarrow{\bar{\partial}} & C_{n-1}(X) / C_{n-1}(A) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \Delta^n & \xrightarrow{\partial} & A \\ & \searrow & \downarrow i \\ & & X \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{f} & H \\ \downarrow G & \nearrow \tilde{f} & \\ G/K & & \end{array} \quad \begin{array}{l} K \triangleleft G \\ \tilde{f} \downarrow \Leftrightarrow K \subseteq \ker f \end{array}$$

защо използваме $\bar{\partial}$.

$$C_{n+1}(X) \xrightarrow{\partial} C_n(X) \xrightarrow{\partial} C_{n-1}(X)$$

$$\begin{array}{ccccc} \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ C_{n+1}(X, A) & \xrightarrow{\bar{\partial}} & C_n(X, A) & \xrightarrow{\bar{\partial}} & C_{n-1}(X, A) \end{array}$$

$\partial \circ \partial = 0 \Rightarrow \bar{\partial} \circ \bar{\partial} = 0 \rightarrow$ образуваме ланцавите комплекси.

$$\mathcal{C}(X, A): \dots \rightarrow C_{n+1}(X, A) \rightarrow C_n(X, A) \xrightarrow{\bar{\partial}} C_{n-1}(X, A) \rightarrow \dots$$

$H_n(X, A) := H_n(\mathcal{C}(X, A))$ — n -та хомология група топологичен пар (X, A)

$$A = \emptyset: \mathcal{C}(X, \emptyset) = \mathcal{C}(X) \quad \text{кр } C_n(\emptyset) = 0$$

$$H_n(X, \emptyset) = H_n(X), n \in \mathbb{N}_0.$$

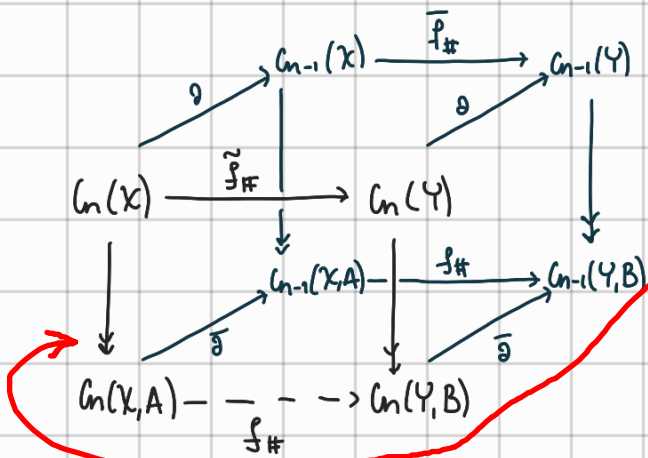
$f: (X, A) \rightarrow (Y, B), \tilde{f}: X \rightarrow Y$ (вижте как редовно само не спичаемо подгрупаваме да разпознаваме)

$$n \in \mathbb{Z}: C_n(X) \xrightarrow{\tilde{f}_*} C_n(Y)$$

$$\downarrow \quad \downarrow$$

$$\begin{array}{ccc} \Delta^n & \xrightarrow{\partial} & A \xrightarrow{\tilde{f}|_A} B \\ \searrow \partial & \downarrow \tilde{f} & \downarrow \tilde{f} \\ & X & \xrightarrow{\tilde{f}} Y \end{array}$$

$$C_n(X, A) \xrightarrow{f_*} C_n(Y, B)$$



← Не знамо да конструираме сеп овој
горе, а ако то горе конструираме онда је
решавањем и решењем је „на“ и добијемо се.

$$f_{\#} : C(X, A) \rightarrow C(Y, B)$$

$$\begin{aligned} (g \circ f)_{\#} &= g_{\#} \circ f_{\#} \\ (\mathbb{1}_{C(X, A)})_{\#} &= \mathbb{1}_{C(Y, B)} \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} (g \circ f)_{\#} &= g_{\#} \circ f_{\#} \\ (\mathbb{1}_{C(X, A)})_{\#} &= \mathbb{1}_{C(Y, B)} \end{aligned}} \right\} \text{ови се случују}$$

$$A = B = \mathbb{C} \quad C_n(X) \xrightarrow{\tilde{f}_{\#}} C_n(Y)$$

$$C_n(X) \xrightarrow{f_{\#}} C_n(Y) \quad \leftarrow \text{ово изгледа добро, тј. мислимо као рачунање}$$

$$A = X, (X, \emptyset) \xrightarrow{j} (X, A) \text{ (инклузија подпростора)}$$

$$\tilde{j} = \mathbb{1}_X : X \rightarrow X$$

$$C_n(X) = C_n(X)$$

$$C_n(X) \xrightarrow{j_{\#}} C_n(X, A)$$

$$n \in \mathbb{Z} : 0 \rightarrow C_n(A) \xrightarrow{i_{\#}} C_n(X) \xrightarrow{j_{\#}} C_n(X, A) \rightarrow 0 \quad \text{је к.м.н.}$$

$$C_n(X)/i_{\#}(C_n(A))$$

⇒ Уместо к.м.н. ланцавања конформација и ланцавања претликавања:

$$0 \rightarrow C(A) \xrightarrow{i_{\#}} C(X) \xrightarrow{j_{\#}} C(X, A) \rightarrow 0$$

⊕ За сваки тополошки простор (X, A) постоји природан дуги ланцав из облика:

$$\cdots \rightarrow H_{n+1}(X, A) \xrightarrow{\partial} H_n(A) \xrightarrow{i_{\#}} H_n(X) \xrightarrow{j_{\#}} H_n(X, A) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(A) \rightarrow \cdots \quad \text{д.м.н. ланцавања за } (X, A)$$

$$\begin{array}{ccccccc} f_{\#} \downarrow & G & \downarrow (\tilde{f}|_A)_{\#} & G & \downarrow \tilde{f}_{\#} & G & \downarrow f_{\#} \\ \cdots \rightarrow H_{n+1}(Y, B) & \xrightarrow{\partial} & H_n(B) & \xrightarrow{i_{\#}} & H_n(Y) & \xrightarrow{j_{\#}} & H_n(Y, B) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(B) \rightarrow \cdots \end{array}$$

$$\text{где је } i : A \hookrightarrow X, j : (X, \emptyset) \hookrightarrow (X, A).$$

Замети: ланцавање се добија из прегледа ланцавања и ланцавања.

$$\begin{array}{l} f : (X, A) \rightarrow (Y, B) \quad 0 \rightarrow C(A) \xrightarrow{i_{\#}} C(X) \xrightarrow{j_{\#}} C(X, A) \rightarrow 0 \\ \tilde{f} : X \rightarrow Y \quad \quad \quad \downarrow (f|_A)_{\#} \quad \downarrow \tilde{f}_{\#} \quad \downarrow f_{\#} \\ 0 \rightarrow C(A) \xrightarrow{i_{\#}} C(X) \xrightarrow{j_{\#}} C(X, A) \rightarrow 0 \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} f : (X, A) \rightarrow (Y, B) \\ \tilde{f} : X \rightarrow Y \end{array}} \right\} \text{из алгебра и природности}$$

$$\begin{array}{l} \tilde{f}|_A : A \rightarrow B \quad \quad \quad A \hookrightarrow X \quad \quad \quad X = (X, \emptyset) \hookrightarrow (X, A) \\ \tilde{f}|_A \downarrow \quad \downarrow \tilde{f} \quad \quad \quad \tilde{f} \downarrow \quad \quad \quad \downarrow f \\ B \rightarrow Y \quad \quad \quad (Y, \emptyset) \hookrightarrow (Y, B) \end{array} \quad \text{природности.}$$

АТН $\text{proj}_k, \text{Top}^3, (X, A, B), B \subseteq A \subseteq X$

$$i: (A, B) \hookrightarrow (X, B)$$

$$j: (X, B) \hookrightarrow (X, A)$$

$$0 \rightarrow \mathcal{C}(A)/\mathcal{C}(B) \rightarrow \mathcal{C}(X)/\mathcal{C}(B) \rightarrow \mathcal{C}(X)/\mathcal{C}(B) / \mathcal{C}(A)/\mathcal{C}(B) \rightarrow 0$$

$\parallel$
 $\mathcal{C}(X)/\mathcal{C}(A)$

$$0 \rightarrow \mathcal{C}(A, B) \xrightarrow{i_*} \mathcal{C}(X, B) \xrightarrow{j_*} \mathcal{C}(X, A) \rightarrow 0$$

$$\begin{array}{c} \uparrow \\ \text{цикл-цикл} \end{array} \rightarrow \dots \rightarrow H_{n+1}(X, A) \xrightarrow{\partial} H_n(A, B) \xrightarrow{i_*} H_n(X, B) \xrightarrow{j_*} H_n(X, A) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(A, B) \rightarrow \dots$$

$\uparrow$ цикл-цикл За $B=\emptyset$ то олова горије по омај зоре.

(X, A) мод. двр.

$$0 \rightarrow \tilde{\mathcal{C}}(A) \xrightarrow{i_*} \tilde{\mathcal{C}}(X) \xrightarrow{j_*} \tilde{\mathcal{C}}(X, A) \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow \mathcal{C}_*(A) \xrightarrow{i_*} \mathcal{C}_*(X) \xrightarrow{j_*} \mathcal{C}_*(X, A) \rightarrow 0$$

$$\tilde{\mathcal{C}}(X, A) := \mathcal{C}(X, A)$$

$$0 \rightarrow \mathcal{C}_0(A) \rightarrow \mathcal{C}_0(X) \rightarrow \mathcal{C}_0(X, A) \rightarrow 0$$

$$\tilde{H}_n(X, A) := H_n(X, A)$$

$$\begin{array}{ccccccc} & & \downarrow \epsilon & & \downarrow \epsilon & & \downarrow \epsilon \\ 0 & \rightarrow & \mathbb{Z} & \xrightarrow{i_*} & \mathbb{Z} & \rightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & 0 & & 0 & & 0 \\ & & \vdots & & \vdots & & \vdots \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \uparrow \\ \text{цикл-цикл} \end{array} \rightarrow \dots \rightarrow H_{n+1}(X, A) \rightarrow \tilde{H}_n(A) \xrightarrow{i_*} \tilde{H}_n(X) \xrightarrow{j_*} H_n(X, A) \xrightarrow{\partial} \tilde{H}_{n-1}(A) \rightarrow \dots$$

$\uparrow$ овај и омај из изворе се разликују само на:

$$\begin{array}{ccccc} & & H_0(A) & \rightarrow & H_0(X) & \xrightarrow{j_*} & H_0(X, A) & \rightarrow \dots \\ & \nearrow & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\ \rightarrow H_1(X, A) & & G & & G & & G & \\ & \searrow & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ & & \tilde{H}_0(A) & \rightarrow & \tilde{H}_0(X) & \xrightarrow{j_*} & & \end{array}$$

$\tilde{H}_{-1}(\emptyset) = \mathbb{Z}$ па ако $A = \emptyset$
 мамо се разликују.

БИТНО, ОВО НЕМА СМИСЛА.

Примери: $(X, A), i: A \rightarrow X, j: (X, \emptyset) \rightarrow (X, A)$

$$H_n(X, A) \not\cong H_n(X) / H_n(A)$$

$$1) A \simeq * \Rightarrow H_n(X, A) \cong \tilde{H}_n(X) \text{ за } n \in \mathbb{N}_0.$$

$$\text{Условието, ако } j: A = \{x_0\}, H_n(X, x_0) \cong \tilde{H}_n(X) \quad j: (X, \emptyset) \hookrightarrow (X, x_0)$$

$$\begin{array}{ccc} \text{Top}_0 & \longrightarrow & \text{Top} \\ \downarrow & G & \downarrow \tilde{H}_n \\ \text{Top}^2 & \xrightarrow{H_n} & \text{Set} \end{array} \leftarrow \begin{array}{l} \text{природна елиминација} \\ \text{функција} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0) \\ H_n(X, x_0) \xleftarrow{(j(x, x_0))_*} \tilde{H}_n(X) \\ \downarrow f_* \quad \quad \quad \downarrow f_* \\ H_n(Y, y_0) \xleftarrow{(j(y, y_0))_*} \tilde{H}_n(Y) \end{array}$$

$$2) X \simeq * \Rightarrow H_n(X, A) \cong \tilde{H}_{n+1}(A)$$

3) Ако j е колонидална елиминација (нпр. j е деф. ретракција од X)
онда $j: H_n(X, A) = 0$ за сите $n \in \mathbb{N}_0$

Условието

X тополошки простор, $A, B \subseteq X$

$n \in \mathbb{N}_0$,

$$C_n(A) \subseteq C_n(X)$$

$$C_n(B) \subseteq C_n(X)$$

$$C_n(A) \cap C_n(B) = F[\Delta_n(A)] \cap F[\Delta_n(B)] = F[\Delta_n(A) \cap \Delta_n(B)] = F[\Delta_n(A \cap B)] = C_n(A \cap B)$$

$$C_n(A) + C_n(B) = F[\Delta_n(A)] + F[\Delta_n(B)] = F[\Delta_n(A) \cup \Delta_n(B)] = C_n(A \cup B)$$

$$C_n(X) \xrightarrow{\partial} C_{n-1}(X)$$

$$\begin{array}{ccc} \uparrow \nu & G & \uparrow \nu \\ C_n(A) + C_n(B) & \xrightarrow{\partial} & C_{n-1}(A) + C_{n-1}(B) \end{array}$$

$$C_n(A) + C_n(B) \xrightarrow{\partial} C_{n-1}(A) + C_{n-1}(B)$$

$$C(A) + C(B) \xrightarrow{\nu} C(X)$$

← ланчовито

⑤ $(X; A, B)$ је универзална тројка ако је $\iota_X: H_n(e(A)+e(B)) \rightarrow H_n(X)$ изоморфизам за све $n \in \mathbb{N}_0$.

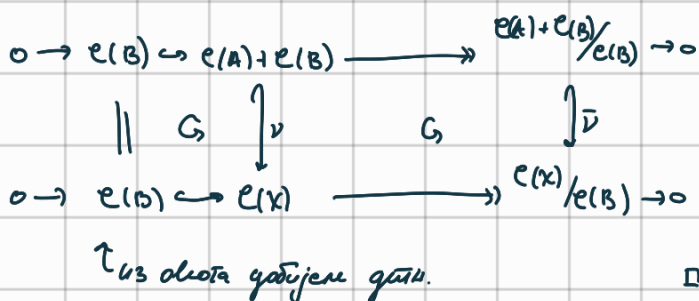
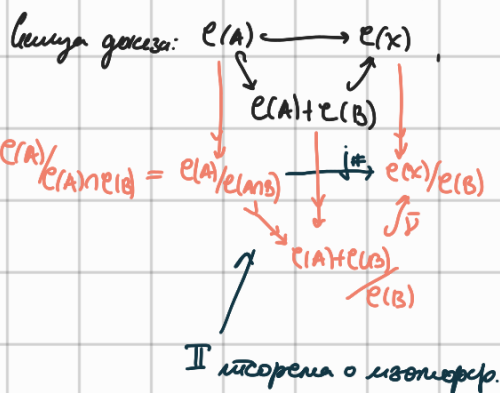
⑦ $\text{int } A \cup \text{int } B = X \Rightarrow (X; A, B)$ је универзална тројка.

Две реченице о доказу: правилно попишито у субтракту ифрму и да су попишито
композитне у □

Пр. $\{A, B\}$ антиорентисовано онда је $(X; A, B)$ универзална тројка.

⑧ (Теорема о универзалу) $(X; A, B)$ универзална тројка, $j: (A, A \cap B) \hookrightarrow (X, B)$

$\Rightarrow j_*: H_n(A, A \cap B) \rightarrow H_n(X, B)$ је изоморфизам за све $n \in \mathbb{N}_0$.



⑨ $\text{int}(A) \cup \text{int}(B) = X$, $j: (A, A \cap B) \rightarrow (X, B) \Rightarrow j_*: H_n(A, A \cap B) \rightarrow H_n(X, B)$ је изоморфизам за све $n \in \mathbb{N}_0$.

Једна реченица: $Z, B \subseteq X$ и.г. $\bar{Z} \subseteq \text{int } B$ ($Z = A^c$), $j: (X \setminus Z, B \setminus Z) \hookrightarrow (X, B)$

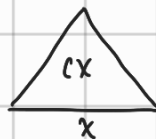
$\Rightarrow j_*: H_n(X \setminus Z, B \setminus Z) \rightarrow H_n(X, B)$ је изоморфизам за све n .

⑩ Пош. пар (X, A) је добар пар ако је $A \in \mathcal{F}_X$ и ако постоји $\forall e \in X$ и.г. је

A јак деформациони ретракт од V .

Пример: X тополошки простор $(X := X \times I / X \times \{1\})$

$$\begin{aligned} X &\hookrightarrow CX \\ x &\longmapsto [x, 0] \end{aligned}$$



$$\pi: X \times I \rightarrow CX$$

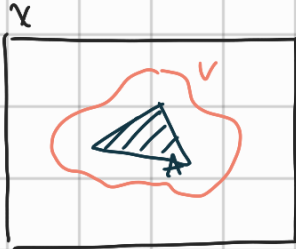
$\Rightarrow (CX, X)$ је добар пар, пр. $V := \pi(X \times [0, \frac{1}{2}])$

⊕ (X, A) добар пар, $q: X \rightarrow X/A$ природна пројекција.

$$g: (X, A) \rightarrow (X/A, *) \rightarrow g_*: H_n(X, A) \rightarrow H_n(X/A, *) \text{ изоморфизм для } n \in \mathbb{Z}$$

2° Leve, $H_n(X, A) \cong \tilde{H}_n(X/A)$ solo nella

$$H_n(X, A) \xrightarrow{g_*} H_n(X/A, *) \xleftarrow{j_*} \tilde{H}_n(X/A), \quad j: (X/A, \Phi) \hookrightarrow (X/A, *)$$



Δ: Cuz... $(X, A) \hookrightarrow (X, V) \hookrightarrow (X \setminus A, V/A)$

11	19	19
----	----	----

$$(X/A, x) \hookrightarrow (X/A, V/A) \hookrightarrow (X/A \setminus *, V/A \setminus *)$$

obge die konjugierte, Top^2

Хотимо де да напознаємо са Пн і добуємо компетитивне дијаграме.

$$H_n(X, A) \xrightarrow{\cong^1} H_n(X, V) \xleftarrow{\cong^2} H_n(X \setminus A, V \setminus A)$$

Покажем да су се изоморфизми.

$q \downarrow$

$\downarrow$

$\downarrow 9 \rightarrow 12$

$$H_n(X/A, *) \xrightarrow{(i_1)} H_n(X/A, Y/A) \xleftarrow{(i_2)} H_n(X/A \setminus *, Y/A \setminus *)$$

1. (x, v, a)

здесь можно пропустить текстовые ячейки

$$H_n(V, A) \rightarrow H_n(X, A) \rightarrow H_n(X, V) \rightarrow H_n(U, A) \rightarrow \dots$$

$$0 \text{ (A год ретракти A)}$$

50

2. ② историческая личность

3. $q: X \setminus A \xrightarrow{\sim} X/A \setminus y$

$$g(V \setminus A) = V \setminus A \setminus x$$

Горича дисперзија: C категорија, $X \xrightarrow{f} Y$ морфизам у категорији.

f je savetovaničulja (izomorfizmi) u C ako postoji $g: Y \rightarrow X$

u.g. je $g \circ f = 1_X$ u $f \circ g = 1_Y$.

Ab : изоморфизм, Top : гомеоморфизм, Top^2 : гомеоморфизм итд. $f(A) \rightarrow B$.

Рез: показать де у свуга изоморфизми...

⑤ Ako je $\neq$ ekvivalencija u kategoriji $\mathcal{C}$ i $T: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ funktor.

$\Rightarrow T(f)$ sabivodnjenja u katu $\mathcal{D}$. ($T(g) \circ T(f) = 1$, $T(f) \circ T(g) = 1$)

Зачто ж (3) изоморфизм.

$$\text{Top}^2 \xrightarrow{H_n} \text{Ab}$$

$$f: (X, A) \longrightarrow (Y, B) \text{ добри пары } (X, A), (Y, B)$$

$$\begin{array}{ccc} \text{Top}^2 & \xrightarrow{\quad} & \text{Top} \xrightarrow{\tilde{H}_n} \text{Ab} \\ \downarrow \scriptstyle x & \searrow \scriptstyle x_A & \uparrow \\ \text{Top} & & \end{array}$$

$$H_n(X, A) \xrightarrow{q_*} H_n(X/A, *) \xleftarrow{i_*} \tilde{H}_n(X/A),$$

$$\begin{array}{ccccc} \downarrow \scriptstyle f_* & \subset & \downarrow \scriptstyle \bar{f}_* & \supset & \downarrow \scriptstyle \bar{f}_* \\ H_n(Y, B) & \xrightarrow{q_*} & H_n(Y/B, *) & \xleftarrow{i_*} & \tilde{H}_n(Y/B), \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow \scriptstyle f & & \downarrow \scriptstyle p \\ X/A & \xrightarrow{\bar{f}} & Y/B \end{array} \leftarrow \text{это первое отображение из леммы 6. до се подпадают или из нее}$$

$$(X/A, *) \longleftrightarrow (X/A, \emptyset)$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow \scriptstyle \bar{f} & & \downarrow \\ (Y/B, *) & \longleftrightarrow & (Y/B, \emptyset) \end{array} \leftarrow \text{добили соотношения естественности}$$

⑤ (X, A) — добрый пар, $A \xrightarrow{i} X, q: X \rightarrow X/A$

$\Rightarrow \exists$ естественный гомоморфизм из:

$$\dots \rightarrow \tilde{H}_n(A) \xrightarrow{i_*} \tilde{H}_n(X) \xrightarrow{q_*} \tilde{H}_n(X/A) \xrightarrow{\partial} \tilde{H}_{n-1}(A) \xrightarrow{i_*} \dots$$

Δ (естественность за леммой)

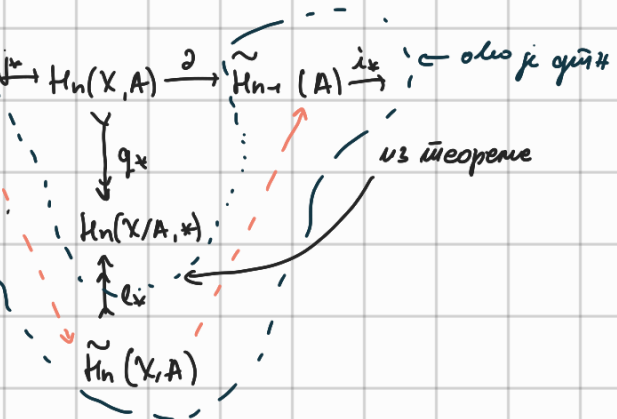
$$\text{от леммы: } \left\{ \dots \rightarrow \tilde{H}_n(A) \xrightarrow{i_*} \tilde{H}_n(X) \xrightarrow{q_*} \tilde{H}_n(X/A) \xrightarrow{\partial} \tilde{H}_{n-1}(A) \xrightarrow{i_*} \dots \right\} \leftarrow \text{это же гомоморфизм}$$

нужно до проверить что q_*

даже q_*

$$(X, \emptyset) \hookrightarrow (X, A)$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow \scriptstyle i & \subset & \downarrow \scriptstyle q \\ (X/A, \emptyset) & \hookrightarrow & (X/A, *) \end{array}$$



□

$$\textcircled{D} \quad (CX, X) \text{ годин лар} \Rightarrow \cdots \rightarrow \underbrace{\tilde{H}_n(CX)}_{=0} \xrightarrow{\quad S \quad} \tilde{H}_n(SX) \xrightarrow{\quad \cong \quad} \tilde{H}_{n-1}(X) \rightarrow \underbrace{\tilde{H}_{n-1}(CX)}_{=0} \rightarrow \cdots$$

$$\textcircled{E} \quad f: X \rightarrow Y \text{ непрерывно, } Cf: CX \rightarrow CY \quad (f[x, t] := [f(x), t])$$

$$Cf: (CX, X) \rightarrow (CY, Y)$$

$\Rightarrow$ због универсальности из $\textcircled{D}$

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \rightarrow & \tilde{H}_n(CX) & \xrightarrow{\quad S \quad} & \tilde{H}_n(SX) & \xrightarrow{\quad \cong \quad} & \tilde{H}_{n-1}(X) \rightarrow \tilde{H}_{n-1}(CX) \rightarrow \cdots \\ & & \downarrow \scriptstyle (Sf)_* & & \downarrow \scriptstyle G & & \downarrow \scriptstyle f_* \\ \cdots & \rightarrow & \tilde{H}_n(CY) & \xrightarrow{\quad S \quad} & \tilde{H}_n(SY) & \xrightarrow{\quad \cong \quad} & \tilde{H}_{n-1}(Y) \rightarrow \tilde{H}_{n-1}(CY) \rightarrow \cdots \end{array}$$

$$CX/X \cong SX$$

$$CX \xrightarrow{Cf} CY$$

$$\downarrow \quad \overline{Cf} \quad \downarrow$$

$$SX \xrightarrow{\quad} SY$$

$\textcircled{F}$ За любого пространства X и любого $n \in \mathbb{Z}$ выполняются следующие тождества:

$$\tilde{H}_n(SX) \xrightarrow{\quad} \tilde{H}_{n-1}(X).$$

$$\tilde{H}_i(S^0) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & i=0 \\ 0, & i \neq 0 \end{cases}$$

$$S^1 \cong S(S^0) \Rightarrow \tilde{H}_i(S^1) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & i=1 \\ 0, & i \neq 1 \end{cases}$$

$\vdots$

$$\Rightarrow S^n \cong S(S^{n-1}) \Rightarrow \tilde{H}_i(S^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & i=n \\ 0, & i \neq n \end{cases}$$

$$X \neq * \Rightarrow \tilde{H}_i(X) = 0 \text{ за все } i$$

$$\Rightarrow S^n \neq * \text{ и за } n \text{ достаточно } n \in \mathbb{N}_0 \quad (\Leftrightarrow \text{Брауер лемма})$$

$\textcircled{G}$ (Брауер): За все $n \in \mathbb{N}$, D^n — это СФТ.

$\textcircled{H}$ $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ семейство топологических пространств, $x_\lambda \in X_\lambda$ базисные точки м.г. μ (X_λ, x_λ) годин лар

за все $\lambda \in \Lambda, n \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow \boxed{\tilde{H}_n\left(\bigvee_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda\right) \cong \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} \tilde{H}_n(X_\lambda)}$$

□

$$\pi_1(\bigvee_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda) \cong \ast_{\lambda \in \Lambda} \pi_1(X_\lambda)$$

$$\mathcal{T}or_0 \xrightarrow{\pi_1} \mathcal{G}_r \quad \mathcal{T}or_0 \longrightarrow \mathcal{T}or \xrightarrow{\tilde{H}_r} Ab$$

Лемма: $\mathcal{T}or \xrightarrow{H_r} Ab$

$$H_n(\bigvee_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda) \cong \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} H_n(X_\lambda) \leftarrow \text{или доказ као за компоненте путем повезаности.}$$

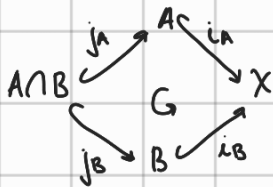
↑ се се тако слање са копроизводима

H_n и $\tilde{H}_r$ се не слажу тако са обичним производом као фундаментални групе.

Мајер-Витторикова нв

Vietoris (1891-2002)

X тополошки простор и $A, B \subseteq X$ подпростори



← само овде имамоси нвј тривизиона ⑤

$$0 \rightarrow C(A \cap B) \xrightarrow{(j_A)_\# \oplus (j_B)_\#} C(A) \oplus C(B) \xrightarrow{i_A \oplus i_B} C(A) + C(B) \rightarrow 0$$

↑ ово је мономорфизам

↓ $i_A \oplus i_B$

↓ ν

$C(X)$

$$0 \rightarrow C_n(A \cap B) \rightarrow C_n(A) \oplus C_n(B) \rightarrow C_n(A) + C_n(B)$$

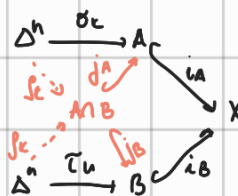
↑ шарпање

↑ $\text{унутра } C_n(X)$
↓ збир подгрупа

④ $\text{Im}((j_A)_\# \oplus (j_B)_\#) \stackrel{?}{=} \text{Ker}((i_A)_\# + (i_B)_\#)$ компутативном првоу дијаграму

$$\therefore ((i_A)_\# + (i_B)_\#)((j_A)_\# \oplus (j_B)_\#) = (i_A \circ j_A)_\# \oplus (i_B \circ j_B)_\# = 0$$

$$2: (i_A)_\# + (i_B)_\# \left(\sum_{k=1}^m a_k \sigma_k, \sum_{k=1}^l b_k \tau_k \right) = 0$$



$$\sum_{k=1}^m a_k (i_A \circ \sigma_k) + \sum_{k=1}^l b_k (i_B \circ \tau_k) = 0$$

→ пошто линеарне комбинације језика не могу да се кријесу и $a_k, b_k \neq 0$

→ методом се сводијуј суче.

$$\Rightarrow \begin{cases} i_A \circ \sigma_k - i_B \circ \tau_k \text{ за } k=1, m \\ b_k = -a_k, k=1, m \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left(\sum_{k=1}^m a_k \sigma_k, \sum_{k=1}^l b_k \tau_k \right) = \left(\sum_{k=1}^m a_k (j_A)_\# j_k, \sum_{k=1}^l (-a_k) (j_B)_\# j_k \right) \\ = (j_A)_\# - (j_B)_\# \left(\sum_{k=1}^m a_k j_k \right)$$

□

$$\begin{aligned} \downarrow \text{цикл-суче} \\ \Rightarrow \dots \rightarrow H_n(A \cap B) \xrightarrow{(j_A)_\# - (j_B)_\#} H_n(A) \oplus H_n(B) \rightarrow H_n(\mathcal{P}(A) + \mathcal{P}(B)) \rightarrow H_{n-1}(A \cap B) \rightarrow \dots \\ \quad \quad \quad \searrow \quad \quad \quad \downarrow \nu_X \leftarrow \text{ако } (X, A, B) \text{ исцртајућа пројекта} \\ \quad \quad \quad H_n(X) \end{aligned}$$

⊕ (X, A, B) исцртајућа пројекта

→ постоји дџи.н. (природни за домена)

$$\dots \rightarrow H_n(A \cap B) \xrightarrow{(j_A)_\# - (j_B)_\#} H_n(A) \oplus H_n(B) \xrightarrow{(i_A)_\# + (i_B)_\#} H_n(X) \rightarrow H_{n-1}(A \cap B) \rightarrow \dots$$

(ОВО ЈЕ МАЈЕР ВМЕТОРИС)

$\{A, B\}$ отворено покривање од X онда ала реду...

$$\begin{array}{ccccccc} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 0 & \rightarrow C_1(A \cap B) & \rightarrow C_1(A) \oplus C_1(B) & \rightarrow C_1(A) + C_1(B) & \rightarrow 0 \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & & \\ 0 & \rightarrow C_0(A \cap B) & \rightarrow C_0(A) \oplus C_0(B) & \rightarrow C_0(A) + C_0(B) & \rightarrow 0 \\ & \downarrow \epsilon & \downarrow \epsilon \oplus \epsilon & \downarrow \epsilon & \downarrow \epsilon & \downarrow \epsilon & \downarrow \epsilon \\ 0 & \rightarrow \mathbb{Z} & \xrightarrow{(\mathbb{1}_2, -\mathbb{1}_2)} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \xrightarrow{G} \mathbb{Z} & \xrightarrow{G} \mathbb{Z} & \xrightarrow{G} \mathbb{Z} & \xrightarrow{G} \mathbb{Z} \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

ово је кџи

① (X, A, B) исключающая тройка

→ левая дгм. (природная за двойку)

$$\dots \rightarrow \tilde{H}_n(A \cap B) \xrightarrow{(j_A)_* - (j_B)_*} \tilde{H}_n(A) \oplus \tilde{H}_n(B) \xrightarrow{(i_A)_* + (i_B)_*} \tilde{H}_n(X) \rightarrow \tilde{H}_{n-1}(A \cap B) \rightarrow \dots$$

(ОБО ЭЕ МАЖЕР ВИТОРИС ЗА РЕДУКОВАНУ)

$$\tilde{H}_n(X \vee Y) \cong \tilde{H}_n(X) \vee \tilde{H}_n(Y) \leftarrow \text{справедливо, если } X \text{ и } Y \text{ — локально связные пространства}$$

$$\tilde{H}_n(X \vee Y) \cong \tilde{H}_n(X) \oplus \tilde{H}_n(Y) \leftarrow \text{если } X \text{ и } Y \text{ — связные пространства}$$

Теорема о инвариантности размерности

$$\begin{aligned} m \neq n &\Rightarrow S^n \not\cong S^m \Rightarrow \mathbb{R}^n \not\cong \mathbb{R}^m \quad \text{если } n \neq m \text{ — известно из топологии сферы} \\ S^n \cong S^m &\xrightarrow{\uparrow} \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^m \end{aligned}$$

② X — топологический пространство, $x \in X$ и $i \in \mathbb{N}_0$.

i -тая локальная гомотопическая группа пространства X в точке x — $H_i(X, x)$.

③ n -многообразие — топологическое пространство M размерности n (n -многообразие) или хаусдорфово и $(\forall x \in M)(\exists V \in \mathcal{T}_M, x \in V \cong \mathbb{R}^n (\cong \mathbb{D}^n))$.

(2-многообразие = поверхность)

Примеры: $\mathbb{R}^n, S^n, M_g, U_n, \mathbb{P}^n, \mathbb{C}^n, \mathbb{R}P^n$

M n -многообразие, $U \in \mathcal{T}_M \setminus \{\emptyset\} \Rightarrow U$ n -многообразие

M m -многообразие, N n -многообразие $\rightarrow M \times N$ $(m+n)$ -многообразие.

④ M n -многообразие, $x \in M \Rightarrow H_i(M, M \setminus \{x\}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & i=n \\ 0, & i \neq n \end{cases}$

$$\Delta: H_i(M, M \setminus \{x\}) \cong H_i(V, V \setminus \{x\}) \cong \tilde{H}_{i-1}(V \setminus \{x\}) \cong \tilde{H}_{i-1}(S^{n-1}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & i=n \\ 0, & i \neq n \end{cases}$$

$$\begin{aligned} V \subset M \setminus \{x\} \text{ — окрестность} &\quad H_n(V, A) \cong \tilde{H}_n(A) \leftarrow X^{n*} \text{ (ромбик)} \\ \uparrow &\quad \downarrow \\ \mathcal{T}_M &\quad \mathcal{T}_M(T_1) \quad \text{и } V \times \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n \\ &\quad \downarrow \\ &\quad V \setminus \{x\} \cong \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \cong S^{n-1} \end{aligned}$$

① (0 инвариантность размерности) M и N топологические многообразия.

$$M \approx N \Rightarrow \dim M = \dim N.$$

$$\Delta: h: M \xrightarrow{\approx} N$$

$$x \in M \rightarrow M \setminus \{x\} \xrightarrow{\approx} N \setminus \{h(x)\}$$

$$1. \text{начи} \dots \rightarrow H_i(M \setminus \{x\}) \rightarrow H_i(M) \rightarrow H_i(M, M \setminus \{x\}) \rightarrow H_{i-1}(M \setminus \{x\}) \rightarrow H_{i-1}(M) \rightarrow \dots$$

$$h_* \downarrow \cong \cong \downarrow h_* \quad \downarrow h_* \quad \cong \downarrow h_* \quad \cong \downarrow h_*$$

$$\dots \rightarrow H_i(N \setminus \{h(x)\}) \rightarrow H_i(N) \rightarrow H_i(N, N \setminus \{h(x)\}) \rightarrow H_{i-1}(N \setminus \{h(x)\}) \rightarrow H_{i-1}(N) \rightarrow \dots$$

5. лема

$$\Rightarrow H_i(M, M \setminus \{x\}) \cong H_i(N, N \setminus \{h(x)\}) \text{ за } \forall i.$$

$$2. \text{начи} h: (M, M \setminus \{x\}) \xrightarrow{\approx} (N, N \setminus \{h(x)\})$$

функторијалност.

Ово је еквиваленција у $\text{Top}^2 \Rightarrow$ еквиваленција те изаћи $\square$

18

Линеар пресликавања

$$n \in \mathbb{N}_0, f: S^n \rightarrow S^n \text{ непрекидно}, f_*: \tilde{H}_n(S^n) \rightarrow \tilde{H}_n(S^n)$$

↑ епиморфизам делотелне циклическе групе $\tilde{H}_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$

$\Rightarrow f_*$ је множење неким $\deg f \in \mathbb{Z} \leftarrow$ ② линеар пресликавања f .

Покушајте се: $f, g: S^n \rightarrow S^n, n \in \mathbb{N}_0$

$$1) f \approx g \Rightarrow \deg f = \deg g$$

$$\Delta: f \approx g \Rightarrow f_* = g_* \Rightarrow \deg f = \deg g. \square$$

$$2) \deg(g \circ f) = \deg g \cdot \deg f$$

Δ : функторијалност $\tilde{H}_n$:

$$\tilde{H}_n(S^n) \xrightarrow{f_*} \tilde{H}_n(S^n)$$

$$\begin{array}{ccc} & & \downarrow g_* \leftarrow \text{овај дијаграм комутира} \\ (g \circ f)_* & \searrow & \tilde{H}_n(S^n) \end{array}$$

$\square$

$$3) \deg 1_{S^n} = 1$$

$$\Delta: (1_{S^n})_* = 1_{\tilde{H}_n(S^n)} \quad \square$$

4) f homotopijska ekvivalencija $\Rightarrow \deg f \in \{-1, 1\} = \mathbb{Z}^*$

$$\Delta: \exists e: S^n \rightarrow S^n \quad \begin{cases} f \circ e \simeq 1_{S^n} \\ e \circ f \simeq 1_{S^n} \end{cases} \quad \left. \begin{matrix} (1, 2, 3) \end{matrix} \right\} \Rightarrow \deg f \cdot \deg e = 1$$

5) f konstantno $\Rightarrow \deg f = 0$

$$\Delta: S^n \xrightarrow{f} S^n \xrightarrow{\sim} \tilde{H}_n(S^n) \xrightarrow{f_*} \tilde{H}_n(S^n) \Rightarrow f_* = 0 \Rightarrow \deg f = 0.$$

6) $n=1, e_k: S^1 \rightarrow S^1, e_k(z) := z^k \Rightarrow \deg e_k = k$

$$e_k: (S^1, 1) \rightarrow (S^1, 1), \pi_1(S^1, 1) \xrightarrow{(e_k)_*} \pi_1(S^1, 1)$$

ako se po x y podeli broj izvornu
(omen ga gogam ~ jer je n=1)

7) $\deg Sf = \deg f \quad \Delta: S(S^n) \xrightarrow{Sf} S(S^n) \quad Sf[x, t] := [f(x), t]$

$$\begin{array}{ccc} h \downarrow \simeq & \hookrightarrow & h \downarrow \simeq \\ S^{n+1} & \xrightarrow{Sf} & S^{n+1} \end{array}$$

h mora biti da bi komutiralo

$$\begin{array}{ccc} \tilde{H}_n(S^n) & \xrightarrow{p_*} & \tilde{H}_n(S^n) \\ \uparrow S & \hookrightarrow & \uparrow S \end{array} \quad \leftarrow \text{ono što smo ranije sa izračunavanja}$$

$$\begin{array}{ccc} \tilde{H}_{n+1}(S(S^n)) & \xrightarrow{(Sf)_*} & \tilde{H}_{n+1}(S(S^n)) \\ \uparrow S & \hookrightarrow & \uparrow S \\ S(S^n) & \xrightarrow{Sf} & S(S^n) \\ h \downarrow \simeq & \hookrightarrow & h \downarrow \simeq \\ S^{n+1} & \xrightarrow{Sf} & S^{n+1} \end{array}$$

□

8) Ако је $n \geq 1$ онда је $(\forall k \in \mathbb{Z}) (\exists f: S^k \rightarrow S^k) \deg f = k \leftarrow 6) \text{ и } 7)$

Ако је $n=0$ онда $\deg$ узима само вредности $-1, 0, 1$.

$$\#S^0 = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \varepsilon: \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon_1: \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\{3, 5\}} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\{0\}}$$

$$\uparrow \text{ ако је } -1 \triangleq \tilde{H}_0(S^0) = \mathbb{Z} \langle [1] - [-1] \rangle$$

$$(\varepsilon_1)_*([1] - [-1]) = [\varepsilon_1(1)] - [\varepsilon_1(-1)] = [-1] - [1] = -([1] - [-1])$$

$$\Rightarrow \deg \varepsilon_1 = -1$$

□

9) π билатерална хиперраван у $\mathbb{R}^{n+1}$ т.г. о.е.т

$f_\pi: S^n \rightarrow S^n$ рефлексија у односу на хиперраван π .

$$\Rightarrow \deg f_\pi = -1$$

$r_1: S^n \rightarrow S^n$ рефлексија на $x_1 = 0$

$$r_1(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) = (-x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$$

$$\triangleq: \deg r_1 = -1 \leftarrow \text{индукција по } n.$$

$n=0$ или доказ одлуче 8)

$$n \geq 1: S(S^{n-1}) \xrightarrow{sr_1} S(S^{n-1})$$

$$h \downarrow \quad G \downarrow h \quad \text{за } h \text{ узмемо } h[x, t] = (2\sqrt{t-t^2} \cdot x, 2t-1)$$

$$S^n \xrightarrow{r_1} S^n \quad [x_1, \dots, x_n, t] \mapsto [-x_1, \dots, x_n, t]$$

$$\downarrow \quad \downarrow h \quad \checkmark$$

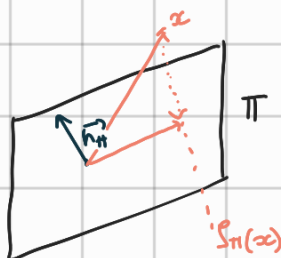
$$(2\sqrt{t-t^2} \cdot x_1, \dots, 2\sqrt{t-t^2} \cdot x_n, 2t-1) \mapsto (-2\sqrt{t-t^2} \cdot x_1, \dots, 2\sqrt{t-t^2} \cdot x_n, 2t-1)$$

$$\deg r_1 = -1 \Rightarrow \text{знамо изнати деоног } r_1.$$

За де ослуче f_π :

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0)$$

$\vec{n}_\pi$ је нормални вектор нормале на π



$$f_\pi(x) = x - 2 \langle x, \vec{n}_\pi \rangle \vec{n}_\pi$$

$\omega: I \rightarrow S^n$ пут од $\vec{n}_\pi$ до e_1

$$h(x, t) = x - 2 \langle x, \omega(t) \rangle \omega(t)$$

$$H: S^n \times I \rightarrow S^n$$

$$H: f_\pi \simeq r_1.$$

10: $a_n: S^n \rightarrow S^n$ антиподно ($a_n(x) = -x, x \in S^n$)

$$\Rightarrow \deg a_n = (-1)^{n+1}$$

$$\Delta: a_n = v_1 \circ v_2 \circ \dots \circ v_{n+1}$$

$$v_i(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, -x_i, \dots, x_{n+1}) \Rightarrow \deg a_n = (-1)^{n+1}$$

□

⑤ $a_n \simeq \mathbb{1}_{S^n} \Leftrightarrow n$ нечетно

Δ: $\Leftarrow$: зная ограни.

$$\Rightarrow 1) \Rightarrow \deg a_n = \deg \mathbb{1}_{S^n} = 1 \Rightarrow n \text{ нечетно.}$$

$$\quad \quad \quad (-1)^{n+1}$$

□

⑥ $A \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$, векторное поле на A не имеет нулевых точек $\vec{v}: A \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$
 $A = S^n$



За ли на S^n можно найти не нулевое векторное поле?

$$\vec{v}: S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \quad (x, \vec{v}(x)) \neq 0 \text{ для всех } x \in S^n$$

$\Updownarrow$

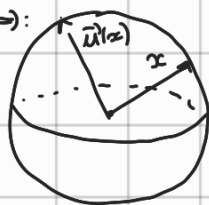
$$S^n \xrightarrow{\vec{v}} \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad \text{За ли можно найти } \vec{\mu}: S^n \rightarrow S^n \text{ непрерывно т.д. } \langle x, \vec{\mu}(x) \rangle = 0$$

$$\quad \quad \quad \downarrow$$

$$\vec{\mu} \quad S^n \quad \text{за все } x \in S^n?$$

⑦ (Теорема о чётности пути) $\Delta A \Leftrightarrow n$ нечетно

$$\Delta: \Rightarrow: \quad \Gamma f, g: X \rightarrow S^n \quad (\forall x \in X) \quad f(x) \neq -g(x) \Rightarrow f \simeq g$$



$$\vec{\mu}(x) \neq x = -(-x) = -a_n(x)$$

$$\Rightarrow \vec{\mu} \simeq a_n$$

$$\vec{\mu}(x) \neq -x = -\mathbb{1}_{S^n}(x)$$

$$\Rightarrow \vec{\mu} \simeq \mathbb{1}_{S^n}$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{\mu} \simeq a_n \\ \vec{\mu} \simeq \mathbb{1}_{S^n} \end{array} \right\} \vec{\mu} \simeq \mathbb{1}_{S^n} \Rightarrow n \text{ нечетно}$$

$$\Leftarrow: n = 2k + 1, k \in \mathbb{N}$$

$$\vec{\mu}(x_1, x_2, \dots, x_{2k+1}, x_{2k+2}) := (-x_2, x_1, -x_4, x_3, \dots, -x_{2k+2}, \color{red}{x_{2k+1}})$$

$\underbrace{x_1 + ix_2}_{x_1 + ix_2}$

□

⑤ $f: S^n \rightarrow S^n$ непрерывно, $\deg f \neq (-1)^{n+1} \Rightarrow f$ имеет фиксированную точку.

Δ: f не имеет фиксированной точки $\Rightarrow f \simeq \text{id} \Rightarrow \deg f = (-1)^{n+1}$.

□

III КЕЛИЈСКИ КОМПЛЕКСИ И КЕЛИЈСКА ХОМОЛОГИЈА

Келијски комплекси (CW-комплекси)

$X^{(0)}$ — дискретан тополошки простор
 $\vdots$

$n \in \mathbb{N}$ $X^{(n+1)}$ $\{e_\alpha^{n+1} : S^{n+1} \rightarrow X^{(n+1)}\}_{\alpha \in A_{n+1}}$ фамилија непрекинутих функција

$$\bigsqcup_{\alpha \in A_n} e_\alpha^n : \bigsqcup_{\alpha \in A_n} S^n \rightarrow X^{(n+1)}$$

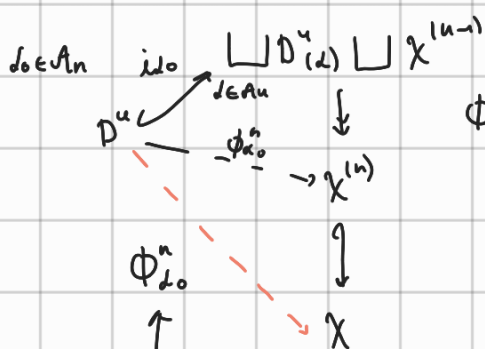
n -скелет CW-комп. X
 $\downarrow$

$$X^{(n)} := \bigsqcup_{\alpha \in A_n} D^n_\alpha \cup \bigsqcup_{\alpha \in A_{n-1}} X^{(n-1)}$$

$\uparrow$ лепство пришивањем

$$X^{(0)} \subseteq X^{(1)} \subseteq X^{(2)} \subseteq \dots \subseteq X^{(n+1)} \subseteq \dots$$

$$X := \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} X^{(n)}, \quad \mathcal{T}_X := \{V \subseteq X \mid (\forall n \in \mathbb{N}_0) \forall n \chi^{(n)} \in \mathcal{T}_{X^{(n)}}\}$$



$$\Phi_{\alpha_0}^n(D^n) \approx D^n$$

$e_{\alpha_0}^n \leftarrow n$ -келна CW-компекса X

$$\Phi_{\alpha_0}^n$$

Карактеристична функција ћелује $e_{\alpha_0}^n$

$$D^n \xrightarrow{\Phi_{\alpha_0}^n} X^{(n)}$$

$$\uparrow$$

$$\sigma$$

$$\uparrow$$

$$S^{n-1} \xrightarrow{e_{\alpha_0}^{n-1}} X^{(n-1)}$$

$$\uparrow$$

$$e_{\alpha_0}^{n-1}$$

$$\uparrow$$

$$S^{n-1}$$

$$\uparrow$$

$$e_{\alpha_0}^{n-1}$$

$$\uparrow$$

$$S^{n-1}$$

$$\uparrow$$

$$e_{\alpha_0}^{n-1}$$

$$\uparrow$$

$$S^{n-1}$$

$$\uparrow$$

$$e_{\alpha_0}^{n-1}$$

$$\uparrow$$

$$S^{n-1}$$

$$\uparrow$$

$$e_{\alpha_0}^{n-1}$$

$$\uparrow$$

$$S^{n-1}$$

$$\Phi_{\alpha_0}^n$$

$\leftarrow$ ома компекса

функција лепства ћелује

Пример: $X^{(0)}$: ..

$$A_1 = \{\alpha, \beta\}, e_\alpha: S^0 \rightarrow X^{(0)}$$

$$e_\beta: S^0 \rightarrow X^{(0)}$$

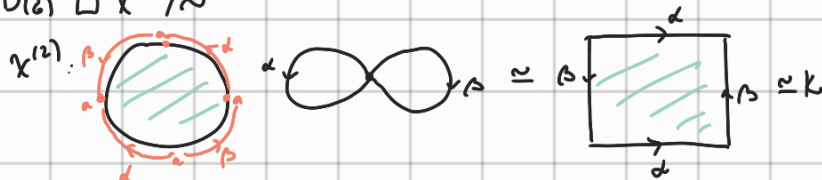
$$X^{(1)} = D_{(\alpha)}^1 \sqcup D_{(\beta)}^1 \sqcup X^{(0)} / \sim$$



$$A_2 = \{\sigma\}, e_\sigma: S^1 \rightarrow X^{(1)}$$

↑ дама "правилно" $\alpha \beta \alpha^{-1} \beta$

$$X^{(2)} = D_{(\sigma)}^2 \sqcup X^{(1)} / \sim$$



② CW комплекс чине Хаусдорфов простор X , фамилија неволик дисјунктних подпростора $\{e^\alpha \mid \alpha \in A_0, \alpha \in A_n\}$ која је покрива и фамилија непрекинутих функција $\{\phi_\alpha^n \mid D^n \rightarrow X\}_{\alpha \in A_n, n \in \mathbb{N}}$ изг. важи:

$$(C) (\forall \alpha \in A_0) (\forall \alpha \in A_n) \partial^n \approx e_\alpha^n$$

$$(\exists e_{\alpha_1}^n, e_{\alpha_2}^n, \dots, e_{\alpha_k}^n \in \{e^\alpha \mid \alpha \in A_n\}) \phi_\alpha^n(S^{n-1}) \subseteq \bigcup_{i=1}^k e_{\alpha_i}^n, \quad n_i < n \text{ за сва } i=1, k$$

↑ коначно много их је

$$(W) A \in X \Rightarrow (A \in F_X \Leftrightarrow (\forall \alpha \in A_0) (\forall \alpha \in A_n) A \cap \overline{e_\alpha^n} \in F_{e_\alpha^n})$$

e_α^n - (отворена) ћелија димензије n

$\overline{e_\alpha^n}$ - затворена n -ћелија

ϕ_α^n - карактеристична функција ћелије e_α^n

$X^{(n)} := \bigcup_{k=0}^n \bigcup_{\alpha \in A_k} e_\alpha^k$ - n -скелет CW комплекса X .

$\phi_\alpha^n: D^n \rightarrow X^{(n)}$ ← по потреби, $\phi_\alpha^n: (D^n, S^{n-1}) \rightarrow (X^{(n)}, X^{(n-1)})$ ← по још једној потреби

$e_\alpha^{n-1}: S^{n-1} \rightarrow X^{(n-1)}$ функција покрива ћелије e_α^n

$\dim X = \min \{n \mid X = X^{(n)}\}$ ← ако је скелет непразан $\dim X = +\infty$ иначе.

$$\textcircled{5} (\forall n \in \mathbb{N}_0) (\forall \lambda \in \mathcal{A}_n) \Phi_\lambda^n(D^n) = \overline{e_\lambda^n}.$$

$$\Delta: \subseteq: \Phi_\lambda^n(D^n) = \Phi_\lambda^n(\overline{D^n}) = \overline{\Phi_\lambda^n(D^n)} = \overline{e_\lambda^n}$$

$$\supseteq: e_\lambda^n = \Phi_\lambda^n(D^n) \subseteq \Phi_\lambda^n(D^n) \in \mathcal{K}_X \subseteq \mathcal{F}_X$$

$$\Rightarrow \overline{e_\lambda^n} \subseteq \Phi_\lambda^n(D^n)$$

□

← као скуп не као простор

$$\mathcal{X} = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} \bigsqcup_{\lambda \in \mathcal{A}_n} e_\lambda^n$$

$\overline{e_\lambda^n}$ је коначно много тачака нити димензије „closure finiteness“ ← одговара са

$\mathcal{W}$ — „weak topology“

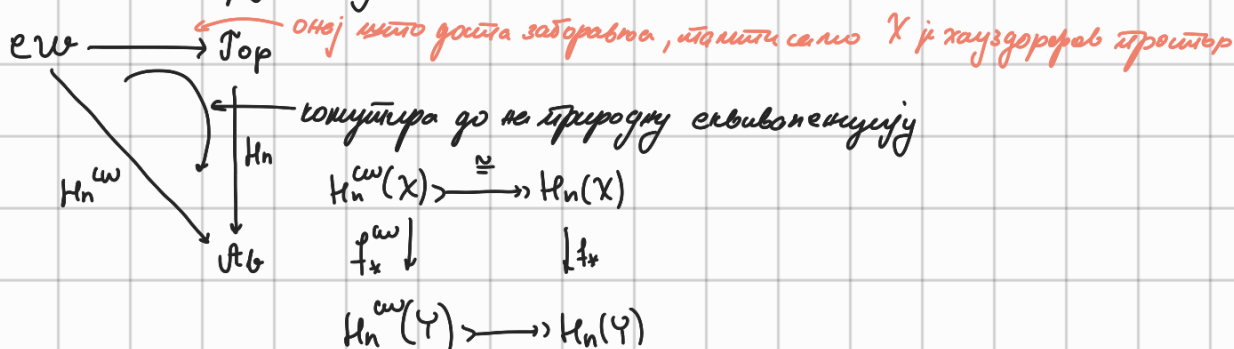
$\mathcal{X} \{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}, A_\lambda \subseteq \mathcal{X}, \mathcal{X}$ има слабу топологију у односу на $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ ако за $V \subseteq \mathcal{X}$ важи $V \in \mathcal{F}_X \Leftrightarrow (\forall \lambda \in \Lambda) V \cap A_\lambda \in \mathcal{F}_{A_\lambda}$.

$\textcircled{6} \mathcal{X}, \mathcal{Y}$ су компактни. Непрестануто $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ је тачкасто ако је

$$(\forall n \in \mathbb{N}_0) f(\mathcal{X}^{(n)}) \subseteq \mathcal{Y}^{(n)}$$

21

$\mathcal{CW}$ ← категорија тополошких компактних



$\textcircled{3} \mathcal{X}$ је $\mathcal{CW}$ -компактен, $A \subseteq \mathcal{X}$ м.г. $(\forall n \in \mathbb{N}_0) (\forall \lambda \in \mathcal{A}_n) |A \cap e_\lambda^n| \leq 1$

$\Rightarrow A$ је затворен дискретан подпростор од $\mathcal{X}$.

$\Delta: n \in \mathbb{N}_0, \lambda \in \mathcal{A}_n, A \cap \overline{e_\lambda^n}$ је коначан из $|A \cap \overline{e_\lambda^n}| \leq 1$ и $\{e_\lambda^n\}$

а $\mathcal{X}$ је хаусдорфов $\Rightarrow$ коначан је затворен $\Rightarrow A \cap \overline{e_\lambda^n} \in \mathcal{F}_{\overline{e_\lambda^n}}$

$$B \subseteq A \dots \Rightarrow B \in \mathcal{F}_X \Rightarrow B \in \mathcal{F}_A$$

□

④ X је CW-комплекс и $K \in \mathcal{K}_X$

$\Rightarrow K$ саче највише коначно много ћелија у X . $\downarrow$ узмемо из сваког пресека по 1 ћелију

Δ : Лис. $\exists$ бесконачан $A \subseteq K$ т.д. важи $(\forall n \in \mathbb{N}_0)(\forall \lambda \in \mathcal{J}_n) |A \cap e_\lambda^n| \leq 1$

$\Rightarrow A \in \mathcal{F}_X \Rightarrow A \in \mathcal{F}_K \Rightarrow A \in \mathcal{K}$ и A дискретан од раније $\Rightarrow A$ коначан $\S$

□

⑤ CW-комплекс је коначан ако има коначно много ћелија

⑥ CW-комплекс је компактн ако је коначан.

Δ : $\Rightarrow$: из ①

$\Leftarrow$: $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} \bigcup_{\lambda \in \mathcal{J}_n} \overline{e_\lambda^n}$ $\leftarrow$ ово су компакти из $\Phi_X^*(D^n) = \overline{e_\lambda^n}$ неупрецих списа компактн.
коначна унутра компактних је компактн.

□

⑦ X је CW-комплекс и $A \subseteq X$. A је поткомплекс CW-комплекса X

ако је $A = \bigcup_{e_\lambda^n \in A} e_\lambda^n$, где је $\mathcal{C}_A = \{e_\lambda^n | n \in \mathbb{N}_0, \lambda \in \mathcal{J}_n\}$ т.д.

$(\forall n \in \mathbb{N}_0)(\forall \lambda \in \mathcal{J}_n) \mathcal{C}_\lambda^n \subseteq A \Rightarrow \overline{e_\lambda^n} \subseteq A$

Пример: $n \in \mathbb{N}_0$, $X^{(n)} := \bigcup_{k=0}^n \bigcup_{\lambda \in \mathcal{J}_k} \overline{e_\lambda^k}$ је поткомплекс од X .

⑧ Ако је A поткомплекс CW-комплекса X

$\Rightarrow A \in \mathcal{F}_X$ и A је CW-комплекс.

⑨ X је CW-комплекс и A поткомплекс онда пар (X, A) називамо CW-пар.

⑩ A, B поткомплекси од $X \Rightarrow A \cup B, A \cap B$ су такође поткомплекси X .

⑪ $\emptyset$ је свагда поткомплекс.

які деформуються ретранзит.

⑤ Если $\mathcal{M}$ пар. μ есть доб. пар. $(\exists v \in \mathcal{I}_x) \text{ и } \mu \in \mathcal{I}_x$ и $\mu \in \mathcal{I}_{\text{дог}} V$.

Без доказ.

Знамо од релације $H_n(X, A) = \tilde{H}_n(X/A)$.

⑤ $\chi_j(W)$ контресс и A и B полуконтресс и $A \cup B = \chi$.

$\Rightarrow (X, A, B)$ je iscežajuća projekcija.

① (X, A) CW-пар $\Rightarrow X/A$ — CW-комплекс.

чија је једна о-кенија A/A, а осталих има тачно истолико копија у XIA.

Вихає характеристичне функції u :

$$e_2^n \in \chi \setminus A \quad D^n \xrightarrow{\phi_2^n} \chi \xrightarrow{2} \chi/A.$$

(без доказательства)

Прилер: χ је W -комитет, $n \in \mathbb{N} \rightarrow \chi^{(n)}$ је пошкомитет и $\chi^{(n-1)}$

$$\chi^{(n)} / \chi^{(n-1)} \approx \sqrt[n]{S^4_{12}}$$

ако редифини́руем $\chi^{(i)} = \phi$, $\chi^{(0)} / \chi^{(i)} = \chi^{(0)} / \phi = \chi^{(0)} \cup \dots$ по оной же вещи за де сфера.

Керијска хомоотрија

$$n \in H_0 \quad \text{CW} \xrightarrow{H_n^{CW}} Ab$$

$$CW \longrightarrow \mathcal{T}_{\text{op}} \xrightarrow{H_n} \mathcal{A}b$$

④ (X, A) топологички пар, $i: A \hookrightarrow X$, $n \in \mathbb{N}_0$

$$H_k(X, A) = 0 \text{ за } k \leq n \Leftrightarrow i_*: H_k(A) \rightarrow H_k(X) \text{ изоморфизм за } k \leq n$$

и епиморфизм за $k=n$.

$$\Delta: \dots \rightarrow H_n(A) \xrightarrow{i_*} H_n(X) \rightarrow H_n(X, A) \rightarrow H_{n-1}(A) \xrightarrow{i_*} H_{n-1}(X) \rightarrow \dots$$

$$\dots H_k(X) \xrightarrow{i_k} H_k(X) \rightarrow H_k(X, A) \rightarrow \dots$$

 $\Rightarrow$

↑ dve obavele prirobiti $\Rightarrow$ iz j 430 go n

они у н ј ети из тачности.

$$\dots \rightarrow H_K(X) \xrightarrow{4} H_K(X) \xrightarrow{\circ} H_K(X, A) \xrightarrow{\circ} \dots$$

$L_k(\gamma^{(m)}) \leftarrow \gamma^{(m)}$ ← можно сразу дать погоду...

2) $H_k(X^{(n)}) \cong H_k(X)$ за $k < n$; изглед из 1) и 2)

$H_k(X^{(n)}) = 0$ за $k > n$: доказ индукцијом по n .

$$n=0: k>0, H_k(X^{(0)}) = H_k(\bigcup_{\alpha \in A_0} e^\alpha) = \bigoplus_{\alpha \in A_0} H_k(e^\alpha) = 0 \quad \leftarrow k < \infty$$

$n \geq 1$: дати пара $(X^{(n)}, X^{(n-1)})$

$$\cdots \rightarrow H_k(X^{(n-1)}) \rightarrow H_k(X^{(n)}) \rightarrow H_k(X^{(n)}, X^{(n-1)}) \rightarrow \cdots$$

$\downarrow \leftarrow HX \quad \quad \quad \downarrow \leftarrow \alpha + k > n$

$\Rightarrow y$ средини је 0.

$$\cdots \rightarrow H_n(X^{(n-1)}) \rightarrow H_n(X^{(n)}) \rightarrow H_n(X^{(n)}, X^{(n-1)}) \rightarrow \cdots$$

$\downarrow$
од некое

$\uparrow$
по α је пододна оденова.

оде је мономорфизам и подгрупа
спододне је спододна

□

$$n \in \mathbb{N}_0 \quad \begin{array}{ccc} C^w & \xrightarrow{\quad} & C^b \\ & \searrow H_n^w & \downarrow H_n \\ & & C^b \end{array}$$

X C^w комитре

$$C^w(X): \cdots \rightarrow C_{n+1}^w(X) \xrightarrow{d_{n+1}^w} C_n^w(X) \xrightarrow{d_n^w} C_{n-1}^w(X) \rightarrow \cdots \rightarrow C_1^w(X) \rightarrow C_0^w(X) \rightarrow 0 \cdots 0 \cdots$$

$$n \in \mathbb{N}_0 \quad C_n^w(X) := H_n(X^{(n)}, X^{(n-1)}) = \bigoplus_{\alpha \in A_n} \mathbb{Z} \langle e^\alpha \rangle$$

$$d_n := (j_{n-1})_* \circ d_n$$

тоде нека дава а обичну
напомена ишту ситавило

$$\begin{array}{ccccc} & & H_n(X^{(n)}) & & \\ \nearrow d_n & & \searrow (j_{n-1})_* & & \\ H_{n+1}(X^{(n+1)}, X^{(n)}) & \xrightarrow{\quad} & H_n(X^{(n)}, X^{(n-1)}) & \xrightarrow{d_n} & H_{n-1}(X^{(n-1)}, X^{(n-2)}) \\ & \searrow d_n & \uparrow (j_{n-1})_* & & \\ & & H_{n-1}(X^{(n-1)}) & & \end{array}$$

$\Rightarrow d_n \circ d_{n+1} = (j_{n-1})_* \circ d_n \circ (j_n)_* \circ d_{n+1} = 0$

$\Rightarrow$ одо је ситавило ишту комитре

d_n је подмозужити хомоморфизам из дати паре $(X^{(n)}, X^{(n-1)})$

$$j_{n-1}: (X^{(n-1)}, \emptyset) \hookrightarrow (X^{(n-1)}, X^{(n-2)})$$

$$H_n^w(X) := H_n / C_n^w(X) \leftarrow n\text{-та ветвијна хомолошка група } X.$$

$$\begin{array}{ccc}
 D^n & \xrightarrow{\phi_{\lambda_0}^n} & X^{(n)} \\
 \downarrow q & \curvearrowright & \downarrow q^n \\
 S^n & \xrightarrow{\text{id}_0} & X^{(n)}/X^{(n-1)}
 \end{array}$$

↑ γιαντουμε το οτι σφαιρα ειναι πομπη ογ $\mathbb{R}^n_{\lambda_0}$

Ⓙ X ω -κομπηκε, $n \in \mathbb{N}$ μ $\{e_i^n \mid i \in \mathbb{N}\}$ φρακτικη n -κερη μ $\{e_i^{n+1} \mid i \in \mathbb{N}\}$ φρακτικη $n+1$ -κερη.

Παραδεσ οδωραζυτε δεσε βοθη: $dn(C^n) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \lambda_{i,n} e_i^{n+1}$ εδε $\lambda_{i,n} = \deg(q_n \circ e_i^{n+1})$

$$S^{n+1} \xrightarrow{e_1^{n+1}} X^{(n+1)} \xrightarrow{q_{n+1}} S^{n+1}$$

↓ ογ κομπηκε Ⓢ

↑ οτι ειναι κομπηκε $d\phi_i(C)$ μ $\deg(\omega_{\text{out}}) = 0$.

(δεσ δεκαδε).

□

Ⓟ d 1-κερη μ ειναι φ-ια κομπηκε: $e_1: (a^- \ b^-)$

$$\Rightarrow d_1(L) = b - a$$



Πρωτερ: $K: \dots \rightarrow \mathbb{Z}\langle a \rangle \xrightarrow{d_2} \mathbb{Z}\langle a \rangle \oplus \mathbb{Z}\langle b \rangle \xrightarrow{d_1} \mathbb{Z}\langle a \rangle \rightarrow \dots$

$$\oplus \Rightarrow d_1(L) = d_1(R) = a - a = 0$$

$$d_2(b) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} a + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} b$$

$$\uparrow \deg(q_2 \circ e_2)$$

ερεσμο κομπηκε
οτι σε ειναι οδωραζυ οτι ω



οι ομοι $+2$ σε ρ ειναι οτι φρακτικη οριστησιν μ δε περ γ δεσ οδωραζυ οριστησιν μ .

$$H_0(K) \cong \mathbb{Z}, H_1(K) \cong \mathbb{Z}\langle a \rangle \oplus \mathbb{Z}\langle b \rangle / \mathbb{Z}\langle 2b \rangle \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2, H_2(K) = 0$$

Одређивање линеарног преликавања $f_{\#}^{\omega}$

$$e^{\omega} \longrightarrow C^{\omega} \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto e^{\omega}(x)$$

$$f: X \rightarrow Y \text{ континуу} \longmapsto f_{\#}: e^{\omega}(X) \rightarrow e^{\omega}(Y) \text{ линеарно}$$

⑦ $n \in \mathbb{N}_0$, $\{e_{\alpha}^n \mid \alpha \in \mathbb{R}^n\}$ формална n -келуја у X

$\{\hat{e}_{\beta}^n \mid \beta \in \mathbb{R}^n\}$ формална n -келуја у Y

Тада за одговарајуће базе ермита $C_n^{\omega}(X)$ и $C_n^{\omega}(Y)$ важи:

$$f_{\#}^{\omega}(e_{\alpha}^n) = \sum_{\beta \in \mathbb{R}^n} \mu_{\alpha, \beta} \hat{e}_{\beta}^n, \text{ где је } \mu_{\alpha, \beta} := \deg(\tilde{g}_{\beta} \circ \tilde{f} \circ \text{id})$$

↑
ова сума је кохерентно савезно келуја.

$$\begin{array}{ccccc} D^n & \longrightarrow & X^{(n)} & \xrightarrow{f} & Y^{(n)} \\ \downarrow \text{id} & & \downarrow g^{(n)} & \hookrightarrow & \downarrow \hat{g}^{(n)} \\ S^n & \xrightarrow{\text{id}} & X^{(n)}/X^{(n-1)} & \xrightarrow{\hat{f}} & Y^{(n)}/Y^{(n-1)} \xrightarrow{\tilde{f}_{\beta}} S^n \end{array}$$

(без доказа)

□

⑧ $e_{\alpha_0}^n$ n -келуја у X , $\hat{e}_{\beta_0}^n$ n -келуја у Y тако да $D^n \xrightarrow{\Phi_{\alpha_0}^n} X$ континуу онда

$$\begin{array}{ccc} D^n & \xrightarrow{\Phi_{\alpha_0}^n} & X \\ \searrow \hat{\Phi}_{\beta_0}^n & \circlearrowleft & \downarrow f \\ & & Y \end{array}$$

за одговарајуће базе елемената $f_{\#}^{\omega}(e_{\alpha_0}^n) = \hat{e}_{\beta_0}^n$

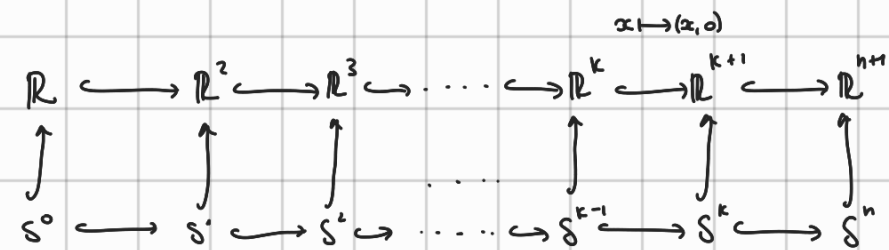
$$\begin{array}{ccccc} D^n & \longrightarrow & X^{(n)} & \xrightarrow{f} & Y^{(n)} \\ \downarrow \text{id} & & \downarrow g^{(n)} & \hookrightarrow & \downarrow \hat{g}^{(n)} \\ S^n & \xrightarrow{\text{id}} & X^{(n)}/X^{(n-1)} & \xrightarrow{\hat{f}} & Y^{(n)}/Y^{(n-1)} \xrightarrow{\tilde{f}_{\beta}} S^n \end{array}$$

...

(без доказа)

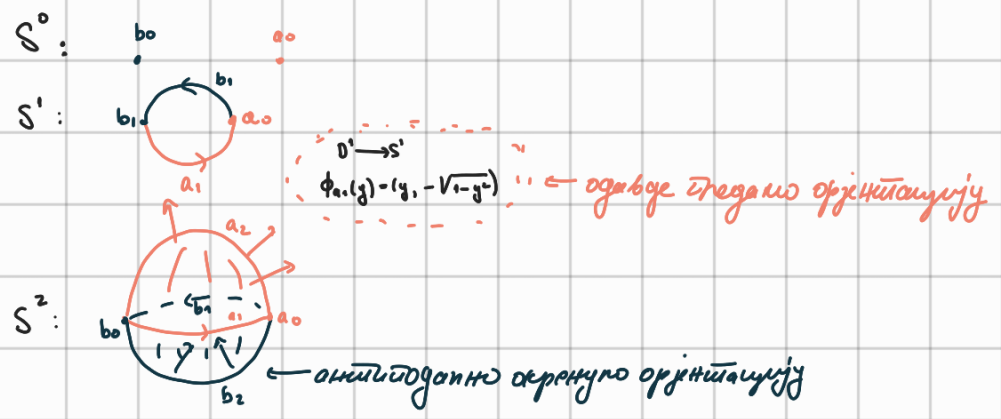
□

Компактизація реалних проєктивних простора



$$S^n = a_0 \sqcup b_0 \sqcup a_1 \sqcup b_1 \sqcup \dots \sqcup a_n \sqcup b_n$$

$$a_k := \{x \in S^k \mid (-1)^k \cdot x_{k+1} > 0\} \quad b_k := \{x \in S^k \mid (-1)^k \cdot x_{k+1} < 0\}$$



$$\phi_{a_k}: D^k \rightarrow S^k, \quad \phi_{a_k}(y) := (y, (-1)^k \cdot \sqrt{1 - \|y\|^2})$$

$$\phi_{b_k}: D^k \rightarrow S^k, \quad \phi_{b_k} := a_{k-1} \circ \phi_{a_{k-1}}$$

↑ орієнтаційно на S^k .

$$e^{\omega}(S^n): \dots \rightarrow \mathbb{Z}\langle a_k \rangle \oplus \mathbb{Z}\langle b_k \rangle \xrightarrow{d_k} \mathbb{Z}\langle a_{k-1} \rangle \oplus \mathbb{Z}\langle b_{k-1} \rangle \rightarrow \dots$$

искочим од випадку орієнтаційно

$$\textcircled{S} \quad d_k(a_k) := a_{k-1} + (-1)^k \cdot b_{k-1}, \quad d_k(b_k) := (-1)^k a_{k-1} + b_{k-1}$$

(без доказу)

□

$$\text{im } d_k = \mathbb{Z}\langle a_{k-1} + (-1)^k b_{k-1} \rangle$$

⊗ або $k \leq n$

$$\text{ker } d_k = \dots = \mathbb{Z}\langle a_k + (-1)^{k+1} b_k \rangle = \text{im } d_{k+1}$$

↑
може рахувати, відносити до системи

$$H_0(S^n) = \mathbb{Z}\langle a_0 \rangle \oplus \mathbb{Z}\langle b_0 \rangle / \mathbb{Z}\langle a_0 - b_0 \rangle = \mathbb{Z}\langle [a_0] \rangle$$

$$0 \leq i < n: H_i(S^n) = 0$$

$$H_n(S^n) = \text{ker } d_n = \mathbb{Z}\langle a_n + (-1)^{n+1} b_n \rangle \dots \text{(оки або де що бот знати)}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & x \mapsto (x, 0) & & \\
 \mathbb{R} & \hookrightarrow & \mathbb{R}^2 & \hookrightarrow & \mathbb{R}^3 & \hookrightarrow & \dots \hookrightarrow \mathbb{R}^k \hookrightarrow \mathbb{R}^{k+1} \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \\
 \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 S^0 & \hookrightarrow & S^1 & \hookrightarrow & S^2 & \hookrightarrow & \dots \hookrightarrow S^{k-1} \hookrightarrow S^k \hookrightarrow S^n \\
 \downarrow p & & \downarrow p & & \downarrow p & & \downarrow p \\
 \mathbb{R}P & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{R}P^1 & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{R}P^2 & \xrightarrow{\quad} & \dots \xrightarrow{\quad} \mathbb{R}P^{k-1} \xrightarrow{\quad} \mathbb{R}P^k \xrightarrow{\quad} \mathbb{R}P^n
 \end{array}$$

← глобальна параметризація

$$\mathbb{R}P^n = e^0 \cup e^1 \cup e^2 \cup \dots \cup e^n$$

$$e^k := \mathbb{R}P^k \setminus \mathbb{R}P^{k-1} = p(a_k) = p(b_k)$$

$$D^k \xrightarrow{\Phi_{e^k}} \mathbb{R}P^k, \quad \Phi_{e^k} := p \circ \Phi_{a_k} = p \circ \Phi_{b_k}$$

p є кепінгом узгодженим на обох глобальних декомпозиціях

$$C^\omega(S^n) : \dots \rightarrow C_k(S^n) \xrightarrow{d_k} C_{k-1}(S^n) \rightarrow \dots$$

$$\begin{array}{ccc}
 & \downarrow \Phi_{\#}^\omega & \downarrow \Phi_{\#}^\omega \\
 C^\omega(\mathbb{R}P^n) : \dots & \rightarrow C_k(\mathbb{R}P^n) \xrightarrow{d_k} C_{k-1}(\mathbb{R}P^n) \rightarrow \dots & \leftarrow \text{пачеки з кепінгом } p
 \end{array}$$

$\mathbb{Z}\langle e^k \rangle$

$$\Phi_{e^k} := p \circ \Phi_{a_k} = p \circ \Phi_{b_k} \Rightarrow p_{\#}^\omega(a_k) = p_{\#}^\omega(b_k) = e^k$$

①

$$\Rightarrow d_k(e^k) = d_k(p_{\#}^\omega(a_k)) = p_{\#}^\omega(d_k(a_k))$$

$$= p_{\#}^\omega(a_{k-1} + (-1)^k b_{k-1})$$

$$= (1 + (-1)^k) \cdot e^{k-1}$$

$$C^\omega(\mathbb{R}P^n) : \dots \rightarrow 0 \rightarrow \mathbb{Z}\langle e^n \rangle \xrightarrow{1+(-1)^n} \mathbb{Z}\langle e^{n-1} \rangle \xrightarrow{1+(-1)^{n-1}} \dots \rightarrow \mathbb{Z}\langle e^1 \rangle \xrightarrow{2} \mathbb{Z}\langle e^0 \rangle \xrightarrow{0} \mathbb{Z}\langle e^0 \rangle \rightarrow 0$$

$$H_0(\mathbb{R}P^n) \cong \mathbb{Z}$$

$$1 \leq i \leq n: H_i(\mathbb{R}P^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & i \text{ не парне} \\ 0, & i \text{ парне} \end{cases}$$

$$n \text{ парне} \Rightarrow H_n(\mathbb{R}P^n) = 0$$

$$n \text{ не парне} \Rightarrow H_n(\mathbb{R}P^n) \cong \mathbb{Z}$$

оскільки знаємо що p є за парне n $\mathbb{R}P^n$ неорієнтований, а інакше є орієнтований

$$\mathbb{R}P^\infty := \bigcup_{i \in \mathbb{N}} e^i, \quad H_i(\mathbb{R}P^\infty) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & i=0 \\ \mathbb{Z}, & 2i \text{ и } i \geq 0 \\ 0, & i > 0, i \text{ не парно} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^\infty \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathbb{R}^\infty := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{R}^n \\ S^\infty \simeq * \\ \downarrow p \\ \mathbb{R}P^\infty \end{aligned}$$

$$H_i(S^\infty) = \begin{cases} \mathbb{Z}, i=0 \\ 0, \text{ иначе} \end{cases}$$

$$p: S^n \rightarrow \mathbb{R}P^n \dashrightarrow p_*: H_i(S^n) \rightarrow H_i(\mathbb{R}P^n)$$

$i=0 \dots$ и то рачуна

$0 < i < n \Rightarrow H_i(S^n) = 0$ тривијално

$i=n$: желимо да видимо $p_*: H_n(S^n) \rightarrow H_n(\mathbb{R}P^n)$

n латан $\Rightarrow H_n(\mathbb{R}P^n) = 0$

n паран: $H_n(S^n) \cong H_n(\mathbb{R}P^n) \cong \mathbb{Z}$

$$\begin{array}{ccc} H_n(S^n) & \xrightarrow{p_*} & H_n(\mathbb{R}P^n) \\ \uparrow \psi_{S^n} & \hookrightarrow & \uparrow \psi_{\mathbb{R}P^n} \leftarrow \text{изоморфизми из теореме о рачуна} \\ H_n^{\omega}(S^n) & \xrightarrow{p_*^{\omega}} & H_n^{\omega}(\mathbb{R}P^n) \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathbb{Z} \langle a+b \rangle & & \mathbb{Z} \langle e^n \rangle \end{array}$$

$$p_*^{\omega}(a+b) = p_{\#}^{\omega}(a+b) = e^n + e^n = 2e^n$$

$\Rightarrow$ у паран p_* је, множење са 2 (неформално зависи од генератора)

Хойфова теорема о трају

$$A \in M_n(\mathbb{Z})$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \rightarrow \text{tr } A := \sum_{i=1}^n a_{ii} \in \mathbb{Z}.$$

$$a_{ii}$$

$$A \in M_{n,m}(\mathbb{Z}), B \in M_{m,n}(\mathbb{Z})$$

$$AB \in M_n(\mathbb{Z}), BA \in M_m(\mathbb{Z}) \Rightarrow \text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$$

$$\Delta: \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij} \cdot b_{ji} = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n b_{ji} a_{ij}$$

$\underbrace{\quad}_{\text{tr}(AB)} \quad \quad \quad \underbrace{\quad}_{\text{tr}(BA)}$

$$A \sim B \in M_n(\mathbb{Z}) \Leftrightarrow (\exists S \in GL_n(\mathbb{Z})) B = SAS^{-1}$$

$$A \cdot \text{adj } A = \det A \cdot E$$

$$\text{tr } B = \text{tr}(SAS^{-1}) = \text{tr}(AS^{-1} \cdot S) = \text{tr}(A)$$

$$\text{adj } A \cdot A$$

G - слободна, конечно-генерисана абелева група

$f: G \rightarrow G$ гомоморфизам и $G \cong \mathbb{Z}^n$; $n = \text{rang } G$

$\text{tr } f := \text{tr } A$, где је A матрица од f у односу на (базу коју) фиксирану базу $(d_1, \dots, d_n)$ од G .

$$f(d_i) = \sum_{j=1}^n a_{ji} \cdot d_j \leftarrow \text{матрица добијена матрицу}$$

користимо $\text{tr}(f, G)$ кад имамо више примера који се зову истим словом.

Примери: 1) $f=0 \Rightarrow \text{tr } 0=0$

$$2) f=id_G \Rightarrow \text{tr } id_G = \text{rang } G$$

$$3) \varphi: S^n \rightarrow S^n \text{ невр. } \varphi_*: \tilde{H}_n(S^n) \rightarrow \tilde{H}_n(S^n) \Rightarrow \text{tr } \varphi_* = \deg \varphi.$$

G конечно генерисана абелева група

$T := \{g \in G \mid (\exists n \in \mathbb{N}) ng = 0\} \leftarrow$ твистована подгрупа од G .

$G = T \oplus F$ (F је слободна абелева подгрупа од G)

$\uparrow$ теорема да постоји елементарна и $F \cong G/T$ и $\text{rang } G := \text{rang}(G/T)$

$$G \xrightarrow{f} G$$

$$\downarrow \quad G \quad \downarrow \leftarrow \bar{f}(g+T) := f(g)+T \text{ (јединично се факторизује)}$$

$$G/T \xrightarrow{\bar{f}} G/T \Rightarrow \text{tr } f = \text{tr } \bar{f} \text{ јер је } G/T \text{ слободна конечно-генерисана абелева.}$$

Пример 1) $\text{tr } \mathbb{A}_G = \text{rank } G$ $G \xrightarrow{\mathbb{A}_G} G$
 $\downarrow \mathbb{A}_{G/T} \downarrow$
 $G/T \dashrightarrow G/T$

① G и G' конечно генерисане абелеви групе и $G \xrightleftharpoons[\gamma]{\epsilon} G'$ производни хомоморфизми.

$$\Rightarrow \text{tr}(\gamma \circ \epsilon) = \text{tr}(\epsilon \circ \gamma)$$

$$\Delta: G \xrightarrow{\epsilon} G' \xrightarrow{\gamma} G$$

$$\downarrow G \downarrow G \downarrow$$

$$G/T \xrightarrow{\bar{\epsilon}} G'/T' \xrightarrow{\bar{\gamma}} G/T$$

$$\Rightarrow \text{tr}(\gamma \circ \epsilon) = \text{tr}(\bar{\gamma} \circ \bar{\epsilon}) - \text{tr}(\bar{\gamma} \circ \bar{\epsilon})$$

спитно $\text{tr}(\gamma \circ \epsilon) = \text{tr}(\bar{\epsilon} \circ \bar{\gamma})$ — из матрица матрица и тободунама G/T и G'/T' . $\square$

② G и G' конечно генерисане абелеви групе и $G' \xrightarrow{\epsilon} G \rightarrow \text{tr } f = \text{tr } f'$.

$$\begin{array}{ccc} \textcircled{1} & & \\ \downarrow & & \downarrow \\ G' & \xrightarrow{\epsilon} & G \end{array}$$

$$\Delta: \text{tr } f = \text{tr}(\epsilon \circ f' \circ \epsilon^{-1}) = \text{tr}(\epsilon \circ \epsilon \circ f') = \text{tr}(f')$$

↑ мрвот само тоу о има смисла

③ G конечно генерисане слободна абелева група и $H \leq G$, $f: G \rightarrow G$ ендоморфизам

т.г. $f(H) \subseteq H$ и ако важи $(\forall g \in G)(\exists n \in \mathbb{N}) ng \in H$ ($\Leftrightarrow G/H$ је тврдоста)

$$\Rightarrow \text{tr}(f, H) = \text{tr}(f, G)$$

$$\begin{array}{ccc} H & \hookrightarrow & G \\ \downarrow f & & \downarrow f \\ H & \hookrightarrow & G \end{array}$$

из последњих две линија апсебре

Δ : $\exists$ база $(d_1, d_2, \dots, d_t)$ групе G и природни бројеви $m_1, m_2, \dots, m_s$ ($s \leq t$)

т.г. $n_1, n_2, n_3, \dots, n_s$ и да је $(m_1 d_1, m_2 d_2, \dots, m_s d_s)$ база од H . (линеарно независни)

Пис. $s \leq t \Rightarrow n \cdot d_t \notin H$ ни за једно $n \in \mathbb{N}$ јер $(d_1, d_2, \dots, d_t)$ линеарно независан и то је контрадикција са изабраним условом.

$$\rightarrow s = t.$$

Нека је A матрица ендоморфизма $f: G \rightarrow G$ у односу на $(d_1, \dots, d_t)$

Нека је B матрица ендоморфизма $f: H \rightarrow H$ у односу на $(m_1 d_1, \dots, m_t d_t)$

$$\begin{aligned}
 1 \leq k \leq t: & \quad \overset{h}{\downarrow} \quad f(m_k d_k) = m_k \cdot f(d_k) = m_k \cdot \overset{\text{прело } A}{\downarrow} \sum_{j=1}^t a_{jk} d_j = \sum_{j=1}^t m_k \cdot a_{jk} d_j \\
 & \quad f(m_k d_k) = \sum_{j=1}^t b_{jk} m_j d_j \\
 & \quad \uparrow \quad \quad \quad \uparrow \\
 & \quad h \quad \quad \quad \text{прело } B \\
 \text{м.к. рез.} & \quad \downarrow \\
 & \Rightarrow m_j \equiv m_k \cdot a_{jk} \text{ за } k \in \{1, \dots, t\} \\
 j=k & \Rightarrow m_j \cdot a_{jj} = m_j b_{jj} \Rightarrow a_{jj} = b_{jj} \\
 & \quad \uparrow m_j \in \mathbb{N} \Rightarrow m_j \neq 0.
 \end{aligned}$$

□

⑤ Нека је $0 \rightarrow G' \xrightarrow{i} G \xrightarrow{j} G'' \rightarrow 0$ КТН коначно генерисаних Аб. група.

Ако су f', f и f'' хомоморфизми м.г. концигура

$$0 \rightarrow G' \xrightarrow{i} G \xrightarrow{j} G'' \rightarrow 0$$

$$\begin{array}{ccccc}
 f' \downarrow & G & f \downarrow & G & f'' \downarrow \\
 0 \rightarrow & G' & \xrightarrow{i} & G & \xrightarrow{j} G'' \rightarrow 0
 \end{array}$$

$$\text{онда је } \text{tr } f = \text{tr } f' + \text{tr } f''.$$

Δ: Γ_1^0 нека су G', G и G'' слободне

нека је $(d'_1, \dots, d'_n)$ нека база за G' и нека је A матрица за f' у односу на $(d'_1, \dots, d'_n)$

нека је $(\beta''_1, \dots, \beta''_m)$ нека база за G'' и нека је B матрица за f'' у односу на $(\beta''_1, \dots, \beta''_m)$

$$1 \leq k \leq n: d_k := i(d'_k)$$

$$1 \leq l \leq m: \beta_l \in G \text{ м.г. } j(\beta_l) = \beta''_l \text{ (} j \text{ је „на“ из ланчности)}$$

$(d_1, \dots, d_n, \beta_1, \dots, \beta_m)$ је база за G .

$$\text{генератори: } g \in G \Rightarrow j(g) = \lambda_1 \beta''_1 + \dots + \lambda_m \beta''_m, \lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{Z}$$

$$j(g - \lambda_1 \beta_1 - \dots - \lambda_m \beta_m) = 0 \Rightarrow g - \lambda_1 \beta_1 - \dots - \lambda_m \beta_m \in \ker j = \text{im } i$$

$$g - \lambda_1 \beta_1 - \dots - \lambda_m \beta_m = i(\mu_1 d'_1 + \dots + \mu_n d'_n)$$

$$g = \mu_1 d_1 + \dots + \mu_n d_n + \lambda_1 \beta_1 + \dots + \lambda_m \beta_m$$

$$\text{м.к. рез.} \quad \sum_{k=1}^n \mu_k d_k + \sum_{l=1}^m \lambda_l \beta_l = 0 \text{ некаки } \alpha_j \text{ и } g \text{ одједна су } G''$$

$$\Rightarrow \sum_{l=1}^m \lambda_l \beta_l = 0 \quad \downarrow \text{деја} \quad \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_m = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^n \mu_k d_k = 0$$

$$i\left(\sum_{k=1}^n \mu_k d'_k\right) = 0 \text{ и } i \text{ је „1-1“} \Rightarrow \sum_{k=1}^n \mu_k d'_k = 0 \Rightarrow \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_n = 0$$

$$1 \leq k \leq n \quad \underline{f(\alpha_k)} = f(i(\alpha_k)) = i(f'(\alpha_k)) = i\left(\sum_{l=1}^n a_{lk} \cdot \alpha_l\right) = \sum_{l=1}^n a_{lk} \cdot \alpha_l$$

$$1 \leq l \leq m \quad j(f(\beta_l)) = f''(\beta_l) = \sum_{k=1}^m b_{kl} \beta_k \Rightarrow f(\beta_l) - \sum_{k=1}^m b_{kl} \beta_k \in \ker j = \text{im } i$$

$$S = \begin{bmatrix} A & \lambda_{\nu, k} \\ 0 & B \end{bmatrix} \Rightarrow \text{tr } f = \text{tr } S = \text{tr } A + \text{tr } B = \text{tr } f' + \text{tr } f''$$

$$\underline{f(\beta_l)} = \sum_{k=1}^m b_{kl} \cdot \beta_k + i\left(\sum_{\nu=1}^n \lambda_{\nu, l} \cdot \alpha_\nu\right) = \sum_{\nu=1}^n (\lambda_{\nu, l} \cdot \alpha_\nu) + \sum_{k=1}^m b_{kl} \cdot \beta_k$$

2) общий случай

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \rightarrow G'/T' & \xrightarrow{\bar{i}'} & G'/T & \xrightarrow{\bar{j}} & G''/T'' \rightarrow 0 \\ & \downarrow \bar{f}' & \downarrow \bar{f} & \downarrow \bar{f}'' & \\ 0 \rightarrow G'/T' & \rightarrow & G'/T & \xrightarrow{\bar{j}} & G''/T'' \rightarrow 0 \end{array}$$

Проверка последовательности:

$$\bar{i} \text{ "1-1": } \bar{i}(g'+T') = 0 \text{ в } G'/T$$

$$\begin{array}{c} \text{ } \\ \text{ } \end{array} (g') + T' \Rightarrow i(g') \in T \Rightarrow (\exists n \in \mathbb{N}) \quad n \cdot i(g') = 0$$

$$i(n \cdot g')$$

$$j \text{ "0": } \rightarrow n \cdot g' = 0 \Rightarrow g' \in T', \text{ т.е. } g' + T' = 0 \text{ в } G'/T'$$

$$\bar{j} \text{ "0": } g'' + T'' = j(g) + T'' = \bar{j}(g + T)$$

$$\bar{j} \circ \bar{i} = \bar{j} \circ i = 0$$

$$\uparrow \text{ из доказательства } \Rightarrow \text{im } \bar{i} \subseteq \ker \bar{j}$$

$$\underline{g + T \in \ker \bar{j}} \Rightarrow \underline{\bar{j}(g + T) = 0} \text{ в } G''/T''$$

$$j(g) + T'' \Rightarrow j(g) \in T'' \Rightarrow (\exists n \in \mathbb{N}) \quad n \cdot j(g) = 0 \text{ в } G''$$

$$j(ng) = 0$$

$$\Rightarrow (\exists n \in \mathbb{N}) \quad n \cdot g \in \ker j = \text{im } i$$

$$\Rightarrow (\exists n \in \mathbb{N}) (\exists g' \in G') \quad n \cdot g = i(g')$$

$$\Rightarrow (\exists n \in \mathbb{N}) (\exists g' \in G') \quad n \cdot (g + T) = n \cdot g + T = i(g') + T = \bar{i}(g' + T')$$

$$\Rightarrow (\exists n \in \mathbb{N}) \quad n(g + T) \in \text{im } \bar{i} \quad (\text{напомним условие } \mathbb{D}_3)$$

овде важи из (2) и да је јачи

$$0 \rightarrow \ker \bar{f} \xrightarrow{\bar{f}_0} \mathfrak{h}'/\mathfrak{T} \xrightarrow{\bar{f}} \mathfrak{h}''/\mathfrak{T}'' \rightarrow 0$$

$$\begin{array}{ccccccc} & \downarrow \bar{f}_0 & \hookrightarrow & \downarrow \bar{f} & \hookrightarrow & \downarrow \bar{f}'' \\ 0 & \rightarrow & \ker \bar{f} & \xrightarrow{\bar{f}_0} & \mathfrak{h}'/\mathfrak{T} & \xrightarrow{\bar{f}} & \mathfrak{h}''/\mathfrak{T}'' \rightarrow 0 \end{array}$$

$$\text{tr } \bar{f} = \text{tr } \bar{f}_0 + \text{tr } \bar{f}'' = \text{tr } \bar{f}_0 + \text{tr } \bar{f}''$$

$$\mathfrak{h}'/\mathfrak{T}' \xrightarrow{\bar{f}_0} \text{im } \bar{f}_0 \xrightarrow{\bar{f}_1} \ker \bar{f}$$

$$\bar{f}' \downarrow \hookrightarrow \mathfrak{h}'/\mathfrak{T}' \xrightarrow{\bar{f}_0} \text{im } \bar{f}_0 \xrightarrow{\bar{f}_1} \ker \bar{f}$$

$$\mathfrak{h}'/\mathfrak{T}' \xrightarrow{\bar{f}_0} \text{im } \bar{f}_0 \xrightarrow{\bar{f}_1} \ker \bar{f}$$

овде $\bar{f}_1$ постоји и комутира због (1).

$\oplus_3$

$\oplus_2$

$$\Rightarrow \text{tr } \bar{f}_0 = \text{tr } \bar{f}_1 = \text{tr } \bar{f} = \text{tr } \bar{f}'$$

□

Ⓛ Нека је $\mathcal{C}$ ланчанити комплекс абелових група. $\mathcal{C}: \dots \rightarrow \mathcal{C}_n \xrightarrow{d_n} \mathcal{C}_{n-1} \rightarrow \dots$

$\mathcal{C}$ је коначно генерисан ако је $\bigoplus_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{C}_n$ коначно генерисана група.

($\Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{Z}) \mathcal{C}_n$ је коначно генерисан и $\mathcal{C}_n = 0$ за све сам коначно много $n \in \mathbb{Z}$)

Ⓛ (Хойфова формула о трагу) Нека је $\mathcal{C}$ коначно генерисан ланчанити комплекс

$$\text{и } \phi: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C} \text{ ланчанито } \Rightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \text{tr}(\phi, \mathcal{C}_n) = (-1)^n \text{tr}(\phi_*, H_n(\mathcal{C}))$$

$$\mathcal{C}: \dots \rightarrow \mathcal{C}_n \rightarrow \mathcal{C}_{n-1} \rightarrow \dots$$

$$\begin{array}{ccccccc} \phi & \downarrow & \hookrightarrow & \downarrow \phi & \hookrightarrow & \downarrow \phi \\ \dots & \rightarrow & \mathcal{C}_n & \rightarrow & \mathcal{C}_{n-1} & \rightarrow & \dots \end{array}$$

$$\Delta: 0 \rightarrow \mathbb{Z}_n \hookrightarrow \mathcal{C}_n \xrightarrow{\tilde{d}} \mathcal{B}_{n-1} \rightarrow 0 \quad (\mathbb{Z}_n, \mathcal{B}_n \text{ из дефиниције } H_n, \tilde{d} \text{ рестриција од } d)$$

$$\begin{array}{ccccccc} \phi & \downarrow & \hookrightarrow & \downarrow \phi & \hookrightarrow & \downarrow \phi \\ 0 & \rightarrow & \mathbb{Z}_n & \hookrightarrow & \mathcal{C}_n & \xrightarrow{\tilde{d}} & \mathcal{B}_{n-1} \rightarrow 0 \end{array}$$

$$\text{tr}(\phi, \mathcal{C}_n) = \text{tr}(\phi, \mathbb{Z}_n) + \text{tr}(\phi, \mathcal{B}_{n-1})$$

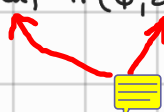
$$0 \rightarrow \mathcal{B}_n \hookrightarrow \mathbb{Z}_n \rightarrow H_n(\mathcal{C}) \rightarrow 0$$

$$z \mapsto [z]$$

$$\begin{array}{ccccccc} \phi & \downarrow & \hookrightarrow & \downarrow \phi & \hookrightarrow & \downarrow \phi_* \\ 0 & \rightarrow & \mathcal{B}_n & \hookrightarrow & \mathbb{Z}_n & \rightarrow & H_n(\mathcal{C}) \rightarrow 0 \end{array}$$

$$\downarrow \\ [\phi z]$$

$$\text{tr}(\phi, \mathcal{C}_n) = \text{tr}(\phi, \mathbb{Z}_n) + \text{tr}(\phi_*, H_n(\mathcal{C}))$$



$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n \operatorname{tr}(\phi, \omega_n) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n \operatorname{tr}(\phi, B_n) + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n \operatorname{tr}(\phi_*, H_n(\mathcal{C})) + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \operatorname{tr}(\phi, B_{n-1})$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n \operatorname{tr}(\phi_*, H_n(\mathcal{C})).$$

□

Ⓢ (Ујер-Твенкарева формула): $\mathcal{C}$ коначно генерисан комплексни комплекс.

$$\Rightarrow \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n \operatorname{rang} C_n = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n \operatorname{rang} H_n(\mathcal{C})$$

$\underbrace{\quad}_{=: \chi(\mathcal{C})}$ се назива Ујерова карактеристика комплексног комплекса $\mathcal{C}$.

$$\Delta: \phi := 1\mathcal{C}$$

□

Ујерова карактеристика

X коначан (компактан) ω -комплекс

$n \in \mathbb{N}_0$ и b_n је број n -тежија у X .

$$\chi(X) = b_0 - b_1 + b_2 - b_3 + \dots = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n b_n$$

$$\mathcal{C}^\omega(X): \dots \rightarrow C_{n+1}^\omega(X) \xrightarrow{d_{n+1}} C_n^\omega(X) \xrightarrow{d_n} C_{n-1}^\omega(X) \xrightarrow{d_{n-1}} \dots$$

$$C_n^\omega(X) \cong \mathbb{Z}^{b_n}$$

$$\chi(X) = \chi(\mathcal{C}^\omega(X)) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \operatorname{rang} H_n^\omega(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \operatorname{rang} H_n(X)$$

Ⓢ Нека је X тополошки простор и.д. су де хомолошке групе коначно-генерисане

и $H_n(X) \rightarrow 0$ за де сел коначно много n ($\bigoplus_{n=0}^{+\infty} H_n$ је коначно генерисана)

$$\chi(X) := \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \operatorname{rang} H_n(X).$$

□

$$X \cong Y \Rightarrow \chi(X) = \chi(Y)$$

Ⓢ $\operatorname{rang} H_n(X) =: \beta_n$ и називамо за n -ти Беттијев број простора X .

$$(\chi(X) = \beta_0 - \beta_1 + \beta_2 - \beta_3 + \dots + \dots)$$

Пример: 1) $X \simeq * \Rightarrow \chi(X) = 1$

$$2) \chi(S^n) = \begin{cases} 0, & n \text{ нечетно} \\ 2, & n \text{ четно} \end{cases}$$

$$\Gamma \quad S^n = e^0 \cup e^n \Rightarrow \chi(S^n) = 1 + (-1)^n$$

$$S^n = a_0 \cup b_0 \cup a_1 \cup b_1 \cup \dots \cup a_n \cup b_n = 2 - 2 + 2 - 2 + \dots$$

$$3) \chi(M_g) = \beta_0 - \beta_1 + \beta_2 = 1 - 2g + 1 = 2 - 2g$$

$$4) \chi(N_h) = 1 - h + 1 = 2 - h$$

$$" \quad \beta_0 - \beta_1 + \beta_2 = 1 - (h-1) + 0 = 2 - h$$

$$5) \chi(\mathbb{R}P^n) = \begin{cases} 0, & n \text{ нечетно} \\ 1, & n \text{ четно} \end{cases}$$

$$\beta_0 = 1, \beta_n = \begin{cases} 1, & n \text{ нечетно} \\ 0, & n \text{ четно} \end{cases}$$

$$6) \chi(\mathbb{C}P^n) = n+1$$

$$\mathbb{C}P^n = e^0 \cup e^2 \cup e^4 \cup \dots \cup e^{2n}$$

30

① X и W -комплекс с факсимилем $\text{ketja} \{e^n \mid n \in \mathbb{N}_0, d \in A_n\}$ и факсимилем характеристичной функции $\{\Phi_d^n: D^n \rightarrow X \mid n \in \mathbb{N}_0, d \in A_n\}$.

Ако је $p: Y \rightarrow X$ накривање, онда је Y W -комплекс с факсимилем характеристичних функција $\{\tilde{\Phi}_{d,\beta}^n \mid n \in \mathbb{N}_0, d \in A_n, \beta \in B_d^n\}$

с тим што су индексирани пистови накривања над $\text{ketja} \{e^n\}$.

$n \in \mathbb{N}_0, d \in A_n$

$$\begin{array}{ccc} & \tilde{\Phi}_{d,\beta}^n & \rightarrow Y \\ & \swarrow & \downarrow p \\ D^n & \xrightarrow{\Phi_d^n} & X \end{array} \quad \tilde{\Phi}_{d,\beta}^n = \Phi_{d,\beta}^n(\tilde{D}^n)$$

показно лачито повезан и лачито повезан и лачито повезан

Δ : дес доказ

□

Γ

$$S^n \leftarrow a_n, b_n$$

↓

$$\mathbb{R}P^n \leftarrow e^n$$

↓

① χ конечно $\mathcal{W}$ -комплекс и $p: Y \rightarrow X$ m -листно накрытие.

$\Rightarrow Y$ имеет структуру конечно $\mathcal{W}$ -комплекса и имеет $\mathcal{O}$ -группу характеристичности и числа $\chi(Y) = m \cdot \chi(X)$.

Δ : $h \in H_0$, b_n - $\mathcal{O}$ -группа n -клетки у $X \Rightarrow m \cdot b_n$ - $\mathcal{O}$ -группа n -клетки у $Y \Rightarrow$

$$\chi(Y) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot m \cdot b_n = m \cdot \chi(X).$$

□

Пример: 1) $\chi(S^n) = 2 \cdot \chi(\mathbb{R}P^n) \leftarrow$ знание о $\mathcal{O}$ -группе

2) (a) $g, h \in H_0$ а $m \in \mathbb{N}$: $g-1 = m(h-1) \Leftrightarrow \exists$ m -листное накрытие $M_g \rightarrow M_h$

(б) $g, h, m \in \mathbb{N}$: $g-2 = m(h-2) \Leftrightarrow \exists$ m — $||$ — $M_g \rightarrow M_h$

(в) $g \in H_0$, $h, m \in \mathbb{N}$: $g-1 = m(h-2) \Leftrightarrow \exists$ $(2m)$ -листное накрытие $M_g \rightarrow M_h$.

курно: $\exists$ заданное из топологии $\mathcal{O}$, а курно: следы из топологии:

$$m \cdot \chi(M_h) = \chi(M_g)$$

$$m \cdot (2 - h) = 2 - 2g \quad / : (-2)$$

$$m \cdot (h-2) = g-1$$

□

② (X, A) топологический пар $\mathcal{O}$ -г. $H_n(X, A)$ $\mathcal{O}$ -комплексно эквивалентна $\mathcal{O}$ -группе $\mathcal{O}$ для $n \in \mathbb{N}_0$ и

$H_n(X, A) = 0$ для всех n с $\mathcal{O}$ -комплексно эквивалентно $(\bigoplus_{n=0}^{+\infty} H_n(X, A))$ $\mathcal{O}$ -комплексно эквивалентно

$\chi(H, A) := \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot \text{rang } H_n(X, A)$ $\mathcal{O}$ -группа характеристичности пара (X, A) .

n -бесконечная $\mathcal{O}$ -группа $b_n(X, A)$ пара (X, A)

IV СИМПЛИЦИЈАЛНА ХОМОЛОГИЈА

Симплицијални комплекси

$\mathbb{R}^N$ $\exists v_0, v_1, \dots, v_n$ аритно-независне тачке

n -симплекс: $\sigma = v_0 v_1 \dots v_n := \text{conv} \{v_0, v_1, \dots, v_n\} = \left\{ \sum_{i=0}^n t_i \cdot v_i \mid \sum_{i=0}^n t_i = 1, t_i \geq 0 \text{ за све } i = \overline{0, n} \right\} \subseteq \mathbb{R}^N$

$\text{int } \sigma := \left\{ \sum_{i=0}^n t_i \cdot v_i \mid \sum_{i=0}^n t_i = 1, t_i > 0 \text{ за све } i = \overline{0, n} \right\}$

$\hat{\sigma} := \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n v_i \in \sigma \leftarrow$ центар симплекса σ .

$0 \leq i_0 < i_1 < \dots < i_k \leq n$ $v_{i_0} v_{i_1} \dots v_{i_k} \subseteq \sigma$ је k -страна симплекса σ ако је тачкоје k -симплекс

⑤ Симплицијални комплекси у $\mathbb{R}^N$ јављају се k симплекси у $\mathbb{R}^N$ т.д.

(1) $\forall k, \tau \subseteq \sigma \Rightarrow \tau \in K$

(2) $\sigma, \tau \in K \Rightarrow (\sigma \cap \tau = \emptyset) \vee (\sigma \cap \tau \subseteq \sigma \wedge \sigma \cap \tau \in K)$



Нека је K коначан симплицијални комплекс.

$|K| := \bigcup_{\sigma \in K} \sigma \subseteq \mathbb{R}^N \leftarrow$ приметимо да је компактн.

$\uparrow$ топологија (тополошка) симплицијалног комплекса K .

$|K| = \bigcup_{\sigma \in K} \text{int } \sigma$
 $\uparrow$ као унија

⑤ На $|K|$ постоји $\mathcal{W}$ -структура т.д. су тачке $\text{int } \sigma, \sigma \in K$.

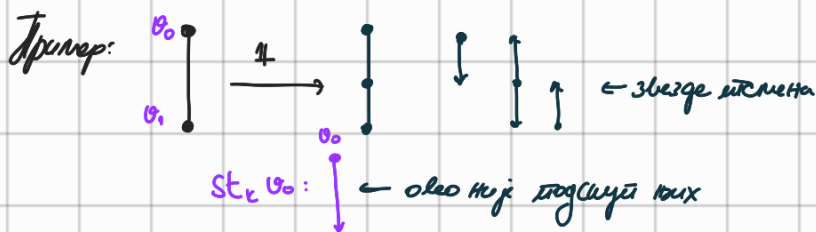
$\text{neHo}: K^{(n)} := \{ \sigma \in K \mid \dim \sigma = n \}$ $\dim \sigma$ је димензија σ .

$\uparrow$ ово називамо n -својим симплицијалног комплекса K .

$|K^{(n)}| = |K|^{(n)} \leftarrow n$ -својим $\mathcal{W}$ -комплекс $|K|$

$\uparrow$ топологија n -својима.

$\dim K := \max \{ \dim \sigma \mid \sigma \in K \} = \min \{ n \in \mathbb{N}_0 \mid K = K^{(n)} \}$



Симплицијална хомологија

⊙ K (конечан) симплицијални комплекс. $(K, \leq)$ називамо уређен симплицијални комплекс ако је $\leq$ линеарно уређење скупа $K^{(0)}$.

$v_0, v_1, \dots, v_n \in K$, $v_0 < v_1 < \dots < v_n$, $[v_0, v_1, \dots, v_n]$ уређен n -симплекс у $(K, \leq)$

$\mathcal{S}$ -категорија чији су објекти уређени симплицијални комплекси,
морфизми су симплицијални пресликавања $f: K \rightarrow L$ и.г.
 $(\forall v, w \in K^{(0)}) v \leq w \rightarrow f(v) \leq f(w)$.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S} & \xrightarrow{\mathcal{C}^{\mathcal{S}}} & \mathcal{C} \text{ ab} \\ & \searrow \downarrow H_n & \\ H_n^{\mathcal{S}} & & \mathcal{C} \text{ ab} \end{array}$$

K уређен симплицијални комплекс

$$\mathcal{C}^{\mathcal{S}}(K): \dots \rightarrow C_n^{\mathcal{S}}(K) \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n^{\mathcal{S}}(K) \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1}^{\mathcal{S}}(K) \xrightarrow{\partial_{n-1}} \dots \xrightarrow{\partial_1} C_0^{\mathcal{S}}(K) \rightarrow \dots \rightarrow 0 \rightarrow 0$$

$n \in \mathbb{N}_0: C_n^{\mathcal{S}}(K) := \bigoplus_{\substack{b \in K \\ \dim b = n}} \mathbb{Z} \langle [b] \rangle$

↑ ова заграда $[\cdot]$ означава уређење.

$$\partial_n [v_0, v_1, \dots, v_n] := \sum_{i=0}^n (-1)^i [v_0, v_1, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]$$

← ово је или кауза нема

$$\partial_2 [v_0, v_1, v_2] := [v_1, v_2] - [v_0, v_2] + [v_0, v_1]$$

$\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$ ← изгледа као за сингуларно.

$H_n^{\mathcal{S}}(K) := H_n(\mathcal{C}^{\mathcal{S}}(K))$ ← n -та симплицијална хомолошка група симплицијалног комплекса K .

$f: K \rightarrow L$ морфизам у $\mathcal{S}$

$$f_{\#}^{\mathcal{S}}: \mathcal{C}^{\mathcal{S}}(K) \rightarrow \mathcal{C}^{\mathcal{S}}(L)$$

$$n \in \mathbb{N}: f_{\#}^{\mathcal{S}}: C_n^{\mathcal{S}}(K) \rightarrow C_n^{\mathcal{S}}(L) \quad \text{td.} \quad f_{\#}^{\mathcal{S}}([v_0, \dots, v_n]) := \begin{cases} [f(v_0), \dots, f(v_n)] & \text{ако су } f(v_i) \text{ сви различити} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

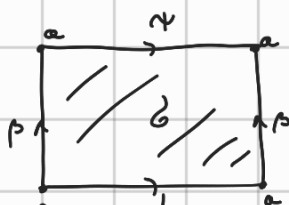
↑ јер овде не добијемо n -симплекс

$$f_{*}^{\mathcal{S}} := (f_{\#}^{\mathcal{S}})_{*}: H_n^{\mathcal{S}}(K) \rightarrow H_n^{\mathcal{S}}(L)$$

① $\text{netto: } S \xrightarrow{H_n^S} \text{Ab}$
 $S \longrightarrow \text{Top} \xrightarrow{H_n} \text{Ab}$
 $K \longmapsto |K|$
 $f \longmapsto f_* \leftarrow \text{задовољим се сам да је неутрално.}$

ово је природно еквивалентно
 функтори

$H_n^S(K) \xrightarrow{\Sigma_K} H_n(K)$ $f: K \rightarrow L$ морфизам у S
 $f_*^S \downarrow \quad \quad \downarrow f_*$
 $H_n^S(L) \xrightarrow{\Sigma_L} H_n(L)$ $\leftarrow$ природна еквивалентност функтора.



$\cdots \rightarrow 0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0 \rightarrow \cdots$
 кајмова матрица+генерација интервала или 10 интервала

Пермечова теорема о функцији Лича

② X тополошки простор ил. $\bigoplus_{n=0}^{\infty} H_n(X)$ кохетно генерирана.

$f: X \rightarrow X$ континуирано

Пермечова ф-ја пресликавања f је $L(f) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \text{tr}(f_*, H_n(X))$.

③ $f \circ g \Rightarrow L(f) = L(g)$

Пример: 1) $L(1_X) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \underbrace{\text{tr}(1_{H_n(X)}, H_n(X))}_{\text{rank } H_n(X)} = \chi(X)$.

2) X акуклиотан ($H_n(X) = 0$ за све n) (нпр. $X \simeq *$) / теорема од раније за $H_0(X)$

$f: X \rightarrow X$ континуирано, $L(f) = \text{tr}(f_*, H_0(X)) = \text{tr } 1_{H_0(X)} = 1$.

① (Песчецова теорема): K компакт эммитирующий компакт (в $\mathbb{R}^N$)

$f: |K| \rightarrow |K|$ непрерывно. $L(f) \neq 0 \Rightarrow f$ имеет фиксированную точку.

Δ : f имеет фиксированную точку.

$(\forall x \in |K|) \|f(x) - x\| > 0$ ← норма в $\mathbb{R}^N$ евклидова.

" $c(x)$ достигнет своего минимума" поскольку $c: |K| \rightarrow \mathbb{R}$ и $|K|$ — компактен

$$\Rightarrow (\exists \delta := \min_{x \in |K|} c(x) > 0)$$

$$\mu(sd^r K) \rightarrow 0 \leftarrow \text{значит } r \rightarrow \infty$$

$$\Rightarrow (\exists m \in \mathbb{N}) \text{ т.ч. } \mu(sd^m K) < \frac{\delta}{2}$$

$$\Rightarrow (\forall x \in |K|) \|f(x) - x\| \geq \delta > 2\mu(sd^m K)$$

$f: |sd^m K| \rightarrow |sd^m K|$ ① эммитирующий аппроксимация

$\Rightarrow \exists r > m$ и эммитирующая аппроксимация $g: sd^r K \rightarrow sd^m K$

$(\forall x \in |K|) \|f(x) - g(x)\| \leq \mu(sd^m K)$ где g — эммитирующая аппроксимация в $sd^m K$.

$$2\mu(sd^m K) < \|f(x) - x\| \leq \|f(x) - g(x)\| + \|g(x) - x\| \leq \mu(sd^m K) + \|g(x) - x\|$$

$$\Rightarrow \mu(sd^m K) < \|g(x) - x\| \text{ за любым } x \in X.$$

$$\mu(sd^r K) \text{ т.ч. } (\forall x \in X) \|g(x) - x\| > \mu(sd^r K).$$

$$\Rightarrow (\forall \delta \in sd^r K) \delta \cap g(\delta) = \emptyset \quad (*)$$

$g: |sd^r K| \rightarrow |sd^r K|$ (здесь же нужно быть эммитирующей, а не только только)

X — (W) -компакт и g — W -компакт, $g \in sd^r K$

$$(*) : \text{rel } H_0 : g(|(sd^r K)^{(n)}|) \subseteq |(sd^r K)^{(n)}| \subseteq |(sd^r K)^{(n)}|$$

$$g_{\#}^w : C^w(X) \rightarrow C^w(X) \text{ имеет смысл}$$

$$C_n^w(X) = \bigoplus_{\substack{b \in sd^r K \\ \dim b = n}} \mathbb{Z} \langle e_b^w \rangle, \quad g_{\#}^w : C_n^w(X) \rightarrow C_n^w(X)$$

$$e_b^w : g_{\#}^w(e_b^w) = \lambda_b e_b^w + \dots \quad \text{оно нам не нужно за собой}$$

$$\deg(\tilde{g}_b \circ \tilde{g} \circ i_b) = 0 \text{ где } \tilde{g}_b \circ \tilde{g} \circ i_b = \text{const. } \text{здесь } \oplus$$

$$\begin{array}{ccccccc} D^n & \xrightarrow{\Phi_b^w} & X^{(n)} & \xrightarrow{g} & X^{(n)} & & \\ \downarrow i & \hookrightarrow & \downarrow q_n & \hookrightarrow & \downarrow q_n & \searrow q_b & \\ S^n & \xrightarrow{i_b} & X^{(n)}/X^{(n-1)} & \xrightarrow{g} & X^{(n)}/X^{(n-1)} & \xrightarrow{\tilde{g}_b} & S^n \end{array}$$

$\Rightarrow \text{tr } g_{\#}^w(C_n^w(X)) = \sum_{\substack{b \in sd^r K \\ \dim b = n}} \lambda_b = 0$

↓ јер симплицијална алгебра

$$f \sim g \Rightarrow L(f) = L(g) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \operatorname{tr}(g_*, H_n(X))$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \operatorname{tr}(g_*^\omega, H_n^\omega(X))$$

којска формула оштроту на $C^\omega(X) \xrightarrow{g_*^\omega} C^\omega(X)$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \operatorname{tr}(g_*^\omega, H_n^\omega(X)) = 0 \quad (\text{контрактилизација})$$

□

33

Ⓟ K коначан симплицијални комплекс, X реалити $|K|$.

$f: X \rightarrow X$ непрекинуто $L(f) \neq 0 \Rightarrow f$ има ФТ.

Δ: $|K| \xrightarrow{f} |K|$

$i: X \rightarrow |K|$ $r: |K| \rightarrow X$ $f_X: X \rightarrow X$

$n \in \mathbb{N}_0$ $H_n(|K|) \xleftarrow{r_*} H_n(X) \xrightarrow{f_*} H_n(X)$

ако је ово коначно генерисан
можемо проверити
оној услов за $\oplus H_n$

$|K| \xrightarrow{\tilde{f}} |K|$

$r: |K| \rightarrow X$ $i: X \rightarrow |K|$ $f: X \rightarrow X$

$H_n(|K|) \xrightarrow{\tilde{f}_*} H_n(|K|)$

$r_*: H_n(|K|) \rightarrow H_n(X)$ $f_*: H_n(X) \rightarrow H_n(X)$ $i_*: H_n(X) \rightarrow H_n(|K|)$

$\operatorname{tr} \tilde{f}_* = \operatorname{tr}(i_* \circ f_* \circ r_*) = \operatorname{tr}(f_* \circ r_* \circ i_*) = \operatorname{tr}(f_*)$

← пре 2. теореме

$$L(\tilde{f}) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \operatorname{tr}(\tilde{f}_*, H_n(|K|))$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \operatorname{tr}(f_*, H_n(|K|)) = L(f) \neq 0$$

Ⓟ $\tilde{f}$ има фиксну тачку $\Rightarrow \exists y_0 \in |K| \tilde{f}(y_0) = y_0$

$i(f(r(y_0))) = y_0 \in \operatorname{im} i = X$

$\Rightarrow f(r(y_0)) = y_0$

y_0 је $y_0 \in X$

□

Ⓐ (Неформална) Простор X је фин (Nice space) ако је многоликуити (са или без границе) или има структуру $\mathcal{W}$ комплекса.

ⓐ Ако је X компактан, фин простор $\Rightarrow X$ се може уградити у $\mathbb{R}^N$ за неки $N \in \mathbb{N}$ т.е. буде реалним $|K|$ за неки коначан имитирујући комплекс K у $\mathbb{R}^N$.

ⓑ (Дефиниција о фиксној тачки, оптимална верзија) X компактан, фин простор $f: X \rightarrow X$ непрестанно, $L(f) \neq 0 \Rightarrow f$ има фиксну тачку.

Пример контрапримера без компактности: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $L(f) \overset{\text{увек ванни}}{=} 1$, $f(x) = x+1 \leftarrow$ нема ФТ.

Ⓒ X аукомпактан, компактан и фин $\Rightarrow$ има СФТ.

Пример: Да ли $\mathbb{R}P^n$ има СФТ?

$$n\text{-парно: } H_i(\mathbb{R}P^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & i=0 \\ \mathbb{Z}_2, & i \text{ парно, } 0 < i < n \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$f: \mathbb{R}P^n \rightarrow \mathbb{R}P^n, L(f) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \text{tr}(f_*, H_i(x)) \overset{\text{јединица само у димензији 0}}{=} 1$$

$$n=0 \quad \mathbb{R}P^0 = * \quad \checkmark$$

$$n \text{ непарно: } S^u \xrightarrow{f} S^u \quad n=2k-1$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow f & & \downarrow f \\ \mathbb{R}P^n & \xrightarrow{\tilde{f}} & \mathbb{R}P^n \end{array} \quad \tilde{f}(x_1, x_2, \dots, x_{2k-1}, x_{2k}) := (-x_2, x_1, \dots, x_{2k-1}, x_{2k})$$

$$\tilde{f}(-x) = -\tilde{f}(x) \rightarrow \text{допе индукује добро дефинисано}$$

пресликавање има својства количних.

$$\tilde{f} \text{ нема ФТ } \checkmark$$

$\mathbb{R}P^n$ има СФТ ако и само ако је n парно.

⑨ X компактна, лугитно поделена, флота, нестривујална тополошка група
 $\Rightarrow \chi(X) = 0$.

Δ : $e \in X$ неутрал

$a \in X, a \neq e$

↓ нестривујално

$L_a: X \rightarrow X, L_a(x) = a * x$ и нема фиксну тачку $\Rightarrow L(L_a) = 0$

$H: H \times I \rightarrow X, H(x, t) = w(t) * x, H(a, 0) = w(0) * x = e * x = x = \mathbb{1}_X(x)$

$H(x, 1) = w(1) * x = a * x = L_a(x)$

$H: \mathbb{1}_X \simeq L_a \rightarrow L(L_a) = L(\mathbb{1}_X) = \chi(X)$

□

Пример: 1) S^n тополошка група, $n \geq 1 \Rightarrow n$ нејарно (прито $\chi(S^n)$).

2) $\mathbb{R}P^n$ тополошка група, $n \geq 1 \Rightarrow n$ нејарно ($\chi(S^n) \cdot 2 = \chi(\mathbb{R}P^n)$)

3) $M_g, g \in \mathbb{N}_0$
 $N_h, h \in \mathbb{N}$ тополошка група?

$\chi(M_g) = 2 - 2g, g \neq 1 \Rightarrow M_g$ није тополошка група

$M_1 = T^2 = S^1 \times S^1$ јесте тополошка група

$\chi(N_h) = 2 - h, h \neq 2 \Rightarrow N_h$ није тополошка група

$N_2 = K$ — није тополошка група није чак ни H -група

V ХОМОЛОГИЈА С КОЕФИЦИЈЕНТИМА

Тензорни производ

A, B, C аб. гр., $\psi: A \times B \rightarrow C$ билинеарно, $\psi(a_1 + a_2, b) = \psi(a_1, b) + \psi(a_2, b)$

$$\psi(a, b_1 + b_2) = \psi(a, b_1) + \psi(a, b_2)$$

Само хотело дефиници да дефиницено производ да би билинеарна преопределена била морфизми.

② A, B абелеви групе, $\Gamma(A, B) := \Gamma(A \times B) = \bigoplus_{(a,b) \in A \times B} \mathbb{Z} \langle (a,b) \rangle$

$$\sum_{i=1}^n k_i (a_i, b_i)$$

$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$
 $\mathbb{Z} \quad A \quad B$

$R(A, B) \leq \Gamma(A, B)$ подгрупа генерирана елементима:

$$(a_1 + a_2, b) - (a_1, b) - (a_2, b), \quad a_1, a_2 \in A, b \in B$$

$$(a, b_1 + b_2) - (a, b_1) - (a, b_2), \quad a \in A, b_1, b_2 \in B$$

$A \otimes B := \Gamma(A, B) / R(A, B)$ називомо тензорни производ абелевих група A и B .

$$a \in A, b \in B \quad a \otimes b := [(a, b)] = (a, b) + R(A, B)$$

↑ ово називомо простим тензорима.

$\sum_{i=1}^n k_i \cdot (a_i \otimes b_i)$ типичан елемент $A \otimes B$, тј. прости тензори су генерирачки, они не мора бити база

↓ $A \otimes B$

$$\begin{aligned} (a_1 + a_2) \otimes b &= a_1 \otimes b + a_2 \otimes b \quad \text{за } a_1, a_2 \in A, b \in B \\ a \otimes (b_1 + b_2) &= a \otimes b_1 + a \otimes b_2 \quad \text{за } a \in A, b_1, b_2 \in B \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{ово су релације које важе}$$

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n) \otimes b = a_1 \otimes b + \dots + a_n \otimes b$$

$$a \otimes (b_1 + \dots + b_n) = a_1 \otimes b + \dots + a_n \otimes b.$$

③ а) $a \otimes 0 = 0, 0 \otimes b = 0$ за $a \in A, b \in B$

б) $(-a) \otimes b = a \otimes (-b) = -a \otimes b$

в) $(ka) \otimes b = a \otimes (kb) = k \cdot a \otimes b$, за $a \in A, b \in B, k \in \mathbb{Z}$.

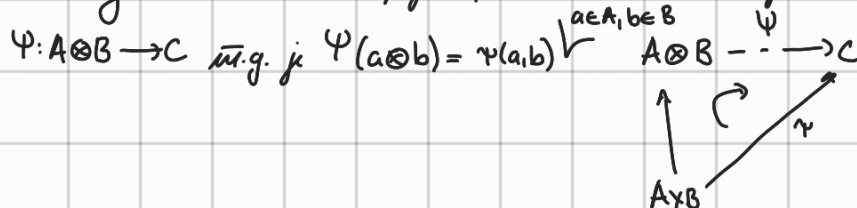
инваријантно.

Пример: $\varphi: A \times B \rightarrow A \otimes B$

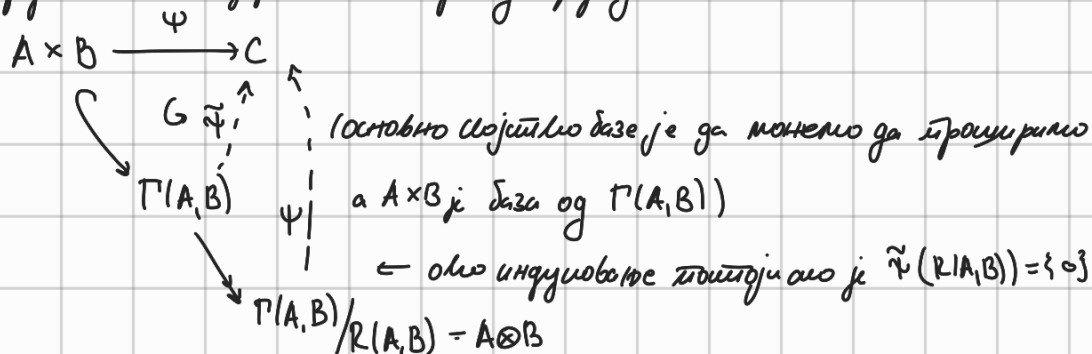
$\varphi(a, b) \mapsto a \otimes b \Rightarrow \varphi$ је билинеарно



⑤ Ако су A, B, C абеле групе, $\psi: A \times B \rightarrow C$ билинеарно $\Rightarrow \exists$ хомоморфизам



Δ : јединствени је $a \otimes b$ истеричу групу.



$$\tilde{\psi}((a_1 + a_2, b) - (a_1, b) - (a_2, b)) = \psi(a_1 + a_2, b) - \psi(a_1, b) - \psi(a_2, b) = 0.$$

$$\tilde{\psi}((a, b_1 + b_2) - (a, b_1) - (a, b_2)) = \dots = 0.$$

□

$$f: A \rightarrow A', g: B \rightarrow B'$$

$$A \otimes B \xrightarrow{f \otimes g} A' \otimes B'$$

$$\varphi \uparrow \quad \quad \quad \psi \uparrow \quad \quad \quad \varphi = \varphi(f \times g) \text{ је билинеарно}$$

$$A \times B \xrightarrow{f \times g} A' \times B' \quad \Rightarrow (\exists, f \otimes g) \text{ хомоморфизам м.г. компута.}$$

⑥ $f \otimes g$ називамо тензорни производ хомоморфизма.

$$(f \otimes g)(a \otimes b) = \psi(a, b) = \varphi(f(a), g(b)) = f(a) \otimes g(b).$$

$$f': A' \rightarrow A'', g': B' \rightarrow B''$$

$$(f' \otimes g') \circ (f \otimes g) = (f' \circ f) \otimes (g' \circ g) \leftarrow \text{није тешко проверити.}$$

В абелева група

$$A \otimes B \xrightarrow{- \otimes B} A \otimes B \leftarrow \text{тензоризација спрема групата } B$$

$$A \mapsto A \otimes B$$

$$f: A \rightarrow A' \mapsto f \otimes 1_B: A \otimes B \rightarrow A' \otimes B$$

$1_A \otimes 1_B = 1_{A \otimes B}$ провери се постојаност на претходни тензорима.

$$(f' \otimes 1_B) \circ (f \otimes 1_B) = (f' \circ f) \otimes 1_B$$

$$A \otimes B \xrightarrow{B \otimes -} A \otimes B \leftarrow \text{тензоризација спрема групата } B$$

⑤ $- \otimes B$ и $B \otimes -$ су природно еквивалентни функтори.

Еквивалентно, $A \otimes B \cong B \otimes A$ за сите Абелеве групе A .

$$\begin{array}{ccc} A & A \otimes B & B \otimes A \\ & \uparrow \Phi_A & \uparrow \Psi_A \\ & A \times B & \end{array}$$

$\varphi_A(a, b) = b \otimes a$ ← тривијално је билинеарно

$$\Phi_A(a \otimes b) = b \otimes a$$

$$\Psi_A(b \otimes a) = a \otimes b \leftarrow \text{општо додијелимо}$$

$$\Phi_A \circ \Psi_A = 1_{B \otimes A} \wedge \Psi_A \circ \Phi_A = 1_{A \otimes B} \rightarrow \Phi_A \text{ је изоморфизам}$$

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & C \\ A \otimes B & \xrightarrow{f \otimes 1_B} & C \otimes B \\ \downarrow \Phi_A & \swarrow & \downarrow \Phi_C \\ B \otimes A & \xrightarrow{1_B \otimes f} & B \otimes C \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} a \otimes b & \mapsto & f(a) \otimes b \\ \downarrow & & \downarrow \\ b \otimes a & \mapsto & b \otimes f(a) \end{array}$$

← како тог се кретамо брже добро.

□

$$A \otimes 0 = 0, 0 \otimes A = 0, a \otimes 0 = 0$$

⑤ Фунитор $\mathbb{Z} \otimes$ — јесте природно савивателан и идентички фунитор.

Δ : A абелова група, $\mathbb{Z} \otimes A \xrightarrow{\Phi_A} A$

$$\begin{array}{ccc} & \xrightarrow{\Phi_A} & A \\ \uparrow \epsilon & \nearrow \Psi_A & \\ \mathbb{Z} \times A & & \end{array} \quad \epsilon_A(k, a) := ka \leftarrow \text{билинеарно}$$

⑤ $\Rightarrow \Phi_A(k \otimes a) = ka$

$$\Psi_A(a) := 1 \otimes a, \quad \Psi_A(a_1 + a_2) = 1 \otimes (a_1 + a_2) = \Psi_A(a_1) + \Psi_A(a_2)$$

$$\Psi_A \circ \Phi_A(k \otimes a) = \Psi_A(ka) = 1 \otimes ka = k \otimes a$$

$$\Phi_A \circ \Psi_A(a) = \Phi_A(1 \otimes a) = a$$

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ \mathbb{Z} \otimes A & \xrightarrow{\mathbb{Z} \otimes f} & \mathbb{Z} \otimes B \\ \downarrow \Phi_A & \searrow G & \downarrow \Psi_B \\ A & \xrightarrow{f} & B \end{array} \quad \begin{array}{ccc} k \otimes a & \xrightarrow{\quad} & k \otimes f(a) \\ \downarrow & & \downarrow \\ k \cdot a & \xrightarrow{\quad} & k \cdot f(a) \end{array}$$

□

⑥ $\mathbb{Z} \otimes A \cong A$ за сваку аб. групу A . □

⑤ A абелова група, $\{B_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ фамилија абелових група.

$$\rightarrow A \otimes \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda \cong \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} A \otimes B_\lambda \quad (\text{природно изоморфно})$$

Δ : слика: $a \otimes \{b_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \mapsto \{a \otimes b_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$

□

$$\mathbb{Z}_n \otimes A \cong ???$$

← ово не важи

$$A \leq B \not\Rightarrow A \otimes C \leq B \otimes C \quad \mathbb{Z} \leq \mathbb{Q}, \quad \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}_2 \cong \mathbb{Z}_2 \neq \mathbb{Q} \otimes \mathbb{Z}_2 \cong 0$$

$$2 \otimes a = (2 \cdot \frac{1}{2} 2) \otimes a = \frac{2}{2} \otimes 2a = 0$$

↓

↑ $\mathbb{Q}$ убија све торзионе.

⑤ $f: A \rightarrow A', g: B \rightarrow B'$ епиморфизми

$\Rightarrow f \otimes g: A \otimes B \rightarrow A' \otimes B'$ је линеарни епиморфизам, а $\ker(f \otimes g)$ је подгрупа $A \otimes B$

генерисани елементима $a \otimes b$ где $a \in \ker f$ или $b \in \ker g$.

Δ : $a' \otimes b', (\exists a, b) f(a) = a', g(b) = b' \rightarrow (f \otimes g)(a \otimes b)$ (погодим смо производе ~~базиса~~)

$$S = \text{ово}, \quad \ker(f \otimes g) \stackrel{?}{=} S$$

$$\geq: a \otimes b \in S \Rightarrow (f \otimes g)(a \otimes b) = f(a) \otimes g(b) = 0 \checkmark$$

$$\begin{array}{ccc} s: A \otimes B & \xrightarrow{f \otimes g} & A' \otimes B' \\ & \searrow \hookrightarrow & \uparrow \phi \\ & A \otimes B / S & \xleftarrow{\psi} \end{array} \leftarrow \text{так что } S \subseteq \ker(f \otimes g)$$

построим ψ гомоморфизм: $\psi \circ \phi = \text{id}_{A \otimes B / S}$ и $\phi \circ \psi = \text{id}_{A' \otimes B'}$

л.л.с. $x \in \ker(f \otimes g) \setminus S$

$$\left. \begin{array}{ccc} x & \xrightarrow{\quad} & 0 \\ & \searrow & \uparrow \text{изоморфизм } \tilde{\gamma} \\ & [x] \neq 0 & \end{array} \right\} \text{одно из } \tilde{\gamma} \text{ и } \psi \text{ бинты.}$$

Конструируем ψ : $A' \otimes B' \xrightarrow{\psi} A \otimes B / S$

$$\begin{array}{ccc} & \uparrow e & \\ & A' \times B' & \xrightarrow{\gamma} A \otimes B / S \end{array} \quad \begin{array}{l} \psi(a', b') := a \otimes b + S, a \in A \text{ т.г. } \gamma \\ f(a) = a' \text{ и } b \in B \text{ т.г. } g(b) = b'. \end{array}$$

Проверим, что γ хорошо определено: $f(\tilde{a}) = f(a) = a'$ и $g(\tilde{b}) = g(b) = b'$

$$a \otimes b - \tilde{a} \otimes \tilde{b} = a \otimes b - \tilde{a} \otimes b + \tilde{a} \otimes b - \tilde{a} \otimes \tilde{b} =$$

$$= \underbrace{(a - \tilde{a}) \otimes b}_{\in \ker f} + \underbrace{\tilde{a} \otimes (b - \tilde{b})}_{\in \ker g} =$$

$\in S$ по определению $\Rightarrow \gamma$ хорошо определено.

γ билинейно: $\gamma(a'_1 + a'_2, b') = (a_1 + a_2) \otimes b + S = (a_1 \otimes b + S) + (a_2 \otimes b + S) = \gamma(a'_1, b') + \gamma(a'_2, b')$

$$f(a_1) = a'_1, \quad f(a_1 + a_2) = a'_1 + a'_2$$

$$f(a_2) = a'_2$$

$$f(b) = b'$$

$\Rightarrow$ так что ψ гомоморфизм до конца.

Проверим: $\psi \circ \phi = \text{id}_{A \otimes B / S}$ и $\phi \circ \psi = \text{id}_{A' \otimes B'}$

$$\psi(\phi(a \otimes b + S)) = \psi(f \otimes g(a \otimes b)) = \psi(f(a) \otimes g(b)) = \gamma(f(a), g(b)) = a \otimes b + S$$

$$\phi(\psi(a' \otimes b')) = \phi(\gamma(a', b')) = \phi(a \otimes b + S) = f(a) \otimes g(b) = a' \otimes b'$$

$$f(a) = a, \quad g(b) = b$$

⑤ f и g мономорфизми $\nRightarrow f \otimes g$ је мономорфизам.

$$\left. \begin{array}{c} \mathbb{Z} \xrightarrow{i} \mathbb{Q} \\ \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{\iota_{\mathbb{Z}_2}} \mathbb{Z}_2 \end{array} \right\} \underbrace{\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}_2}_{\mathbb{Z}_2} \xrightarrow{i \otimes \iota_{\mathbb{Z}_2}} \underbrace{\mathbb{Q} \otimes \mathbb{Z}_2}_0$$

⑤ f и g изоморфизми $\Rightarrow f \otimes g$ изоморфизам

∴ $(f^{-1} \otimes g^{-1}) \circ (f \otimes g) = (f^{-1} \circ f) \otimes (g^{-1} \circ g) = 1 \otimes 1 = 1$ и са друге стране □

⑤ $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{j} C \rightarrow 0$ тачан низ абелових група и G абелова група.
 $\Rightarrow A \otimes G \xrightarrow{f \otimes 1_G} B \otimes G \xrightarrow{j \otimes 1_G} C \otimes G \rightarrow 0$ је тачан низ.

∴ на месту $C \otimes G$ из ситака о епиморфизмима

$$(j \otimes 1_G) \circ (f \otimes 1_G) = 0 \otimes 1_G = 0 \Rightarrow \text{im}(f \otimes 1_G) \subseteq \ker(j \otimes 1_G)$$

$$\ker(j \otimes 1_G) \stackrel{?}{\subseteq} \text{im}(f \otimes 1_G)$$

↑
 генерисано са $b \otimes g$ где $b \in \ker j$ или $g \in \ker 1_G = 0$ овај део генерише само нуле па је довољно да посматрамо само први део

$b \in \text{im } f = \ker j \Rightarrow \ker(j \otimes 1_G)$ генерисано елементима $f(a) \otimes g, a \in A$.

$f(a) \otimes g = (f \otimes 1_G)(a \otimes g) \in \text{im}(f \otimes 1_G) \Rightarrow$ сви јер сви генератори припадају. □

⑤ $A \xrightarrow{F} B$ функтор. F је тачан ако за сваки КТН

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{j} C \rightarrow 0 \text{ важи да је и}$$

$$0 \rightarrow F(A) \xrightarrow{F(i)} F(B) \xrightarrow{F(j)} F(C) \rightarrow 0 \text{ КТН.}$$

F је десно-тачан (right-exact) ако за сваки КТН

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{j} C \rightarrow 0 \text{ важи да је}$$

$$F(A) \xrightarrow{F(i)} F(B) \xrightarrow{F(j)} F(C) \rightarrow 0 \text{ тачан низ.}$$

⑤ $-\otimes G$ је десно тачан функтор.

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{i} \mathbb{Q} \xrightarrow{j} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow \underbrace{\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}_2}_{\mathbb{Z}_2} \xrightarrow{i \otimes \iota_{\mathbb{Z}_2}} \mathbb{Q} \otimes \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{j \otimes \iota_{\mathbb{Z}_2}} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}_2 \rightarrow 0$$

овде није тачан зато од раније.

① $n \in \mathbb{N}$, G абелева група

$$\Rightarrow \mathbb{Z}_n \otimes G \cong G/nG = \ker(G \xrightarrow{n} G) \leftarrow \text{кодрелен пачечен посылу.}$$

$$\Delta: 0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{n} \mathbb{Z} \xrightarrow{f_n} \mathbb{Z}_n \rightarrow 0$$

$$\mathbb{Z} \otimes G \xrightarrow{n \otimes 1_G} \mathbb{Z} \otimes G \xrightarrow{f_n \otimes 1_G} \mathbb{Z}_n \otimes G \rightarrow 0 \text{ је тачан низ по слободу.}$$

$$\begin{array}{ccc} \uparrow \Psi_G & & \uparrow \Psi_G \\ G & \xrightarrow{n} & G \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{из доказе изоморфности} \\ (n \otimes 1_G)(k \otimes g) = nk \otimes g = 1 \otimes ng = (1 \otimes n)(k \otimes g) \end{array}$$

↑ ово комутура из природности.

$$G \xrightarrow{n} G \xrightarrow{(f_n \otimes 1_G) \circ \Psi_G} \mathbb{Z}_n \otimes G \rightarrow 0 \text{ је тачан (заметили смо групе изоморфизма)}$$

$$\Rightarrow \mathbb{Z}_n \otimes G \cong G/nG \quad (nG = \ker(n) = \text{im}(f_n \otimes 1_G) \circ \Psi_G).$$

□

② $\mathbb{Z}_n \otimes -$ и $f: A \rightarrow B, f(h) = h/nh$

$$n \in \mathbb{N}$$

$$\mathbb{Z}_n \otimes G \xrightarrow{1 \otimes f} \mathbb{Z}_n \otimes H$$

$$\uparrow \quad \quad \uparrow$$

$$G/nG \xrightarrow{f} H/nH$$

← ово комутура, тј. природно су евалуирани функцији (пошто градијенти уз комутатор $5 \otimes g = 1 \otimes 5g$ тј. у $\mathbb{Z}_n \otimes G$ су две групе)

③ G коначна абелева група, $f: G \rightarrow G$ хомоморфизам.

$$\Rightarrow |\ker f| = |\ker f|$$

$$\Delta: \text{im } f \cong G/\ker f \Rightarrow |\text{im } f| = \frac{|G|}{|\ker f|}$$

$$|\ker f| = \frac{|G|}{|\text{im } f|} = |G|/|\text{im } f| = |\ker f|.$$

□

④ $m, n \in \mathbb{N} \rightarrow \ker(\mathbb{Z}_m \xrightarrow{n} \mathbb{Z}_m) \cong \ker(\mathbb{Z}_m \xrightarrow{n} \mathbb{Z}_m) \cong \mathbb{Z}_d$

$$\text{где је } d = \text{HЗД}(m, n).$$

Δ: ово може јер су обе циклическе и имају исти број елемената из реме.

$$x \in \mathbb{Z}_m \cdot \{0, \dots, m-1\}, x \in \ker(\mathbb{Z}_m \xrightarrow{n} \mathbb{Z}_m) \Leftrightarrow nx = 0 \text{ у } \mathbb{Z}_m$$

$$\Leftrightarrow m | nx$$

$$\Leftrightarrow k | nx$$

$$\Leftrightarrow k | x \Leftrightarrow x \in \{0, k, \dots, (d-1)k\}$$

□

$$m = k \cdot d, n = l \cdot d \text{ и } \text{HЗД}(k, l) = 1$$

само знамо да су
циклическе са d елементима.

① $m, n \in \mathbb{Z} \Rightarrow \mathbb{Z}_m \otimes \mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}_d$, где $d = \text{HЗД}(m, n)$.

② $\mathbb{Z}^k \otimes \mathbb{Z}^l \cong \mathbb{Z}^{kl}$

$(\underbrace{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}}_k) \otimes (\underbrace{\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}}_l) \cong \mathbb{Z}^{kl}$

③ A свободная абелева группа с базисом $\{e_i | i \in I\}$

B свободная абелева группа с базисом $\{f_j | j \in J\}$

$\Rightarrow (A \otimes B)$ свободная абелева группа с базисом $\{e_i \otimes f_j | i \in I, j \in J\}$ □

④ $0 \rightarrow A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{j} C \rightarrow 0$ КТН.

а) Ано се овај КТН црта онда је за произвољну абелеву групу G низ

$0 \rightarrow A \otimes G \xrightarrow{i \otimes 1_G} B \otimes G \xrightarrow{j \otimes 1_G} C \otimes G \rightarrow 0$ КТН који се црта.

б) Ано је F свободна абелева група онда је низ

$0 \rightarrow A \otimes F \xrightarrow{i \otimes 1_F} B \otimes F \xrightarrow{j \otimes 1_F} C \otimes F \rightarrow 0$ је КТН.

иј. ако је F свободна $A \otimes B \xrightarrow{- \otimes F} A \otimes C$ је линеарни функционатор

д: а) $\rho(i) = 1_A \Leftrightarrow$ црта се $(\rho \otimes 1_G) \circ (i \otimes 1_G) = (\rho \otimes 1)(1_G) = 1_A \otimes 1_G = 1_{A \otimes G}$

$\Rightarrow i \otimes 1_G$ је "1-1" иј. линеар на мекету $A \otimes G$ и низ се црта.

б) $F = \bigoplus_{s \in S} \mathbb{Z} \langle s \rangle$

$s \in S$

$0 \rightarrow A \otimes \mathbb{Z} \langle s \rangle \xrightarrow{i \otimes 1} B \otimes \mathbb{Z} \langle s \rangle \xrightarrow{j \otimes 1} C \otimes \mathbb{Z} \langle s \rangle \rightarrow 0$ је КТН

$\begin{array}{ccccccc} & \uparrow \Psi_A & & \uparrow & & \uparrow & \\ 0 & \rightarrow & A & \xrightarrow{i} & B & \xrightarrow{j} & C \rightarrow 0 \end{array}$

$\Psi_A(a) = a \otimes s$

$0 \rightarrow \bigoplus_{s \in S} (A \otimes \mathbb{Z} \langle s \rangle) \xrightarrow{\bigoplus i \otimes 1} \bigoplus_{s \in S} (B \otimes \mathbb{Z} \langle s \rangle) \xrightarrow{\bigoplus j \otimes 1} \bigoplus_{s \in S} (C \otimes \mathbb{Z} \langle s \rangle) \rightarrow 0$ је КТН

+ моно неке природности. □

⑤ A, B абелеве групе. G абелева група, $\varphi: A \times B \rightarrow G$ билинеарно лтд.

$\begin{array}{ccc} & \varphi & \\ G & \xleftarrow{\sim} & H \\ \uparrow \vartheta & \nearrow \gamma & \\ A \times B & & \end{array}$ (альтернативна дефиниција тензорног произведения)

Торзиони производ

④ A абелева група. Слободна резолуција (резолвента) групе A је КТН
 $0 \rightarrow F_1 \xrightarrow{f_1} F_0 \xrightarrow{f_0} A \rightarrow 0$ где су F_0 и F_1 слободне абелеве групе.

A , $F_0 := F[A] = \bigoplus_{a \in A} \mathbb{Z}\langle a \rangle$, $f_0(a) := a$ за $a \in A$ — база од F_0 је добро дефинисан хомоморф.

$F_1 := \ker f_0$ и f_1 инклузија

$0 \rightarrow F_1 \xrightarrow{f_1} F_0 \xrightarrow{f_0} A \rightarrow 0$ је слободна резолуција и назива се канонском слободном резолуцијом од A .

Пример: 1) $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ $F_0 = \mathbb{Z}\langle 0 \rangle \oplus \mathbb{Z}\langle 1 \rangle$

$0 \rightarrow \mathbb{Z}\langle 0 \rangle \oplus \mathbb{Z}\langle 2 \cdot 1 \rangle \hookrightarrow \mathbb{Z}\langle 0 \rangle \oplus \mathbb{Z}\langle 1 \rangle \xrightarrow{f_0} \mathbb{Z}_2 \rightarrow 0$ канонска

$0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \xrightarrow{f_2} \mathbb{Z}_2 \rightarrow 0$ није канонска али је исто резолуција

чак: $0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{n} \mathbb{Z} \xrightarrow{f_n} \mathbb{Z}_n \rightarrow 0$ неканонска резолуција од $\mathbb{Z}_n$.

2) F слободна

$0 \rightarrow 0 \rightarrow F \xrightarrow{1_F} F \rightarrow 0$ је слободна резолуција.

⑤ A, B абелеве групе и $0 \rightarrow F_1 \xrightarrow{f_1} F_0 \xrightarrow{f_0} A \rightarrow 0$ канонска слободна резолуција од A .

$F_1 \otimes B \xrightarrow{f_1 \otimes 1_B} F_0 \otimes B \xrightarrow{f_0 \otimes 1_B} A \otimes B \rightarrow 0$ је тајак тз (знамо од раније) а

$\text{Tor}(A, B) := \ker(f_1 \otimes 1_B)$ и називамо га торзиони производ групе A и B .

⑥ $0 \rightarrow F_1 \xrightarrow{f_1} F_0 \xrightarrow{f_0} A \rightarrow 0$ било која слободна резолуција од A .

$\Rightarrow \text{Tor}(A, B) \cong \ker(f_1 \otimes 1_B)$.

⑦ B фиксирана абелева група, $A \otimes \xrightarrow{\text{Tor}(-, B)} A \otimes$ је један коваријантан функтор.

(исплатио још ни дефинисати на морфизмима, али ето да видимо)

⑤ F плоская R -модуль $\Rightarrow \text{Tor}(A, F) = 0, \text{Tor}(F, A) = 0$ для любого R -модуля A .

$$\Delta: 0 \rightarrow 0 \rightarrow F \xrightarrow{1_F} F \rightarrow 0$$

$$0 \otimes A \rightarrow F \otimes A \rightarrow F \otimes A \rightarrow 0$$

$$\begin{matrix} 0 \\ \parallel \\ 0 \end{matrix} \Rightarrow \text{Tor}(F, A) = 0$$

$$0 \rightarrow F_1 \xrightarrow{f_1} F_2 \xrightarrow{f_2} A \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow F_1 \otimes F \xrightarrow{f_1 \otimes 1_F} F_2 \otimes F \rightarrow A \otimes F \rightarrow 0 \text{ по лемме из п. 5.1.}$$

$$\Rightarrow \text{Tor}(A, F) = 0$$

□

⑥ $\text{Tor}(A, \mathbb{Z}) = 0, \text{Tor}(\mathbb{Z}, A) = 0$

⑤ $\text{Tor}(\mathbb{Z}_n, G) \cong \ker(n \rightarrow G)$

$$\Delta: 0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{n} \mathbb{Z} \xrightarrow{j_n} \mathbb{Z}_n \rightarrow 0$$

$$\mathbb{Z} \otimes G \xrightarrow{n \otimes 1_G} \mathbb{Z} \otimes G \xrightarrow{j_n \otimes 1_G} \mathbb{Z}_n \otimes G \rightarrow 0$$

$$\begin{array}{ccc} \uparrow \psi_n & G & \uparrow \psi_n \\ \mathbb{Z} & \xrightarrow{n} & G \end{array} \text{ само приравнивает.}$$

□

⑦ $m, n \in \mathbb{Z} \rightarrow \text{Tor}(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_m) \cong \mathbb{Z}_d$, где $d = \text{HЗД}(m, n)$

⑤ $\text{Tor}(\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda, B) \cong \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} \text{Tor}(A_\lambda, B)$ и $\text{Tor}(A, \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda) \cong \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} \text{Tor}(A, B_\lambda)$
(без доказательства)

□

⑤ $\text{Tor}(A, B) \cong \text{Tor}(B, A)$ для произвольных A, B R -модулей.

~~можно~~ можно доказать, без доказательства

□

Теорема о универсальных коэффициентах

$\mathfrak{h}$ абелева группа, $\mathcal{U}\mathfrak{b} \xrightarrow{-\otimes \mathfrak{h}} \mathcal{U}\mathfrak{b}$
 $\mathcal{Z}\mathfrak{b} \xrightarrow{-\otimes \mathfrak{h}} \mathcal{Z}\mathfrak{b}$
 $\mathcal{H}_n(-; \mathfrak{h})$
 $\mathcal{H}_n$
 $\mathfrak{b}$
 хомологизация са $\uparrow$
 коэффициентами $\mathfrak{h}$

$\bullet : \mathcal{C} : \dots \rightarrow \mathcal{C}_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} \mathcal{C}_n \xrightarrow{\partial_n} \mathcal{C}_{n-1} \rightarrow \dots$

$\mathfrak{h} \otimes \mathcal{C} : \dots \rightarrow \mathcal{C}_{n+1} \otimes \mathfrak{h} \xrightarrow{\partial_{n+1} \otimes 1_{\mathfrak{h}}} \mathcal{C}_n \otimes \mathfrak{h} \xrightarrow{\partial_n \otimes 1_{\mathfrak{h}}} \mathcal{C}_{n-1} \otimes \mathfrak{h} \rightarrow \dots$ је ланчани комитет

$\Phi : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D} \longmapsto \Phi \otimes 1_{\mathfrak{h}} : \mathcal{C} \otimes \mathfrak{h} \rightarrow \mathcal{D} \otimes \mathfrak{h}$

$\mathcal{H}_n(\mathcal{C}; \mathfrak{h}) := \mathcal{H}_n(\mathcal{C} \otimes \mathfrak{h})$ и то је n -та хомолошка група ланчаног комитета $\mathcal{C}$ са коэффициентами $\mathfrak{h}$ (ајј са $\mathfrak{h}$ -коэффициентами)

$\mathcal{C} \otimes \mathbb{Z} \xrightarrow{-\otimes \mathbb{Z}} \mathcal{C} \otimes \mathbb{Z}$ је природно еквивалентан ~~идентично~~ функцију.

$\Rightarrow \mathcal{H}_n(-; \mathbb{Z})$ је природно еквивалентан $\mathcal{H}_n$.

$\Rightarrow \mathcal{H}_n(\mathcal{C}; \mathbb{Z}) \cong \mathcal{H}_n(\mathcal{C})$.

$\Phi : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}, \Phi_* : \mathcal{H}_n(\mathcal{C}; \mathfrak{h}) \rightarrow \mathcal{H}_n(\mathcal{D}; \mathfrak{h})$
 $"(\Phi \otimes 1_{\mathfrak{h}})_*$

① (О универсальных коэффициентах): $\mathcal{C}$ ланчани комитет сподних абелевих група (сподни ланчани комитет), $\mathfrak{h}$ абелева група и $n \in \mathbb{Z}$.

Теза ланчани КТН одлика:

$0 \rightarrow \mathcal{H}_n(\mathcal{C}) \otimes \mathfrak{h} \xrightarrow{\epsilon} \mathcal{H}_n(\mathcal{C}; \mathfrak{h}) \rightarrow \text{Tor}(\mathcal{H}_{n-1}(\mathcal{C}), \mathfrak{h}) \rightarrow 0$

где је ϵ дај са: $[\tau] \otimes g \xrightarrow{\epsilon} [\tau \otimes g], \tau \in \mathcal{Z}_n(\mathcal{C}), g \in \mathfrak{h}$.

Овај КТН се зове, та ванни $\mathcal{H}_n(\mathcal{C}; \mathfrak{h}) \cong \mathcal{H}_n(\mathcal{C}) \oplus \text{Tor}(\mathcal{H}_{n-1}(\mathcal{C}), \mathfrak{h})$

Овај КТН има својство природности.

$\otimes G$

$$\Delta: \mathcal{C}: \dots \rightarrow C_n \xrightarrow{d_{n+1}} C_n \xrightarrow{d_n} C_{n-1} \rightarrow \dots$$

$$Z_n := Z_n(\mathcal{C}) = \ker d_n, B_n := B_n(\mathcal{C}) = \operatorname{im}(d_{n+1})$$

$$0 \rightarrow Z_n \xrightarrow{i_n} C_n \xrightarrow{\tilde{d}_n} B_{n-1} \rightarrow 0, \quad \tilde{d}_n \text{ je } d_n \text{ са сукцесним кодиференцијом}$$

одно је КТН за де n и де де друге су сподобне.

$$\tilde{d}_n \circ i_n = 1_{B_{n-1}}$$

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & Z_n & \xrightarrow{i_n \otimes 1_G} & C_n & \xrightarrow{\tilde{d}_n \otimes 1_G} & B_{n-1} \otimes G \rightarrow 0 \\ & & \downarrow & \hookrightarrow & \downarrow d_n \otimes 1_G & \hookrightarrow & \downarrow 0 \\ 0 & \rightarrow & Z_{n-1} \otimes G & \xrightarrow{i_{n-1} \otimes 1_G} & C_{n-1} \otimes G & \xrightarrow{\tilde{d}_{n-1} \otimes 1_G} & B_{n-2} \otimes G \rightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & \tau \otimes g & \rightarrow & \tau \otimes g & & \downarrow \\ & & & & & & 0 \otimes g \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{c} \downarrow \\ \downarrow \\ \downarrow \end{array}} \right\} \text{КТН ратифицираних комплекса}$$

Узимамо, д.т.н. из $\mathcal{C}$ у $\mathcal{C} \otimes G$ мере. $(i_n)_*$ индукција са $i_n \otimes 1_G$

$$\dots \rightarrow B_n \otimes G \rightarrow Z_n \otimes G \xrightarrow{(i_n)_*} H_n(\mathcal{C}; G) \rightarrow B_{n-1} \otimes G \xrightarrow{(j_{n-1})_*} Z_{n-1} \otimes G \rightarrow \dots$$

$$\tau \otimes g \mapsto b \otimes g \in B_{n-1} \otimes G, \quad c \in C_n \text{ т.д. } \tilde{d}_n(c) = b, \quad B_{n-1} \subseteq Z_{n-1}$$

$$\begin{array}{c} \tau \otimes g \mapsto b \otimes g \\ \downarrow \\ b \otimes g \mapsto b \otimes g \end{array} \quad \text{т.д. } j_{n-1} \text{ индукује } \gamma: B_{n-1} \otimes G \xrightarrow{j_{n-1} \otimes 1_G} Z_{n-1} \otimes G$$

$$B_{n-1} \xrightarrow{j_{n-1}} Z_{n-1}$$

⊙ Ако је $A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \xrightarrow{\gamma} D \xrightarrow{\delta} E$ тачан из.

$$\Rightarrow 0 \rightarrow \operatorname{coker} \alpha \xrightarrow{\bar{\alpha}} C \xrightarrow{\gamma} \operatorname{ker} \delta \rightarrow 0 \text{ је КТН.}$$

$$\begin{array}{ccc} B/\operatorname{im} \alpha & & \\ \downarrow & & \downarrow \\ \operatorname{ker} \beta & \xrightarrow{\bar{\beta}} & \bar{\beta}(\operatorname{ker} \beta) = \beta(b) \end{array}$$

то реше: $0 \rightarrow \operatorname{coker}(j_n \otimes 1_G) \rightarrow H_n(\mathcal{C}; G) \rightarrow \operatorname{ker}(j_{n-1} \otimes 1_G) \rightarrow 0$ је КТН.

$$\operatorname{coker}(j_n \otimes 1_G): 0 \rightarrow B_n \xrightarrow{j_n} Z_n \xrightarrow{d_n} H_n(\mathcal{C}) \rightarrow 0$$

$$B_n \otimes G \xrightarrow{j_n \otimes 1_G} Z_n \otimes G \xrightarrow{d_n \otimes 1_G} H_n(\mathcal{C}) \otimes G \rightarrow 0 \text{ је тачан}$$

$$\Rightarrow \operatorname{coker}(j_n \otimes 1_G) \cong H_n(\mathcal{C}) \otimes G \text{ в.т. лемме о гомологијама.}$$

$$\operatorname{ker}(j_{n-1} \otimes 1_G): 0 \rightarrow B_{n-1} \xrightarrow{j_{n-1}} Z_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} H_{n-1}(\mathcal{C}) \rightarrow 0$$

$$B_{n-1} \otimes G \xrightarrow{j_{n-1} \otimes 1_G} Z_{n-1} \otimes G \xrightarrow{d_{n-1} \otimes 1_G} H_{n-1}(\mathcal{C}) \otimes G \rightarrow 0 \text{ је тачан.}$$

luplino podluplino je slobozna razomuzija od $kn_1(^\circ)$

$$\Rightarrow \ker(j_{n-1} \otimes \text{id}_A) \cong \text{Tor}(H_{n-1}(C), G)$$

$$0 \rightarrow \ker(j_{n-1} \otimes 1_A) \xrightarrow{(\partial_n)_*} H_n(C; A) \xrightarrow{(\partial_n)_*} \ker(j_n \otimes 1_A) \rightarrow 0 \quad j_i \in T_n$$

Diagram illustrating the relationship between the logarithm of the concentration of species C and the stoichiometric coefficient n (vertical axis) and the stoichiometric coefficient 2 (horizontal axis).

$$\text{Tor}(H_{n-1}(C), G)$$

$$\begin{aligned} \text{Zn} \otimes \text{Im}(j_n \otimes 1_A) &\ni [\tau \otimes g] \xrightarrow{\quad} (i_n)_* (\tau \otimes g) = \\ &= (i_n \otimes 1_A)_* (\tau \otimes g) = \\ &= (i_n \otimes 1_A)_* [\tau \otimes g] \\ &= [(i_n \otimes 1_A)(\tau \otimes g)] \\ &= [\tau \otimes g] \end{aligned}$$

Упражнение: $C_n \xrightarrow{\tilde{\partial}_n} B_{n-1}$ $0 \rightarrow Z_n \xrightarrow{in} C_n \xrightarrow{\tilde{\partial}_n} B_{n-1} \rightarrow 0$

$$\begin{array}{ccc} z_n & & z_{n-1} \\ \downarrow & \xleftarrow{i_{n-1}} & \downarrow j_{n-1} \\ C_{n-1} & & Z_{n-1} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} C_n \otimes h & \xrightarrow{\tilde{\mu}_n \otimes 1_h} & B_{n-1} \otimes h \\ \downarrow \mu_n \otimes 1_h & G & \downarrow j_{n-1} \otimes 1_h \\ C_{n-1} \otimes h & \xleftarrow{j_{n-1} \otimes 1_h} & Z_{n-1} \otimes h \end{array}$$

$$\Rightarrow x \in \ker(j_{n-1} \otimes 1_a)$$

$$\psi(x) := [(s_u \otimes 1_h)(x)] \in H_n(\mathcal{C}; h)$$

$$\begin{aligned} \uparrow j_p \quad (i_n \otimes 1_A) \circ (j_n \otimes 1_A)(x) &= (i_{n-1} \otimes 1_A) \circ (j_{n-1} \otimes 1_A) \circ \underbrace{(\tilde{i}_n \otimes 1_A) \circ (\tilde{s}_n \otimes 1_A)(x)}_{(\tilde{i}_n \circ \tilde{s}_n) \otimes 1_A} \\ &= (i_{n-1} \otimes 1_A) \circ \underbrace{j_{n-1} \otimes 1_A(x)}_{\substack{\text{0} \\ j_p \, x \in \ker(j_n \otimes 1_A)}} = 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow (S_n \otimes 1_A)(x) \in \ker (2n \otimes 1_A)$ та можем прицели о трети.

$$(j_{n-1})_*(\psi(x)) = (\tilde{j}_n \otimes 1_G)_*[(s_n \otimes 1_G)(x)]$$

$$= [(\tilde{\mathcal{D}}_n \otimes 1_A)(\zeta_n \otimes 1_A)(x)]$$

$$\text{фрагменти су} \rightarrow = (\overline{D_n} \otimes 1_n) (e_n \otimes 1_n) (x) = x$$

Природнои: $\Phi: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ ланчато и ода су сподобни ланчати конитени

$$0 \rightarrow H_n(\mathcal{C}) \otimes G \xrightarrow{\varepsilon} H_n(\mathcal{C}; G) \rightarrow \text{Tor}(H_{n-1}(\mathcal{C}), G) \rightarrow 0$$

$$\begin{array}{ccccc} \Phi_* \otimes 1_G \downarrow & \text{I} & \downarrow \Phi_* = (\Phi \otimes 1_G)_* & \text{II} & \downarrow (\Phi_*)_* \quad (\Phi_*: H_{n-1}(\mathcal{C}) \rightarrow H_{n-1}(\mathcal{D})) \\ 0 \rightarrow H_n(\mathcal{D}) \otimes G & \xrightarrow{\varepsilon} & H_n(\mathcal{D}; G) & \rightarrow & \text{Tor}(H_{n-1}(\mathcal{D}), G) \rightarrow 0 \end{array}$$

Комутативност квадрата I: $[\tau] \otimes g \mapsto [\tau \otimes g]$
 $\downarrow \quad \quad \downarrow \leftarrow$ ово је кретање је добро.
 $[\Phi(\tau)] \otimes g \mapsto [\Phi(\tau \otimes g)]$

Други квадрат не доказујемо јер не знамо шта је Tor на морфизмима. $\square$

40

Сингуларна хомологија с коефицијентима

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathcal{C}(-; G) & & \\ & \searrow & & \searrow & \\ \text{Tor} & \xrightarrow{\varepsilon} & \mathcal{C} \wedge G & \xrightarrow{- \otimes G} & \mathcal{C} \wedge G \\ & \searrow & \downarrow H_n & \searrow H_n(-; G) & \\ & & G & & \end{array}$$

$H_n(-; G)$

$H_n(X; G) := H_n(\mathcal{C}(X); G)$ где је X тополошки простор

$\uparrow$ $H_n(\mathcal{C}(X) \otimes G)$ сингуларна
 или називамо n -та хомолошка група простора X са коефицијентима у G
 или са G -коефицијентима.

$f: X \rightarrow Y$ непрекидно.

$$f_*: H_n(X; G) \rightarrow H_n(Y; G)$$

$f_* = (f_*)_* = (f_* \otimes 1_G)_* \leftarrow$ ово је звезда из ~~сингуларне~~ хомологије. $\mathcal{C} \wedge G \xrightarrow{H_n} G$
 $\uparrow$ ово је звезда од јуче

$\mathcal{C}(X; G) := \mathcal{C}(X) \otimes G$ ово је само ознака постојања заבודавати функтор Tor

$$\mathcal{C}(X; G): \cdots \rightarrow C_{n+1}(X) \otimes G \xrightarrow{\partial \otimes 1_G} C_n(X) \otimes G \xrightarrow{\partial \otimes 1_G} C_{n-1}(X) \otimes G \rightarrow \cdots$$

$\uparrow$ генерисана простимим тензорима облика:

$$\left(\sum_{i=1}^m d_i \sigma_i \right) \otimes g, \quad d_i \in \mathbb{Z}, \sigma_i \in \Delta_n(X), g \in G$$

$$\sum_{i=1}^m d_i (\sigma_i \otimes g) \Rightarrow \text{добити генератори су } \sigma_i \otimes g$$

$\mathbb{C}_n(X) \otimes G$ је описана са елементима $\sum d_i g_i$, $d_i \in \mathbb{Z}$, $g_i \in G$.

$\Rightarrow$ типичан елемент групе $\mathbb{C}_n(X) \otimes G$ је $\sum_{i=1}^m d_i (b_i \otimes g_i) = \sum_{i=1}^m d_i g_i$ за $d_i \in \mathbb{Z}$, $b_i \in \Delta_n(X)$, $g_i \in G$

$\Rightarrow$ типичан елемент групе $\mathbb{C}_n(X) \otimes G$ је облика $\sum_{i=1}^m \underbrace{d_i}_{\in \mathbb{Z}} \otimes \underbrace{g_i}_{\in G}$

$\sum_{i=1}^m \underbrace{g_i}_{\in G} \underbrace{d_i}_{\in \mathbb{Z}} := \sum_{i=1}^m d_i \otimes g_i \in \mathbb{C}_n(X) \otimes G$ ← ово је ознака и одатле добијемо назив коефицијената за елементе из G .

$$\mathbb{C}_n(X) \otimes G = \left(\bigoplus_{b \in \Delta_n(X)} \mathbb{Z} \langle b \rangle \right) \otimes G \cong \bigoplus_{b \in \Delta_n(X)} \mathbb{Z} \langle b \rangle \otimes G \cong \bigoplus_{b \in \Delta_n(X)} G$$

$\sum_{i=1}^m g_i d_i$ и ово су d_i различити међусобно и g_i су различити од 0
 онда се при овоме постоји изоморфизму по списку $\{g_i\}_{b \in \Delta_n(X)}$
 где $g_i = \begin{cases} g_i, & b = d_i \text{ за неко } i \in \{1, \dots, m\} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$
 постоји је да је онда једнозначно представљено.

① (Универзални коефицијенти) X тополошки простор, G абелева група, $n \in \mathbb{Z}$.

Тада постоји КТН облика $0 \rightarrow H_n(X) \otimes G \xrightarrow{\varepsilon} H_n(X; G) \rightarrow \text{Tor}(H_{n-1}(X), G) \rightarrow 0$

где је ε дефинисано са $\varepsilon([\tau] \otimes g) = [\tau \otimes g]$.

Овај КТН се зове $H_n(X; G) \cong (H_n(X) \otimes G) \oplus \text{Tor}(H_{n-1}(X), G)$.

Такође ако је $f: X \rightarrow Y$ непрекидно онда компутира:

$$0 \rightarrow H_n(X) \otimes G \xrightarrow{\varepsilon} H_n(X; G) \rightarrow \text{Tor}(H_{n-1}(X), G) \rightarrow 0$$

$$\begin{array}{ccccccc} f_* \otimes 1_G & \downarrow & G & \downarrow f_* & G & \downarrow (f_*)_* \\ 0 \rightarrow H_n(Y) \otimes G & \xrightarrow{\varepsilon} & H_n(Y; G) & \rightarrow & \text{Tor}(H_{n-1}(Y), G) & \rightarrow 0 \end{array}$$

← звезда од данас

$\partial: \mathcal{C} := \mathcal{C}(X)$ ← спроводан из дефиниције и $\Phi := f_*: \mathcal{C}(X) \rightarrow \mathcal{C}(Y)$ □

Пример 1) X тополошки простор, $H_0(X)$ је спроводна абелева група (знамо од раније дефиниције)
 и нека G абелева група

$\Rightarrow \text{Tor}(H_0(X), G) = 0$ (нема торзије)

$\Rightarrow H_1(X; G) \cong H_1(X) \otimes G$ (из КТН из теореме)

вони и на насити 0 јер $H_{-1}(X) = 0$ па је сподобна.

$$H_0(X; G) \cong H_0(X) \otimes G.$$

2) Ако је X тополошки простор такав да је $H_n(X)$ сподобна за све $n \in \mathbb{N}_0$

$$\rightarrow H_n(X; G) \cong H_n(X) \otimes G \text{ за све } n \in \mathbb{N}_0$$

$n \geq 1$:

$$H_i(S^n; G) \cong H_i(S^n) \otimes G \cong \begin{cases} G, & i \in \{0, n\} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$H_i(M_g) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & i \in \{0, 2\} \\ \mathbb{Z}^{2g}, & i = 1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} \Rightarrow H_i(M_g; G) \cong \begin{cases} G, & i \in \{0, 2\} \\ G^{2g}, & i = 1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$3) H_i(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2) = ??$$

n тарама:

i	0	1	2	3	...	$n-2$	$n-1$	n	
$H_i(\mathbb{R}P^n)$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	0	$\mathbb{Z}_2$		0	$\mathbb{Z}_2$	0	0 ...
$H_i(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2)$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$		$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	0 ...

0 и 1 рачунамо из Лексера

остале из теореме

n нецара:

i	0	1	2	3	...	$n-1$	n	$n+1$	...
$H_i(\mathbb{R}P^n)$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	0	$\mathbb{Z}_2$		0	$\mathbb{Z}$	0	0 ...
$H_i(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2)$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$		$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	0	0 ...

остале исто рачунамо.

$$\Rightarrow H_i(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}_2, & 0 \leq i \leq n \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} \text{ и за парне и за нецара } n.$$

⑤ X путно повезан простор, G абелева група, $f: X \rightarrow X$ непрекидно

$\Rightarrow f_*: H_n(X; G) \rightarrow f_*: H_n(X; G)$ идентитетом.

Δ : $H_0(X) \otimes G \xrightarrow{\epsilon} H_0(X; G)$ (природниот ϵ из теореме)

$$\begin{array}{ccc} f_* \otimes 1_G \downarrow & G & \downarrow f_* \\ H_0(X) \otimes G & \xrightarrow{\epsilon} & H_0(X; G) \end{array}$$

Ово је овде идентитетом f_* од досле ратје и 1_G што је и f_* из компјутационити је и f_* . □

⑥ Не што важи у сингуларној хомологији важи и у сингуларној хомологији са коефицијентима али наводно само што нам треба.

⑤ $n \in \mathbb{N}$, $f: S^n \rightarrow S^n$ непрекидно, G абелева група

$\Rightarrow f_*: H_n(S^n; G) \rightarrow H_n(S^n; G)$ је множење са $\deg f \in \mathbb{Z}$.

Δ : $H_n(S^n) \otimes G \xrightarrow{\epsilon} H_n(S^n; G)$ $\text{Tor}(H_n(S^n), G) = 0$

$$\begin{array}{ccc} f_* \otimes 1_G \downarrow & G & \downarrow f_* \\ H_n(S^n) \otimes G & \xrightarrow{\epsilon} & H_n(S^n; G) \end{array}$$

Како f_* је иже множење са $\deg f$ то $\deg f$ од $\deg f$, то компјутирателу је и f_* множење са $\deg f$ јер може $\deg f$ са исходи из тензорног производа. □

⑤ $n \in \mathbb{N}$, $p: S^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$ глобално неискривање

$\Rightarrow (\forall i \geq 1) p_*: H_i(S^n; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H_i(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2)$ је изоморфизам хомоморфизам.

Δ : $i < n \Rightarrow H_i(S^n; \mathbb{Z}_2) = 0$ је тривијална

$i > n \Rightarrow$ од прате тривијална

$i = n \Rightarrow H_n(S^n) \otimes \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{\epsilon} H_n(S^n; \mathbb{Z}_2)$ ← ово је изоморфизам иже као ратје

$$\begin{array}{ccc} p_* \otimes 1_{\mathbb{Z}_2} \downarrow & G & \downarrow p_* \\ H_n(\mathbb{R}P^n) \otimes \mathbb{Z}_2 & \xrightarrow{\epsilon} & H_n(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2) \end{array}$$

Пошто је $p_* = \epsilon(p_* \otimes 1_{\mathbb{Z}_2}) \epsilon^{-1} \Rightarrow$ довољно је показати да је $p_* \otimes 1_{\mathbb{Z}_2}$ тривијална.

n паран: $H_n(\mathbb{R}P^n) = 0 \checkmark$

n непаран: $H_n(S^n) = \mathbb{Z} \langle du \rangle$

$H_n(\mathbb{R}P^n) = \mathbb{Z} \langle \beta_n \rangle$

$p_*(du) = 2\beta_n \leftarrow$ доказати рачујте да постоји овакав избор базе

$(p_* \otimes 1_{\mathbb{Z}_2})(kdu \otimes a) = k p_*(du) \otimes a = 2 \cdot k \beta_n \otimes a = k \beta_n \otimes 2a = 0$

□

Борсук-Урамова теорема

$S^0 = \{-1, 1\}$, $\kappa_1: \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\kappa_2: \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\kappa_{S^0}: \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $r_1: \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ сува пресликавања

$\deg \kappa_1 = 0$, $\deg \kappa_2 = 0$, $\deg \kappa_{S^0} = 1$, $\deg r_1 = 1$

$\Rightarrow$ интеграл парних пресликавања је паран, а непарних непаран.

⑤ $n \in \mathbb{N}$, $f: S^n \rightarrow S^n$ непрекидно парно пресликавање $\Rightarrow \deg f$ је паран

$\Delta: S^n \xrightarrow{f} S^n$
 $\downarrow p \quad \hookrightarrow \quad \downarrow \bar{f}$
 $\mathbb{R}P^n$ $\leftarrow$ из парности можемо да факторишемо

$$\begin{array}{ccccc} H_n & & H_n(S^n) & \xrightarrow{f_*} & H_n(S^n) \\ \downarrow \alpha_n & & \downarrow p_* & \hookrightarrow & \downarrow \bar{f}_* \\ & & H_n(\mathbb{R}P^n) & & \end{array}$$

n паран $\Rightarrow f_*$ је тривијалант $\Rightarrow \deg f_*$

n непаран $\rightarrow f_*(du) = \bar{f}_*(p_*(du)) = \bar{f}_*(2\beta_n) = 2 \bar{f}_*(\beta_n) = 2 \cdot k \cdot du$

$\Rightarrow \deg f = 2k$

□

⑥ $n \in \mathbb{N}$, $f: S^n \rightarrow S^n$ непрекидно непарно пресликавање $\Rightarrow \deg f$ је непаран.

$\Delta: f_*: \underbrace{H_n(S^n; \mathbb{Z}_2)}_{\cong \mathbb{Z}_2} \rightarrow H_n(S^n; \mathbb{Z}_2) \leftarrow$ ово је изоморфизам ако је $\deg f$ непаран.

или што доказујемо

$$\begin{array}{ccc} S^n & \xrightarrow{f} & S^n \\ p \downarrow & \hookrightarrow & \downarrow p \\ \mathbb{R}P^n & \xrightarrow{\bar{f}} & \mathbb{R}P^n \end{array}$$

↓ заронително и приклучено е срутителот

$$\begin{array}{ccccc}
 C(\mathbb{R}P^n) & \xrightarrow{\tau} & C(S^n) & \xrightarrow{P\#} & C(\mathbb{R}P^n) \\
 \bar{f}_\# \downarrow & \hookrightarrow \mathbb{I} & \downarrow \bar{f}_\# & & \downarrow \bar{f}_\# \\
 C(\mathbb{R}P^n) & \xrightarrow{\tau} & C(S^n) & \xrightarrow{P\#} & C(\mathbb{R}P^n)
 \end{array}$$

Кога да дефиниравме ланчосито пресликавање τ ние да конструираме ланчосит I и да ја $0 \rightarrow C(\mathbb{R}P^n) \otimes \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{\tau \otimes 1} C(S^n) \otimes \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{P\# \otimes 1} C(\mathbb{R}P^n) \otimes \mathbb{Z}_2 \rightarrow 0$ КТН ланчоситих копировања.

За сеп се правиме да докажеме τ ланчосити ние ние да докажуваме ланчосити $\Rightarrow$ и ние ланчосити и ланчосити дигитал

$$\begin{array}{ccccccc}
 \cdots \rightarrow H_{k+1}(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2) & \xrightarrow{2} & H_k(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2) & \xrightarrow{\tau_*} & H_k(S^n; \mathbb{Z}_2) & \xrightarrow{P_*} & H_k(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\partial} H_{k-1}(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2) \rightarrow \cdots \\
 \bar{f}_\# \downarrow & \hookrightarrow & \downarrow \bar{f}_\# & \hookrightarrow & \downarrow \bar{f}_\# & \hookrightarrow & \downarrow \bar{f}_\# \hookrightarrow \mathbb{I} \downarrow \bar{f}_\# \\
 \cdots \rightarrow H_{k+1}(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2) & \xrightarrow{2} & H_k(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2) & \xrightarrow{\tau_*} & H_k(S^n; \mathbb{Z}_2) & \xrightarrow{P_*} & H_k(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\partial} H_{k-1}(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2) \rightarrow \cdots
 \end{array}$$

На основу 5 ние да докажеме τ ланчосити да ја $(\forall k \in \mathbb{N}_0) \bar{f}_\# : H_k(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H_k(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2)$ изоморфизам.

индукција по k :

$k=0$: $\mathbb{Z}_2 \leftarrow$ доказано денес

↓ овде ние ние $\mathbb{Z}_2$ квадратити $\mathbb{Z}_2$

$1 \leq k \leq n$: денес ние докажеме да ја $k \geq 1$ $P\#$ тривијален хомоморфизам.

$\Rightarrow \partial$ ја хомоморфизам и ∂ ние $\mathbb{Z}_2 \Rightarrow \partial$ ја изоморфизам.

и за $k-1$ $\bar{f}_\#$ ја изоморфизам, $\mathbb{I}$ ние овде ние конструира

ние ја $\bar{f}_\#$ ние ние k изоморфизам.

ние ние одговара $\oplus \mathbb{Z}_2 \langle b \rangle$
 $b \in \Delta_k(\mathbb{R}P^n)$

Сага дефиниравме $\tau : k \in \mathbb{N}_0, \tau : C_k(\mathbb{R}P^n) \rightarrow C_k(S^n)$

$$\begin{array}{ccc}
 j \in \{1, 2\} & \tilde{b}_j & \xrightarrow{\delta^k} S^n \\
 & \downarrow P & \downarrow P \\
 \Delta^k & \xrightarrow{\tau} \mathbb{R}P^n & \xrightarrow{\tau} S^n
 \end{array}$$

↓ различити ланчосити од $\mathbb{Z}_2$.

$\tau(b) := \tilde{b}_1 + \tilde{b}_2$ ние ние јединствено

↑ ние ние 2 ланчосити по $\mathbb{Z}_2$:

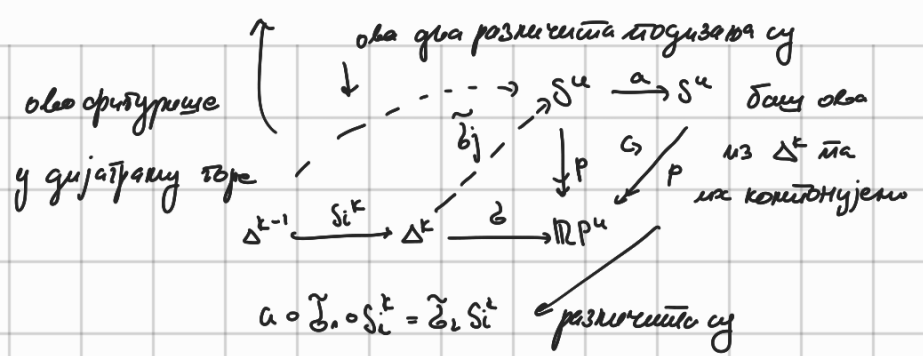
$$\tilde{b}_2 = a \circ \tilde{b}_1$$

$$\Delta^{k-1} \xrightarrow{\delta_1^k} \Delta^k \quad \downarrow \text{ог ратије}$$

$$\begin{array}{ccc}
 C_k(\mathbb{R}P^n) & \xrightarrow{\partial} & C_{k-1}(\mathbb{R}P^n) \\
 \tau \downarrow & \hookrightarrow & \downarrow \tau \\
 C_k(S^n) & \xrightarrow{\partial} & C_{k-1}(\mathbb{R}P^n)
 \end{array}$$

ние ние ние конструираме $b \mapsto \sum_{i=0}^k (-1)^i b \circ \delta_i^k$

на базисите $\tilde{b}_1 + \tilde{b}_2 \mapsto \sum_{i=0}^k (-1)^i \tilde{b}_1 \circ \delta_i^k + \sum_{i=0}^k (-1)^i \tilde{b}_2 \circ \delta_i^k = \sum_{i=0}^k (-1)^i (\tilde{b}_1 \circ \delta_i^k + \tilde{b}_2 \circ \delta_i^k)$



Иказујемо да је ово КТН: пресликавања су потцијата јер су потцијата леве зориса са $\mathbb{Z}_2$
 $k \in \mathbb{N}_0$:

$$0 \rightarrow \underbrace{C_k(\mathbb{R}P^k) \otimes \mathbb{Z}_2}_{(1)} \xrightarrow{\tau \otimes 1_{\mathbb{Z}_2}} \underbrace{C_k(S^k) \otimes \mathbb{Z}_2}_{(2)} \xrightarrow{p_* \otimes 1_{\mathbb{Z}_2}} \underbrace{C_k(\mathbb{R}P^k) \otimes \mathbb{Z}_2}_{(3)} \rightarrow 0$$

$$(1) \sum_{i=1}^m \tilde{b}_i \otimes 1 \xrightarrow{\tau \otimes 1_{\mathbb{Z}_2}} \sum_{i=1}^m (\tilde{b}_{i,1} + \tilde{b}_{i,2}) \otimes 1 = \sum_{i=1}^m \tilde{b}_{i,1} \otimes 1 + \sum_{i=1}^m \tilde{b}_{i,2} \otimes 1$$

и $\tilde{b}_1, \dots, \tilde{b}_m \in \Delta_k(\mathbb{R}P^k)$ међусобно различити

$$\begin{array}{ccc} \tilde{b}_{i,j} & \nearrow & S^k \\ \downarrow p & & \\ \Delta^k & \xrightarrow{\tilde{b}_i} & \mathbb{R}P^k \end{array} \Rightarrow \text{сви } \tilde{b}_{i,j} \text{ су међусобно различити} \Rightarrow \sum_{i=1}^m \tilde{b}_{i,1} \otimes 1 + \sum_{i=1}^m \tilde{b}_{i,2} \otimes 1 \neq 0$$

неутривалентни елементи се сликају у нулу $\rightarrow$ мономорфизам

$$(2) \text{im}(\tau \otimes 1_{\mathbb{Z}_2}) \stackrel{?}{=} \ker(p_* \otimes 1_{\mathbb{Z}_2})$$

$$\begin{aligned} \text{[I]} (p_* \otimes 1_{\mathbb{Z}_2})(\tau \otimes 1) \left(\sum_{i=1}^m \tilde{b}_i \otimes 1 \right) &= (p_* \otimes 1_{\mathbb{Z}_2}) \left(\sum_{i=1}^m (\tilde{b}_{i,1} + \tilde{b}_{i,2}) \otimes 1 \right) \\ &= \sum_{i=1}^m (p_* \tilde{b}_{i,1} + p_* \tilde{b}_{i,2}) \otimes 1 \\ &= \sum_{i=1}^m 2 \tilde{b}_i \otimes 1 = \sum_{i=1}^m \tilde{b}_i \otimes 2 = 0 \end{aligned}$$

$$\text{[II]} \sum_{i=1}^r \tilde{b}_i \otimes 1, \tilde{b}_1, \dots, \tilde{b}_r \in \Delta_k(S^k) \text{ и међусобно различити}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^r \underbrace{(p_* \tilde{b}_i) \otimes 1}_{=0} = 0 \text{ у } C_k(\mathbb{R}P^k) \otimes \mathbb{Z}_2$$

Имају ли баци у првомича јер је гласно нулизује

$$r=2m \text{ и } p_* \tilde{b}_1 = p_* \tilde{b}_2, p_* \tilde{b}_3 = p_* \tilde{b}_4, \dots, p_* \tilde{b}_{m-1} = p_* \tilde{b}_{2m}$$

$$\text{[III]} \sum_{i=1}^r \tilde{b}_i \otimes 1 = \sum_{i=1}^m (\tilde{b}_{i-1} + \tilde{b}_{2i}) \otimes 1 = \sum_{i=1}^m \tau(p_* \tilde{b}_i) \otimes 1 = (\tau \otimes 1_{\mathbb{Z}_2}) \left(\sum_{i=1}^m (p_* \tilde{b}_i) \otimes 1 \right) \in \text{im}(\tau \otimes 1_{\mathbb{Z}_2})$$

два различита подизота иста сликавања

$$(3) \sum_{i=1}^m \tilde{b}_i \otimes 1 = \sum_{i=1}^m (p_* \tilde{b}_i) \otimes 1 - (p_* \otimes 1_{\mathbb{Z}_2}) \left(\sum_{i=1}^m \tilde{b}_i \otimes 1 \right)$$

$$\begin{array}{ccc} \tilde{b}_i & \nearrow & S^k \\ \downarrow p & & \\ \Delta^k & \xrightarrow{\tilde{b}_i} & \mathbb{R}P^k \end{array} \leftarrow \text{одабрало једно произвољно подизота}$$

Преда још да покажемо да квадрат I комутира и добићемо смо:

$k \in \mathbb{N}_0$

$$\begin{array}{ccc}
 C_k(\mathbb{R}P^n) & \xrightarrow{\tau} & C_k(S^4) \\
 \downarrow \bar{f}_\# & \subset & \downarrow f_\# \\
 C_k(\mathbb{R}P^4) & \xrightarrow{\tau} & C_k(S^4)
 \end{array}
 \quad \begin{array}{l}
 \text{изравнамо на} \\
 \text{параметрима}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ccc}
 \Delta_k(\mathbb{R}P^4) & \xrightarrow{\tau} & \tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2 \\
 \downarrow \bar{f}_\# & & \downarrow \\
 \bar{f}_\# \circ \gamma_1 & \xrightarrow{\tau} & \bar{f}_\# \circ \gamma_1 + \bar{f}_\# \circ \gamma_2
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 S^4 & \xrightarrow{f} & S^4 \\
 \downarrow p & & \downarrow p \\
 \mathbb{R}P^4 & \xrightarrow{\bar{f}} & \mathbb{R}P^4
 \end{array}
 \quad \begin{array}{l}
 \text{овој дијаграм сфигурише} \\
 \text{два различита подматрице}
 \end{array}$$

$$\alpha \circ \bar{f}_\# \circ \tilde{\gamma}_1 = \bar{f}_\# \circ \alpha \circ \tilde{\gamma}_1 = \bar{f}_\# \circ \tilde{\gamma}_2$$

↑
овде и доказу различитост користићемо

да је f келорто да комутира са одговарајућим $\square$

⑤ $C(\mathbb{R}P^4) \xrightarrow{\tau} C(S^4) \xrightarrow{p_\#} C(\mathbb{R}P^4)$ овој низ није лачон без изазовања
то је јачи доказ за значај хомологије са коефицијентима.

① (Борук-Улам) За било које $n \in \mathbb{N}$ и било које непрекидно $f: S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$
постоји $x_0 \in S^n$ т.д. је $f(x_0) = f(-x_0)$

(Борук-Улам 2) Ни за једно $n \in \mathbb{N}$, не постоји непрекидно келорто $g: S^n \rightarrow S^{n-1}$.

Δ: доказујемо 2 исказа:

Пис. I начин:

$$\begin{array}{ccc}
 D^n & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^n \\
 \uparrow & \searrow & \\
 S^{n-1} & \xrightarrow{i} S^n & \xrightarrow{g} S^{n-1} \\
 & & i(x) = (x, 0)
 \end{array}
 \quad f(x) := (x, \sqrt{1 - \|x\|^2})$$

① $\deg(g \circ i)$ је непаран

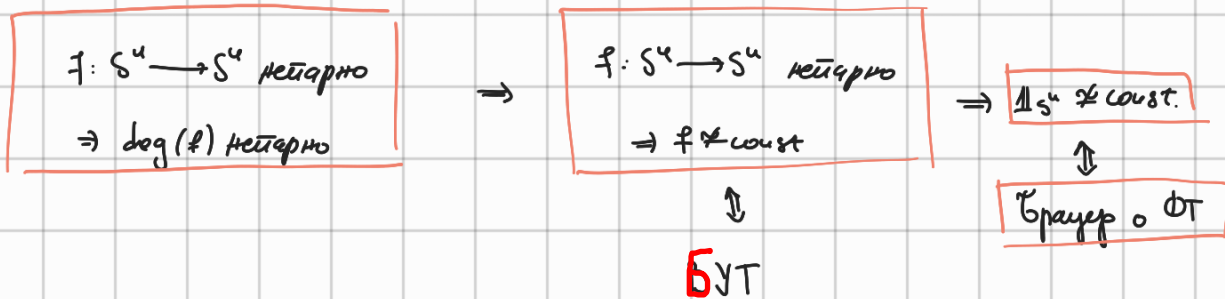
а пошто се штрирају на диск $g \circ i \approx \text{const} \Rightarrow \deg(g \circ i) = 0 \nmid$

$$\begin{array}{ccc}
 S^n & \xrightarrow{g} S^{n-1} & \xrightarrow{i} S^n \\
 & \searrow & \uparrow \\
 & & S^n \setminus \{*\} \approx \mathbb{R}^n \approx * \Rightarrow i \circ g \approx \text{const}
 \end{array}$$

$\Rightarrow \deg(i \circ g)$ непаран

$\Rightarrow \deg(i \circ g) = 0 \nmid$

$\square$



Сада само наводимо теорему да знамо да постоји.

⊕ (Кинешова-формула) X и Y тополошки простори, некло

$\Rightarrow$ постоји КТН одлика

$$0 \rightarrow \bigoplus_{i=0}^n H_i(X) \otimes H_{n-i}(Y) \rightarrow H_n(X \times Y) \rightarrow \bigoplus_{i=0}^{n-1} \text{Tor}(H_i(X), H_{n-1-i}(Y)) \rightarrow 0$$

Овај КТН се узима и има својство природности.

$$\updownarrow H_n(X \times Y) \cong \left(\bigoplus_{i=0}^n H_i(X) \otimes H_{n-i}(Y) \right) \oplus \left(\bigoplus_{i=0}^{n-1} \text{Tor}(H_i(X), H_{n-1-i}(Y)) \right)$$

Δ: без доказа