Teorija modula

Pojam modula nad prstenom je nastao uopštavanjem dva pojma: Abelove grupe i vektorskog prostora nad poljem. Naime, V je vektorski prostor nad poljem k ako su na njemu definisane jedna binarna operacija $V \times V \to V$ u odnosu na koju je V Abelova grupa, i jedna spoljna operacija $k \times V \to V$ koja je uskladjena kako sa operacijom sabiranja u V tako i sa obe operacije (sabiranja i množenja) u k:

$$\begin{aligned} \lambda(v+w) &= \lambda v + \lambda w \\ (\lambda+\mu)v &= \lambda v + \mu v \\ (\lambda\mu)v &= \lambda(\mu v) \\ 1 \cdot v &= v \end{aligned}$$

Ova spoljna operacija se može shvatiti kao dejstvo elemenata polja - skalara na elemente vektorskog prostora - vektore.

Slično dejstvo postoji i kod Abelovih grupa: ako je G Abelova grupa, tada je za svaki prirodan broj n definisan proizvod $n \cdot g := \underbrace{g + \cdots + g}_{n \text{ sabiraka}}$, koji se proširuje na sve cele brojeve n i time je definisana spoljna operacija - dejstvo celih brojeva $\mathbb{Z} \times G \to G$ koje zadovoljava iste četiri osobine kao i dejstvo skalara na vektorskom prostoru.

Iz navedenih aksioma slede sve uobičajene elementarne posledice vezane za računanje u vektorskom prostoru. Pri tome se koriste samo osobine prstena k, dok je prvo mesto gde se eksplicitno koristi činjenica da je k polje - dokaz tvrdjenja

$$\lambda \cdot v = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0 \wedge v = 0.$$

Ovakva osobina zaista ne važi u slučaju dejstva $\mathbb{Z}$ na Abelovu grupu: ako je $G = \mathbb{Z}_2$ imamo $2 \cdot 1 = 0$.

Definicija modula ponavlja definiciju vektorskog prostora s tom razlikom što skalari više nisu elementi polja već nekog komutativnog prstena sa jedinicom.

Neka je A prsten. *Modul M nad prstenom A* (kraće A-modul) je Abelova grupa M sa spoljnom operacijom (dejstvom) $A \times M \to M$ koja zadovoljava četiri osobine:

$$\begin{aligned} a(m+n) &= am+an \\ (a+b)m &= am+bm \\ (ab)m &= a(bm) \\ 1\cdot m &= m \end{aligned}$$

Ova definicija obuhvata i vektorske prostore (u slučaju kada je $A=k$ polje) i Abelove grupe (u slučaju kada je $A=\mathbb{Z}$). Pojam A-modula obuhvata i ideale prstena: svojstvo $AI\subset I$ ideala $I\subset A$ da "guta" sve elemente iz A upravo označava da je I zatvoren u odnosu na dejstvo elemenata iz A (ovde je spoljna operacija standardno množenje). Dakle, podskup $I\subset A$ je ideal $\Leftrightarrow$ I je A-modul u odnosu na množenje.

Iz prethodne primedbe sledi da se računanje u modulu može izvoditi po uobičajenim pravilima, osim skraćivanja: u opštem slučaju se u A-modulu M može desiti da bude $am=0$, a da je i $a\neq 0$ (nula prstena A) i $m\neq 0$ (nula Abelove grupe M). Odatle sledi da se u modulu može definisati pojam linearne kombinacije, linearnog omotača (lineala) i generatornog skupa, ali se ne može govoriti o linearnoj nezavisnosti i bazi, jer broj elemenata generatornog skupa ne mora biti jednoznačno odredjen, niti razlaganje elementa u linearnu kombinaciju mora biti jednoznačno.

Pojmovi podmodula i faktormodula datog A-modula M se definišu potpuno analogno vektorskim potprostorima i faktorprostorima: podskup $N\subset M$ je *podmodul* ako je A-modul u odnosu na nasledjene operacije. Pri tome faktorgrupa M/N dobija strukturu A-modula ako se dejstvo elemenata iz A definiše na jedini mogući prirodan način, $a(m+M):=am+M$. To je onda *faktormodul* ili *količnički modul* modula M po podmodulu N. Ideali prstena A su upravo njegovi A-podmoduli.

Za dva podmodula M_1 i M_2 modula M definiše se njihov zbir i presek kao kod grupa. Neposredno se vidi da su M_1+M_2 i $M_1\cap M_2$ podmoduli modula M. Definicija zbira se uopštava na konačno mnogo a definicija preseka na proizvoljno mnogo podmodula. I definicija zbira se može uopštiti na proizvoljno mnogo sabiraka ako uzmemo samo zbirove familija elemenata u kojima je konačno mnogo sabiraka različito od nule odnosno sume sa konačnim nosačem: $\Sigma M_\alpha=\{m_{\alpha_1}+\cdots+m_{\alpha_k}|m_{\alpha_i}\in M_{\alpha_i},\, i=1,\ldots,k,\, k\in\mathbb{N}\}$

Homomorfizam A-modula ili A-linearno preslikavanje ili prosto A-morfizam je homomorfizam grupa $f:M\to N$ sa svojstvom homogenosti u odnosu na spoljnu operaciju: $f(am)=af(m)$. Kompozicija A-morfizama je A-

morfizam, takoe identiteta $M \to M$, inkluzija podmodula $N \hookrightarrow M$ i prirodna projekcija na faktormodul $M \twoheadrightarrow M/N$ su sve primeri A-morfizama. Mono-, epi- i izomorfizmi se definišu kao i kod grupa. Takodje se i jezgro i slika A-morfizma $f : M \to N$ definišu na uobičajeni način: $\operatorname{Ker} f := \{m \in M \,|\, f(m) = 0\}$ i $\operatorname{Im} f := \{f(m) \in N \,|\, m \in M\}$ i lako se vidi da su $\operatorname{Ker} f \subset M$ i $\operatorname{Im} f \subset N$ podmoduli. Osnovna teorema (teorema o homomorfizmu ili prva teorema o izomorfizmu) analogna odgovarajućoj teoremi kod Abelovih grupa kaže da je $M/\operatorname{Ker} f \cong \operatorname{Im} f$. Odgovarajući A-izomorfizam dat je formulom $m + M \mapsto f(m)$. Imamo dve standardne posledice ove teoreme:

(1) (druga teorema o izomorfizmu) Ako su M_1 i M_2 dva podmodula modula M, tada je $(M_1+M_2)/M_1 \cong M_2/(M_1 \cap M_2)$. Naime, dovoljno je teoremu primeniti na kompoziciju A-morfizama $M_2 \to M_1 + M_2 \to (M_1 + M_2)/M_1$, čije je jezgro M_1 a slika $(M_1 + M_2)/M_1$.

(2) (treća teorema o izomorfizmu) Ako je $K \subset N \subset M$ niz podmodula, tada je $(M/K)/(N/K) \cong M/N$. Naime, dovoljno je uočiti A-morfizam $f : M/K \to M/N$ odredjen sa $m + K \mapsto m + N$, dobro definisan zbog $K \subset N$, čije je jezgro $\operatorname{Ker} f = N/K$ a slika $\operatorname{Im} f = M/N$.

Uvedimo novu terminologiju - tačne nizove. Niz A-homomorfizama $K \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} M$ se naziva *tačnim nizom* (u članu N) ako je $\operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} g$ u N. Lako se proverava da je $f : M \to N$ monomorfizam ako i samo ako je niz $0 \hookrightarrow M \xrightarrow{f} N$ tačan, epimorfizam ako i samo ako je niz $M \xrightarrow{f} N \twoheadrightarrow 0$ tačan i izomorfizam ako i samo ako je niz $0 \to M \xrightarrow{f} N \to 0$ tačan u članovima M i N.

Nakajamina lema

Lema 1. Za svaki element $a \in J(A)$ Džekobsonovog radikala prstena A, element $1 - a$ je invertibilan. U suprotnom, $1 - a$ je sadržan u nekom maksimalnom idealu $\mathfrak{M}$, a pošto je i $a \in J(A) \subset \mathfrak{M}$, mora biti $1 = (1 - a) + a \in \mathfrak{M}$ što je kontradikcija.

Neka je sad M konačno generisani A-modul. Nakajamina lema u stvari predstavlja generalizaciju Kramerove teoreme za homogene linearne sisteme u slučaju kad umesto polja imamo koeficijente u prstenu. Primetimo prvo da se pojam determinante može definisati i za proizvoljnu kvadratnu matricu nad prstenom umesto nad poljem. Ova je definicija identična standardnoj: u toj definiciji se, naime, nigde ne koristi deljenje, već samo sabiranje i množenje. Isto tako, sama Kramerova teorema ostaje na snazi u sledećoj formi.

Lema 2. Neka je dat kvadratni sistem linearnih jednačina

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \cdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

sa koeficijentima a_{ij}, $b_i \in A$. Tada se standardnim postupkom (množenjem sa odgovarajućim kofaktorima i sabiranjem) kao posledica dobija sistem

$$\begin{cases} \Delta \cdot x_1 = \Delta_1 \\ \cdots \\ \Delta \cdot x_n = \Delta_n \end{cases}$$

gde su Δ i Δ_i $(i = 1, \ldots, n)$ uobičajene determinante. Specijalno, ako je polazni sistem bio homogen tj. $b_1 = \cdots = b_n = 0$, onda je $\Delta \cdot x_1 = \cdots = \Delta \cdot x_n = 0$.

Teorema. Neka je M konačno generisani A-modul i $I \subset J(A)$ ideal sadržan u Džekobsonovom radikalu prstena A. Tada, ako je $IM = M$, onda mora biti $M = 0$.

Dokaz. Neka su $x_1, \ldots, x_n$ generatori modula M tj. $M = Ax_1 + \cdots + Ax_n$. Posto je $IM = M$, tada je svaki $x_i \in IM$ pa imamo da je

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \cdots \\ x_n = a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n \end{cases}$$

za neke $a_{ij} \in I$. Odavde dobijamo linearni sistem

$$\begin{cases} (1 - a_{11})x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ \cdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + (1 - a_{nn})x_n = 0 \end{cases}$$

čija je determinanta $\Delta = \det(\delta_{ij} - a_{ij})$. Razvijanjem ove determinante i uz činjenicu da je $I \ni a_{ij}$ ideal, dobijamo da je $\Delta = 1 - a$ gde je $a \in I \subset J(A)$. Primenom leme 2 vidimo da je $\Delta \cdot x_1 = \cdots = \Delta \cdot x_n = 0$ a primenom leme 1 vidimo da $\Delta \in A$ mora biti invertibilan. Odavde je $x_1 = \cdots = x_n = 0$ q.e.d.

Primedba. Alternativni dokaz polazi od pretpostavke da je $x_1, \ldots, x_n$ minimalni generatorni skup modula M, a zatim iz jednakosti $IM = M$ dobijamo $x_n = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n$ za neke $a_i \in I$ odakle je $(1 - a_n)x_n = a_1x_1 + \cdots + a_{n-1}x_{n-1}$. Opet je na osnovu leme 1 element $1 - a_n$ invertibilan pa se x_n izražava preko $x_1, \dots, x_{n-1}$ što protivreči minimalnosti generatornog skupa.

Jezik kategorija i funktora

U matematici se, uvek kada se uvode novi matematički objekti, posmatraju i odgovarajuća preslikavanja izmedju njih koja poštuju novouvedene osobine. Tako, kada se uvodi pojam grupe ili prstena, odmah se definišu i homomorfizmi tih algebarskih struktura. Kada uvodimo pojam topološkog prostora, automatski nas interesuju neprekidne funkcije. Pa i u samoj teoriji skupova možemo reći da je pojam funkcije uveden kao veza izmedju skupova. Dakle, uvek pored objekata razmatramo i odgovarajuću klasu preslikavanja. Ova situacija je formalizovana sredinom dvadesetog veka pomoću pojma kategorije.

Definicija. *Kategorija* C se sastoji iz: (1) skupa *objekata* $\mathrm{Ob}\, C$ i (2) skupa *morfizama* (strelica) $\mathrm{Mor}\, C$, pri čemu su za svaki morfizam $f \in \mathrm{Mor}\, C$ odredjena dva objekta: *domen* $\mathrm{Dom}(f) \in \mathrm{Ob}\, C$ i *kodomen* $\mathrm{Cod}(f) \in \mathrm{Ob}\, C$. Drugim rečima, imamo par preslikavanja $(\mathrm{Dom}, \mathrm{Cod}) : \mathrm{Mor}\, C \to \mathrm{Ob}\, C \times \mathrm{Ob}\, C$. Skup svih strelica f koje imaju fiksirani domen a i kodomen b obeležava se $\mathrm{Hom}_C(a, b)$ a njegovi elementi nazivaju morfizmi iz a u b i obeležavaju sa $f : a \to b$ ili sa $a \xrightarrow{f} b$. Morfizmi igraju ulogu veza - preslikavanja iz a u b, mada u opštem slučaju to ne moraju biti preslikavanja u smislu teorije skupova. Pri tome je

(1) za svaki objekat a definisan jedan morfizam id_a ili 1_a koji se naziva *identiteta* na a. Drugim rečima, postoji (skupovno) preslikavanje $id : \mathrm{Ob}\, C \to \mathrm{Mor}\, C$;

(2) za svaka dva morfizma $f : a \to b$ i $g : b \to c$ definisan morfizam $h : a \to c$ koji se naziva *kompozicijom morfizama* f i g i obeležava $h = g \circ f = gf$. Drugim rečima, postoji (skupovno) preslikavanje $\mathrm{Hom}_C(a, b) \times \mathrm{Hom}_C(b, c) \to \mathrm{Hom}_C(a, c)$.

Identitete i kompozicija treba da zadovoljavaju sledeće aksiome.

(A1) Kompozicija je asocijativna, tj. ako je za trojku morfizama f, g, h definisana kompozicija $f \circ (g \circ h)$ (a to je kada je $\mathrm{Cod}(h) = \mathrm{Dom}(g)$ i $\mathrm{Cod}(g) = \mathrm{Dom}(f)$), tada je definisana i kompozicija $(f \circ g) \circ h$ i važi da je $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$.

(A2) Identitete su jedinični elementi za kompoziciju tj. uvek kada su kompozicije $id_a \circ f$ i $g \circ id_a$ definisane (a to je kada je $\mathrm{Cod}(f) = a$ i $\mathrm{Dom}(g) = a$), $id_a \circ f = f$ i $g \circ id_a = g$.

Kategorije se javljaju u celoj matematici. Na primer, kategorija skupova

Set ima kao objekte skupove, kao morfizme obične funkcije, kompozicija je uobičajena kompozicija funkcija, identitete su uobičajena identična preslikavanja. Kategorija grupa *Grp* kao objekte ima grupe, kao morfizme homomorfizme grupa. Kategorija topoloških prostora *Top* ima topološke prostore kao objekte, neprekidna preslikavanja kao morfizme.

Mora se napomenuti da sa stanovišta aksiomatske teorije skupova postoje odredjeni problemi prilikom formiranja tzv. velikih kategorija kao što su *Set*, *Grp*, *Top*, i druge. Naime, Ob(*Set*) bi trebalo da bude zabranjeni skup svih skupova, a isto tako i za druge velike kategorije. Ovaj se problem prevazilazi na dva načina.

Prvi, "naivni" način je da "zažmurimo" i ne govorimo o skupu objekata i skupu morfizama neke kategorije, već samo o njenim objektima i morfizmima. Naravno, morfizmi izmedju dva fiksirana objekta a i b moraju formirati (i zaista formiraju u svim navedenim primerima) skup $\mathrm{Hom}_C(a,b)$.

Drugi način je da uvedemo pojam *male kategorije* kao kategorije čiji svi objekti i morfizmi formiraju skupove. Ovo je u stvari dovoljno za primene, u kojima se uvek može smatrati da su svi skupovi i morfizmi koji se u radu pojavljuju sadržani u jednom velikom univerzalnom skupu, tzv. univerzumu. U ovom tekstu ćemo se pridržavati prvog gledišta, zanemarujući skupovne poteškoće.

Veoma čest primer (male) kategorije je uredjeni skup. Ako je X uredjeni skup sa relacijom poretka $\leq$, možemo ga posmatrati kao kategoriju $\mathcal{X}$ čiji su objekti elementi iz X a morfizmi upravo relacije $a \leq b$. Drugim rečima, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{X}}(a,b)$ je jednoelementan ako je $a \leq b$ i prazan u suprotnom. Kompozicija je obezbedjena tranzitivnošću relacije poretka, a identiteta njenom refleksivnošću. Sve potrebne osobine se direktno proveravaju. Specijalni slučaj ovog primera je kategorija *topX* svih otvorenih skupova topološkog prostora X uredjena inkluzijom.

Pošto smo uveli pojam kategorije, u duhu samog tog pojma potrebno je posmatrati i veze izmedju kategorija. Takve veze nazivamo *funktorima*. Ako su C i D dve kategorije, funktor $F : C \to D$ se sastoji iz:

preslikavanja $\mathrm{Ob}\, C \to \mathrm{Ob}\, D$, koje svakom objektu c iz C dodeljuje objekat $F(c)$ iz D;

preslikavanja $\mathrm{Hom}_C(c_1, c_2) \to \mathrm{Hom}_D(F(c_1), F(c_2))$ za svaki par objekata c_1, c_2 u C, koje svakom morfizmu $f : c_1 \to c_2$ dodeljuje morfizam $F(f) : F(c_1) \to F(c_2)$.

Pri tome moraju biti zadovoljene osobine:

$F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$; $F(id_c) = id_{F(c)}$.

Svuda gde imamo kategorije, lako možemo videti i funktore. Recimo, ako u kategoriji grupa zaboravljamo strukturu grupe, dobijamo "zaboravljajući" funktor $Grp \to Set$. Ako, pak, svakom skupu dodelimo slobodnu grupu generisanu njime kao skupom generatora, dobijamo "slobodni" funktor $Set \to Grp$. Gornja definicija opisuje tzv. *kovarijantni funktor*. Ako imamo funktor koji obrće strelice i u skladu sa time obrće i redosled kompozicije, takav funktor nazivamo *kontravarijantnim*. Ukoliko se izričito ne kaže, podrazumeva se da su funktori kovarijantni.

Hom-funktor

Neka je M fiksirani A-modul. Tada se za svaki A-modul N može posmatrati A-modul $\mathrm{Hom}(M,N) = \mathrm{Hom}_{A-Mod}(M,N)$ svih A-morfizama $M \xrightarrow{h} N$. Pri tome za proizvoljni A-morfizam $N \xrightarrow{f} N'$ imamo odgovarajući morfizam $f \circ h : M \xrightarrow{h} N \xrightarrow{f} N'$. Ovim je odredjen morfizam A-modula $\mathrm{Hom}(M,f) = \overline{f} : \mathrm{Hom}(M,N) \to \mathrm{Hom}(M,N')$, $\overline{f}(h) = f \circ h$. Neposredno se proverava da je ovako definisan kovarijantni funktor $\mathrm{Hom}(M,-)$ iz kategorije $A - Mod$ u nju samu (treba samo proveriti da je $\overline{id_N} = id_{\mathrm{Hom}(M,N)}$ i da je $\overline{h \circ k} = \overline{h} \circ \overline{k}$).

Na potpuno analogni način se za svaki A-modul N definiše kontravarijantni funktor $\mathrm{Hom}(-,N)$. Ovi funktori su tačni sa leve strane. Važi čak i jače tvrdjenje. Naime,

(1) niz

$$0 \to N' \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} N''$$

je tačan niz modula ako i samo ako je odgovarajući niz modula

$$0 \to \mathrm{Hom}(M,N') \xrightarrow{\overline{f}} \mathrm{Hom}(M,N) \xrightarrow{\overline{g}} \mathrm{Hom}(M,N'')$$

tačan za svaki modul M;

(2) niz

$$M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0$$

je tačan niz modula ako i samo ako je odgovarajući niz modula

$$0 \to \mathrm{Hom}(M'',N) \xrightarrow{\overline{g}} \mathrm{Hom}(M,N) \xrightarrow{\overline{f}} \mathrm{Hom}(M',N)$$

tačan za svaki modul N.

Dokazi ovih tvrdjenja su neposredni. Dokažimo drugo od njih.

1) ($\overline{g}$ je mono) Neka je $\overline{g}(h) = hg = 0$. Posto je g epi, mora biti $h = 0$. Drugim rečima, $\overline{g}$ je mono.

2) ($\operatorname{Im}\overline{g} \subset \operatorname{Ker}\overline{f}$) Pošto je $\operatorname{Hom}(M,-)$ funktor, biće $\overline{f} \circ \overline{g} = \overline{gf} = \overline{0} = 0$.

3) ($\operatorname{Im}\overline{g} \supset \operatorname{Ker}\overline{f}$) Neka je $\overline{f}(h) = hf = 0$ za $h \in \operatorname{Hom}(M,N)$. Treba dokazati da postoji $k \in \operatorname{Hom}(M'',N)$ takav da je $\overline{g}(k) = kg = h$. Za svako $m'' \in M''$ definišimo $k(m'')$ na sledeći način: pošto je g epi, postoji $m \in M$ takvo da je $m'' = g(m)$. Stavimo $k(m'') := h(m) \in N$. Ovo je dobra definicija, jer ako je $m'' = g(m_1) = g(m_2)$, tada je $m_1 - m_2 \in \operatorname{Ker} g = \operatorname{Im} f$ pa je $m_1 - m_2 = f(m')$ za neko $m' \in M'$. Odavde je $h(m_1 - m_2) = hf(m') = 0$ tj. $h(m_1) = h(m_2)$. Ovaj morfizam k zadovoljava traženi uslov.

Primetimo da je u dokazu korišćena tačnost polaznog niza i u srednjem, i u desnom članu. Drugim rečima, bez epimorfnosti g ne bi mogli da dokažemo tačnost u srednjem članu. Ovo znači da Hom-funktor u opštem slučaju nije tačan.

Primetimo još da postoji prirodni izomorfizam $\operatorname{Hom}_{A-Mod}(A,M) \cong M$, jer je svaki A-morfizam $f : A \to M$ jednoznačno odredjen slikom jedinice $f(1) = m \in M$. S druge strane, A-modul $\operatorname{Hom}_{A-Mod}(M,A)$ može biti i veoma veliki ali i jako mali (primeri: $\operatorname{Hom}_{Ab}(\mathbb{Z}^n,\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^n$, $\operatorname{Hom}_{Ab}(\mathbb{Z}_n,\mathbb{Z}) \cong 0$), zove se *dualni modul* modula M i obelezava se M^*.

Tenzorski proizvod modula

Ovaj se pojam može opisati kao univerzalna konstrukcija (v. dalje) vezana za bilinearna preslikavanja modula. Naime, ako je $f : M \times N \to P$ funkcija dva argumenta A-linearna po svakom ponaosob ($f(m+m',n) = f(m,n) + f(m',n)$, $f(am,n) = af(m,n)$, $f(m,n+n') = f(m,n) + f(m,n')$, $f(m,an) = af(m,n)$ za sve $m,m' \in M$, $n,n' \in N$, $a \in A$), zeleli bismo da je (jednoznacno) reprezentujemo obicnom linearnom fukcijom $f' : T \to P$. Drugim rečima, za date module M i N tražimo modul T takav da je $Bilin(M \times N, P) \cong Hom(T,P)$ za svaki modul P. To će biti egzistencijalna definicija tenzorskog proizvoda:

Definicija. Tenzorski proizvod $T = M \otimes_A N$ je A-modul zajedno sa bilinearnim preslikavanjem $p : M \times N \to T$ takvim da važi osobina univerzalnosti: ako je $f : M \times N \to P$ bilo koje bilinearno preslikavanje u neki modul P, tada postoji jedinstveni morfizam $f' : T \to P$ takav da je $f = f' \circ p$ (kaže se da se f propušta kroz p).

Iz ove definicije se lako dokazuje jedinstvenost tenzorskog proizvoda do na izomorfizam. Da bi pokazali egzistenciju tenzorskog proizvoda, moramo ga efektivno konstruisati. Uzmimo slobodni modul F generisan skupom $M \times N$ tj. svim parovima (m,n). U njemu uočimo skup svih elemenata oblika $(m+m',n) - (m,n) - (m',n)$, $(am,n) - a(m,n)$, $(m,n+n') - (m,n) - (m,n')$, $(m,an) - a(m,n)$ za proizvoljne $m,m' \in M$, $n,n' \in N$, $a \in A$ i njima generisan podmodul $K \subset F$. Stavimo $T := F/K$. Neposredno se proverava da ovaj modul ima tražena svojstva. Odgovarajuće preslikavanje p je kompozicija $M \times N \to F \to F/K = T$, pri čemu se slika elementa (m, n) obeležava $m \otimes n$. Očigledno je da svi elementi oblika $m \otimes n$ generišu modul T., kao i da važe jednakosti $(m+m') \otimes n = m \otimes n + m' \otimes n$, $(am) \otimes n = a(m \otimes n)$, $m \otimes (n + n') = m \otimes n + m \otimes n'$ i $m \otimes (an) = a(m \otimes n)$.

Neposrednim računom proverava se da je za svaki modul M, $M \otimes -$ jedan kovarijantni funktor na kategoriji A-modula. Ako je $f : N \to N'$ morfizam, definišemo $M \otimes f$ ili $1 \otimes f$ kao preslikavanje odredjeno na generatorima $m \otimes n$ modula $M \otimes N$ sa $(1 \otimes f)(m \otimes n) := m \otimes f(n) \in M \otimes N'$.

Izmedju funktora Hom i tenzorskog proizvoda postoji veoma zanimljiva i važna veza, koja ima i širi značaj sa stanovišta teorije kategorija: ti funktori su adjungovani. Naime, postoji izomorfizam modula

$$\mathrm{Hom}(M \otimes N, P) \cong \mathrm{Hom}(M, \mathrm{Hom}(N, P))$$

prirodan po svakom od argumenata M, N i P (ovo znači da kad god imamo morfizam $M \to M'$, $N \to N'$ ili $P \to P'$, svi dijagrami koji se pri tome javljaju su komutativni, recimo dijagram

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}(M' \otimes N, P) & \to & \mathrm{Hom}(M', \mathrm{Hom}(N, P)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Hom}(M \otimes N, P) & \to & \mathrm{Hom}(M, \mathrm{Hom}(N, P)) \end{array}$$

je komutativan). Ovaj izomorfizam se bazira na jednostavnoj činjenici da kad god imamo bilinearnu funkciju $f : M \times N \to P$, fiksiranjem jednog od argumenata $m \in M$ ona definiše linearnu funkciju $f(m, -) : N \to P$ tj. element iz $\mathrm{Hom}(N, P)$. Time dobijamo preslikavanje $M \to \mathrm{Hom}(N, P)$. I obrnuto, za svako takvo A-linearno preslikavanje $m \mapsto f_m$, familija f_m definiše jedno bilinearno preslikavanje $M \times N \to P$. Dobijamo niz bijekcija

$$\mathrm{Hom}(M \otimes N, P) \cong \mathrm{Bilin}(M \times N, P) \cong \mathrm{Hom}(M, \mathrm{Hom}(N, P))$$

što smo i tražili.