0.1 Projektivni prostori i preslikavanja

Projektivni n-dimenzionalni prostor se može definisati na više načina.

Prvi način je aksiomatski i on se koristi u sintetičkoj geometriji. Na njemu se nećemo zadržavati, već ćemo razmotriti dve definicije koje se koriste u linearnoj algebri.

Geometrijska beskoordinatna definicija je sledeća. U afinom prostoru $\mathcal{A}$ nad poljem K izaberimo jednu tačku O i uvedimo relaciju ekvivalencije $\sim$ na sledeći način: tačke A i B su ekvivalentne ako su tačke O, A i B kolinearne. Projektivni prostor $\mathcal{P}$ nad poljem K je $\mathcal{P} = \mathcal{A} \setminus \{O\} / \sim$. Dimenzija tog projektivnog prostora je za 1 manja od dimenzije polaznog afinog prostora $\mathcal{A}$. Svaka klasa ekvivalencije $p \in \mathcal{P}$ je u stvari prava kroz O, pa tako dolazimo do sledeće geometrijske definicije: projektivni prostor $\mathcal{P}$ je pramen pravih kroz fiksiranu tačku afinog prostora $\mathcal{A}$, a prave prostora $\mathcal{A}$ su tačke prostora $\mathcal{P}$. Intuitivno, za svaku pravu prostora $\mathcal{A}$ dimenzije $n+1$ vezujemo njenu beskonačno daleku tačku i to je tačka prostora $\mathcal{P}$ dimenzije n.

Ako preemo na koordinate tako što u $\mathcal{A}$ izaberemo reper $Oe_0 \dots e_n$, tada je prava kroz O zadata jednačinama $x_i = \lambda_i \cdot t$ gde je bar jedno $\lambda_i \neq 0$, $i = 0, \dots, n$ i $t \in K$. Pri tome, koeficijenti pravca prave λ_i su odredjeni s tačnošću do proporcionalnosti: za $\lambda \neq 0$, koeficijenti pravca $\lambda \cdot \lambda_i$ odredjuju istu pravu kao i koeficijenti pravca λ_i. To znači da je afina prava odnosno projektivna tačka jednoznačno odredjena svojim *homogenim koordinatama* $(\lambda_0 : \lambda_1 : \cdots : \lambda_n) = (\lambda \cdot \lambda_0 : \lambda \cdot \lambda_1 : \cdots : \lambda \cdot \lambda_n)$. To su u stvari klase ekvivalencije tačaka $(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n) \in K^{n+1}$ u odnosu na množenje skalarom (tj. dejstvo skalarnim matricama λE). Dakle, aritmetički projektivni prostor dimenzije n nad poljem K je skup $\mathbb{P}^n_K = \{(x_0 : x_1 : \cdots : x_n) \,|\text{bar jedno } x_i \neq 0\} = \mathbb{A}^{n+1}_K \setminus \{o\} / \sim$ gde smo koordinate umesto λ_i obeležili sa x_i.

Poslednja definicija daje nam i dobar uvid u strukturu projektivnog prostora. Naime, $\mathbb{P}^n_K$ se razlaže u disjunktnu uniju dva podskupa

$$\mathbb{P}^n_K = \{(x_0 : x_1 : \cdots : x_n) \,|x_0 \neq 0\} \cup \{(0 : x_1 : \cdots : x_n) \,|\text{bar jedno } x_i \neq 0,\, i \neq 0\}.$$

Prvi od ta dva podskupa je u stvari $\{(1 : x_1/x_0 : \cdots : x_n/x_0) \,|x_0 \neq 0\}$ izomorfan afinom prostoru

$$\mathbb{A}^n_K = \{(x_1/x_0, \dots, x_n/x_0) \,|x_0 \neq 0\},$$

a drugi je izomorfan projektivnom prostoru

$$\mathbb{P}^{n-1}_K = \{(x_1 : \cdots : x_n) \,|\text{bar jedno } x_i \neq 0\},$$

pa je, posle odgovarajućih identifikacija, $\mathbb{P}^n_K = \mathbb{A}^n_K \cup \mathbb{P}^{n-1}_K$. Prvi "sabirak" je *afina karta* u odnosu na koordinatu x_0. Drugi "sabirak" je beskonačno daleki hiperprostor u odnosu na afinu kartu $\mathbb{A}^n_K$. Svaka prava u $\mathbb{A}^n_K$ seče taj beskonačno daleki prostor $\mathbb{P}^{n-1}_K$ u jednoj tački.

Pošto smo umesto homogene koordinate x_0 mogli da izaberemo bilo koju drugu koordinatu x_i, vidimo da postoji $n+1$ različitih razlaganja $\mathbb{P}^n_K = (\mathbb{A}^n_K)_i \cup \left(\mathbb{P}^{n-1}_K\right)_i$ u odnosu na različite homogene koordinate $(i = 0, n)$.

Ovo razlaganje nas dovodi i do topološke interpretacije projektivnog prostora u slučaju kada je polje $K = \mathbb{R}$. Naime, $\mathbb{P}^0_{\mathbb{R}}$ je jedna tačka, a $\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}} = \mathbb{A}^1_{\mathbb{R}} \cup \mathbb{P}^0_{\mathbb{R}}$ je jednotačkovna kompaktifikacija obične prave $\mathbb{A}^1_{\mathbb{R}}$. Topološki gledano, to je sfera S^1. Projektivna ravan $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} = \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}} \cup \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$ je kompaktifikacija ravni $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$, ali ne jednotačkovna (tada bi to bila sfera S^2), već kompaktifikacija koja se dobije kada se na rub S^1 sfere $S^2 \setminus D^2$ (D^2 je dvodimenzionalni disk) "zalepi" rub S^1 Mebijusove trake M^2. Do toga dolazi zato što svaka prava u $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ ima jednu beskonačno daleku tačku u preseku sa $\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}} = S^1$ a ne dve, pa se tačke u kojima prava seče S^1 u beskonačnosti identifikuju. Dakle, u toj konstrukciji se na beskonačno dalekoj projektivnoj pravoj $\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}} = S^1$ naspramne tačke identifikuju.

Ravne algebarske krive su podskupovi afine ravni, a posle projektivizacije (homogenizacije) postaju podskupovi projektivne ravni. Projektivna ravan $\mathbb{P}^2_K = \{(X:Y:Z)\,|\text{bar jedno od } X,Y,Z \text{ je} \neq 0\}$ ima tri afine karte $\left(\mathbb{A}^2_K\right)_X = \{(1:Y/X:Z/X)\,|X\neq 0\}$, $\left(\mathbb{A}^2_K\right)_Y = \{(X/Y:1:Z/Y)\,|Y\neq 0\}$ i $\left(\mathbb{A}^2_K\right)_Z = \{(X/Z:Y/Z:1)\,|Z\neq 0\}$ i tri odgovarajuće beskonačno daleke prave $\left(\mathbb{P}^1_K\right)_X = \{X=0\}$, $\left(\mathbb{P}^1_K\right)_Y = \{Y=0\}$ i $\left(\mathbb{P}^1_K\right)_Z = \{Z=0\}$.

Razmotrimo sada preslikavanja projektivnih prostora koja u odredjenom smislu nastavljaju odgovarajuća afina preslikavanja. Klasifikacija geometrijskih objekata u odnosu na afina preslikavanja je klasifikacija u odnosu na translaciju $y = x+a$ i na matričnu smenu promenljivih $y = Ax$, gde je A bilo koja regularna matrica.

U slučaju ravni $n = 2$, $\mathcal{A} = k^2$, afina preslikavanja su zadata jednačinama

$$\left\{\begin{array}{lcl} y_1 & = & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_1 \\ y_2 & = & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + b_2 \end{array}\right.$$

ili, u standardnim oznakama analitičke geometrije, $\Phi : k^2 \longrightarrow k^2$, $\Phi(x,y) = (x',y')$ i

$$\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & a_1x + b_1y + c_1 \\ y' & = & a_2x + b_2y + c_2 \end{array}\right. .$$

Homogenizacija ovih jednačina dovodi nas do pojma projektivnih preslikavanja.

U koordinatama, $\mathbb{P}^2_K = \{(X:Y:Z)\,|X,Y,Z\in K, \text{ bar jedno} \neq 0\}$. Lako se vidi da je u afinoj karti $Z \neq 0$ afino preslikavanje zadato formulama

$$\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & a_1\frac{X}{Z} + b_1\frac{Y}{Z} + c_1 \\ y' & = & a_2\frac{X}{Z} + b_2\frac{Y}{Z} + c_2 \end{array}\right. ,$$

odnosno

$$\left\{\begin{array}{lcl} X' & = & a_1X + b_1Y + c_1Z \\ Y' & = & a_2X + b_2Y + c_2Z \\ Z' & = & Z \end{array}\right. ,$$

ili u matričnom obliku

$$\begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & 0 \\ b_1 & b_2 & 0 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}.$$

Jasno je da ako uzmemo drugu trojku homogenih koordinata $(\lambda X : \lambda Y : \lambda Z)$ date tačke dobićemo koordinate $(\lambda X' : \lambda Y' : \lambda Z')$ iste tačke slike. To znači da ove formule definišu projektivno preslikavanje $\mathbb{P}^2_K \longrightarrow \mathbb{P}^2_K$ sa svojstvom da beskonačno daleku pravu prevodi u nju samu: $Z = 0 \Longrightarrow Z' = 0$. Kako treba da izgleda matrica koja definiše opšte projektivno preslikavanje $\mathbb{P}^2_K \longrightarrow \mathbb{P}^2_K$? Jasno je da množenje koordinata sa λ dovodi do rezultata pomnoženog sa istim λ. Isto tako, jasno je da matrice

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \text{ i } \begin{pmatrix} \lambda a_1 & \lambda a_2 & \lambda a_3 \\ \lambda b_1 & \lambda b_2 & \lambda b_3 \\ \lambda c_1 & \lambda c_2 & \lambda c_3 \end{pmatrix} = \lambda E \cdot \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$$

definišu isto preslikavanje. Odavde sledi da je projektivno preslikavanje odredjeno klasom ekvivalencije matrica za jedan veće dimenzije po relaciji ekvivalencije generisanoj dejstvom skalarnih matrica λE. To dovodi do sledeće definicije.

Projektivna grupa $PGL(n, K)$ je grupa $GL(n, K)/Z(n, K)$ gde je $Z(n, K) \cong K^*$ grupa invertibilnih skalarnih matrica λE. Oznaka $Z(n, K)$ asocira na činjenicu da je to centar grupe $GL(n, K)$.