

0.1 Производ група

0.1.1 Директан производ група

Ако су дате две групе H и K , на њиховом Декартовом производу $H \times K = \{(h, k) | h \in H, k \in K\}$ се једноставно уводи структура групе, помоћу покомпонентно дефинисане операције $(h_1, k_1) \cdot (h_2, k_2) := (h_1 h_2, k_1 k_2)$. Операција је очигледно асоцијативна, лако се проверава да је (e, e) јединични елемент ове групе, а да је инверзни елемент дат формулом $(h, k)^{-1} = (h^{-1}, k^{-1})$. Декартов производ постаје група, која се назива **(спољашњи) директан производ група H и K** и обележава исто као и скуп: $H \times K$.

Примери: 1) $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ је група са четири елемента $o = (0, 0)$, $a = (0, 1)$, $b = (1, 0)$ и $c = (1, 1)$ и таблицом операције (сабирања)

+	o	a	b	c
o	o	a	b	c
a	a	o	c	b
b	b	c	o	a
c	c	b	a	o

2) Опишите групу $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$.

Нека је сад G група и $H, K < G$ две њене подгрупе. Тада имамо скуп $H \times K$ свих уређених парова (h, k) елемената $h \in H, k \in K$ и пресликавање $f : H \times K \rightarrow G$, $(h, k) \mapsto hk$. Слика овог пресликавања $\text{Im } f = \{hk | h \in H, k \in K\} \subset G$ се обележава са HK и зове производ подгрупа H и K у групи G .

Следећа тврђења су еквивалентна:

- 1) пресликавање f је "на",
- 2) сваки елемент $g \in G$ се може представити у облику производа $g = hk$, $h \in H, k \in K$,
- 3) $HK = G$.

Такође, следећа тврђења су еквивалентна:

- 1) пресликавање f је "1-1",
- 2) представљање елемента $g \in HK$ у облику производа $g = hk$ елемената $h \in H, k \in K$ је једнозначно,
- 3) $H \cap K = \{1\}$.

Заједно, претходне две еквиваленције значе да су следећа тврђења еквивалентна:

- 1) пресликавање f је бијекција,
- 2) сваки елемент $g \in G$ се једнозначно може представити у облику производа $g = hk$, $h \in H, k \in K$,
- 3) $HK = G$ и $H \cap K = \{1\}$.

Нека је група G производ својих подгрупа $H, K < G$ тј. нека је $HK = G$ и $H \cap K = \{1\}$. Следећа тврђења су еквивалентна:

- 1) обе подгрупе H, K су инваријантне: $H, K \triangleleft G$,

- 2) елементи подгрупа H, K међусобно комутирају: $hk = kh, (h \in H, k \in K)$,
 3) група G је изоморфна (спољашњем) директном производу група $G \cong H \times K$.

У овом случају кажемо да је група G **(унутрашњи) директан производ својих подгрупа** $H, K < G$.

0.1.2 Семидиректан производ група

Нека је сад група G производ својих подгрупа $H, K < G$ тј. нека је $HK = G$ и $H \cap K = \{1\}$ и нека је само једна подгрупа H инваријантна: $H \triangleleft G$ док друга није: $K < G$. У том случају кажемо да је G **(унутрашњи) семидиректан производ својих подгрупа**.

Бијекција $f : H \times K \rightarrow G, (h, k) \mapsto hk$ у овом случају није изоморфизам постојећих груповних структура, али нам може послужити за увођење нове структуре групе на Декартовом производу $H \times K$ у којој ће f бити изоморфизам група. Наиме, да би f био хомоморфизам, требало би да буде $f((h_1, k_1) \cdot (h_2, k_2)) = f((h_1, k_1)) \cdot f((h_2, k_2))$ тј. ако је $(h, k) = (h_1, k_1) \cdot (h_2, k_2)$, тада мора бити $hk = h_1k_1h_2k_2$. Пошто је подгрупа H инваријантна у G , биће $k_1h_2 = h'k_1$ за неко $h' = k_1h_2(k_1)^{-1} \in H$, па следи $hk = h_1k_1h_2k_2 = h_1h' \cdot k_1k_2 = h_1(k_1h_2(k_1)^{-1}) \cdot k_1k_2$. Због једнозначности репрезентације производа hk сада је нужно $h = h_1h' = h_1(k_1h_2(k_1)^{-1})$, $k = k_1k_2$. Тиме је нова операција $\cdot$ на скупу $H \times K$ једнозначно одређена: $(h_1, k_1) \cdot (h_2, k_2) := (h_1(k_1h_2(k_1)^{-1}), k_1k_2)$. Добијамо још једну нову структуру групе на скупу $H \times K$, друкчију од структуре директног производа. Ова група се зове **(спољашњи) семидиректан производ група** H и K , и обележава $H \rtimes K$. Положај знака $\rtimes$ показује нам која је од две полазне подгрупе инваријантна у групи G ($H \triangleleft G$).

Пример. Уочимо групу S_3 и у две њене подгрупе $H = \{123, 231, 321\}$ индекса 2 (дакле, инваријантну: $H \triangleleft S_3$) и $K = \{123, 132\}$. Лако се проверава да је $S_3 = HK$ (унутрашњи) семидиректан производ својих подгрупа H и K , $H \cap K = \{1\}$, $H \cong \mathbb{Z}_3$, $K \cong \mathbb{Z}_2$ и $S_3 \cong \mathbb{Z}_3 \rtimes \mathbb{Z}_2$ (спољашњи) семидиректан производ група $\mathbb{Z}_3$ и $\mathbb{Z}_2$.

0.1.3 Коси производ група

Погледајмо мало боље дефиницију операције која је на Декартовом производу индукована унутрашњим семидиректним производом група и упоредимо је са операцијом у директном производу:

$$\begin{aligned} (h_1, k_1) \cdot (h_2, k_2) &:= (h_1h_2, k_1k_2); \\ (h_1, k_1) \cdot (h_2, k_2) &:= (h_1(k_1h_2(k_1)^{-1}), k_1k_2). \end{aligned}$$

Видимо да се ове две операције разликују једино тако што је у другој операцији вредност елемента h_2 замењена вредношћу $k_1 h_2 (k_1)^{-1}$ тј. резултатом дејства унутрашњег аутоморфизма σ_{k_1} одређеног елементом $k_1 \in K$ на елемент $h_2 \in H$. Ово нам даје једну могућност генерализације дефиниције. Наиме, ако уместо унутрашњих аутоморфизама одређених елементима $k \in K$ узмемо произвољно дејство $\phi : K \rightarrow \text{Aut } H$, можемо дефинисати укрштени (коси) производ група H и K везаних дејством ϕ групе K на аутоморфизмима групе H ($\phi : K \rightarrow \text{Aut } H$) помоћу формуле $(h_1, k_1) \cdot (h_2, k_2) := (h_1 \phi_{k_1}(h_2), k_1 k_2)$. Непосредно се проверава (проверите!) да се овако добија структура групе на Декартовом производу $H \times K$, која се обележава $H \rtimes_{\phi} K$ и назива коси производ или спољашњи семидиректан производ. Ова група има две подгрупе $H \times \{/QQ[435]\} \cong H$ и $\{/QQ[435]\} \times K \cong K$ од којих је прва инваријантна.

Обичан (спољашњи) директни и семидиректни производ на скупу $H \times K$ (где су $H, K < G$, $HK = G$ и $H \cap K = \{/QQ[435]\}$) су специјални случајеви ове конструкције, први за идентично дејство $\phi : K \rightarrow \text{Aut } H$, $\phi(k) = id_H : H \rightarrow H$, $id_H(h) = h$, други за дејство унутрашњим аутоморфизмима $\phi : K \rightarrow \text{Aut } H$, $\phi(k) = \sigma_k : H \rightarrow H$, $\sigma_k(h) = khk^{-1}$.