0.1 Dejstvo grupe na skup

Dejstvo grupe na skup (tačaka) predstavlja pojavu prvenstveno geometrijskog karaktera, mada se javlja i u mnogim drugim situacijama.

Definicija. Neka je G grupa, X skup, a $S(X)$ grupa permutacija skupa X. Kažemo da G *dejstvuje na X pomoću φ* ako je $\varphi : G \to S(X)$ homomorfizam grupa. Homomorfizam φ naziva se *dejstvom*.

Dakle, za svako $g \in G$, element $\varphi(g)$ je bijekcija skupa X i važi

$$\varphi(g_1 g_2) = \varphi(g_1)\varphi(g_2).$$

Element $\varphi(g)(x) \in X$ obeležavaćemo jednostavno sa gx. Na taj način dejstvo G na X možemo posmatrati i kao spoljnu operaciju $G \times X \to X$, $(g, x) \mapsto gx$, pri čemu:

1) $g_1(g_2 x) = (g_1 g_2)x$;

2) za fiksirano $g \in G$ preslikavanje $x \mapsto gx$ je bijekcija.

Primedba. Ako je $e \in G$ jedinični element grupe, zbog homomorfnosti φ mora da bude $\varphi(e) = id$, tj. za svako x, $ex = x$. Isto tako, mora da bude $\varphi(g^{-1}) = (\varphi(g))^{-1}$, pri čemu je prvi inverz u grupi G, a drugi inverzna funkcija, tj. $x \mapsto g^{-1}x$ je inverzno preslikavanje za $x \mapsto gx$.

Primeri. (1) Svaka grupa G može dejstvovati na sebi samoj ($X = G$) na razne načine. Evo nekoliko primera. Za svaka dva elementa $g, x \in G$ možemo definisati:

a) $\varphi(g)(x) = gx$, tj. $\varphi(g) = l_g$ (dejstvo levim translacijama);

b) $\varphi(g)(x) = xg$, tj. $\varphi(g) = r_g$ (dejstvo desnim translacijama);

v) $\varphi(g)(x) = g^{-1}xg$, tj. $\varphi(g) = \sigma_g$ (dejstvo unutrašnjim automorfizmima).

Neposredno se proverava da li su ovo zaista dejstva G na G.

(2) Grupa S_n dejstvuje na skup $\{1, 2, \ldots, n\}$ pomoću $\varphi = id$: uzmimo da je $\varphi(\sigma) = \sigma$.

(3) Ako je $X = V$ $\mathbb{F}$-vektorski prostor, a $G = GL(V)$ grupa svih automorfizama $L : V \to V$, tada $GL(V)$ dejstvuje na V ako uzmemo da je $\varphi(L) = L$ jer je L bijekcija po definiciji.

(4) Ako je $X = \mathcal{B}$ skup ureenih baza u V, i na njemu onda dejstvuje grupa $GL(V)$: ako je $e = (e_1, \ldots, e_n)$ baza, $\varphi(L)(e) := (L(e_1), \ldots, L(e_n))$ je, takoe, baza jer je L automorfizam.

(5) I grupa $GL^+(V) := \{L \in GL(V) | \det L > 0\}$ dejstvuje na $\mathcal{B}$ pomoću istog homomorfizma φ.

Primedba. Ako G dejstvuje na skup X pomoću φ, a H je podgrupa grupe G, tada i H dejstvuje na X pomoću istog dejstva φ.

Neka grupa G dejstvuje na skup X i $x \in X$. Postavlja se pitanje u koje se sve elemente može transformisati x pod dejstvom grupe G.

Definicija. *Orbita* elementa $x \in X$ pod dejstvom grupe G je skup

$$Gx := \{gx \,|\, g \in G\}.$$

Tvrenje. Relacija $\sim$ na skupu X, definisana sa $x \sim y \Leftrightarrow y \in Gx$, jeste relacija ekvivalencije na X, čije su klase ekvivalencije upravo orbite.

Dokaz. Refleksivnost: $x \sim x$ jer je $x = ex$. Simetričnost: ako je $x \sim y$, to znači da postoji element $g \in G$ takav da je $y = gx$. Ali tada je $x = g^{-1}y$, pa je $x \in Gy$ i $y \sim x$. Tranzitivnost: ako je $x \sim y$ i $y \sim z$, tada je $y = gx$ i $z = hy$ za neke $g, h \in G$. Sada je $z = h(gx) = (hg)x$, pa je $z \sim x$. ∎

Dakle, svake dve orbite se ili poklapaju, ili su disjunktne.

!! Kardinalnosti pojedinih orbita mogu da budu različite.

Definicija. Skup svih orbita u X naziva se *količnik* (*faktor*) skupa X po dejstvu grupe G i obeležava sa X/G. Dejstvo je *tranzitivno* ako je X/G jednoelementni skup.

Dakle, dejstvo G na X je tranzitivno ako postoji samo jedna orbita, tj. ako se svaki element iz X može, pod dejstvom G, transformisati u bilo koji drugi element iz X.

Primeri. Dejstvo (2) je tranzitivno jer za svaka dva elementa $i, j \in X$ postoji permutacija $\sigma = \tau_{ij}$ (transpozicija (ij)) koja prevodi i u j (a ostale elemente ne menja, što ovde nije od značaja).

Dejstvo (3) nije tranzitivno; skup orbita je dvoelementan. Naime, za svaki linearni operator L je $L(o) = o$, pa je orbita nula-vektora $\{o\}$. Ako su pak v i w dva vektora $\neq o$, možemo ih dopuniti do baza $(v, e_2, \ldots, e_n)$ i $(w, e_2', \ldots, e_n')$ respektivno. Tada postoji linearna transformacija koja prvu bazu prevodi u drugu, pa posebno vektor v u vektor w. Naravno, na skupu $V \backslash \{o\}$ G takoe dejstvuje, i to tranzitivno.

Dejstvo (4) je tranzitivno jer, kao što smo videli, za svake dve baze $e = (e_1, \ldots, e_n)$ i $e' = (e_1', \ldots, e_n')$ postoji linearna transformacija koja e prevodi u e'.

Dejstvo (5) nije tranzitivno i ima dve orbite. Naime, baze e i e' pripadaju istoj orbiti ako i samo ako je determinanta matrice prelaza pozitivna, tj. ako su isto orijentisane. Dakle, X/G je dvoelementni skup orijentacija na V.

Iz definicije sledi da element $e \in G$ dejstvuje trivijalno na X, tj. $ex = x$ za $\forall x \in X$. Postavlja se pitanje ima li još elemenata koji dejstvuju trivijalno. Očigledno, g dejstvuje trivijalno ako i samo ako je $\varphi(g) = id$, tj. ako je $g \in \operatorname{Ker}\varphi$.

Definicija. Dejstvo φ grupe G na skup X je *slobodno* (ili *efektivno*) ako je $\operatorname{Ker}\varphi = \{e\}$.

Dakle, dejstvo je slobodno ako je e jedini element s trivijalnim dejstvom.

Primeri. Neposredno se vidi da su dejstva u primerima (2), (3), (4) i (5) slobodna.

Neka je sada $x \in X$ fiksirano. Znamo da je $ex = x$. Postoji li još neki element $g \in G$ za koji je $gx = x$?

Definicija. *Stabilizator* elementa $x \in X$ je skup $\operatorname{Stab}(x) = \{g \in G | gx = x\}$.

Dakle, stabilizator elementa x je skup svih g koji to x ne menjaju, tj. skup svih g za koje je x nepokretna tačka.

Tvrenje. Za svako $x \in X$, stabilizator $\operatorname{Stab}(x)$ je podgrupa u G i

$$\cap \{\operatorname{Stab}(x) | x \in X\} = \operatorname{Ker}\varphi.$$

Dejstvo je slobodno ako i samo ako je taj presek jednak $\{e\}$.

Dokaz. Ako su $g, h \in \mathrm{Stab}(x)$, onda je $gx = x$ i $hx = x$, pa je $h^{-1}x = x$ i $gh^{-1}x = x$, tj. $gh^{-1} \in X$. Zato je $\mathrm{Stab}(x)$ podgrupa. Očigledno, za svako $g \in \mathrm{Ker}\,\varphi$ je uvek $gx = x$, pa je $\mathrm{Ker}\,\varphi \subset \cap\{\mathrm{Stab}(x)|x \in X\}$. Obrnuta inkluzija je takoe očigledna. ∎

Primeri. (2) Za svaki element $i \in X$, $\mathrm{Stab}(i)$ je podgrupa svih permutacija u S_n kojima je i nepokretan indeks. Ta je podgrupa izomorfna s grupom S_{n-1}.

(3) Očigledno, $\mathrm{Stab}(o) = GL(V)$. Za $v \neq o$, $\mathrm{Stab}(v)$ je skup svih automorfizama L za koje je $L(v) = v$, tj. za koje je $\lambda = 1$ sopstvena vrednost i v odgovarajući sopstveni vektor.

(4) Ako je, za neku bazu e, $L(e) = e$, onda je L identični automorfizam: $L = I$. Zato je $\mathrm{Stab}(e) = \{I\}$, tj. svi stabilizatori su trivijalni.

(5) Pošto je $GL^+(V) \subset GL(V)$ podgrupa, na osnovu prethodnog primera i ovde je stabilizator $\mathrm{Stab}(e)$ svake baze e trivijalan.