OPAML
Letnji semestar 2019/20

Bezuova teorema II.

Kod razmatranja presečnih tačaka dve algebarske krive moramo voditi računa o sledeća tri pitanja: prvo, o presečnim tačkama koje se nalaze u algebarskom zatvorenju osnovnog polja (tačke koje dobijamo *kompleksifikacijom*); drugo, o tačkama koje se nalaze u beskonačnosti (tačke do kojih stižemo *projektivizacijom*) i treće, o višestrukosti samih presečnih tačaka. Zbog prva dva zahteva, radićemo odmah u projektivnoj ravni $\mathbb{P}^2_k$ nad algebarski zatvorenim poljem k (možemo smatrati da je to u stvari polje $\mathbb{C}$ kompleksnih brojeva). Neka su $f(x,y)$ i $g(x,y)$ dva polinoma iz prstena $k[x,y]$ (totalnog) stepena m i n respektivno. U afinoj ravni k^2 ta dva polinoma definišu dve ravne algebarske krive $A : f(x,y) = 0$ i $B : g(x,y) = 0$ stepena m i n respektivno. Posle homogenizacije $x \to \frac{x}{z}$, $y \to \frac{y}{z}$ ti se polinomi zapisuju kao homogeni polinomi oblika $F(x,y,z) = a_0(x,y)z^m + \ldots + a_m(x,y)$, $G(x,y,z) = b_0(x,y)z^n + \ldots + b_n(x,y)$ gde su a_i i b_j homogeni polinomi stepena $\deg a_i(x,y) = i$, $\deg b_j(x,y) = j$, pri čemu dopuštamo mogućnost da su najstariji koeficijenti $a_0, b_0 = 0$. U projektivnoj ravni $\mathbb{P}^2_k = k^2 \cup \mathbb{P}^1_k$ ta dva polinoma definišu dve ravne algebarske krive $\bar{A} : F(x,y,z) = 0$ i $\bar{B} : G(x,y,z) = 0$ stepena m i n respektivno koje prilikom dehomogenizacije $(z = 1)$ daju polazne krive A i B u afinoj ravni k^2, dok njihove beskonačno daleke tačke u $\mathbb{P}^1_k$ dobijamo rešavajući jednačine koje dobijamo kad stavimo $z = 0$. Krive $\bar{A}$ i $\bar{B}$ su *projektivna zatvorenja* krivih A i B. Smatraćemo da su polinomi F i G uzajamno prosti tj. da nemaju zajedničke faktore stepena ≥ 1. Naime, zajednički faktor bi dao zajedničku komponentu ovih krivih, pa bi broj tačaka preseka bio beskonačan. Naš cilj je da izbrojimo sve njihove presečne tačke.

Teorema (Bezuova teorema u ravni). Broj presečnih tačaka dve krive u projektivnoj ravni nad algebarski zatvorenim poljem koje nemaju zajedničke komponente jednak je proizvodu njihovih stepena mn.

Dokaz. Imamo sistem jednačina

$$\begin{cases} F(x,y,z) = 0 \\ G(x,y,z) = 0 \end{cases},$$

čija rešenja $(x : y : z)$ predstavljaju presečne tačke polazne dve krive. Formirajmo rezultantu ova dva polinoma, tj. determinantu

$$R(F,G) = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \ldots & a_m & & & \\ & a_0 & a_1 & \ldots & a_m & & \\ & & & & \ldots & & \\ & & & a_0 & a_1 & \ldots & a_m \\ b_0 & b_1 & \ldots & b_n & & & \\ & b_0 & b_1 & \ldots & b_n & & \\ & & & & \ldots & & \\ & & & b_0 & b_1 & \ldots & b_n \end{vmatrix} \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{matrix} a \\ a \\ a \\ a \end{matrix}}\right\} n \\ \left.\vphantom{\begin{matrix} b \\ b \\ b \\ b \end{matrix}}\right\} m \end{array}$$

gde su a_i i b_j polinomi po x, y. To je homogeni polinom $R(x, y)$ po x, y stepena $m+n$. Na osnovu osobina rezultante, sistem

$$\begin{cases} F(x_0, y_0, z) = 0 \\ G(x_0, y_0, z) = 0 \end{cases}$$

ima zajednički faktor tj. rešenje $z = z_0 \Leftrightarrow R(x_0, y_0) = 0$. Stepen homogenog polinoma R je mn i on se razlaže u proizvod mn linearnih faktora (računajući njihove višestrukosti) $R(x, y) = const \cdot \prod_{j=1,k} (y_j x - x_j y)^{m_j}$, $\sum_{j=1,k} m_j = mn$. Svaki od tih faktora odredjuje jedno rešenje $(x_j : y_j : z_0)$ višestrukosti m_j a to je presečna tačka krivih. Pri tome, prava $y_j x - x_j y = 0$ u ravni k^2 predstavlja pravu kroz koordinatni početak i tu presečnu tačku. Ako je odgovarajuće $z_0 \neq 0$, ta je tačka u afinoj ravni k^2, ako je $z_0 = 0$ to je beskonačno daleka tačka odgovarajuće prave i pripada $\mathbb{P}^1_k$. Odavde sledi da, računato sa višestrukostima, ima tačno mn presečnih tačaka $(x_0 : y_0 : z_0)$.

Ovo je jedna od najznačajnijih teorema klasične teorije ravnih algebarskih krivih. Ona ima ozbiljna uopštenja. Najveći problem koji se u tim uopštenjima prevazilazi je pitanje dobrog definisanja višestrukosti preseka.

Sada možemo ponovo pogledati preseke pravih i krivih drugog reda.

1) Za presek dve prave je jasno sledeće: ako nemaju zajedničku komponentu, mora postojati tačno jedna presečna tačka. Tri slučaja iz analitičke geometrije znače: ili se dve prave seku (presek u konačnom, afinom delu projektivne ravni), ili su paralelne (to je jednostruki presek u beskonačnosti tj. na beskonačno dalekoj pravoj projektivne ravni), ili se poklapaju (to je zajednička komponenta).

2) Na osnovu Bezuove teoreme svake dve krive drugog reda seku se u četiri tačke, samo što one mogu biti višestruke, kompleksne ili beskonačno daleke. Nadjite primere različitog rasporeda presečnih tačaka standardnih krivih drugog reda. Nadjite takodje primer kada se dve krive drugog reda (uputstvo: one mogu biti i degenerisane) seku po celoj zajedničkoj komponenti, dakle imaju beskonačno mnogo presečnih tačaka.

3) Za tri krive trećeg reda $y = x^3$, $y = x^2(x-1)$, $y = x(x^2-1)$ opisati preseke sa pravim kroz koordinatni početak. Na osnovu Bezuove teoreme, broj tih tačaka mora biti uvek 3. U svakom primeru skicirajte krive u afinom delu ravni i nadjite sve tri tačke.