OPAML
Letnji semestar 2019/20

Rezultanta dva polinoma.

Neka je A polinomski prsten i neka su $f, g \in A[x]$ dva polinoma sa koeficijentima iz A $f = a_0x^m + \ldots + a_m$, $g = b_0x^n + \ldots + b_n$ (tj. to mogu biti i polinomi od više promenljivih $x_1, \ldots, x_k$ i x). Pri tome dopuštamo i mogućnost da su najstariji koeficijenti $a_0, b_0 = 0$. Pošto je $A[x]$ takođe prsten sa jednoznačnom faktorizacijom, mogu nas interesovati zajednički faktori polinoma f i g. Iz definicije zajedničkog faktora očigledno sledi ova lema.

Lema. Polinomi f i g imaju netrivijalni zajednički faktor $\Leftrightarrow$ postoje polinomi $u, v \in A[x]$, $u, v \neq 0$ takvi da je $\deg u < \deg f$, $\deg v < \deg g$ i $vf = ug$.

Ako ovaj uslov zapišemo u razvijenom obliku, imamo $u = c_0x^{m-1} + \ldots + c_{m-1}$, $v = d_0x^{n-1} + \ldots + d_{n-1}$ i iz jednakosti $vf = ug$ se dobija

$$\begin{array}{l} \sum\limits_{i=0}^{m} a_i x^{m-i} \cdot \sum\limits_{j=0}^{n-1} d_j x^{n-j-1} - \sum\limits_{i=0}^{n} b_i x^{n-i} \cdot \sum\limits_{j=0}^{m-1} c_j x^{m-j-1} = \ldots \\ = \sum\limits_{k=0}^{m+n-1} \sum\limits_{i+j=k} (a_i d_j - b_i c_j) x^{(m+n-1)-k} = 0 \end{array},$$

odakle se poređenjem koeficijenata uz x dobija sistem od $m+n$ linearnih jednačina

$$\sum_{i+j=k} (a_i d_j - b_i c_j) = 0 \quad (k = 0, \ldots, m+n-1)$$

ili u razvijenom obliku

$$\begin{array}{lllllll}
a_0d_0 & & & -b_0c_0 & & & = 0 \\
a_1d_0 & +a_0d_1 & & -b_1c_0 & -b_0c_1 & & = 0 \\
 & \ldots & & & & & \ldots \\
a_md_0 & & & & & -b_1c_{m-1} & = 0 \\
 & & a_0d_{n-1} & -b_{n-1}c_0 & & & = 0 \\
 & & a_1d_{n-1} & -b_nc_0 & & & = 0 \\
 & \ldots & & & & & \ldots \\
 & & a_md_{n-1} & & & -b_nc_{m-1} & = 0
\end{array}$$

po $m+n$ nepoznatih $c_0, \ldots c_{m-1}, d_0, \ldots, d_{n-1}$. Taj sistem ima netrivijalno rešenje ako i samo ako je njegova determinanta jednaka nuli.

Definicija.

Determinanta tog sistema tj. determinanta

$$R(f,g) = \begin{vmatrix}
a_0 & a_1 & \ldots & a_m & & & \\
 & a_0 & a_1 & \ldots & a_m & & \\
 & & & & \ldots & & \\
 & & & a_0 & a_1 & \ldots & a_m \\
b_0 & b_1 & \ldots & b_n & & & \\
 & b_0 & b_1 & \ldots & b_n & & \\
 & & & & \ldots & & \\
 & & & b_0 & b_1 & \ldots & b_n
\end{vmatrix}
\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} n \\
\left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} m
\end{array}$$

naziva se rezultanta polinoma f, g po promenljivoj x.

Rezultanta je polinom po koeficijentima a_i i b_j ukupnog stepena $m+n$, homogen po svakoj grupi promenljivih ponaosob. Prethodna rasuđivanja dokazuju sledeću važnu teoremu.

Teorema.

Polinomi f i g imaju netrivijalni zajednički faktor $\Leftrightarrow R(f,g)=0$.

Primene.

1. Rešavanje sistema sa dve polinomijalne jednačine. Ako su $f,g\in\mathbb{R}[x,y]=(\mathbb{R}[x])[y]$ dva polinoma i $R(f,g)=R(x)\in\mathbb{R}[x]$, tada ako je (x_0,y_0) rešenje sistema

$$\begin{cases} f(x,y)=0 \\ g(x,y)=0 \end{cases}$$

onda mora biti $R(x_0)=0$. Time se jednostavno opisuje skup rešenja polaznog sistema.

2. Eliminacija parametra. Pretpostavimo da je kriva X zadata svojom racionalnom parametrizacijom

$$\begin{cases} x=P_1(t)/Q_1(t) \\ y=P_2(t)/Q_2(t) \end{cases}$$

Neka su $f(x,t)=P_1(t)-Q_1(t)x$ i $g(y,t)=P_2(t)-Q_2(t)y$ i neka je $R=R(f,g)\in K[x,y]$ rezultanta ovih polinoma. Tada je

$$(x_0,y_0)\in X\Leftrightarrow \exists t_0: f(x_0,t_0)=g(y_0,t_0)=0\Leftrightarrow R(x_0,y_0)=0$$

tj. kriva X je zadata jednačinom $R(x,y)=0$.

Primer.

Naći jednačinu krive koja je parametarski zadata sa

$$\begin{aligned} x &= t^2 \\ y &= t^3-t \end{aligned}$$

Ovde je $f=t^2-x$, $g=t^3-t-y$ i

$$R(f,g)=\begin{vmatrix} 1 & 0 & -x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -x & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -x \\ 1 & 0 & -1 & -y & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -y \end{vmatrix}=y^2-x^3+2x^2-x$$

pa je jednačina krive $X: y^2=x^3-2x^2+x$.

U ovom slučaju, do rezultata se moglo doći i bez korišćenja rezultante, ali metoda ima opšti značaj.