OPAML
Letnji semestar 2019/20

Algebarske hiperpovrši

Neka je $\mathcal{A}^2 = \mathbb{F}^2$ standardna ravan nad poljem $\mathbb{F}$. Skup tačaka $\mathcal{C}$ ravni $\mathcal{A}^2$ je ravna algebarska kriva ako postoji polinom $f(x, y) \in \mathbb{F}[x, y]$ takav da je $\mathcal{C} = \left\{P(x, y) \in \mathcal{A}^2 \,|\, f(x, y) = 0\right\}$. Jednačina $f(x, y) = 0$ naziva se jednačinom krive $\mathcal{C}$, a stepen $\deg f$ redom krive $\mathcal{C}$. Epitete „ravna algebarska" često izostavljamo i $\mathcal{C}$ nazivamo jednostavno kriva. Jedna kriva može da ima razne jednačine (npr. $x = 0$ i $x^2 = 0$). Isto tako, kriva se može sastojati i od samo jedne tačke (npr. $x^2+y^2 = 0$) ili čak biti i prazan skup (npr. $x^2+y^2+1 = 0$). Te anomalije nestaju posle uvođenja višestrukih i kompleksnih tačaka, o čemu će biti reči kasnije. Po tradiciji još iz helenskog doba, krive drugog reda nazivamo konikama.

Analogno, skup tačaka $\mathcal{S}$ prostora $\mathcal{A}^3 = \mathbb{F}^3$ je algebarska površ ako postoji polinom $f(x, y, z) \in \mathbb{F}[x, y, z]$ takav da je skup $\mathcal{S} = \{P(x, y, z) \in \mathcal{A}^3 | f(x, y, z) = 0\}$. Jednačina $f(x, y, z) = 0$ naziva se jednačinom površi $\mathcal{S}$, a stepen $\deg f$ redom površi $\mathcal{S}$. Sve primedbe posle definicije krive važe u potpunosti i za površi. Površi drugog reda nazivamo kvadrikama.

Konike u ravni i kvadrike u prostoru su algebarske hiperpovrši.

Definicija. Skup tačaka $\mathcal{S} \subset \mathcal{A}^n$ je *algebarska hiperpovrš* ako postoji polinom $f(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{F}[x_1, \dots, x_n]$ takav da je

$$\mathcal{S} = \{P(x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{A}^n | f(x_1, \dots, x_n) = 0\}.$$

Jednačina $f(x_1, \dots, x_n) = 0$ naziva se *jednačinom hiperpovrši* $\mathcal{S}$ u reperu Oe, a stepen $\deg f$ *redom hiperpovrši*.

Dakle, algebarska hiperpovrš $\mathcal{S}$ je skup nula funkcije $f : \mathcal{A}^n \to \mathbb{F}$ koja je u standardnom reperu $Oe_1 \dots e_n$ definisana polinomom $f(x_1, \dots, x_n)$. Pokažimo da je onda ta funkcija u svakom drugom reperu $O'e'_1 \dots e'_n$ definisana polinomom, i to istog stepena.

Teorema. Red hiperpovrši je afina invarijanta, tj. red se ne menja prilikom afinih transformacija.

Dokaz. U reperu $Oe_1 \dots e_n$ afina transformacija zadata je formulama

$$\begin{array}{rcl} x'_1 & = & c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \dots + c_{1n}x_n + b_1 \\ x'_2 & = & c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \dots + c_{2n}x_n + b_2 \\ & \dots & \\ x'_n & = & c_{n1}x_1 + c_{n2}x_2 + \dots + c_{nn}x_n + b_n \end{array}$$

sa regularnom matricom $C = (c_{ij})$. Ako je $f(x_1, \dots, x_n) = 0$ jednačina hiperpovrši, očigledno je da posle smene koordinata dobijamo polinom po $x'_1, \dots, x'_n$ čiji red ne može da bude veći od reda f. Ali smena je invertibilna, pa važi i obrnuto. ∎

Hiperpovrši drugog reda - kvadrike

Proučimo sada hiperpovrši drugog reda, koje nazivamo *kvadrikama*. One su definisane kao skupovi nula kvadratnih polinomijalnih funkcija.

Definicija. Preslikavanje $\Phi : \mathcal{A} \to \mathbb{F}$ je *afina kvadratna funkcija* ako postoji reper Oe u kome je za svaku tačku P sa koordinatama $x = (x_1, \dots, x_n)$

$$\Phi(P) = \Phi_{Oe}(x) = F(x) + f(x) + c = \sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j + 2 \sum_i b_i x_i + c. \qquad (1)$$

Pri tom je F kvadratna forma sa simetričnom matricom $A = (a_{ij})$, f je linearna forma sa koordinatama $b = (b_1, \dots, b_n)$ u dualnoj bazi (koeficijent 2 stoji tradicionalno zbog pogodnosti u zapisivanju kasnijih formula), c je konstanta, a $\Phi_{Oe}(x)$ je kvadratni polinom od promenljivih $x_1, \dots, x_n$ koji nazivamo koordinatnim zapisom funkcije Φ u reperu Oe. Primetimo da, na osnovu prethodne teoreme, ova definicija ne zavisi od izbora repera Oe: i u svakom drugom reperu $O'e'$ preslikavanje Φ biće zapisano pomoću kvadratnog polinoma $\Phi_{O'e'}(x)$ sa nekim drugim koeficijentima. Vidimo da je skup $\mathcal{Q} \subset \mathcal{A}$ kvadrika $\Leftrightarrow$ za neku afinu kvadratnu funkciju $\Phi : \mathcal{A} \to \mathbb{F}$ je $\mathcal{Q} = \{P \in \mathcal{A} | \Phi(P) = 0\}$, tj. kvadrika je skup nula afine kvadratne funkcije.

Promena jednačine kvadrike prilikom zamene repera. Centar kvadrike

Neka je data kvadrika $\mathcal{Q}$ zadata afinom kvadratnom funkcijom Φ. Postavlja se pitanje da li se reper Oe može pogodno izabrati tako da koordinatni zapis funkcije Φ bude što je moguće jednostavniji. Da bismo to razjasnili, utvrdimo kako se menja koordinatni zapis funkcije Φ prilikom zamene repera. Pošto se svaka zamena repera, tj. afina transformacija prostora može razložiti na translaciju i linearnu transformaciju (afinu transformaciju sa fiksnom tačkom), dovoljno je posmatrati ta dva slučaja. Smisao slobodnog člana c iz jednačine (1) jednostavno se utvrđuje: c je vrednost funkcije Φ u koordinatnom početku $c = \Phi(O) = \Phi_{Oe}(o)$. Šta je sa kvadratnim i linearnim delom?

Teorema. Neka je $\Phi : \mathcal{A} \to \mathbb{F}$ afina kvadratna funkcija zadata u reperu Oe formulom (1). Neka je $O'e'$ novi reper, a $x' = (x'_1, \dots, x'_n)$ koordinate tačke P u tom reperu. Tada je funkcija Φ u novom reperu zadata formulom

$$\Phi(P) = \Phi_{O'e'}(x') = F'(x') + f'(x') + c' = \sum_{i,j} a'_{ij} x'_i x'_j + 2 \sum_i b'_i x'_i + c' \qquad (2)$$

određenom matricom $A' = (a'_{ij})$, vektorom $b' = (b'_i)$ i konstantom c'. Pri tome:

(1) ako je novi reper dobijen od starog translacijom za vektor $v = \overrightarrow{OO'}$ sa kolonom koordinata $[v]_{Oe} = a = (a_1, \dots, a_n)$ (dakle, $e' = e$), tada je

$$A' = A,\ b' = b + Aa,\ c' = \Phi(O') = \Phi_{Oe}(a) = F(a) + f(a) + c;$$

(2) ako je novi reper dobijen od starog zamenom baze $e' = e\,C$ sa matricom prelaza $C = C_{e \to e'}$ bez translacije (dakle, $O' = O$), tada je

$$A' = C^T A C,\ b' = C^T b,\ c' = c.$$

Dokaz. Zapišimo jednačinu (1) u matričnom obliku. Naime, $\Phi(P) = \Phi_{Oe}(x) = x^T A x + 2 b^T x + c$. Pri tom je x kolona koordinata tačke P u reperu Oe. Neka je x' kolona koordinata iste tačke P u reperu $O'e'$.

(1) U prvom slučaju biće $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'P}$, pa je $x = x' + a$, pri čemu je a kolona koordinata vektora $\overrightarrow{OO'}$ u reperu Oe. Zamenom u (1) dobija se da je

$$\begin{aligned}\Phi(P) &= (x'+a)^T A(x'+a) + 2b^T(x'+a) + c = \\ &= x'^T Ax' + x'^T Aa + a^T Ax' + a^T Aa + 2b^T x' + 2b^T a + c = \\ &= x'^T Ax' + 2(b+Aa)^T x' + (a^T Aa + 2b^T a + c) = x'^T A'x' + 2b'^T x' + c'\end{aligned}$$

jer je $x'^T Aa = a^T Ax'$ i zbog simetričnosti matrice A

$$x'^T Aa + a^T Ax' + 2b^T x' = 2a^T Ax' + 2b^T x' = 2(a^T A + b^T)x' = 2(b + Aa)^T x'.$$

Odatle sledi da je $A' = A$, $b' = b + Aa$, $c' = \Phi_{Oe}(a) = \Phi(O')$.

(2) U drugom slučaju imamo $O' = O$, $e' = eC$ sa matricom prelaza C, pa je $x = Cx'$. Zamenom u (1) dobija se da je

$$\begin{aligned}\Phi(P) &= (Cx')^T A(Cx') + 2b^T Cx' + c = \\ &= x'^T(C^T AC)x' + 2(C^T b)^T x' + c = x'^T A'x' + 2b'^T x' + c',\end{aligned}$$

odakle poređenjem koeficijenata sledi da je $A' = C^T AC$, $b' = C^T b$, $c' = c$. ∎

Opšta afina transformacija se dobija kao kompozicija ove dve. Iz navedenih formula se vidi da se linearnom transformacijom može uprostiti kvadratna forma bez promene slobodnog člana, dok se translacijom može promeniti slobodni član bez promene kvadratne forme. Šta se pri tom dešava s linearnom formom? Jasno je da linearna transformacija ne može anulirati linearnu formu: matrica C je regularna, pa ako je $b \neq o$, onda je i $b' \neq o$. Međutim, pogodno izabranom translacijom može se ukloniti deo linearnog člana, a u nekim slučajevima i ceo linearni član: dovoljno je da vektor translacije a bude rešenje (nehomogenog) sistema linearnih jednačina $Aa + b = o$. Razmotrimo kada je to moguće i kakav je geometrijski smisao tog sistema.

Definicija. Neka je $\mathcal{Q}$ kvadrika zadata afinom kvadratnom funkcijom $\Phi : \mathcal{A} \to \mathbb{F}$ čiji je koordinatni zapis u reperu Oe dat sa (1). Tačka $C \in \mathcal{A}$ je *centar* kvadrike $\mathcal{Q}$ ako je, za svaki vektor v, $\Phi(C + v) = \Phi(C - v)$. Ako kvadrika $\mathcal{Q}$ ima centar, naziva se *centralnom*. U protivnom, kvadrika $\mathcal{Q}$ je *necentralna*.

Definicija. Ako je $C \in \mathcal{A}$ fiksirana tačka, preslikavanje $f_C : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ dato sa $f_C(C + v) = C - v$ je *centralna simetrija* prostora $\mathcal{A}$ u odnosu na tačku C kao centar simetrije.

Tvrđenje. Centralna simetrija f_C afinog prostora $\mathcal{A}$ je afina transformacija čiji je linearni deo $Df_C = -I$ i koja je svojstvena ako je $\dim \mathcal{A}$ parna, a nesvojstvena ako je $\dim \mathcal{A}$ neparna. Ako je $\mathcal{A}$ euklidski afini prostor, tada je f_C izometrijska transformacija.

Dokaz. Izaberimo proizvoljan reper Ce afinog prostora $\mathcal{A}$ sa koordinatnim početkom u tački C. Ako je $P \in \mathcal{A}$ proizvoljna tačka sa koordinatama $[P]_{Ce} = [\overrightarrow{CP}]_e = x$, tada je $f(P) = f(C + \overrightarrow{CP}) = C - \overrightarrow{CP}$, odakle je u koordinatama $[f(P)]_{Ce} = [C - \overrightarrow{CP}]_{Ce} = [-\overrightarrow{CP}]_e = -x$. Odmah se vidi da je f_C afino preslikavanje čiji linearni deo Df_C preslikava x u $-x$, pa je $Df_C = -I$. Odatle sledi da je $\det(Df_C) = (-1)^{\dim \mathcal{A}}$, pa neposredno sledi i tvrđenje o svojstvenosti.

Pošto je matrica $-E$ ortogonalna, odmah sledi i tvrđenje o izometričnosti u slučaju euklidskog prostora. ∎

Definicija. Tačka $C \in \mathcal{A}$ je *centar simetrije* skupa $\mathcal{S} \subset \mathcal{A}$ ako je $\mathcal{S}$ invarijantan u odnosu na centralnu simetriju f_C prostora $\mathcal{A}$, tj. ako $P \in \mathcal{S} \Rightarrow f_C(P) \in \mathcal{S}$.

Vidimo da je definicija centra kvadrike usaglašena sa intuicijom: centar kvadrike je zaista njen centar simetrije. Naime, tačka C je centar kvadrike $\mathcal{Q}$ sa jednačinom $\Phi(P) = 0 \Leftrightarrow$ funkcija Φ je invarijantna u odnosu na centralnu simetriju $f_C \Rightarrow$ kvadrika $\mathcal{Q}$ je invarijantna u odnosu na centralnu simetriju f_C. Kako na osnovu jednačine kvadrike prepoznati da li ona ima centar i odrediti eventualne centre?

Tvrđenje. Neka je $\mathcal{Q}$ kvadrika određena afinom kvadratnom funkcijom Φ koja u nekom reperu Oe ima koordinatni zapis (1). Tačka O je centar kvadrike $\mathcal{Q} \Leftrightarrow$ u zapisu (1) nema linearnog dela, tj. $f = 0$ odnosno $b = o$.

Dokaz. Ako je O centar, tada je $\Phi(O + v) = \Phi(O - v)$, pa je

$$F(v) + f(v) + c = F(-v) + f(-v) + c = F(v) - f(v) + c,$$

odakle je $f(v) = 0$ za svaki vektor v, tj. $f = o$. Obrnuto, ako je $\Phi(O + v) = F(v) + c$ bez linearnog dela, tada je $\Phi(O + v) = \Phi(O - v)$ za svaki vektor v i O je centar kvadrike. ∎

Posledica. Neka je $\mathcal{Q}$ kvadrika određena kvadratnom funkcijom Φ sa koordinatnim zapisom (1) u reperu Oe. Tada je tačka P sa koordinatama $[P]_{Oe} = a = (a_1, \ldots, a_n)$ centar kvadrike $\Leftrightarrow$ kolona koordinata a je rešenje sistema linearnih jednačina

$$Ax + b = o. \tag{3}$$

Dokaz. Ovo je direktna posledica poslednja dva tvrđenja. Naime, izvršimo translaciju repera Oe za vektor $\overrightarrow{OP}$, tj. prenesimo koordinatni početak u tačku P. Na osnovu teoreme 3.1.4 u koordinatnom zapisu (2) funkcije Φ u odnosu na novi reper $P\mathbf{e}$ biće $b' = b + Aa$, a na osnovu prethodnog tačka P je centar $\Leftrightarrow b' = o$. ∎

Vidimo da je sistem linearnih jednačina (3) sistem čija su rešenja svi centri kvadrike $\mathcal{Q}$. Odatle sledi da je skup centara svake kvadrike afini potprostor prostora $\mathcal{A}$, koji je prazan ako je sistem (3) nesaglasan i u tom slučaju je kvadrika necentralna, ili neprazan i dimenzije $n - \operatorname{rang} A = n - \operatorname{rang} F$ ako je sistem (3) saglasan i u tom slučaju je kvadrika centralna. Kvadrika ima jedinstveni centar $\Leftrightarrow \operatorname{rang} A = n$.

Ukoliko jednačinu centralne kvadrike zapišemo u odnosu na bilo koji od njenih centara, u njoj neće biti linearne forme. Šta je sa slobodnim članom?

Lema. Ako su P i P' dva centra kvadrike $\mathcal{Q}$ zadate afinom kvadratnom funkcijom Φ, tada je $\Phi(P) = \Phi(P')$.

Dokaz. Neka je $\Phi_{Pe}(x) = x^T Ax + c$ koordinatni zapis funkcije Φ u reperu $P\mathbf{e}$ i neka je a kolona koordinata vektora $\overrightarrow{PP'}$. Pošto je P' centar, a je rešenje sistema (3), tj. $Aa = o$. Sada je $\Phi(P') = a^T Aa + c = c = \Phi(P)$. ∎

Posledica. Prilikom translacije iz centra u centar, koordinatni zapis jednačine kvadrike se ne menja. ∎

0.0.1 Presek kvadrike i prave. Tangentna hiperravan i asimptotski konus

Neka je $\mathcal{Q}$ kvadrika u $\mathcal{A}^n$ koja u reperu $O\mathbf{e}$ ima jednačinu

$$x^T Ax + 2b^T x + c = 0$$

i p prava sa parametarskom jednačinom

$$x = x_0 + ta,$$

pri čemu je x_0 tačka prave, a a njen vektor pravca. Kakav može da bude uzajamni odnos p i $\mathcal{Q}$? Da bismo to ispitali, nađimo njihove presečne tačke. Zamenom koordinata x tačke prave p u jednačinu $\mathcal{Q}$ i sređivanjem dobijenog izraza po parametru t dobijamo jednačinu

$$(a^T Aa)t^2 + 2a^T(Ax_0 + b)t + (x_0^T Ax_0 + 2b^T x_0 + c) = 0,$$

odnosno

$$F(a)t^2 + 2a^T(Ax_0 + b)t + \Phi(x_0) = 0.$$

To je kvadratna jednačina po t čija rešenja odgovaraju presečnim tačkama prave i kvadrike. Specijalan slučaj nastaje kada je stepen jednačine manji od 2, a to je kada vektor pravca prave anulira kvadratnu formu.

Definicija. Vektor a ima *asimptotski pravac* za kvadriku $\mathcal{Q}$ ako je $a^T Aa = 0$. U protivnom, pravac vektora a je *neasimptotski*. Kvadrika $\mathcal{K}$ sa jednačinom

$$x^T Ax = 0$$

je *asimptotski konus* kvadrike $\mathcal{Q}$.

Primedba. Očigledno, vektor v ima asimptotski pravac $\Leftrightarrow$ tačka $P = O + v$ pripada asimptotskom konusu.

Prvo ćemo razmotriti prave sa asimptotskim pravcem. U tom specijalnom slučaju jednačina po t je najviše linearna, pa prava p može da:

(1) ne seče $\mathcal{Q}$ uopšte i tada se naziva *asimptotom* kvadrike $\mathcal{Q}$;

(2) seče $\mathcal{Q}$ tačno u jednoj tački;

(3) bude sadržana u $\mathcal{Q}$.

Prvi slučaj je moguć ako i samo ako je

$$a^T Aa = 0,\ a^T(Ax_0 + b) = 0,\ x_0^T Ax_0 + 2b^T x_0 + c \neq 0,$$

drugi ako i samo ako je

$$a^T Aa = 0,\ a^T(Ax_0 + b) \neq 0,$$

a treći ukoliko je

$$a^T Aa = a^T(Ax_0 + b) = x_0^T Ax_0 + 2b^T x_0 + c = 0.$$

Naravno, ne mogu se realizovati sva tri slučaja kod svih kvadrika. Neke imaju asimptote, dok ih druge nemaju, neke sadrže prave, dok ih druge ne sadrže.

Na primer, elipsoidi (v. dalje) nemaju asimptotske pravce, pa ni asimptote, niti sadrže prave jer zbog pozitivne određenosti kvadratne forme F njihov asimptotski konus čini samo tačka O. Prilikom takvih ispitivanja prvo se nalazi asimptotski konus, odnosno asimptotski pravci kvadrike, a zatim posmatraju prave s takvim vektorom pravca.

Razmotrimo sada opšti slučaj pravih neasimptotskog pravca. U tom slučaju jednačina po t je kvadratna pa prava p može da:

(1) seče $\mathcal{Q}$ u jednoj tački koja odgovara dvostrukom korenu t i tada se naziva *tangenta* kvadrike $\mathcal{Q}$;

(2) seče $\mathcal{Q}$ u dvema različitim tačkama i tada se naziva *sekanta* ili *sečica* kvadrike $\mathcal{Q}$.

(3) ne seče $\mathcal{Q}$, što odgovara slučaju konjugovano-kompleksnog para korena kvadratne jednačine.

Razlika nastaje u zavisnosti od toga da li je diskriminanta kvadratne jednačine

$$(a^T Aa)t^2 + 2a^T(Ax_0 + b)t + (x_0^T Ax_0 + 2b^T x_0 + c) = 0 \tag{4}$$

jednaka nuli (prvi slučaj) ili različita od nule i to pozitivna (drugi slučaj) ili negativna (treći slučaj). Primetimo da, ako se dopuste kompleksne koordinate (proces koji se naziva kompleksifikacija), treći slučaj takođe postaje sečica kod koje su koordinate presečnih tačaka kompleksne.

Razmotrimo detaljno prvo slučaj tangenti.

Tvrđenje. Neka je $\mathcal{Q}$ kvadrika čija je jednačina u reperu Oe

$$x^T Ax + 2b^T x + c = 0,$$

a M tačka kvadrike s kolonom koordinata x_0. Skup svih tačaka P takvih da je prava $p(MP)$ tangenta kvadrike $\mathcal{Q}$ je hiperravan s jednačinom

$$(Ax_0 + b)^T(x - x_0) = 0,$$

pri čemu je x kolona koordinata tačke P.

Dokaz. Neka je $v = \overrightarrow{MP}$ vektor pravca prave $p(MP)$ i $a = x - x_0$ kolona njegovih koordinata. Tada je ova prava tangenta $\Leftrightarrow$ odgovarajuća jednačina (4) je kvadratna s dvostrukim korenom, pa je njena diskriminanta jednaka nuli:

$$[2a^T(Ax_0 + b)]^2 - 4(x_0^T Ax_0 + 2b^T x_0 + c) = 0.$$

Pri tom je slobodni član $x_0^T Ax_0 + 2b^T x_0 + c = 0$ jer je tačka $M \in \mathcal{Q}$. Odatle se dobija tražena jednačina $a^T(Ax_0 + b) = 0$, odnosno $(Ax_0 + b)^T(x - x_0) = 0$, što je jednačina hiperravni kroz tačku M. ∎

Definicija. Ova hiperravan se naziva *tangentna hiperravan* kvadrike $\mathcal{Q}$ u njenoj tački M.

Primedbe. (1) Eksplicitno zapisana jednačina tangentne hiperravni je

$$\sum_{i=1}^{n} c_i(x_i - x_i^{(0)}) = 0,$$

gde su koeficijenti $c_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^{(0)} + b_i$. Pri tom je c_i, u stvari, vrednost i-tog parcijalnog izvoda polinoma $\Phi_{Oe}(x_1, \ldots, x_n)$ u tački M sa koordinatama $x_0 = (x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ (i-ti parcijalni izvod je izvod funkcije od n promenljivih po i-toj promenljivoj, pri čemu se ostale promenljive smatraju konstantama):

$$c_i = \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}\left(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}\right) = \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}(M),$$

pa je jednačina tangentne hiperravni

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_1}(M)\left(x - x_1^{(0)}\right) + \cdots + \frac{\partial \Phi}{\partial x_n}(M)\left(x - x_n^{(0)}\right) = 0.$$

(2) Jednačina tangentne hiperravni na kvadriku $\mathcal{Q}$ može se zapisati i u nešto drugačijem obliku. Biće:

$$\begin{aligned} 0 &= (Ax_0 + b)^T(x - x_0) = x_0^T A x + b^T x - x_0^T A x_0 - b^T x_0 = \\ &= x_0^T A x + b^T x + b^T x_0 + c - (x_0^T A x_0 + 2b^T x_0 + c) = x_0^T A x + b^T x + b^T x_0 + c, \end{aligned}$$

odakle je jednačina tangentne hiperravni

$$x_0 A x + b^T x + b^T x_0 + c = 0$$

ili, u razvijenom obliku

$$\sum_{i,j} a_{ij} x_i^{(0)} x_j + \sum_i b_i x_i + \sum_i b_i x_i^{(0)} + c = 0.$$

Razmotrimo sada drugi slučaj neasimptotskog pravca — slučaj sečice. Svaka sečica seče kvadriku $\mathcal{Q}$ u dve različite tačke.

Definicija. Duž koja spaja dve presečne tačke sečice p sa kvadrikom $\mathcal{Q}$ naziva se *hordom* koja odgovara sečici p.

vrđenje. Ako je v vektor neasimptotskog pravca, skup $\mathcal{D}_v$ središta hordi svih sečica sa tim vektorom pravca leži u jednoj hiperravni.

Dokaz. Neka su P_1 i P_2 presečne tačke i neka je S središte duži P_1P_2. Parametarsku jednačinu sečice p zapišimo u odnosu na tačku S. Biće $P = S + tv$ ili u koordinatama $x = x_0 + ta$, pri čemu su x_0 koordinate tačke S, a a koordinate vektora v. Tada, ako tački P_1 odgovara parametar t_1, onda tački P_2 odgovara parametar $t_2 = -t_1$. Drugim rečima, zbir korena kvadratne jednačine (4) je jednak nuli, pa je i odgovarajući koeficijent jednak nuli (Vijetove formule), odakle se dobija uslov

$$a^T(Ax_0 + b) = 0.$$

Obrnuto, iz tog uslova sledi da kvadratna jednačina (4) ima dva različita korena t_1 i $t_2 = -t_1$, oba $\neq 0$. Ako su koeficijenti $a^T A a$ i $x_0^T A x_0 + 2b^T x_0 + c$ jednačine (4) istog znaka, koreni su konjugovano-kompleksni i realnih presečnih tačaka nema (treći slučaj), ali ako su suprotnog znaka, koreni su realni (drugi slučaj) i tačka S sa koordinatama x_0 je središte horde sa neasimptotskim pravcem v koja prolazi kroz S. Ako sada tačku S smatramo promenljivom tačkom sa koordinatama x, skup $\mathcal{D}_v$ središta hordi sa fiksiranim neasimptotskim pravcem v je sadržan u hiperravni $\mathcal{H}_v$ opisanom jednačinom $a^T(Ax+b)=0$ ili, u razvijenom obliku,

$$\sum_{i,j} a_{ij}a_i x_j + \sum_i a_i b_i = 0. \blacksquare$$

Iz dokaza sledi da je hiperravan $\mathcal{H}_v$ podeljena na dva svoja podskupa: $\mathcal{D}_v$ koji odgovara slučaju para realnih korena, i njegov komplement $\mathcal{H}_v \setminus \mathcal{D}_v$ koji odgovara slučaju para konjugovano-kompleksnih korena.

Definicija. Hiperravan $\mathcal{H}_v$ se naziva *dijametralna hiperravan* kvadrike $\mathcal{Q}$ konjugovana neasimptotskom pravcu v, a skup $\mathcal{D}_v$ središta hordi *dijametralnim presekom* kvadrike $\mathcal{Q}$. U slučaju dimenzije 2 dijametralni presek naziva se jednostavno *dijametar* konjugovan neasimptotskom pravcu v.

Posledica. Svaka dijametralna hiperravan kvadrike $\mathcal{Q}$ sadrži sve njene centre.

Dokaz. Svaki centar je rešenje sistema $Ax+b=0$, pa zadovoljava jednačinu dijametralne hiperravni $a^T(Ax+b)=0$ za bilo koji vektor kooordinata a. $\blacksquare$