

Безуова теорема I. Комплексификација и пројективизација

У средњој школи се учи Безуова теорема за полиноме са једном променљивом над пољем $\mathbb{R}$ која за произвољно поље k изгледа овако.

Тврђење (Безуова теорема). Ако је $f \in k[x]$ полином степена ≥ 1 и $a \in k$, тада је a корен полинома f (тј. $f(a) = 0$ у k) $\iff (x - a) \mid f(x)$.

Тврђење је последица чињенице да је у прстену полинома са коефицијентима у пољу дефинисано дељење с остатком. При томе се јавља и појам вишеструкости корена. Корен $a \in k$ је n -струки корен полинома $f(x)$ ($n \geq 1$) ако $(x - a)^n \mid f(x)$, а $(x - a)^{n+1} \nmid f(x)$.

Последица ове једноставне чињенице је да полином степена ≥ 1 може имати највише онолико корена колики је његов степен, чак и кад корене бројимо са њиховим вишеструкостима. У случају полинома степена 0 тј. константе, ситуација је другачија: ако је та константа једнака 0, корена има бесконачно много, а ако је различита од 0, нема их уопште.

Размотримо ово питање на нешто другачији начин. Корен полинома $f \in k[x]$ је решење система једначина

$$\begin{aligned} f(x) - y &= 0 \\ y &= 0. \end{aligned}$$

Ако прву једначину гледамо као специјални случај једначине облика $F(x, y) = 0$ где је $F \in k[x, y]$ полином са две променљиве n -тог степена, видимо да решења овог система у ствари представљају пресечне тачке једне алгебарске криве n -тог реда (одеђене једначином степена n) и праве - координатне осе (одређене једначином степена 1) и да број тих тачака није већи од $n \cdot 1 = n$, а овај број је производ одговарајућих степена. Анализирајмо на примерима могуће разлоге зашто тај број није увек тачно једнак n , већ је често мањи.

1) Ако је прва крива - права $y = 0$ која се поклапа са координатном осом (тј. $F(x, y) \equiv 0$), тада пресечних тачака има бесконачно много. Ово је специјални случај када крива $F(x, y) = 0$ садржи координатну осу као своју компоненту. Овај случај је лако приметити и издвојити.

2) Ако је прва крива - права $y - x = 0$, ове две праве се секу тачно у једној тачки што и јесте максималан могући број $1 \cdot 1 = 1$. Ово је регуларан случај.

3) Ако је прва крива - права $y = 1$ која је паралелна координатној оси, пресечних тачака нема. Пресечна тачка је нестала. Где је? Одговор ће нам дати прикључивање бесконачно далеких елемената: *пројективизација*.

4) Ако је прва крива - парабола $y - x^2 = -1$, има тачно две пресечне тачке, што и јесте максималан могући број $2 \cdot 1 = 2$. Ово је регуларан случај.

5) Ако је прва крива - парабола $y - x^2 = 0$, имамо само једну пресечну тачку која одговара корену $x = 0$. Овај корен је двоструки корен, па ако га рачунамо са вишеструкошћу, опет имамо максималан број пресечних тачака $2 \cdot 1 = 2$. Ово је случај додир односно вишеструког пресека.

6) Ако је прва крива - парабола $y - x^2 = 1$, пресечних тачака нема. Где су? Одговор ће нам дати проширење основног поља реалних бројева до поља комплексних бројева.

Комплексификација

Основна теорема алгебре каже да сваки полином са комплексним коефицијентима има корен у пољу комплексних бројева. Иако се тако зове, ниједан доказ ове теореме не може да буде реализован без аналитичких метода.

Уз примену Безуове теореме из основне теореме алгебре следи да се сваки полином $f \in \mathbb{C}[x]$ разлаже у производ линеарних фактора $f(x) = a(x-x_1)^{m_1}(x-x_2)^{m_2} \dots (x-x_k)^{m_k}$. Овај резултат сугерише да се, уместо реалне равни $\mathbb{R}^2$ и тачака пресека криве $f(x) = 0$ и координатне осе $y = 0$ посматрају тачке са комплексним координатама $(x, y) \in \mathbb{C}^2$.

Међутим, комплексна (дводимензионална) равна $\mathbb{C}^2$ нема тако једноставну визуелизацију као реална равна $\mathbb{R}^2$ јер, уместо две координате $x, y \in \mathbb{R}$ имамо четири координате $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$, $x = x_1 + x_2i, y = y_1 + y_2i \in \mathbb{C}$. Није тешко видети да је као векторски простор $\mathbb{C}^2 \cong \mathbb{R}^4$. Проблем је што смо на визуелизацију $\mathbb{C}$ као равни $\mathbb{R}^2$ навикли и то је за нашу просторну перцепцију прихватљиво, док код визуелизације $\mathbb{C}^2$ као $\mathbb{R}^4$ имамо проблем због четвородимензионалности. Тачка $(x, y) \in \mathbb{C}^2$ је одређена са четири реалне координате $(x_1, x_2, y_1, y_2) \in \mathbb{R}^4$. Одговарајућа реална равна $\mathbb{R}^2$ може бити у $\mathbb{C}^2$ смештена (на један од безброј могућих начина) као дводимензионална координатна равна $(x, 0, y, 0)$ тј. $x_2 = 0, y_2 = 0$. У четири димензије имамо чак и "необичне" односе између равни: две равни се могу сећи у једној јединој тачки: такав је рецимо пресек две координатне равни $\{(x_1, x_2, 0, 0)\}$ и $\{(0, 0, y_1, y_2)\}$. О различитим варијантама визуелизације четврте димензије и алгебарских кривих у $\mathbb{C}^2$ можете прочитати у мојим чланцима на адресама www.mi.sanu.ac.rs/vismath/lip/index.html и www.mi.sanu.ac.rs/vismath/lipk/index.html, као и у чланку колеге Николе Убавића на alas.matf.bg.ac.rs/mm16310/text/kompleksnasfera.html.

Ако основно поље $\mathbb{R}$ проширимо на комплексне бројеве, добијамо оне пресечне тачке кривих и правих које недостају. Пресеци параболе $y - x^2 = 1$ са осом $y = 0$ су две тачке $(x, y) = (\pm i, 0)$ које леже у $\mathbb{C}^2$ али не и у $\mathbb{R}^2$ па се у њему не виде. Пресек круга и праве: круг полупречника 1 са једначином $x^2 + (y - 2)^2 = 1$ се у реалној равни не сече са правом $y = 0$, али у комплексној равни има са њом две пресечне тачке $(x, y) = (\pm i\sqrt{3}, 0)$. Нацртајте одговарајуће графике у $\mathbb{R}^2$ и покушајте да визуализујете одговарајућу ситуацију у $\mathbb{R}^4$.

Овај прелазак на алгебарски затворено поље $\mathbb{C}$ назива се *комплексификација*.

Пројективизација

Две паралелне праве $y = 1$ и $y = 0$ се не секу. Међутим, ако посматрамо фамилију правих $y - \varepsilon x = 1$, она има пресеке са правом $y = 0$ са координатама $(x, y) = (\frac{1}{\varepsilon}, 0)$. Њени крајњи положаји су полазна права $y - x = 0$ за $\varepsilon = 1$ и права $y = 0$ за $\varepsilon = 0$. Јасно је да пресечна тачка $(\frac{1}{\varepsilon}, 0)$ одлази у бесконачност дуж

координатне осе када $\varepsilon \rightarrow 0$. За сваку праву $y = kx$ може се увести одговарајућа бесконачно далека тачка. Вектор правца који одређује ову праву је вектор $(1, k)$. Тај вектор правца је одређен до на пропорционалност, тј. сваки вектор облика (x, kx) одређује исту праву и исту бесконачно далеку тачку. Координатни запис овог поступка изгледа на следећи начин. У скуп $\mathbb{R}^2$ уведемо релацију еквиваленције $(x, y) \sim (x_1, y_1) \iff xy_1 = yx_1$. Класе еквиваленције ове релације су различите праве кроз координатни почетак. Једна таква права одређена је вектором правца $(x, y) \neq (0, 0)$. Тај вектор није једнозначно одређен, јер (x, y) и $(\lambda x, \lambda y)$ одређују исту праву. Одговарајућу класу еквиваленције обележавамо са $(x : y)$. Класе еквиваленције тј. тачке $(x : y)$ представљају тачке бесконачно далеке праве $\mathbb{P}\mathbb{R}^1$. Дакле, тачкама (x, y) равни $\mathbb{R}^2$ додају се бесконачно далеке тачке $(x : y)$ праве $\mathbb{P}\mathbb{R}^1$ и добијамо пројективну равн $\mathbb{P}\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^2 \cup \mathbb{P}\mathbb{R}^1$. Оба дела пројективне равни можемо описати једнообразно, ако уведемо просторне координате: тачку коначне равни (x, y) идентификујемо са $(x : y : 1)$, а бесконачно далеку тачку $(x : y)$ са $(x : y : 0)$. Формула $(x, y) \mapsto (x : y : 1)$ задаје инклузију $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{P}\mathbb{R}^2$, а формула $(x : y) \mapsto (x : y : 0)$ инклузију $\mathbb{P}\mathbb{R}^1 \subset \mathbb{P}\mathbb{R}^2$ као бесконачно далеке праве у пројективној равни.

Тачке пројективне равни $\mathbb{P}\mathbb{R}^2$ су вектори правца (x, y, z) правих кроз координатни почетак у $\mathbb{R}^3$. Два таква вектора (x, y, z) и (x', y', z') одређују исту праву ако и само ако постоји λ такво да су одговарајуће координате пропорционалне са коефицијентом λ . Одговарајућа класа еквиваленције је $(x : y : z)$ и инклузија $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{P}\mathbb{R}^2$ се у координатама описује са $X = \frac{x}{z}, Y = \frac{y}{z}$. Очигледно да, осим овог, постоје још два начина да се $\mathbb{R}^2$ утопи у $\mathbb{P}\mathbb{R}^2$ тј. постоје три инклузије $\mathbb{R}^2 \hookrightarrow \mathbb{P}\mathbb{R}^2$ и три пројекције $\mathbb{P}\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. У координатама се ова пресликавања описују формулама

$$(x : y : z) = \left(\frac{x}{z} : \frac{y}{z} : 1\right) = \left(\frac{x}{y} : 1 : \frac{z}{y}\right) = \left(1 : \frac{y}{x} : \frac{z}{x}\right).$$

Једноставнији опис се добија ако се уместо школски стандардних ознака за координате x, y, z користе индексирани координате x_0, x_1, x_2 . Тај се формализам директно преноси на вишедимензионални случај, па се добија простор $\mathbb{P}\mathbb{R}^n = \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n$ као скуп класа еквиваленције $\mathbb{R}^{n+1} / \sim$ који се у топологији обично обележава $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$. У случају равни ћемо се ипак држати школских стандардних ознака координата x, y, z .

Приметимо да се аналогна конструкција може извести за било које поље K уместо $\mathbb{R}$, чиме добијамо пројективни k -димензионални простор $\mathbb{P}_K^n = \mathbb{P}K^n$ над пољем K .

Ако је крива у коначној равни задата једначином $f(X, Y) = \sum_{k=0, m} \left(\sum_{i+j=k} a_{ij} X^i Y^j \right) = 0$, смена $X = \frac{x}{z}, Y = \frac{y}{z}$ са елиминацијом имениоца доводи једначину на хомогени облик $\sum_{k=0, m} \left(\sum_{i+j=k} a_{ij} X^i Y^j \right) Z^{m-k} = 0$. Ова једначина описује, поред коначних, и бесконачно далеке тачке криве. Поступак се назива хомогенизација.

Пример пројективизације/хомогенизације кривих другог реда.

(1) Од хиперболе $X^2 - Y^2 = 1$ у равни $\mathbb{R}^2$ се хомогенизацијом добија једначина $x^2 - y^2 = z^2$. На бесконачно далекој правој $z = 0$ она садржи две тачке: $x^2 - y^2 = 0$ односно $y = \pm x$. То су тачке $(x : \pm x : 0) = (1 : \pm 1 : 0)$.

(2) Ако пођемо од круга $X^2 + Y^2 = 1$ у равни $\mathbb{R}^2$, хомогенизацијом добијамо $x^2 + y^2 = z^2$. На бесконачно далекој правој $z = 0$ наизглед нема тачака јер из $x^2 + y^2 = 0$ следи $x = y = 0$ у реалном подручју. Овде нам помаже комплексификација. Видимо да су ту у ствари две различите комплексне тачке $(x : \pm ix : 0) = (1 : \pm i : 0)$.

(3) Најзад, ако пођемо од параболе $Y = X^2$, хомогенизацијом добијамо $x^2 - yz = 0$, што на бесконачно далекој правој $z = 0$ даје једначину $x^2 = 0$. Овде је само једна тачка $(0 : 1 : 0)$, али је њена вишеструкост 2.

Пример. Две криве другог реда могу се сећи у четири тачке и у коначној реалној равни $\mathbb{R}^2$. Пример: две елипсе са узајамно нормалним и различитим великим полуосама. Али, круг је такође крива другог реда. Знамо да пресек два круга у равни увек има највише две тачке, а требало би да их је $4 = 2 \cdot 2$. Куда су нестале друге две? Ствар је у томе што сваки круг у равни пролази кроз две фиксирание комплексне бесконачно далеке тачке. Наиме, ако је $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ једначина круга, после хомогенизације добијамо $(x - az)^2 + (y - bz)^2 = r^2 z^2$. Одавде се види да тачке $(1 : i : 0)$ и $(1 : -i : 0)$ увек задовољавају ову једначину, тј. припадају сваком кругу. Проверите како се секу два концентрична круга.