Univerzalne konstrukcije. Limesi.

Uobičajeni pojmovi "1-1" i "na" preslikavanja mogu se interpretirati i bez razmatranja pojma elementa skupa. Radićemo u konkretnoj kategoriji $\mathcal{C}$ (kategorija je *konkretna* ako su njeni objekti skupovi a morfizmi funkcije, konkretne su sve uobi;ajene kategorije skupova, grupa, Abelovih grupa itd.).

(1) Ako je $f : A \to B$ preslikavanje "1-1", tada ono ima osobinu leve kancelacije: ako imamo dijagram funkcija $C \underset{g_2}{\overset{g_1}{\rightrightarrows}} A \xrightarrow{f} B$, iz jednakosti $fg_1 = fg_2$ sledi $g_1 = g_2$.

(2) Ako je $f : A \to B$ preslikavanje "na", tada ono ima osobinu desne kancelacije: ako imamo dijagram funkcija $A \xrightarrow{f} B \underset{g_2}{\overset{g_1}{\rightrightarrows}} C$, iz jednakosti $g_1 f = g_2 f$ sledi $g_1 = g_2$.

U mnogim uobičajenim kategorijama (skupova *Set*, grupa *Grp*, Abelovih grupa *Ab*) važi i obrat tj. leva kancelacija $\Leftrightarrow$ "1-1", desna kancelacija $\Leftrightarrow$ "na". Dokažimo to za kategorije *Set* i *Ab*.

(1') Neka je $f : A \to B$ preslikavanje sa osobinom leve kancelacije i neka je $f(x_1) = f(x_2)$ za neke $x_i \in A$.

U *Set*: uočimo funkcije $g_i : \{*\} \to A$, $g_i(*) = x_i$ $(i = 1, 2)$. Tada je $fg_1 = fg_2$ pa je $g_1 = g_2$ odakle $x_1 = x_2$.

U *Ab*: uočimo homomorfizme $g_i : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}x_i \subset A$, $g_i(1) = x_i$ $(i = 1, 2)$. Tada je $fg_1 = fg_2$ pa je $g_1 = g_2$ odakle $x_1 = x_2$.

(2') Neka je $f : A \to B$ preslikavanje sa osobinom desne kancelacije i neka je $y \in B$ takvo da je $y \notin f(A)$.

U *Set*: uočimo funkcije $g_1, g_2 : B \to \{0, 1\}$, $g_1 = 0$ i $g_2(f(A)) = 0$, $g_2(B \backslash f(A)) = 1$. Tada je $g_1 f = g_2 f$ pa je $g_1 = g_2$ odakle $0 = g_1(y) = g_2(y) = 1$ što je kontradikcija. Zato $y \in f(A)$.

U *Ab*: pošto je $y \notin f(A) = \operatorname{Im} f$, grupa $B/\operatorname{Im} f$ ima bar dva elementa $\operatorname{Im} f \neq y + \operatorname{Im} f$. Uočimo homomorfizme $g_1, g_2 : B \to B/\operatorname{Im} f$, $g_1 = 0$, $g_2 = 1 = id$. Tada je $g_1 f = g_2 f$ pa je $g_1 = g_2$ odakle $\operatorname{Im} f = g_1(y) = g_2(y) = y + \operatorname{Im} f$ što je kontradikcija. Zato $y \in f(A)$.

Primetimo da je u oba slučaja obrnuto tvrdjenje tvrdjenja (1) odnosno (2) zasnovano na bogatstvu skupa morfizama u odgovarajućoj kategoriji.

Zbog dokazanog, ima smisla da se osobine leve i desne kancelacije posmatraju kao opšte osobine monomorfizma odnosno epimorfizma u proizvoljnoj kategoriji.

Definicija. U kategoriji $\mathcal{C}$,

(1) morfizam $f : A \to B$ je *monomorfizam*, ako važi $fg_1 = fg_2 \Rightarrow g_1 = g_2$ (leva kancelacija);

(2) morfizam $f : A \to B$ je *epimorfizam*, ako važi $g_1 f = g_2 f \Rightarrow g_1 = g_2$ (desna kancelacija);

(3) morfizam $f : A \to B$ je *bimorfizam*, ako važi i jedno i drugo, tj ako je i mono i epi;

(4) morfizam $f : A \to B$ je *izomorfizam*, ako postoji morfizam $g : B \to A$ sa osobinom da je $fg = 1_B$ i $gf = 1_A$.

Jasno da (4) $\Rightarrow$ (3). U kategorijama *Set* i *Ab* važi i obrnuto, tj. mono $\Leftrightarrow$ "1-1" i epi $\Leftrightarrow$ "na", pa se pojmovi izomorfizma i bijekcije poklapaju. Ovo je čest slučaj, ali ne i pravilo.

Zadatak. Da li u opštem slučaju svaki bimorfizam (mono+epi) mora biti izomorfizam? Naite kontraprimer.

Obratimo se sad pojmu jezgra homomorfizma grupa. Ako je $f : A \to B$ morfizam u Ab, imamo da je $\operatorname{Ker} f = \{a \in A \,|\, f(a) = 0\} \subset A$. Da li se pojam jezgra može okarakterisati bez elemenata, već samo pomoću morfizama, kao što smo gore okarakterisali pojmove monomorfizma i epimorfizma?

Definicija. *Morfizam jezgra* je morfizam $k : K \to A$ takav da su zadovoljena sledeća dva svojstva:

(1) $f \circ k = 0$ u dijagramu $K \xrightarrow{k} A \xrightarrow{f} B$;

(2) ako u nekom drugom dijagramu tog tipa $H \xrightarrow{h} A \xrightarrow{f} B$ važi $f \circ h = 0$, tada postoji jedinstveni morfizam $h' : H \to K$ takav da je $h = k \circ h'$, ili drugim rečima, takav da dijagram

$$\begin{array}{ccc} H & \overset{h'}{\dashrightarrow} & K \\ {\scriptstyle h}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle k} \\ A & = & A \end{array}$$

komutira. Ovde isprekidana strelica kod h' skraćeno označava tvrdjenje da postoji i to jedinstveni morfizam h' koji dijagram dopunjava do komutativnog.

Ovakav morfizam k se obeležava sa $\ker(f)$ i naziva jezgro morfizma f. Iz definicije ovog morfizma se lako dobija njegova jedinstvenost do na (jedinstveni) izomorfizam. Ako su, naime, $k : K \to A$ i $k' : K' \to A$ dva takva morfizma, tada primenom svojstva (2) na k i na k' imamo (jedinstvene) morfizme $l : K' \to K$ i $m : K \to K'$ takve da je $k' = k \circ l$ i $k = k' \circ m$, odakle je $k \circ 1_K = k \circ l \circ m$ i $k' \circ 1_{K'} = k' \circ m \circ l$ pa je zbog jedinstvenosti $l \circ m = 1_K$ i $m \circ l = 1_{K'}$, što znači da se k i k' razlikuju do na kompoziciju sa izomorfizmom. Za razliku od ove (kvazi) jednoznačnosti koja važi u svakoj kategoriji, pitanje egzistencije zavisi od prirode same kategorije $\mathcal{C}$. Na primer, u kategoriji Ab uobičajeno jezgro zajedno sa morfizmom inkluzije $\operatorname{Ker} f \subset A$ zadovoljava uslove ove definicije, što se lako proverava. Drugim rečima, u kategoriji Abelovih grupa morfizam jezgra postoji i dat je uobičajenom konstrukcijom jezgra.

Ova definicija jezgra se može koristiti samo u kategorijama koje imaju nula-objekat i nula-morfizme. U opštem slučaju kada toga nema, kao recimo u kategoriji skupova Set, umesto jezgra pojedinog morfizma uvodi se pojam jezgra para morfizama (ili jezgra većeg skupa morfizama) koje se zove *izjednačilac* (*equalizer*) para (odnosno skupa) morfizama. Opšta definicija kopira prethodnu.

Definicija. *Jezgro* para morfizama $A \underset{f_2}{\overset{f_1}{\rightrightarrows}} B$ je morfizam $k : K \to A$ takav da

(1) u dijagramu $K \xrightarrow{k} A \underset{f_2}{\overset{f_1}{\rightrightarrows}} B$ važi $f_1 k = f_2 k$;

(2) ako u nekom dijagramu tog tipa $H \xrightarrow{h} A \underset{f_2}{\overset{f_1}{\rightrightarrows}} B$ važi $f_1 h = f_2 h$, tada postoji jedinstveni morfizam $h' : H \to K$ takav da je $h = k \circ h'$ ili drugim

rečima takav da dijagram

$$\begin{array}{ccc} H & \stackrel{h'}{\dashrightarrow} & K \\ {\scriptstyle h}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle k} \\ A & = & A \end{array}$$

komutira.

Jasno je da je prethodna definicija jezgra u Ab specijalni slučaj ove definicije kada stavimo da je $g_2 = 0$ nula morfizam. Jedinstvenost važi iz istih razloga a egzistencija se mora dokazivati posebno. Na primer, lako se proverava da u kategoriji Set kao i u kategoriji Top topoloških prostora i neprekidnih preslikavanja postoje jezgra proizvoljnih familija morfizama.

Definicija jezgra je primer takozvane *univerzalne konstrukcije.* Umesto opšteg pojma univerzalnosti, navešćemo još jedan primer univerzalne konstrukcije u kategoriji Abelovih grupa Ab.

Neka su H i K dve Abelove grupe. Svojstvo da je $A \cong H \oplus K$ može se okarakterisati na sledeći način:

(1) postoje homomorfizmi $i_H : H \to A$ i $i_K : K \to A$;

(2) ako imamo par homomorfizama $f_H : H \to B$ i $f_K : K \to B$, tada postoji jedinstveni homomorfizam $f : A \to B$ takav da je $f_H = f \circ i_H$ i $f_K = f \circ i_K$ tj. takav da dijagram

$$\begin{array}{ccccc} H & \to & A & \leftarrow & K \\ & \searrow & {\scriptstyle f}\downarrow & \swarrow & \\ & & B & & \end{array}$$

komutira. Naime, f definišemo sa $f(h \oplus k) = f_H(h) + f_K(k)$. i neposredno se proverava jedinstvenost.

Vidimo da je pojam direktne sume takodje moguće opisati univerzalnom konstrukcijom. Ako u toj definiciji obrnemo strelice, dobijamo karakterizaciju pojma direktnog proizvoda Abelovih grupa.

Aditivne i Abelove kategorije

Kategorija Ab Abelovih grupa i $A{-}Mod$ modula nad komutativnim prstenom sa jedinicom imaju posebne osobine koje se tiču dodatne strukture na skupu morfizama.

Kategorija C je *aditivna* ako zadovoljava sledeće tri aksiome:

A1. Za svaka dva objekta $a, b \in \operatorname{Ob} C$, skup $\operatorname{Hom}_C(a, b)$ je Abelova grupa, a kompozicija je bidistributivna u odnosu na to sabiranje (biaditivna):

$$\begin{aligned} f \circ (g + h) &= f \circ g + f \circ h \\ (f + g) \circ h &= f \circ h + g \circ h \end{aligned}$$

za sve trojke za koje je kompozicija definisana.

A2. Postoji objekat $o \in \operatorname{Ob} C$, za koji je $\operatorname{Hom}_C(a, b) = 0$ trivijalna grupa.

A3. Za svaka dva objekta $a, b \in \operatorname{Ob} C$ postoji dijagram

$$a \underset{p_a}{\overset{i_a}{\rightleftarrows}} c \underset{p_b}{\overset{i_b}{\leftrightarrows}} b$$

u kome je

$$p_a \circ i_a = 1_a, \quad p_b \circ i_b = 1_b$$
$$i_a \circ p_b = 0, \quad i_b \circ p_a = 0$$
$$i_a \circ p_a + i_b \circ p_b = 1_c$$

Primedbe.

1. Nula-elemente svih grûpa $\mathrm{Hom}_C(a,b)$ obeležavamo istom oznakom 0.

2. Kao posledicu aksiome 1, za svaki morfizam $f : a \to b$ imamo da je $f \circ 0 = 0$, jer je $f \circ 0 = f \circ (0+0) = f \circ 0 + f \circ 0$ odakle je $f \circ 0 = 0$. Isto tako, $0 \circ f = 0$.

3. Kao posledicu aksiome 2 imamo da je $1_o = 0$. U stvari, aksioma 2 je ekvivalentna tom zahtevu: ako je o objekat za koji je $1_o = 0$, tada za svaki $f \in \mathrm{Hom}(o,o)$ imamo $f = f \circ 1 = f \circ 0 = 0$ pa je $\mathrm{Hom}(o,o) = \{0\}$.

4. Iz recenog sledi da je o i inicijalni i terminalni objekat kategorije C. Naime, ako $f \in \mathrm{Hom}(o,a)$, tada je na isti način kao malopre, $f = f \circ 1_o = f \circ 0 = 0$. Potpuno isto za kompoziciju zdesna sa $f \in \mathrm{Hom}(a,o)$. Ovakav objekat o naziva se *nula-objekat* kategorije C i odredjen je jednoznačno do na (jedinstveni) izomorfizam.

3. Iz aksioma 1 i 2 sledi da, ako objekti a i b imaju sumu $a \xrightarrow{i_a} a \sqcup b \xleftarrow{i_b} b$ i proizvod $a \xleftarrow{p_a} a \sqcap b \xrightarrow{p_b} b$, tada se može definisati morfizam $i_a p_a + i_b p_b : a \sqcup b \to a \sqcap b$. Aksioma 3 znači da svaka dva objekta imaju sumu i proizvod, kao i da je taj morfizam izomorfizam. Objekat c je istovremeno direktna suma (koproizvod) i direktni proizvod objekata a i b. Naime, ako je $d = a \sqcup b$ sa morfizmima inkluzije $j_a : a \to d$ i $j_b : b \to d$, tada imamo morfizam $f = j_a p_a + j_b p_b : c \to d$ takav da je $f \circ i_a = j_a p_a i_a = j_a$ i $f \circ i_b = j_b p_b i_b = j_b$, a ako je $g : c \to d$ drugi takav morfizam, tada je $g = g \circ 1_c = g(i_a p_a + i_b p_b) = g i_a p_a + g i_b p_b = f i_a p_a + f i_b p_b = f(i_a p_a + i_b p_b) = f$.

Analogan je dokaz za direktni proizvod.

Dakle, aditivna kategorija je kategorija u kojoj se morfizmi izmedju fiksiranih objekata mogu sabirati i formiraju Abelove grupe, koja ima objekat koji je istovremeno i inicijalni i terminalni, i u kojoj svaka dva objekta imaju sumu koja je istovremeno i proizvod.

U kategoriji Abelovih grupa, kao i modula nad prstenom, svaki morfizam ima jezgro i sliku, pri čemu važi teorema o homomorfizmu. Faktor-modul $M/\mathrm{Ker}\, f$ koji se pri tome javlja naziva se *kojezgro morfizma* f. i to je pojam dualan pojmu jezgra. Slika se može opisati pomoću jezgra i kojezgra: $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Ker}(\mathrm{coker}\ f)$ (proverite na osnovu definicije).

Podsetimo se pojma jezgra u kategoriji sa nula-morfizmom. Ako je $f : a \to b$ morfizam, tada se morfizam $\ker f = k : \mathrm{Ker}\, f \to a$ naziva jezgrom morfizma f, ako je $f \circ k = 0$ i ako za neki morfizam $g : c \to a$ važi $f \circ g = 0$, tada se g jednoznačno faktorizuje kroz k tj. postoji jedinstven morfizam $h : c \to \mathrm{Ker}\, f$ takav da je $g = k \circ f$. Dualan pojam naziva se kojezgro $\mathrm{coker}\, f : b \to \mathrm{Coker}\, f$.

Lako se vidi da je f mono (tj. može se skratiti sa leve strane u kompoziciji) ako i samo ako je $\ker f = 0$, a da je epi (tj. može se skratiti sa desne strane u kompoziciji) ako i samo ako je $\mathrm{coker}\, f = 0$.

Zadatak. Pokažite da je $\ker(\ker f)=0$ odnosno da je svako jezgro monomorfizam. Isto tako, svako kojezgro je epimorfizam.

U aditivnoj kategoriji svaki nula-morfizam $a\xrightarrow{0}b$ ima i jezgro i kojezgro: $a\xrightarrow{1}a\xrightarrow{0}b\xrightarrow{1}b$, što se neposredno proverava. Isto tako, svaki jedinični morfizam $a\xrightarrow{1}a$ ima i jezgro i kojezgro: $o\xrightarrow{0}a\xrightarrow{1}a\xrightarrow{0}o$. Medjutim, proizvoljni morfizam ne mora imati jezgro i/ili kojezgro. Ovo se u aditivnoj kategoriji može zahtevati kao dodatna aksioma.

A4. Kategorija C je *pre-Abelova*, ako u njoj svaki morfizam ima jezgro i kojezgro.

U pre-Abelovoj kategoriji možemo svaki morfizam $f:a\to b$ razložiti u kompoziciju $f=\ker(\operatorname{coker} f)\circ g\circ \operatorname{coker}(\ker f)$ gde je prvi morfizam mono, a poslednji epi. To vidimo na osnovu sledećeg dijagrama:

$$\begin{array}{ccccccc}
k & \xrightarrow{ker\ f} & a & \xrightarrow{f} & b & \xrightarrow{coker\ f} & c\\
 & coker(ker\ f)\downarrow & & \searrow & \uparrow ker(coker\ f) & & \\
 & & \operatorname{Coim} f & \xrightarrow{g} & \operatorname{Im} f & &
\end{array}$$

U ovom dijagramu kosi morfizam $a\to\operatorname{Im} f$ postoji zbog definicije $\ker(\operatorname{coker} f)$, kompozicija $k\to a\to\operatorname{Im} f$ jednaka je 0 jer je $\ker(\operatorname{coker} f)$ mono, a morfizam $\operatorname{Coim} f\to\operatorname{Im} f$ postoji zbog definicije $\operatorname{coker}(\ker f)$. U kategoriji Abelovih grupa, kao i kategoriji modula nad prstenom, srednji morfizam $g:\operatorname{Coim} f\to\operatorname{Im} f$ je izo i to je sadržaj prve teoreme o izomorfizmu. U opštem slučaju to ne mora biti tako.

Primeri 1. Kategorija topoloških Abelovih grupa $TopAb$. Objekti ove kategorije su topološke Abelove grupe, a morfizmi neprekidni homomorfizmi. Ovo je pre-Abelova kategorija, u kojoj svaki morfizam $f:X\to Y$ ima jezgro $\operatorname{Ker} f=f^{-1}(0)\hookrightarrow X$ i kojezgro $Y\twoheadrightarrow \operatorname{Coker}\ f=Y/\overline{f(X)}$, što se neposredno proverava. Morfizam $f:\mathbb{R}_{diskr}\to\mathbb{R}$ je medjutim takav da odgovarajući morfizam $g=f:\operatorname{Coim} f=\mathbb{R}_{diskr}\to\mathbb{R}=\operatorname{Im} f$ nije izo.

2. Kategorija filtriranih Abelovih grupa FAb. Objekti ove kategorije su Abelove grupe X sa filtracijom $0\subset\cdots\subset X_i\subset X_{i+1}\subset\cdots\subset X$, morfizmi su homomorfizmi grupa $f:X\to Y$ koji čuvaju filtraciju tj. $f(X_i)\subset Y_i$. I ovo je pre-Abelova kategorija, u kojoj morfizmi imaju uobičajeno jezgro $\operatorname{Ker} f=f^{-1}(0)\hookrightarrow X$ sa filtracijom $(\operatorname{Ker} f)_i=f^{-1}(0)\cap X_i$ i uobičajeno kojezgro $Y\twoheadrightarrow\operatorname{Coker} f=Y/f(X)$ sa filtracijom $(\operatorname{Coker} f)_i=(Y_i+f(X))/f(X)=Y_i/(f(X)\cap Y_i)$. Ako je $X=X'=X''$ isti objekat sa dve filtracije $X_i'\subset X_i''$ koje se razlikuju bar na jednom mestu, tada identički homomorfizam $f:X'\to X''$ ima svojstvo da odgovarajući $g=f:\operatorname{Coim} f=X'\to X''=\operatorname{Im} f$ nije izo.

A5. Kategorija C je Abelova kategorija, ako je u kanonskom razlaganju morfizma $f:X\to Y$ srednji morfizam $g:\operatorname{Coim} f\to\operatorname{Im} f$ uvek izo.

U proizvoljnoj Abelovoj kategoriji postoje konačne sume, ali može se desiti da ne postoje beskonačne sume. Medjutim, u našim standardnim primerima Ab i $A-Mod$ postoje proizvoljne sume, pa se i to može aksiomatski zahtevati. Dobija se još uži pojam *Grotendikove kategorije*: to je kategorija u kojoj svaka familija objekata ima sumu, a direktni limes tačnih nizova po usmerenom skupu je tačan, kao i odgovarajuće dualne osobine. Kategorije Ab i $A - Mod$ su Grotendikove kategorije.

Konstrukcija direktnog limesa u kategoriji modula.

Najopštiji primer univerzalne konstrukcije daje pojam limesa funktora.

Neka je I usmereni skup indeksa (tj. I je uredjeni skup i za svaka dva elementa $i, j \in I$ postoji gornja granica tj. element $k \in I$ takav da je $i \leq k$ i $j \leq k$), M_i $(i \in I)$ familija A-modula indeksirana skupom I i $\mu_{ij} : M_i \to M_j$ $(i \leq j)$ familija A-morfizama indeksirana svim parovima (i, j) za koje je $i \leq j$, pri čemu je za svako $i \in I$, $\mu_{ii} = id_{M_i}$ i za svaku trojku $i \leq j \leq k$ vazi $\mu_{ik} = \mu_{jk} \circ \mu_{ij}$. Ovakav skup podataka $\{M_i, \mu_{ij}\}$ naziva se *direktni sistem modula* i u stvari predstavlja funktor $F : I \to A-Mod$ ili, u drugoj terminologiji, *dijagram tipa I* u kategoriji $A-Mod$. Dokažimo da direktni sistem modula ima direktni limes (shvaćen kao univerzalna konstrukcija na sledeći način: to je modul M zajedno sa familijom homomorfizama $\mu_i : M_i \to M$ takvih da

1) svi trouglovi komutiraju tj. $\mu_j = \mu_i \circ \mu_{ij}$ i

2) ako je N neki drugi modul sa familijom homomorfizama $\nu_i : M_i \to N$ takvom da svi trouglovi komutiraju tj. $\nu_j = \nu_i \circ \mu_{ij}$ tada postoji jedinstven homomorfizam $\nu : M \to N$ preko koga se razlažu svi ν tj. $\nu_i = \nu \circ \mu_i$).

Prvi korak: formiramo modul $P = \oplus_{i \in I} M_i$ tj. direktnu sumu svih modula M_i. Identifikujmo pri tome module M_i i njima izomorfne podmodule u P, pa možemo smatrati da su $M_i \subset P$.

Drugi korak: u modulu P uočimo podmodul K generisan svim elementima oblika $x_i - \mu_{ij}(x_i)$ za sve parove $i \leq j$.

Treći korak: traženi modul je $M = P/K$, a morfizmi - kompozicije $\mu_i : M_i \hookrightarrow P \twoheadrightarrow M$.

Treba proveriti sledeće činjenice.

Prvo, da svi trouglovi komutiraju tj. da je $\mu_j = \mu_i \circ \mu_{ij}$. Ovo je očigledno iz konstrukcije modula M kao faktormodula po K.

Drugo, ako imamo modul N sa familijom homomorfizama $\nu_i : M_i \to N$ takvom da svi trouglovi komutiraju tj. $\nu_j = \nu_i \circ \mu_{ij}$ tada postoji jedinstven homomorfizam $\nu : M \to N$ preko koga se razlažu svi ν tj. $\nu_i = \nu \circ \mu_i$. Neka je dat takav modul N. Tada imamo homomorfizam $\nu' = \oplus_i \nu_i : P = \oplus_i M_i \to N$. Pošto je $\nu'(x_i - \mu_{ij}(x_i)) = \nu'(x_i) - \nu'(\mu_{ij}(x_i)) = \nu_i(x_i) - \nu_j \mu_{ij}(x_i) = \nu_i(x_i) - \nu_i(x_i) = 0$, onda je $K \subset \operatorname{Ker} \nu'$ što definiše traženi homomorfizam $\nu : M = P/K \to N$. sa očiglednim svojstvom $\nu \circ \mu_i = \nu_i$. Ostaje da se pokaže njegova jedinstvenost. Neka je $\overline{\nu}$ drugi takav homomorfizam. Tada je $\overline{\nu}(\overline{x_i}) = \overline{\nu}(\mu_i(x_i)) = \nu_i(x_i) = \nu(\overline{x_i})$.

Opišimo bliže elemente iz $M = \varinjlim M_i$, dokazavši sledeće tvrdjenje.

(1) Za svaki $x \in M$ postoji $i \in I$ i $x_i \in M_i$ tako da je $x = \mu_i(x_i)$.

(2) Ako je $x = \mu_i(x_i) = \mu_j(x_j)$, tada postoji $k \in I$ takav da je $i \leq k$, $j \leq k$ i $\mu_{ik}(x_i) = \mu_{jk}(x_j) = x_k$, $x = \mu_k(x_k)$.

Naime, po definiciji, $x \in M = P/K$ mora biti oblika

$$x = (x_{i_1} + \cdots + x_{i_m}) \bmod K = \mu_{i_1}(x_{i_1}) + \cdots + \mu_{i_m}(x_{i_m}).$$

Zbog usmerenosti skupa I, postoji $k = \max\{i_1, \ldots, i_m\}$. Sada je $x_k = \mu_{i_1 k}(x_{i_1})+$

$\cdots + \mu_{i_m k}(x_{i_m}) \in M_k$ element takav da je

$$\mu_k(x_k) = \mu_k \mu_{i_1 k}(x_{i_1}) + \cdots + \mu_k \mu_{i_m k}(x_{i_m}) = \mu_{i_1}(x_{i_1}) + \cdots + \mu_{i_m}(x_{i_m}) = x.$$

Ovo dokazuje egzistenciju reprezentanta. Ako pak imamo dva reprezentanta $x = \mu_i(x_i) = \mu_j(x_j)$, tada je $\mu_i(x_i) - \mu_j(x_j) = 0$ u M tj. $x_i - x_j \in K$, odakle je

$$x_i - x_j = \lambda_1(x_{i_1} - \mu_{i_1 j_1}(x_{j_1})) + \cdots + \lambda_m(x_{i_m} - \mu_{i_m j_m}(x_{j_m}))$$

za neke $i_1, \ldots, j_m \in I$. Opet zbog usmerenosti I, postoji $k = \max J$ gde je $J = \{i, j, i_1, \ldots, i_m, j_1, \ldots, j_m\}$. Uočimo podmodul $P' = \oplus_{i \in J} M_i \subset P$ i homomorfizam $h : P' \to M_k$ definisan sa $h(\oplus_{i \in J} x_i) = \sum_{i \in J} \mu_{ik}(x_i)$ (pažnja, ovo NIJE homomorfizam projekcije, već direktna suma homomorfizama μ_{ik}). Sada je

$$\begin{aligned}
\mu_i(x_i) - \mu_j(x_j) &= h(x_i - x_j) = \\
&= \lambda_1(\mu_{i_1 k}(x_{i_1}) - \mu_{j_1 k}\mu_{i_1 j_1}(x_{j_1})) + \cdots + \lambda_m(\mu_{i_m k}(x_{i_m}) - \mu_{j_m k}\mu_{i_m j_m}(x_{j_m})) = 0.
\end{aligned}$$

Ovo nam daje dobar opis elemenata direktnog limesa. Primetimo da se u dokazu esencijalno koristi usmerenost skupa I. Iako se direktni limes definiše (univerzalnim opisom) i u slučaju opšte kategorije I, ovakav opis njegovih elemenata nije uvek moguć.