

Питагорине тројке, рационалне тачке на кругу и велика Фермаова теорема

Још од основне школе знамо за Питагорину теорему и њој обрнуту: (реални) бројеви a, b су катете, а c хипотенуза правоуглог троугла $\iff a^2 + b^2 = c^2$.

Ако су бројеви природни, тројка бројева (a, b, c) назива се Питагорина тројка. Најстарија позната Питагорина тројка је свакако $(3, 4, 5)$, позната под именом египатски троугао. Наиме, $3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 = 5^2$ и троугао са страницама 3, 4, 5 је правоугли. Ово је било познато свим великим културама човечанства, а не само египатској.

Знамо тригонометријску верзију Питагорине теореме:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

где је $\sin \alpha = \frac{a}{c}$, $\cos \alpha = \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \frac{b}{c}$. Знамо такође основне вредности тригонометријских функција за специјалне школске правоугле троуглове - једнакокраки и половину једнакостраничног, и то памтимо у облику таблице:

$$\begin{aligned} \sin 30^\circ &= \cos 60^\circ & \frac{1}{2} \\ \sin 45^\circ &= \cos 45^\circ & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin 60^\circ &= \cos 30^\circ & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

Углови $30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ су свакако лепо (трећина, половина и две трећине правог угла), али кад дође до рачунања онда почну да нас нервирају бројеви $\sqrt{2}$ и $\sqrt{3}$ и запитамо се има ли тригонометрије са целим (природним) бројевима. Наравно, одговор је одмах ту, дају нам га Питагорине тројке, јер за углове у египатском троуглу важи $\sin \theta = \frac{3}{5}$, $\sin(\frac{\pi}{2} - \theta) = \cos \theta = \frac{4}{5}$ и то су два лепа рационална броја. Сетите се задатака из тригонометрије типа „израчунати једну тригонометријску функцију неког угла ако је дата друга”, у којима се понекад појављују рационални бројеви $\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{5}{13}, \frac{12}{13}$ (ови потоњи због Питагорине тројке $(5, 12, 13)$ јер је $5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169 = 13^2$) и други. Запитајмо се могу ли се наћи сви такви случајеви, кад су оба броја $\sin \theta$ и $\cos \theta$ рационална. Ако се сетимо јединичног круга¹

$$x^2 + y^2 = 1$$

видимо да тригонометријске функције

$$\begin{aligned} x &= \cos \theta \\ y &= \sin \theta \end{aligned}$$

дају његову параметризацију, а тачке које нас интересују представљају управо тачке круга са рационалним координатама $(x, y) = (\frac{a}{c}, \frac{b}{c})$. То су тзв. *рационалне тачке круга*. Можемо ли их све наћи?

Задатак је решио још Еуклид у својим „Елементима”, а касније му се вратио и Диофант. Као почетак решавања наведимо следеће. Прво, може се сматрати да сва три природна броја (a, b, c) немају заједнички делилац, тј. да су узајамно прости, јер се евентуални заједнички делилац може скратити. Такве тројке називају се *примитивним Питагориним тројкама*. Друго, у примитивној тројки тачно један од бројева a, b је паран, остала два (укључујући c) су непарни. Ово је лако доказати користећи чињеницу да је квадрат парног броја паран, а квадрат непарног непаран.

Задатак. Нађите у Еуклидовим „Елементима” (линк на интернету: poincare.matf.bg.ac.rs/nastavno/zlucic/) доказ Питагорине теореме и решење проблема Питагориних тројки.

Може се видети да је тројка (a, b, c) Питагорина са парним $b \iff$ постоје два природна броја (u, v) , $u > v$, таква да је

$$\begin{aligned} a &= u^2 - v^2 \\ b &= 2uv \\ c &= u^2 + v^2. \end{aligned}$$

Тако, египатски троугао се добија за $(u, v) = (2, 1)$. Међу овим тројкама може бити и непримитивних, рецимо за $(u, v) = (3, 1)$.

Задатак. Изведите сами решење проблема Питагориних тројки

Да ли вас ово подсећа на нешто? Свакако, ради се о формулама за тригонометријске функције половине угла:

$$\begin{aligned}\sin \theta &= \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2}} \\ \cos \theta &= \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2}}.\end{aligned}$$

Одавде видимо да параметризација круга тригонометријским функцијама

$$\begin{aligned}x &= \cos \theta \\ y &= \sin \theta\end{aligned}$$

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1, (\theta \in [-\pi, \pi]),$$

своди на параметризацију круга рационалним функцијама

$$\begin{aligned}x &= \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \\ y &= \frac{2t}{1 + t^2} \\ (t &\in (-\infty, \infty)).\end{aligned}$$

При томе, рационалне тачке круга добијају се за рационалне вредности параметра t .

Задатак. Наћи рационалну параметризацију хиперболе

$$x^2 - y^2 = 1$$

и параболе

$$y^2 = 2x.$$

Дакле, круг допушта параметризацију помоћу рационалних функција из $\mathbb{R}(t)$ односно $\mathbb{Q}(t)$, која нам даје све његове рационалне тачке, њих пребројиво много.

Пјер де Ферма је проучавајући Диофантову „Аритметику” дошао на идеју да једначина $a^n + b^n = c^n$ за $n \geq 3$ нема решења у природним бројевима. Чувена је његова маргинална белешка: „Открио сам чудесан доказ овога, али маргина је сувише мала”². Од године 1637. када је Ферма написао своју белешку па све до 1995. када су објављена два рада - Вајлсов рад из 1993. и други, Вајлсов

²Белешка је на латинском језику и гласи: „Cubum autem in duos cubos, aut quadratoquadratum in duos quadratoquadratos, et generaliter nullam in infinitum ultra quadratum potestatem in duos ejusdem nominis fas est dividere: cujus rei demonstrationem mirabilem sane detexi. Hanc marginis exiguitas non caperet.”

заједнички рад са Тејлором у којем је први рад допуњен - скоро 360 година је Фермаова белешка привлачила пажњу математичара и служила као покретач развоја идеја у алгебри. Огроман део алгебре, укључујући теорију факторизације, теорију идеала и многе друге теме настао је у покушајима доказивања велике Фермаове хипотезе. Данас захваљујући Вајлсу то тврђење више није хипотеза већ теорема.

Ако интерпретирамо велику Фермаову теорему онако како смо говорили о параметризацији круга, можемо утврдити да, осим четири тривијалне тачке $(\pm 1, 0)$, $(0, \pm 1)$, на кривој

$$x^n + y^n = 1$$

за $n \geq 3$ нема других рационалних тачака. Посебно, одатле следи да ова крива нема рационалну параметризацију.

Од чега зависи постојање рационалне параметризације? На ово и на друга питања одговорићемо у наредним предавањима.