1 Nilpotentni endomorfizmi

Još jednu jednostavnu i važnu klasu endomorfizama vektorskog prostora čine oni čiji je neki stepen jednak nuli - nilpotentni elementi prstena $\operatorname{End} V$. Isti pojam definiše se i za matrice.

Definicija. Endomorfizam $L \in \operatorname{End} V$ je *nilpotentan* ako postoji prirodan broj $m \in \mathbb{N}$ takav da je $L^m = O$ Najmanji takav prirodan broj m naziva se *indeks nilpotentnosti* operatora L i obeležava sa $\operatorname{ind} L$.

Analogno, matrica $A \in \mathcal{M}(n, \mathbb{F}))$ je *nilpotentna* ako postoji prirodan broj $m \in \mathbb{N}$ takav da je $A^m = O$. Najmanji takav prirodan broj m naziva se *indeks nilpotentnosti* matrice A i obeležava sa $\operatorname{ind} A$.

Sve što će dalje biti rečeno za endomorfizme na analogan način važi i za matrice.

Definicija. Neka je $L \in \operatorname{End} V$. Niz vektora u prostoru V oblika $e, L(e), \ldots, L^{m-1}(e)$, pri čemu je $L^{m-1}(e) \neq o$, a $L(L^{m-1}(e)) = L^m(e) = o$, nazivaćemo *ciklični niz* dužine m i obeležavati ga dijagramom

$$e \to L(e) \to \cdots \to L^{m-1}(e)$$

ili samo

$$\cdot \to \cdot \to \cdots \to \cdot$$

ako se vektori znaju iz konteksta. Takav niz je odredjen svojim početnim vektorom e. Primetimo da iz $L^{m-1}(e) \neq o$ sledi da su svi vektori niza $\neq o$.

Lema. Svaki cikličan niz je linearno nezavisan.

Dokaz. Obeležimo $e_i = L^{i-1}(e)$ $(1 \leq i \leq m)$. Pošto je $L(e_i) = e_{i+1} \neq o$ za $i < m$ i $L(e_m) = o$, primenom L na jednakost $a_1e_1 + \ldots + a_me_m = o$ dobijamo $a_1e_2 + \ldots + a_{m-1}e_m = o$. Višestrukom primenom operatora L dolazimo do $a_1e_m = o$, odakle je $a_1 = 0$, a zatim iz prethodnih jednakosti i svi ostali $a_i = 0$. ∎

Definicija. Neka je $L \in \operatorname{End} V$. Potprostor $W \subset V$ je *cikličan potprostor* operatora L ako ima bazu koju čini cikličan niz. Dužina niza je upravo jednaka $\dim W$.

Lema. Ako je L nilpotentan endomorfizam indeksa k, onda je dužina svakog cikličnog niza $\leq k$ i postoji ciklični niz dužine k.

Dokaz. Ako je $e, L(e), \ldots, L^{m-1}(e)$ cikličan niz dužine m, onda je njegov poslednji član $\neq o$ pa je $m-1 < k$. Pošto je k najmanji prirodan broj za koji je $L^k = O$, tada postoji vektor $e \in V$ takav da je $L^{k-1}(e) \neq o$. Taj vektor definiše cikličan niz dužine k. ∎

Posledica. Indeks nilpotentnosti nilpotentnog operatora nije veći od dimenzije prostora. ∎

Pretpostavimo da je ceo prostor cikličan za L, tj. da imamo bazu prostora koju čini cikličan niz $e_n \to \ldots \to e_1$ sa $L(e_1) = o$. Matrica operatora L u toj bazi je tada

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \\ & & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Primetimo da numeracija vektora niza ovde opada udesno da bi matrica imala tradicionalan gornji trougaoni izgled. To je najjednostavniji tip nilpotentnih matrica i naziva se *Žordanov* 0-*blok* $J_n(0)$.

Definicija. *Žordanov* λ-*blok* $J_n(\lambda)$, pri čemu je $\lambda \in \mathbb{F}$, jeste matrica oblika

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & \\ & & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix} \text{ dimenzije } n.$$

Žordanova matrica je svaka "dvodijagonalna" blok-matrica sastavljena od Žordanovih blokova rasporedjenih na dijagonali $J(\lambda_1, n_1; \ldots; \lambda_k, n_k) = \operatorname{diag}\{J_{n_1}(\lambda_1), \ldots, J_{n_k}(\lambda_k)\} =$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & & & & & & & & & & \\ & \ddots & \ddots & & & & & & & & & \\ & & \ddots & 1 & & & & & & & & \\ & & & \lambda_1 & 0 & & & & & & & \\ & & & & \lambda_2 & 1 & & & & & & \\ & & & & & \ddots & \ddots & & & & & \\ & & & & & & \ddots & 1 & & & & \\ & & & & & & & \lambda_2 & 0 & & & \\ & & & & & & & & \ddots & & & \\ & & & & & & & & & \lambda_k & 1 & \\ & & & & & & & & & & \ddots & \ddots \\ & & & & & & & & & & & \ddots & 1 \\ & & & & & & & & & & & & \lambda_k \end{pmatrix}$$

gde su svi ostali elementi nule. Njena dimenzija je $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$.

Neposredno se vidi da je

$$\chi_{J_n(\lambda)}(x) = (-1)^n (x - \lambda)^n \text{ i } \operatorname{Sp} J_n(\lambda) = \{\lambda\},$$

dok je (primenom teoreme o determinanti s blokom nula)

$$\chi_J(x) = \chi_{J_1}(x) \cdot \ldots \cdot \chi_{J_k}(x) \text{ i } \operatorname{Sp} J = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$$

pri čemu su $J_1, \dots, J_k$ Žordanovi blokovi od kojih je matrica J sastavljena.

Lema. Endomorfizam L prostora $\mathbb{F}^n$ odredjen Žordanovom 0-matricom $J = J(0, n_1; \dots ; 0, n_k)$ je nilpotentan, standardna baza se sastoji od k cikličnih nizova dužina $n_1, \dots, n_k$ respektivno, a indeks nilpotentnosti jednak je dužini najdužeg niza.

Dokaz. Iz matrice J vidi se da su

$$\begin{array}{l} e_{n_1} \to e_{n_1-1} \to \cdots \to e_2 \to e_1 \\ e_{n_1+n_2} \to e_{n_1+n_2-1} \to \cdots \to e_{n_1+1} \\ \cdots \\ e_{n_1+\cdots+n_k} \to e_{n_1+\cdots+n_k-1} \to \cdots \to e_{n_1+\cdots+n_{k-1}+1} \end{array}$$

ciklični nizovi, odakle neposredno sledi tvrdjenje. ∎

Definicija. Baza e vektorskog prostora V je *Žordanova baza* endomorfizma L ako je matrica $[L]_e$ Žordanova matrica.

Osnovni cilj je da pokažemo da svaki nilpotentni endomorfizam ima Žordanovu bazu i da je odgovarajuća Žordanova matrica odredjena jednoznačno s tačnošću do permutacije blokova. Dokažimo prvo značajno uopštenje prethodne leme.

Lema. Ako su krajnji vektori skupa cikličnih nizova

$$\begin{array}{l} e^{(1)}_{n_1} \to \cdots \to e^{(1)}_1 \\ \cdots \\ e^{(k)}_{n_k} \to \cdots \to e^{(k)}_1 \end{array}$$

nilpotentnog endomorfizma L linearno nezavisni, tada je i ceo skup vektora linearno nezavisan.

Dokaz. Indukcija po dužini najdužeg niza $m = \max n_i$. Ako je data linearna kombinacija svih vektora

$$\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_i} \lambda_j e^{(i)}_j = o,$$

primenimo na nju operator L^{m-1}. Zbog svojstva cikličnosti, slike svih vektora su jednake o, osim krajnjih vektora svih maksimalnih cikličnih nizova dužine m. Pri tom su uz ove vektore koeficijenti početnih vektora tih nizova. Zbog linearne nezavisnosti krajnjih vektora, svi ti koeficijenti su jednaki 0, pa početni vektori najdužih nizova ne učestvuju u toj linearnoj kombinaciji. Izbacimo ih iz polaznog skupa vektora. Dobijamo novi skup cikličnih nizova kod kojeg je $\max n_i = m - 1$. Po induktivnoj hipotezi, ti vektori su linearno nezavisni, pa su i ostali koeficijenti u toj kombinaciji jednaki nuli. ∎

Tvrdjenje. Svaki nilpotentni operator L ima Žordanovu bazu. Dimenzije $n_1, \dots, n_k$ i broj k Žordanovih blokova su odredjeni jednoznačno s tačnošću do permutacije, $n_1 + \ldots + n_k = n$ i $\max n_i = m = \operatorname{ind} L$.

Dokaz izvedimo indukcijom po indeksu nilpotentnosti. Operator indeksa nilpotentnosti 1 je nula-operator čija je matrica O u svakoj bazi Žordanova, broj Žordanovih blokova je n, a dimenzije su sve jednake 1, tj. imamo razlaganje $n = 1 + \ldots + 1$. Neka je sada $\operatorname{ind} L = m$. Uočimo potprostor $W = \operatorname{Im} L$ i restrikciju $L' = L|_W$ operatora L na W. Tada je $L' \in \operatorname{End} W$ indeksa nilpotentnosti $m - 1$.

1) Dokažimo egzistenciju Žordanove baze za L. Po induktivnoj pretpostavci, L' ima Žordanovu bazu sa p cikličnih nizova. Neka su $e'_1, \ldots, e'_p \in W$ njihovi početni vektori i neka su $e_1, \ldots, e_p$ vektori u V takvi da je $L(e_i) = e'_i$. Dodajmo na početak svakog cikličnog niza za L' odgovarajući vektor e_i. Krajnji vektori skupa cikličnih nizova za L' leže u $\operatorname{Ker} L$ i linearno su nezavisni. Dopunimo ih do baze $\operatorname{Ker} L$ vektorima koji čine ciklične nizove dužine 1. Svi vektori zajedno, stari sa dodatim početnim vektorima nizova i vektorima iz $\operatorname{Ker} L$ kao zasebnim novim nizovima, čine jedan skup cikličnih nizova za operator L. Pri tom krajevi nizova čine bazu u $\operatorname{Ker} L$, pa su linearno nezavisni. Na osnovu leme, ceo skup je linearno nezavisan. Broj vektora u tom skupu je $\dim \operatorname{Im} L +$ broj nizova $+(\dim \operatorname{Ker} L -$ broj nizova$) = r(L) + k + d(L) - p = \dim V$. Zato je dobijeni skup cikličnih nizova baza za V, tražena Žordanova baza za L. Situacija se može predstaviti sledećim dijagramom:

$$\left.\begin{array}{l}
\cdot \to \cdot \to \cdot \to \cdot \to \cdot \\
\cdot \to \cdot \to \cdot \to \cdot \\
\cdots \\
\cdot \to \cdot \to \cdot \\
\cdot \to \cdot \\
\cdot \\
\cdots \\
\cdot
\end{array}\right\} p \text{ nizova}$$

Vektori koje smo u procesu dokaza dodali Žordanovoj bazi za L' su u prvoj koloni. Skup svih vektora bez tih početnih je polazni skup i čini bazu u $\operatorname{Im} L$. Skup svih krajnjih vektora nizova čini bazu u $\operatorname{Ker} L$ po konstrukciji.

2) Dokažimo jedinstvenost brojeva k i $n_1, \ldots, n_k$ (s tačnošću do permutacije) u Žordanovoj bazi za L. U datoj Žordanovoj bazi se permutacijom vektora može uvek dobiti da dužina nizova ne raste: $n_1 \geq n_2 \geq \ldots \geq n_k$. Iz dijagrama se vidi da je $k \leq d(L)$ (jer svi krajevi nizova leže u $\operatorname{Ker} L$) i $n - k \leq r(L)$ (jer svi vektori, osim početaka nizova, leže u $\operatorname{Im} L$). Kada bi bar u jednoj od tih nejednakosti bila stroga nejednakost, $n = k + (n-k) < d(L) + r(L) = n$, što je kontradikcija. Zato je $k = d(L)$, tj. broj nizova (odnosno Žordanovih blokova) jednoznačno je odredjen operatorom L. Pretpostavimo da imamo još jednu Žordanovu bazu za L sa blokovima dimenzija $n'_1 \geq n'_2 \geq \ldots \geq n'_k$. Izbacimo iz svakog od nizova početni vektor. Preostali vektori, njih $n - k = r(L)$, i u prvom i u drugom slučaju leže u $\operatorname{Im} L$ i linearno su nezavisni, pa čine Žordanove baze za operator L' na $W = \operatorname{Im} L$ koji je indeksa nilpotentnosti $m - 1$. Na osnovu indukcijske hipoteze je zato $n_i - 1 = n'_i - 1$ $(i = 1, \ldots, k)$ odakle sledi tražena jedinstvenost. ∎

Posledica. Ako je A nilpotentna matrica, tada je nilpotentna i svaka njoj slična matrica $B \approx A$. U svakoj klasi sličnosti nilpotentnih matrica postoji tačno jedna Žordanova nilpotentna matrica. Broj tih klasa sličnosti, odnosno broj geometrijski različitih nilpotentnih operatora je konačan i jednak broju različitih Žordanovih nilpotentnih matrica. Taj je broj jednak tzv. broju particija $\mathcal{P}(n)$ broja $n = \dim V$ — broju različitih načina na koje se n može razložiti u sumu prirodnih brojeva (ne razlikujući razlaganja koja se dobijaju permutacijom sabiraka). Iz sledeće tablice vidi se koliko brzo raste taj broj:

n	1	2	3	4	5	6	7	10	100	200
$\mathcal{P}(n)$	1	2	3	5	7	11	15	42	190569292	3972999029388

Zanimljivo je da nije nadjena eksplicitna formula za broj particija. Relativno jednostavno može se pokazati da je odozgo ograničen Fibonačijevim brojem $\mathcal{P}(n) \leq F_{n+1}$. Metodama matematičke analize se pokazuje da je

$$\mathcal{P}(n) \sim \frac{1}{4\sqrt{3} \cdot n} e^{\pi\sqrt{2/3}\cdot\sqrt{n}}.$$

Primeri. Za $n = 4$ imamo pet mogućih particija, odnosno pet različitih dijagrama sa 4 elemenata. To su particije $4 = 3 + 1 = 2 + 2 = 2 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1$, odnosno dijagrami

$$\cdot \to \cdot \to \cdot \to \cdot, \quad \begin{array}{l} \cdot \to \cdot \to \cdot \\ \cdot \end{array}, \quad \begin{array}{l} \cdot \to \cdot \\ \cdot \to \cdot \end{array}, \quad \begin{array}{l} \cdot \to \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{array}, \quad \begin{array}{l} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{array}$$

kojima odgovara sledećih pet Žordanovih nilpotentnih matrica reda 4:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2 Minimalni polinom

Videli smo da nilpotentni operatori zadovoljavaju uslov $L^m = O$. Pokušajmo sad da ovakve jednačine nadjemo za proizvoljne endomorfizme. Pošto je $\operatorname{End} V$ prsten, možemo endomorfizme množiti, stepenovati, pa i graditi od njih polinomijalne izraze. Slobodnije rečeno, u datom polinomu možemo promenljivu zameniti ne samo skalarom nego i operatorom (odnosno matricom) i dobiti novi operator (odnosno matricu).

Definicija. Ako je $L \in \operatorname{End} V$ endomorfizam (odnosno $A \in \mathcal{M}(n, \mathbb{F})$ matrica) i $p \in \mathbb{F}[x]$ polinom $p = a_0 + a_1 x + \ldots + a_k x^k$, tada je

$$p(L) := a_0 I + a_1 L + \ldots + a_k L^k \in \operatorname{End} V; \; p(A) = a_0 E + a_1 A + \ldots + a_k A^k \in \mathcal{M}(n, \mathbb{F}).$$

Lema. Za dato L preslikavanje $\varphi : \mathbb{F}[x] \to \operatorname{End} V$, $p \mapsto p(L)$ (kao u slučaju zamene skalara u polinom) je homomorfizam prstena.

Dokaz. Ova lema se neposredno proverava ispisivanjem odgovarajućih formula za $(p + q)(L)$ i $(p \cdot q)(L)$. ∎

Primedbe. (1) !! Obratite pažnju na to da je $\varphi(p \cdot q) = (p \cdot q)(L) = p(L) \circ q(L)$ a ne $(p \circ q)(L) = p(q(L))$.

(2) Iako u opštem slučaju endomorfizmi ne komutiraju, endomorfizmi dobijeni zamenom jednog istog operatora L u polinome ipak komutiraju: $p(L) \circ q(L) = q(L) \circ p(L)$ jer medjusobno komutiraju stepeni L^k.

(3) Sve što je rečeno (i što će dalje biti rečeno) za endomorfizme na isti način važi i za matrice.

Lema. Ako je λ sopstvena vrednost operatora L, tada je $p(\lambda)$ sopstvena vrednost operatora $p(L)$.

Dokaz. Neka je $L(e) = \lambda e$. Biće $L^k(e) = L^{k-1}(e) = \lambda L^{k-1}(e) = \ldots = \lambda^k e$, pa je $p(L)(e) = (a_0 I + \ldots + a_k L^k)(e) = a_0 e + \ldots + a_k \lambda^k e = p(\lambda) \cdot e$. ∎

Ako je p polinom takav da je $p(L) = O$, tada je, za svaku sopstvenu vrednost λ operatora L, $p(\lambda) = 0$, tj. λ je koren p. Da li takvi polinomi p postoje?

Tvrdjenje. Za svaki $L \in \operatorname{End} V$ postoji $p \in \mathbb{F}[x]$ takav da je $p(L) = 0$ (kažemo da *operator L anulira polinom p*).

Dokaz. Prostor $\operatorname{End} V$ ima dimenziju n^2, pa su njegovi elementi $I, L, L^2, \ldots, L^{n^2}$, njih $n^2 + 1$ na broju, linearno zavisni. Zato postoje $a_i \in \mathbb{F}$, medju kojima nisu svi jednaki nuli, takvi da je $a_0 I + a_1 L + \ldots + a_{n^2} L^{n^2} = O$. Traženi polinom je $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n^2} x^{n^2}$. ∎

Primeri. (1) Skalarna matrica $A = \lambda E$. Tada je $p(A) = O$ za polinom $p(x) = x - \lambda$. Primetimo da je $\chi_A(x) = (-1)^n (x - \lambda)^n$.

(2) Žordanov nula-blok (nilpotentna matrica) $A = J(0, n)$. Tada je $A^n = O$, tj. $p(A) = O$ za $p(x) = x^n$. Proverite da li postoji polinom manjeg stepena koji matrica A anulira.

Svaki endomorfizam anulira neki polinom stepena najviše n^2. Možemo se zapitati koji je to najmanji stepen polinoma koji dati operator (matrica) anulira.

Definicija. Polinom $p \in \mathbb{F}[x]$ je *minimalni polinom* endomorfizma L (matrice A) ako je:

1) $p(L) = O$;

2) $q(L) = O \Rightarrow \deg q \geq \deg p$, tj. p je polinom najmanjeg stepena s tim svojstvom;

3) polinom p je moničan, tj. najstariji njegov koeficijent je 1.

Tvrdjenje. (1) Ako je p minimalni polinom za L i $q(L) = O$, tada $p|q$.

(2) Minimalni polinom datog operatora L postoji, jednoznačno je odredjen i obeležava se sa μ_L.

(3) Ako je $A = [L]$ matrica operatora L u nekoj bazi, tada je $\mu_A = \mu_L$.

Dokaz. (1) Podelimo q sa p sa ostatkom: $q = hp + r$ ($\deg r < \deg p$) i zamenimo u tu formulu L. Pošto je evaluacija homomorfizam (lema 2),

$$O = q(L) = h(L) \circ p(L) + r(L) = r(L),$$

odakle, zbog definicije p, sledi $r = 0$ i $q = hp$.

(2) Skup $\{p \in \mathbb{F}[x] | p(L) = O\}$ je neprazan (tvrdjenje 5), pa ima element najmanjeg stepena. Ako su p i q dva polinoma koji zadovoljavaju sva tri uslova definicije 7, na osnovu prvog dela tvrdjenja $p|q$ i $q|p$. Odavde sledi da je $p = \alpha q$ ($\alpha \in \mathbb{F}$), a zbog moničnosti mora da bude $\alpha = 1$ i $p = q$.

(3) Pošto je $[-] : \operatorname{End} V \to \mathcal{M}(n, \mathbb{F})$ homomorfizam prstena, za svaki polinom $p \in \mathbb{F}[x]$ je $p(A) = p([L]) = [p(L)]$, odakle sledi tvrdjenje. ∎

Pokazali smo da je svaka sopstvena vrednost operatora L koren minimalnog polinoma. U stvari, važi i više.

Teorema. (1) Neka je V $\mathbb{F}$-vektorski prostor, a $L \in \operatorname{End} V$. Tada:

$$\lambda \in \mathbb{F} \text{ je koren } \chi_L \Leftrightarrow \lambda \text{ je koren } \mu_L,$$

tj. minimalni polinom ima iste korene kao karakteristični - to su sopstvene vrednosti operatora L, samo im se višestrukosti mogu razlikovati.

(2) Ako je $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ i $\chi, \mu \in \mathbb{R}[x]$ realni polinomi, tada se tvrdjenje odnosi i na njihove kompleksne korene:

$$\lambda \in \mathbb{C} \text{ je kompleksni koren } \chi_L \Leftrightarrow \lambda \text{ je kompleksni koren } \mu_L.$$

Dokaz. Smer $\Rightarrow$ je upravo dokazan.

(1) Dokažimo smer $\Leftarrow$ u opštem slučaju. Neka je λ koren polinoma μ_L. Tada je $\mu_L(x) = (x - \lambda) \cdot q(x)$. Pri tome je $q(L) \neq O$, odakle sledi da je za neki vektor $v \in V$, $v' = q(L)(v) \neq o$. Sada je $(L - \lambda I)(v') = [(L - \lambda I) \circ q(L)](v) = \mu_L(L)(v) = o$, tj. v' je sopstveni vektor za L i λ sopstvena vrednost operatora L.

(2) Neka je $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ i λ kompleksni koren polinoma μ_L. Opet je $\mu_L(x) = (x - \lambda) \cdot q(x)$, pri čemu je sad $q(x) = b_0 + \ldots + b_m x^m \in \mathbb{C}[x]$. Uočimo kompleksifikaciju $L_{\mathbb{C}}$ operatora L i pokažimo da je $q(L_{\mathbb{C}}) \neq O$. Neka je ipak $q(L_{\mathbb{C}}) = O$. Zapišimo $b_k = c_k + i d_k$, $c_k, d_k \in \mathbb{R}$ i uzmimo da je $q_1 = c_0 + \ldots + c_m x^m$, $q_2 = d_0 + \ldots + d_m x^m$. Biće $q = q_1 + i q_2$. Predjimo na matrični zapis. Neka je $A = [L] = [L_{\mathbb{C}}] \in \mathcal{M}(n, \mathbb{R})$. Tada je $q(A) = q_1(A) + i q_2(A) = O$. Pri tom su $q_k(A)$ realne matrice, pa mora biti $q_1(A) = q_2(A) = O$. Medjutim, $\deg q_k \leq m < \deg \mu_A$, što je kontradikcija. Zato mora da bude $q(L_{\mathbb{C}}) \neq O$. Isti argument kao malopre pokazuje da je za neki vektor iz kompleksifikacije $v \in V_{\mathbb{C}}$, $v' = q(L_{\mathbb{C}})(v) \neq o$. Pošto je $\mu_L(L) = O$, onda je i $\mu_L(L_{\mathbb{C}}) = O$, pa je $(L_{\mathbb{C}} - \lambda I)(v') = [(L_{\mathbb{C}} - \lambda I) \circ q(L_{\mathbb{C}})](v) = \mu_L(L_{\mathbb{C}})(v) = o$, tj. v' je sopstveni vektor i λ je sopstvena vrednost operatora $L_{\mathbb{C}}$, odnosno kompleksni koren polinoma χ_L. ∎

Primetimo da se u dokazu teoreme pod (2) koristi očigledna činjenica $\mu_L(L) = O \Longrightarrow \mu_L(L_{\mathbb{C}}) = O$, jer su matrice ova dva operatora iste. Uopšteno uzev, moglo bi se desiti da $\mu_{L_{\mathbb{C}}}$ ima manji stepen nego μ_L. Ipak, nije tako.

Posledica. $\mu_L = \mu_{L_{\mathbb{C}}}$.

Dokaz. $\mu_L(L) = O \Rightarrow \mu_L(L_{\mathbb{C}}) = O$, odakle sledi da $\mu_{L_{\mathbb{C}}} | \mu_L$. S druge strane,

$$q(L_{\mathbb{C}}) = O \Leftrightarrow q_1(L) = q_2(L) = O$$

odakle sledi da je $\deg \mu_L \leq \deg \mu_{L_C}$. ∎

Primetimo da ova posledica nije očigledna: iako operatori L i $L_{\mathbb{C}}$ imaju istu matricu, oni su definisani nad raznim poljima, pa bi μ_{L_C} mogao imati kompleksne koeficijente. Upravo je dokazano da ih ipak nema i da je to realan polinom, jednak μ_L, isto kao što je i $\chi_{L_{\mathbb{C}}} = \chi_L$.