(Chapter head:)Euklidski vektorski prostori

Definicije i primeri

U vektorskim prostorima nema metričkih pojmova neophodnih u zasnivanju geometrijskih teorija: rastojanja, dužina, uglova. Ti pojmovi se uvode uz pomoć dodatne strukture u vektorskim prostorima, u tzv. teoriji euklidskih prostora. Svi vektorski prostori ovde će biti definisani nad poljem $\mathbb{R}$ realnih brojeva.

Definicija. Neka je V $\mathbb{R}$-vektorski prostor. *Skalarni proizvod* u V je preslikavanje $V \times V \to \mathbb{R}$, koje paru vektora (u, v) dodeljuje realan broj obeležen isto (u, v), sa sledećim svojstvima:

1) preslikavanje je linearno po svakom argumentu (bilinearnost);

2) $\forall u, v \in V$, $(u, v) = (v, u)$ (simetričnost);

3) $\forall u \in V$, $(u, u) \geq 0$ i $(u, u) = 0 \Leftrightarrow u = o$ (pozitivna definitnost).

Euklidski vektorski prostor V je vektorski prostor sa skalarnim proizvodom.

Dakle, euklidski vektorski prostor je par (V, skalarni proizvod). Primetimo da na istom vektorskom prostoru možemo imati različite skalarne proizvode i zbog toga različite euklidske prostore ili, kako se još kaže, različite *euklidske strukture*.

Ako skalarni proizvod shvatimo kao neku vrstu množenja" vektora, svojstvo (1) se može tumačiti i kao njegova obostrana distributivnost:

$$(\alpha u+\beta v, w) = \alpha(u, w)+\beta(v, w); \ (u, \alpha v+\beta w) = \alpha(u, v)+\beta(u, w),$$

a svojstvo (2) kao komutativnost tog proizvoda. Zbog komutativnosti, u svojstvu (1) dovoljno je zahtevati linearnost po jednom argumentu, tj. distributivnost samo s jedne strane. Svojstvo (3) se ponekad ne smatra sastavnim delom definicije skalarnog proizvoda, već se posebno napominje — pozitivno definitni skalarni proizvod.

Primedba. Svi pojmovi definisani u vektorskom prostoru, kao što je linearna (ne)zavisnost, lineal, baza, dimenzija itd., prenose se u euklidski prostor jer su nezavisni od pojma skalarnog proizvoda. Sumnja može postojati kod potprostora, naime da li vektorski potprostor nasleuje euklidsku strukturu. Ako je V euklidski vektorski prostor, a $W \subset V$ njegov vektorski potprostor, tada je suženje $(-, -)|_W$ skalarnog proizvoda sa V na W jedan skalarni proizvod na W koji na njemu definiše strukturu euklidskog vektorskog prostora (tzv. indukovanu strukturu). Svaki vektorski potprostor na taj način postaje euklidski potprostor.

Skalarni proizvod na vektorskom prostoru V je, dakle, pozitivno definitna simetrična bilinearna funkcija na V. Na osnovu formule polarizacije, ona definiše jednu pozitivno definitnu kvadratnu funkciju na V: $F(v) = (v, v) \geq 0$. Ta kvadratna funkcija omogućiće nam da definišemo pojmove dužine vektora i ugla izmeu vektora.

Definicija. *Norma* (*intenzitet*) vektora $v \in V$ je broj $\|v\| = \sqrt{(v, v)}$. Kvadratna funkcija $\| - \|^2 : V \to \mathbb{R}$ naziva se *metrička funkcija* euklidskog prostora V.

Primedba. Očigledno je $\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$ i $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = o$. Norma vektora ima ulogu dužine i često ćemo tako i govoriti.

Primetimo da je korespondencija izmeu bilinearnih simetričnih funkcija i kvadratnih funkcija, data formulom polarizacije, obostrano jednoznačna:

$$(u, v) = \frac{1}{2} \left(\|u + v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2 \right).$$

Drugim rečima, funkcija norme ili metrička funkcija jednoznačno odreuje skalarni proizvod.

Primeri. (1) Ako je $V = \mathbb{R}^n$ i za $u = (x_1, \ldots, x_n)$ i $v = (y_1, \ldots, y_n)$ definišemo

$$(u, v) = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n,$$

tada se neposredno može proveriti da je ovo jedan n-dimenzionalni euklidski vektorski prostor, koji ćemo nazivati *standardni euklidski prostor*. Norma vektora je ovde

$$\|u\| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}.$$

(2) Neka je $V = C[0,1]$ prostor neprekidnih realnih funkcija na intervalu $[0,1]$. Definišimo

$$(f,g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx.$$

Svojstvo bilinearnosti sledi iz linearnosti integrala, simetričnost je očigledna. Takoe, $(f,f) \geq 0$ kao integral nenegativne funkcije f^2. Ako je

$$\int_0^1 f^2(x)dx = 0,$$

zbog nenegativnosti i neprekidnosti funkcije f^2 mora da bude $f = 0$. To je jedan beskonačnodimenzionalni euklidski prostor. U njemu je norma vektora" — funkcije data formulom:

$$\|f\| = \sqrt{\int_0^1 f^2(x)dx}.$$

Jedno od najvažnijih svojstava skalarnog proizvoda i norme je sledeća nejednakost.

Tvrenje (Koši-Švarcova nejednakost CS). Za $\forall u, v \in V$ je

$$|(u,v)| \leq \|u\|\|v\|$$

i važi jednakost $\Leftrightarrow$ u i v su linearno zavisni.

Dokaz. Uočimo vektor $u+tv$, pri čemu je t realni parametar i njegov skalarni kvadrat $\|u+tv\|^2$. Kao i pre, imamo jednakost $(u+tv, u+tv) = (u,u) + 2t(u,v) + t^2(v,v) = \|u\|^2 + 2(u,v)t + \|v\|^2 t^2 = F(t)$ i to je kvadratni polinom po t koji je uvek nenegativan. To znači da je njegova diskriminanta $4(u,v)^2 - 4\|u\|^2\|v\|^2 \leq 0$, odakle i dobijamo traženu nejednakost. Ako su u i v linearno zavisni, tada je, recimo, $u = \lambda v$, pa je $|(u,v)| = |\lambda|(v,v) = |\lambda|\|v\|^2 = \|u\|\|v\|$. Obrnuto, ako važi jednakost $|(u,v)| = \|u\|\|v\|$, onda je $F(t) = (\|u\| + t\|v\|)^2$, za neko t_0 je $F(t_0) = 0$, tj. $(u+t_0v, u+t_0v) = 0$, pa je, zbog pozitivne definitnosti, $u + t_0 v = 0$, tj. u i v su linearno zavisni. ∎

Primeri. (1) U standardnom euklidskom prostoru $\mathbb{R}^n$ CS nejednakost je

$$|x_1y_1 + \cdots + x_ny_n| \leq \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}\sqrt{y_1^2 + \ldots + y_1^n}$$

i može se dokazati neposredno (pokušajte).

(2) U euklidskom prostoru neprekidnih funkcija dobijamo neočiglednu nejednakost:

$$\left|\int_0^1 fg\, dx\right| \leq \sqrt{\int_0^1 f^2 dx}\sqrt{\int_0^1 g^2 dx}.$$

Na osnovu CS nejednakosti, broj $\frac{(u,v)}{\|u\|\cdot\|v\|}$ je uvek u intervalu $[-1,1]$, pa to opravdava sledeću definiciju.

Definicija. Ako su $u, v \in V\setminus\{o\}$ vektori različiti od o, *kosinus ugla* izmeu vektora u i v je broj

$$\cos\measuredangle(u,v) := \frac{(u,v)}{\|u\|\cdot\|v\|} \in [-1,1].$$

(*Neorijentisani*) *ugao* izmeu vektora u i v je broj

$$\measuredangle(u,v) := \arccos(\cos\measuredangle(u,v)) \in [0,\pi].$$

Kažemo da su u i v ortogonalni i pišemo $u \perp v$ ako je $\measuredangle(u,v) = \pi/2$ (tj. ako je $(u,v) = 0$).

Lema. Za dva vektora $u, v \in V\setminus\{o\}$ je $\cos\measuredangle(u,v) = 1 \Leftrightarrow u$ i v su linearno zavisni, i to:

$\cos\measuredangle(u,v) = 1 \Leftrightarrow u = \lambda v$ sa $\lambda > 0$ (*isto orijentisani* vektori),

$\cos\measuredangle(u,v) = -1 \Leftrightarrow u = \lambda v$ sa $\lambda < 0$ (*suprotno orijentisani* vektori).

Dokaz. Činjenica $|\cos\measuredangle(u,v)| = 1$ je ekvivalentna jednakosti u CS, pa je to samo drugačija formulacija. Ako je $u = \lambda v$, neposredno se izračunava da je $\cos\measuredangle(u,v) = \lambda/|\lambda|$, što dokazuje polovinu tvrenja. Ako je $\cos\measuredangle(u,v) = 1$, polinom $F(t)$ u dokazu CS nejednakosti je $F(t) = \|u+tv\|^2 =$

$(\|u\| + \|v\|t)^2$, pa ima koren $t_0 = -\frac{\|u\|}{\|v\|}$. Ali zbog pozitivne definitnosti je onda $u + t_0 v = o$, tj. $u = -t_0 v$ sa $t_0 < 0$. Ako je $\cos\sphericalangle(u,v) = -1$, polinom je $F(t) = \|u + tv\|^2 = (\|u\| - \|v\|t)^2$, koren je $t_o = \frac{\|u\|}{\|v\|} > 0$ i $u = -t_0 v$. ∎

Tvrenje (nejednakost trougla). Za svaka dva vektora $u, v \in V$ je

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$$

i važi jednakost $\Leftrightarrow u = \lambda v$ sa $\lambda > 0$.

Dokaz. Biće $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + 2(u,v) + \|v\|^2 \leq \|u\|^2 + 2\|u\|\|v\| + \|v\|^2 = (\|u\| + \|v\|)^2$, odakle korenovanjem dobijamo traženu nejednakost. Tvrenje o jednakosti sledi iz prethodnih razmatranja. ∎

Tvrenje (Pitagorina teorema). Ako su u i v ortogonalni,

$$\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2.$$

Dokaz. Naime, tada je $(u, v) = 0$ u prvoj jednakosti prethodnog dokaza. ∎

Primedbe. (1) U prethodna dva tvrenja trojku vektora $u, v, u + v$ možemo interpretirati kao vektore stranica jednog trougla (setite se elementarnogeometrijskog pravila trougla za sabiranje vektora).

(2) Isto tako, iz definicija sledi jednakost $(u, v) = \|u\| \cdot \|v\| \cdot \cos\measuredangle(u, v)$, a to je u školskoj geometriji upravo definicija skalarnog proizvoda na osnovu pojma dužina i uglova koje smatramo poznatim.

Definicija. Ako su u, v dva linearno nezavisna vektora iz V i ravan $\mathcal{L}(u, v)$ je orijentisana (izborom pozitivno orijentisane baze), *orijentisani ugao* izmeu vektora u i v je broj $\pm\measuredangle(u, v)$ iz intervala $(-\pi, \pi)$, pri čemu je znak $+$ ako je baza ravni (u, v) pozitivno orijentisana, a $-$ ako je negativno orijentisana. Ukoliko su u, v linearno zavisni, orijentisani ugao je, po definiciji, jednak neorijentisanom ($= 0$ ili π).

!! Bez orijentacije date ravni $\mathcal{L}(u, v)$ pojam orijentisanog ugla nije definisan.

Skalarni proizvod u koordinatama. Ortonormirane baze

Pogledajmo sada kako se skalarni proizvod može izračunati pomoću koordinata. Neka je V euklidski vektorski prostor sa skalarnim proizvodom $(-, -)$. Ako je data baza $e_1, \ldots, e_n$ prostora V, zanima nas kako se zapisuje skalarni proizvod vektora kao funkcija njihovih koordinata. Neka su $u = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n$ i $v = y_1e_1 + \cdots + y_ne_n$ dva vektora sa koordinatama $(x_1, \ldots, x_n)^T$ i $(y_1, \ldots, y_n)^T$ respektivno. Primenom bilinearnosti skalarnog proizvoda dobijamo:

$$(u,v) = \left(\sum_i x_i e_i, \sum_i y_j e_j\right) = \sum_{i,j} (e_i, e_j) x_i y_j.$$

Definicija. Matrica $A = ((e_i, e_j))_{i,j=1,\dots,n}$ naziva se *Gramova matrica* baze $e = (e_1, \dots, e_n)$ ili *matrica skalarnog proizvoda* $(-,-)$ u bazi e.

Ako je A matrica skalarnog proizvoda u bazi e a x i y kolone koordinata vektora u i v u toj bazi, prethodna formula se može zapisati i kraće:

$$(u,v) = x^T A\, y.$$

Šta će se desiti sa matricom skalarnog proizvoda ako umesto baze $e = (e_1, \dots, e_n)$ uzmemo drugu bazu? Neka je $e' = (e'_1, \dots, e'_n)$ druga baza, a $C = C_{e \to e'}$ matrica prelaza iz stare u novu bazu. Tada je $e' = eC$, $x = Cx'$, $y = Cy'$, pri čemu su x' i y' kolone koordinata vektora u i v u novoj bazi e'. Iz prethodne formule dobijamo

$$(u,v) = (Cx')^T A (Cy) = x'^T (C^T A C) y = x'^T A' y',$$

pri čemu je A' matrica skalarnog proizvoda u bazi e'. Odatle poreenjem odgovarajućih koeficijenata dobijamo sledeće tvrdjenje.

Tvrenje. $A' = C^T A C$. ∎

!! Obratite pažnju na to da navedena formula nije ista kao formula transformacije matrice linearnog operatora prilikom zamene baze: $A' = C^{-1}AC$.

Definicija. Vektor $v \in V$ je *normiran* ako je $\|v\| = 1$.

Ukoliko je vektor $v \neq o$, vektor $\frac{v}{\|v\|}$ je normiran:

$$\left\| \frac{v}{\|v\|} \right\| = \left| \frac{1}{\|v\|} \right| \cdot \|v\| = 1.$$

Zamena vektora v vektorom $\frac{v}{\|v\|}$ naziva se *normiranjem* vektora v.

Definicija. Skup vektora $\{a_1, \ldots, a_k\}$ je *ortogonalan* ako je $a_i \perp a_j$ za $i \neq j$, tj. ako je $(a_i, a_j) = 0$. Skup je *ortonormiran* ako je ortogonalan i normiran, tj. ako je

$$(a_i, a_j) = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}.$$

Svaki ortogonalan skup vektora iz $V \backslash \{o\}$ može se normirati da bi postao ortonormiran.

Lema. Svaki ortogonalan skup vektora iz $V \backslash \{o\}$ je linearno nezavisan.

Dokaz. Ako je $\lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_k a_k = o$ netrivijalna linearna kombinacija, skalarnim množenjem sa a_i, primenom distributivnosti i svojstva $(a_i, a_j) = 0$ za $i \neq j$, dobijamo $\lambda_i (a_i, a_i) = 0$. Ali $a_i \neq o$, pa je $(a_i, a_i) \neq 0$ i $\lambda_i = 0$. ∎

Primedba. Neposredno se proverava da za proizvoljan ortogonalan skup važi uopštena Pitagorina teorema: ako je skup vektora $\{a_1, \ldots, a_k\}$ ortogonalan, tada je

$$\|a_1 + \ldots + a_k\|^2 = \|a_1\|^2 + \ldots + \|a_k\|^2.$$

Definicija. Baza $(e_1, \ldots, e_n)$ euklidskog vektorskog prostora V naziva se *ortonormirana baza* ako je to ortonormiran skup vektora.

Primetimo da je svaki ortonormirani skup od $n = \dim V$ vektora u V ortonormirana baza jer iz ortonormiranosti sledi linearna nezavisnost na osnovu prethodne leme. Ortonormirane baze imaju dobro svojstvo: ako je e ortonormirana, njena Gramova matrica je jedinična i formula za skalarni proizvod ista je kao u standardnom euklidskom prostoru:

$$(u, v) = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n.$$

Važi i obrnuto. Ako se skalarni proizvod izražava u bazi e navedenom formulom, baza je ortonormirana:

$$(e_i, e_j) = \begin{cases} \ldots + 0 \overset{i}{\cdot} 1 + \ldots + 1 \overset{j}{\cdot} 0 + \ldots & = 0 \quad , i \neq j \\ \ldots + 1 \underset{i}{\cdot} 1 + \ldots & = 1 \quad , i = j \end{cases}.$$

Posebno, standardna baza u standardnom euklidskom prostoru $\mathbb{R}^n$ je ortonormirana. U ortonormiranoj bazi je $(v, e_i) = x_i$, što daje jednostavnu formulu za izračunavanje koordinata vektora. Odmah se postavlja pitanje da li uvek postoje takve baze.

Teorema. U svakom euklidskom prostoru postoji ortonormirana baza.

Dokaz. Skalarni proizvod je bilinearna simetrična funkcija. Na osnovu teoreme o normalnom obliku, postoji baza u kojoj ona ima dijagonalnu matricu čiji su svi dijagonalni elementi 1, -1 ili 0. Zbog pozitivne definitnosti, signatura forme je $(n, 0)$, pa je ta matrica u stvari jedinična i baza je ortonormirana. ∎

Gramova matrica se definiše ne samo za baze, već i za proizvoljne vektore.

Definicija. *Gramova matrica* (ureenog) skupa vektora $a = (a_1, \ldots, a_k)$ u euklidskom vektorskom prostoru V je matrica

$$G(a) = G(a_1, \ldots, a_k) = \left((a_i, a_j)\right)_{i,j=1,\ldots,k}$$

sastavljena od skalarnih proizvoda (a_i, a_j). *Gramova determinanta* skupa a je determinanta Gramove matrice $\det G(a)$.

Primedba. Ako je A matrica tipa $n \times k$ sastavljena od kolona koordinata vektora skupa a u bazi e, tada je $G(a) = A^T G(e) A$. Posebno, ako je e ortonormirana, $G(e) = E$ i $G(a) = A^T A$.

Tvrenje. Uvek je $\det G(a_1, \dots, a_k) \geq 0$. Skup vektora $a_1, \dots, a_k$ je linearno nezavisan $\Leftrightarrow$ njegova Gramova determinanta je $\neq 0$.

Dokaz. Neka je $\{a_1, \dots, a_k\}$ linearno nezavisan i $W = \mathcal{L}(a_1, \dots, a_k)$ potprostor dimenzije k. Na osnovu teoreme on ima ortonormiranu bazu $e = (e_1, \dots, e_k)$. Tada je $G(a) = A^T A$, matrica A kvadratna tipa $k \times k$ i $\det G(a) = |A^T A| = |A|^2 \geq 0$. Pri tome je $A = C_{e \to a}$ matrica prelaza, pa je $\det A \neq 0$.

Neka je sada $\lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_k a_k = 0$ netrivijalna linearna kombinacija. Tada je

$$\lambda_1 (a_i, a_1) + \ldots + \lambda_k (a_i, a_k) = 0 \ (i = 1, \dots, k)$$

sistem homogenih linearnih jednačina sa rešenjem $(\lambda_1, \dots, \lambda_k) \neq o$, pa je njegova determinanta $\det G(a) = 0$. ∎

Primedba. Gramova matrica skupa od dva vektora u, v je

$$G(u, v) = \begin{pmatrix} \|u\|^2 & (u, v) \\ (u, v) & \|v\|^2 \end{pmatrix},$$

pa je CS nejednakost — specijalni slučaj navedenog tvrenja.