1 Polilinearne funkcije

Determinantu možemo posmatrati ne samo kao funkciju matrice tj. preslikavanje $\det : \mathcal{M}(n, \mathbb{F}) \to \mathbb{F}$, već i kao funkciju vrsta te matrice. Tada je to funkcija n promenljivih vrsta $\det : \mathbb{F}^n \times \ldots \times \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}$, pri čemu je jedno od njenih najvažnijih svojstava sledeće: ako sve promenljive osim jedne fiksiramo, determinanta linearno (aditivno i homogeno) zavisi od poslednjeg preostalog argumenta. Takve funkcije više vektorskih argumenata koje su linearne po svakom od njih značajne su u linearnoj algebri.

Definicija. Neka je V $\mathbb{F}$-vektorski prostor. Preslikavanje $f : V \times \ldots \times V \to \mathbb{F}$, $f(v_1, \ldots v_k) \in \mathbb{F}$ sa k vektorskih argumenata naziva se *polilinearnom funkcijom* (preciznije, *k-linearnom funkcijom*) na vektorskom prostoru V ako je

$$f(v_1, \ldots, \lambda v_i + \mu w_i, \ldots, v_k) = \lambda f(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_k) + \mu f(v_1, \ldots, w_i, \ldots, v_k)$$

za proizvoljne $v_1, \ldots, v_k, w_i \in V$, $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$ i za sve $i = 1, \ldots, k$.

Dakle, k-linearna funkcija je funkcija od k vektorskih argumenata, linearna po svakom od njih posebno. Za $k = 1$ to je obična linearna funkcija na vektorskom prostoru V, element dualnog prostora V^*. Determinanta je primer n-linearne funkcije na $\mathbb{F}^n$. Ovde ćemo posebno proučiti slučaj $k = 2$. To su *bilinearne funkcije*.

Neka je V $\mathbb{F}$-vektorski prostor i $B : V \times V \to \mathbb{F}$ bilinearna funkcija na V. Pretpostavimo da imamo bazu $e = (e_1, \ldots, e_n)$ prostora V. Da li se vrednost $B(u, v) \in \mathbb{F}$ može izraziti preko koordinata vektora u, v? Odgovor je potvrdan. Naime, ako su $x = [u]_e$, $y = [v]_e$ kolone koordinata naših vektora, tada je

$$u = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i,\ v = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i,$$

pa je zbog bilinearnosti

$$B(u, v) = B\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{j=1}^{n} y_j e_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j B(e_i, e_j).$$

Vrednosti $B(e_i, e_j) \in \mathbb{F}$ funkcije B na parovima baznih vektora potpuno određuju vrednost funkcije B na bilo kom paru vektora.

Definicija. *Matrica bilinearne funkcije* B u bazi e je matrica

$$[B]_e = \begin{pmatrix} B(e_1, e_1) & \cdots & B(e_1, e_n) \\ \vdots & & \vdots \\ B(e_n, e_1) & \cdots & B(e_n, e_n) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}(n, \mathbb{F})$$

sastavljena od vrednosti funkcije na parovima baznih vektora.

Formula se u matričnom obliku može jednostavno zapisati. Ako je $A = [B]_e$, a x i y kolone koordinata vektora u i v respektivno, tada je

$$B(u, v) = x^T A y = (x_1, \ldots, x_n) \cdot \begin{pmatrix} B(e_1, e_1) & \cdots & B(e_1, e_n) \\ \vdots & & \vdots \\ B(e_n, e_1) & \cdots & B(e_n, e_n) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Ovakav zapis upravo odredjuje bilinearne funkcije.

Tvrdjenje. Sledeća tvrdjenja su ekvivalentna.

(1) Preslikavanje $B : V \times V \to \mathbb{F}$ je bilinearna funkcija.

(2) Postoji matrica $A \in \mathcal{M}(n, \mathbb{F})$ takva da je u nekoj bazi e $B(u, v) = x^T Ay$.

(3) Za svaku bazu e postoji matrica $A \in \mathcal{M}(n, \mathbb{F})$ takva da je $B(u, v) = x^T Ay$.

Dokaz. U prethodnim razmatranjima dokazano je (1) $\Rightarrow$ (3), a (3) $\Rightarrow$ (2) je očigledno. Ostaje da se pokaže (2) $\Rightarrow$ (1), što se neposredno proverava. ∎

Definicija. Koordinatni zapis bilinearne funkcije, dakle izraz

$$x^T Ay = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j,$$

naziva se *bilinearna forma* od promenljivih $x_1, \ldots, x_n; \, y_1, \ldots, y_n$ sa koeficijentima a_{ij}.

Bilinearne funkcije se mogu sabirati i množiti skalarom kao i obične funkcije pri čemu je, po definiciji,

$$(B + B')(u, v) = B(u, v) + B'(u, v), \; (\lambda \cdot B)(u, v) = \lambda \cdot B(u, v).$$

Tvrdjenje. Sa ovako uvedenim operacijama skup $\mathrm{Bilin}(V)$ svih bilinearnih funkcija na V predstavlja $\mathbb{F}$-vektorski prostor. Ako je e baza i n dimenzija prostora V, preslikavanje $[-]_e : \mathrm{Bilin}(V) \to \mathcal{M}(n, \mathbb{F})$ je izomorfizam vektorskih prostora.

Dokaz. Pošto je skup svih funkcija $f : V \times V \to \mathbb{F}$ sa tako uvedenim operacijama kao što znamo vektorski prostor, dovoljno je pokazati da je $\mathrm{Bilin}(V)$ njegov potprostor, tj. da je zatvoren u odnosu na te operacije. Ali $(B+B')(\lambda u+ \mu v, w) = B(\lambda u + \mu v, w) + B'(\lambda u + \mu v, w) = \lambda B(u, w) + \mu B(v, w) + \lambda B'(u, w) + \mu B'(v, w) = \lambda(B(u, w) + B'(u, w)) + \mu(B(v, w) + B'(v, w)) = \lambda(B + B')(u, w) + \mu(B + B')(v, w)$;

$(\alpha B)(\lambda u+\mu v, w) = \alpha B(\lambda u+\mu v, w) = \alpha\lambda B(u, w)+\alpha\mu B(v, w) = \lambda(\alpha B)(u, w)+ \mu(\alpha B)(v, w)$, i potpuno isto za drugi argument.

Neka je $A = (a_{ij}) = [B]_e$, i $A' = (a'_{ij}) = [B']_e$. Tada je $(\lambda B + \mu B')(e_i, e_j) = \lambda B(e_i, e_j) + \mu B'(e_i, e_j) = \lambda a_{ij} + \mu a'_{ij}$, što upravo znači da je

$$[\lambda B + \mu B'] = \lambda[B] + \mu[B'],$$

tj. preslikavanje $[-]$ je linearno. Ostaje da se dokaže da je bijektivno. Gornjom formulom je za svaku matricu A zadata bilinearna funkcija φ_A. Pri tome je

$$\varphi_A(e_i, e_j) = (0, \ldots, \underset{i}{1}, \ldots, 0) \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}_j = a_{ij},$$

pa je $[\varphi_A] = A$. S druge strane, $\varphi_{[B]}(e_i, e_j) = B(e_i, e_i)$, pa je $\varphi_{[B]} = B$. Preslikavanja $[-] : B \mapsto [B]$ i $\varphi : A \mapsto \varphi_A$ su zbog toga uzajamno inverzna i zato je $[-]$ izomorfizam $\mathrm{Bilin}(V) \cong \mathcal{M}(n, \mathbb{F})$. ∎

Posledica. $\dim \mathrm{Bilin}(V) = (\dim V)^2$. ∎

Dakle, kvadratne matrice, koje su dosad imale ulogu koordinatnog zapisa endomorfizama vektorskog prostora, dobile su još jednu interpretaciju, kao bilinearne funkcije. Pri tom i jedna i druga interpretacija zavise od izbora baze. Endomorfizmu odgovara klasa sličnih matrica. Kakva je odgovarajuća veza kod bilinearnih funkcija, tj. kako zavisi matrica bilinearne funkcije od izbora baze?

Tvrdjenje. Neka je $B \in \mathrm{Bilin}(V)$. Ako su e i e' dve baze prostora V, pri čemu je $A = [B]_e$, $A' = [B]_{e'}$ i $C = C_{e \to e'}$ matrica prelaza, tada je

$$A' = C^T \cdot A \cdot C.$$

Dokaz. Ako vektori u i v imaju u bazi e kolone koordinata x i y respektivno, a u bazi e' x' i y', tada je $x = Cx'$, $y = Cy'$ i

$$B(u, v) = x^T Ay = (Cx')^T A(Cy') = x'^T (C^T AC)y' = x'^T A'y'.$$

Odatle, zbog jedinstvenosti matrice date bilinearne funkcije, sledi da je $A' = C^T AC$. ∎

Posledica-definicija. Rang matrice $[B]_e$ ne zavisi od izbora baze e i naziva se *rang bilinearne funkcije* B.

Dokaz. Prilikom množenja regularnim matricama C i C^T rang se ne menja. ∎

Primedba. Vektorski prostor matrica $\mathcal{M}(n, \mathbb{F})$ je, dakle, s jedne strane izomorfan prostoru $\mathrm{End}\, V$, a s druge strane prostoru $\mathrm{Bilin}(V)$. Medjutim, sa geometrijskog stanovišta, to su sasvim različiti objekti. Klasifikacija endomorfizama je u prethodnoj glavi izvršena pomoću Žordanove normalne forme, a relacija ekvivalencije medju matricama uzrokovana zamenom baze je tada bila relacija sličnosti:

$$B \approx A \Leftrightarrow B = C^{-1}AC \text{ sa regularnom } C.$$

Klasifikacija bilinearnih funkcija kao geometrijskih objekata svodi se na klasifikaciju u odnosu na sasvim drugu relaciju ekvivalencije

$$B \simeq A \Leftrightarrow B = C^T AC \text{ sa regularnom } C,$$

takodje uzrokovanu zamenom baze. Ona se naziva *relacija kongruentnosti* matrica. Endomorfizmi su klase ekvivalencije u odnosu na relaciju sličnosti, a bilinearne funkcije — u odnosu na relaciju kongruentnosti. Sledeći cilj je da opišemo karakteristične predstavnike klasa ekvivalencije u odnosu na tu relaciju.

Pored linearnosti, drugo karakteristično svojstvo determinante je antisimetričnost. Uopšte, ponašanje funkcije sa više argumenata u odnosu na permutacije argumenata je veoma važno svojstvo te funkcije. U skladu sa opštim definicijama, imamo i sledeću definiciju.

Definicija. Bilinearna funkcija B na vektorskom prostoru V je *simetrična* ako je $\forall u, v \in V$, $B(v, u) = B(u, v)$, a *antisimetrična* ako je $\forall u, v \in V$, $B(v, u) = -B(u, v)$.

Tvrdjenje. Sledeća tvrdjenja su ekvivalentna.
(1) Funkcija B je simetrična (antisimetrična) bilinearna funkcija.
(2) U nekoj bazi e matrica $[B]_e$ je simetrična (antisimetrična).
(3) U svakoj bazi e matrica $[B]_e$ je simetrična (antisimetrična).

Dokaz. (1) $\Rightarrow$ (3). Naime, $[B] = A = (a_{ij})$, pri čemu je $a_{ij} = B(e_i, e_j)$. U simetričnom slučaju je zato $a_{ij} = a_{ji}$, pa je A simetrična, a u antisimetričnom je $a_{ij} = -a_{ji}$, pa je A antisimetrična matrica.

(3) $\Rightarrow$ (2) je očigledno. (2) $\Rightarrow$ (1) sledi iz formule (2). Naime,

$$B(v, u) = y^T Ax = (Ax)^T y = x^T A^T y.$$

U slučaju simetrične matrice $A^T = A$, pa je $B(v, u) = B(u, v)$. Ako je, pak, matrica antisimetrična, $A^T = -A$, pa je $B(v, u) = -B(u, v)$. ∎

Tvrdjenje. Skupovi $\mathrm{Bilin}_s(V)$ simetričnih i $\mathrm{Bilin}_a(V)$ antisimetričnih bilinearnih funkcija su potprostori u $\mathrm{Bilin}(V)$. Ako je $\mathrm{char}\,\mathbb{F} \neq 2$,

$$\mathrm{Bilin}(V) = \mathrm{Bilin}_s(V) \oplus \mathrm{Bilin}_a(V)$$

Dokaz. Linearna kombinacija simetričnih (antisimetričnih) bilinearnih funkcija ili matrica je opet simetrična (antisimetrična), što se neposredno proverava. Ako je $B \in \mathrm{Bilin}_s(V) \cap \mathrm{Bilin}_a(V)$, tada je $B(v, u) = B(u, v) = -B(u, v)$, odakle sledi da je $B(u, v) = 0$ (samo u slučaju $\mathrm{char}\,\mathbb{F} \neq 2$) za $\forall u, v \in V$, tj. $B = 0$. Zato je suma direktna. Najzad, ako je $B \in \mathrm{Bilin}(V)$, tada je

$$B(u, v) = \frac{1}{2}[B(u, v) + B(v, u)] + \frac{1}{2}[B(u, v) - B(v, u)],$$

pri čemu je prvi poluzbir simetrična, a drugi antisimetrična bilinearna funkcija, što se neposredno vidi. ∎

Ovo razlaganje podseća na reprezentaciju svake realne funkcije u obliku zbira parne i neparne. U sledećem odeljku daćemo drugu interpretaciju simetričnih bilinearnih funkcija i njihovu klasifikaciju. Podrazumevaćemo da je polje $\mathbb{F}$ karakteristike $\mathrm{char}\,\mathbb{F} \neq 2$. Slučaj karakteristike 2 je neočekivano komplikovaniji, o čemu možete pročitati u predloženoj literaturi.

2 Kvadratne funkcije

Definicija. Neka je V $\mathbb{F}$-vektorski prostor. Preslikavanje $F : V \to \mathbb{F}$ je *kvadratna funkcija* na V ako postoji bilinearna funkcija $B \in \mathrm{Bilin}(V)$ takva da je $F(u) = B(u, u)$ za svako $u \in V$. U tom slučaju kažemo da B definiše F.

Pogledajmo šta se dešava u koordinatama. Neka je e baza u V i x kolona koordinata vektora u. Tada je

$$\begin{aligned} F(u) &= B(u, u) = x^T Ax = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j = \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2 + \sum_{i<j} (a_{ij} + a_{ji}) x_i x_j. \end{aligned}$$

Definicija. Koordinatni zapis kvadratne funkcije, tj. izraz

$$x^{\mathsf{T}} A x = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2 + \sum_{i<j} (a_{ij} + a_{ji}) x_i x_j$$

naziva se *kvadratna forma* od promenljivih $x_1, \ldots, x_n$ sa koeficijentima a_{ij}. Članovi prve sume $\sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2$ nazivaju se *dijagonalni* ili *čisto kvadratni*, a druge sume $\sum_{i<j} (a_{ij} + a_{ji}) x_i x_j$ *mešoviti* članovi date kvadratne forme.

Pri tom se može desiti da različite bilinearne funkcije daju istu kvadratnu funkciju jer sabirci $x_i x_j$ sa $i \neq j$ učestvuju dvaput - jednom sa koeficijentom a_{ij}, a drugi put s koeficijentom a_{ji}. Matrice sa jednakim zbirovima $a_{ij} + a_{ji}$ i jednakim dijagonalnim elementima a_{ii} (a takvih ima mnogo) daće istu kvadratnu formu. Ova nejednoznačnost se može otkloniti.

Tvrdjenje-definicija. Za svaku kvadratnu funkciju F na V postoji jedinstvena simetrična bilinearna funkcija B (tzv. *polarizacija* $\operatorname{Pol} F$ funkcije F) koja definiše F.

Dokaz. Ako je data kvadratna funkcija F, uzmimo da je

$$(\operatorname{Pol} F)(u, v) = \frac{1}{2}(F(u+v) - F(u) - F(v)).$$

$\operatorname{Pol} F$ je funkcija $V \times V \to \mathbb{F}$ koja definiše F:

$$(\operatorname{Pol} F)(u, u) = \frac{1}{2}[F(2u) - F(u) - F(u)] = \frac{1}{2}[4F(u) - 2F(u)] = F(u).$$

Ako je B simetrična bilinearna funkcija sa istim svojstvom, tada je

$$\begin{aligned}
(\operatorname{Pol} F)(u, v) &= \frac{1}{2}[F(u+v) - F(u) - F(v)] = \\
&= \frac{1}{2}[B(u+v, u+v) - B(u, u) - B(v, v)] = \\
&= \frac{1}{2}[(B(u, u) + B(u, v) + B(v, u) + B(v, v) - B(u, u) - B(v, v)] = \\
&= \frac{1}{2}[2B(u, v)] = B(u, v).
\end{aligned}$$

Zato je $\operatorname{Pol} F$ jedinstvena simetrična bilinearna funkcija koja definiše F. ∎

Dakle, kvadratne funkcije su u obostrano jednoznačnoj korespondenciji sa simetričnim bilinearnim funkcijama. Svi pojmovi definisani za bilinearne funkcije mogu se preneti i na kvadratne funkcije.

Definicija. *Matrica kvadratne funkcije* F u bazi e je matrica polarizacije te kvadratne funkcije:

$$[F]_e = [\operatorname{Pol} F]_e,$$

i ona je simetrična. *Rang kvadratne funkcije* F je rang njene polarizacije ili bilo koje njene matrice.

Uobičajeni zapis za kvadratnu formu F definisanu simetričnom matricom $A = (a_{ij})$ je:

$$x^T Ax = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2 + 2\sum_{i<j} a_{ij}x_i x_j.$$

!! Član matrice a_{ij} je **polovina** koeficijenta $2a_{ij}$ uz $x_i x_j$.

Prilikom promene baze matrica se menja na uobičajeni način:

$$A' = C^T \cdot A \cdot C.$$

Postavlja se pitanje da li se ovde, slično kao kod endomorfizama, može pogodno izabrati baza tako da matrica dobije što je moguće jednostavniji izgled. Drugim rečima, da li se iz svake klase ekvivalencije matrica u odnosu na relaciju kongruencije može izabrati kanonski predstavnik. Naravno, najbolje bi bilo kada bi on bio dijagonalan, tako da odgovarajuća forma nema mešovite članove, već samo potpune kvadrate. Odgovor je potvrdan.

Teorema. Neka je F kvadratna funkcija na $\mathbb{F}$-vektorskom prostoru i B simetrična bilinearna funkcija koja je definiše. Tada postoji baza prostora V u kojoj je matrica A naše funkcije F (i B) dijagonalna, odgovarajuća kvadratna forma je $\lambda_1 x_1^2 + \ldots + \lambda_r x_r^2$, a odgovarajuća bilinearna forma $\lambda_1 x_1 y_1 + \ldots + \lambda_r x_r y_r$, pri čemu je r rang funkcije F (i B). Ovaj oblik F i B naziva se *kanonska forma* funkcija F i B.

Dokaz. Neka je e proizvoljna baza prostora V. Dokažimo da se do traženog dijagonalnog zapisa može doći regularnom (invertibilnom) smenom promenljivih x_i koja definiše novu bazu e'. Radićemo indukcijom po broju promenljivih n, tj. dimenziji V.

a) Za $n = 1$ očigledno već imamo traženu formu $F(x_1) = a_{11}x_1^2$.

b) Neka je data kvadratna forma F sa n promenljivih

$$F(x_1, \ldots, x_n) = x^T Ax = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j.$$

Regularnom smenom promenljivih izdvojićemo potpuni kvadrat u F tako da se smanji broj promenljivih u ostatku, na koji ćemo potom primeniti induktivnu hipotezu. Pri tom razlikujemo dva slučaja.

1) U gornjem izrazu postoji bar jedan dijagonalni član. Neka je $a_{11} \neq 0$ i

$$y_1 = a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n.$$

Dokažimo da $F(x_1, \ldots, x_n) - \frac{1}{a_{11}}y_1^2$ ne zavisi od x_1. Posmatraćemo taj izraz kao polinom po x_1 i naći njegov izvod po x_1, smatrajući ostale promenljive konstantama. Ovo je tzv. *parcijalni izvod* funkcije od n promenljivih po jednoj od njih, o kojem će biti više reči u matematičkoj analizi i koji se obeležava sa $\frac{\partial}{\partial x_1}$. Pojam izvoda polinoma u algebri se, kao što je poznato, uvodi formalno, bez graničnog prelaza. Dakle,

$$\frac{\partial}{\partial x_1}[F(x_1,\dots,x_n)-\frac{1}{a_{11}}y_1^2]=$$
$$=2a_{11}x_1+2a_{12}x_2+\ldots+2a_{1n}x_n-\frac{1}{a_{11}}\cdot 2\cdot(a_{11}x_1+\ldots+a_{1n}x_n)\cdot a_{11}=0,$$

što upravo znači da kvadratna forma $F^{(1)}(x_2,\dots,x_n)=F(x_1,\dots,x_n)-\frac{1}{a_{11}}y_1^2$ ne sadrži x_1. Na osnovu indukcijske hipoteze, tada postoji regularna smena promenljivih:

$$\begin{array}{rcl} y_2 & = & c_{22}x_2+\cdots+c_{2n}x_n \\ & \cdots & \\ y_n & = & c_{n2}x_2+\cdots+c_{nn}x_n \end{array},$$

koja dovodi našu formu na dijagonalni oblik $F^{(1)}(x_2,\dots,x_n)=\lambda_2y_2^2+\ldots+\lambda_ny_n^2$, pa je i

$$F(x_1,\dots,x_n)=\frac{1}{a_{11}}y_1^2+\lambda_2y_2^2+\ldots+\lambda_ny_n^2.$$

Ove formule zajedno definišu smenu promenljivih sa matricom

$$C=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}.$$

Pri tom je podmatrica (c_{ij}) po indukcijskoj hipotezi regularna, a $a_{11}\neq 0$, pa je i C regularna i definiše novu bazu u kojoj je F dijagonalna.

2) U početnom izrazu nema potpunih kvadrata, a imamo bar jedan mešoviti član. Pretpostavimo da je $a_{12}=a_{21}\neq 0$ i uzmimo da je

$$\begin{array}{rcccl} z_1 & = & & a_{12}x_2+ & a_{13}x_3+\cdots+a_{1n}x_n \\ z_2 & = & a_{21}x_1+ & & a_{23}x_3+\cdots+a_{2n}x_n \end{array}.$$

Dokažimo da $F(x_1,\dots,x_n)-\frac{2}{a_{12}}z_1z_2$ ne zavisi ni od x_1, ni od x_2. U tom cilju nadjimo njegove parcijalne izvode po x_1 i x_2. Dakle, $\frac{\partial}{\partial x_1}[F(x_1,\dots,x_n)-\frac{2}{a_{12}}z_1z_2]=2a_{12}x_2+2a_{13}x_3+\ldots+2a_{1n}x_n-\frac{2}{a_{12}}(a_{12}x_2+a_{13}x_3+\ldots+a_{1n}x_n)\cdot a_{12}=0$. Na potpuno isti način, $\frac{\partial}{\partial x_1}[F(x_1,\dots,x_n)-\frac{2}{a_{12}}z_1z_2]=0$, što upravo znači da kvadratna forma $F^{(1)}(x_3,\dots,x_n)=F(x_1,\dots,x_n)-\frac{2}{a_{12}}z_1z_2$ ne sadrži ni x_1, ni x_2. Na osnovu indukcijske hipoteze, postoji regularna smena promenljivih:

$$\begin{array}{rcl} y_3 & = & c_{33}x_3+\cdots+c_{3n}x_n \\ & \cdots & \\ y_n & = & c_{n3}x_3+\cdots+c_{nn}x_n \end{array},$$

koja dovodi kvadratnu formu na oblik $F^{(1)}(x_3,\dots,x_n)=\lambda_3y_3^2+\ldots+\lambda_ny_n^2$, pa je $F(x_1,\dots,x_n)=\frac{2}{a_{12}}z_1z_2+\lambda_3y_3^2+\ldots+\lambda_ny_n^2$. Ostaje još da se oslobodimo mešovitog člana. Ako je

$$\begin{array}{rcl} y_1 & = & z_1+z_2 \\ y_2 & = & z_1-z_2 \end{array},$$

vidimo da je $z_1z_2 = \frac{1}{4}(y_1^2 - y_2^2)$ i $F(x_1,\dots,x_n) = \frac{1}{2a_{12}}y_1^2 - \frac{1}{2a_{12}}y_2^2 + \lambda_3 y_3^2 + \dots + \lambda_n y_n^2$. Sve ove formule zajedno definišu smenu promenljivih sa matricom

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & & & \\ 1 & -1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & c_{33} & \cdots & c_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & c_{n3} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}.$$

Pri tom je podmatrica (c_{ij}) po indukcijskoj hipotezi regularna, a $a_{12} = a_{21} \neq 0$, pa je i C regularna i definiše novu bazu u kojoj je F dijagonalna. ∎

Primedbe. (1) Formule za smenu mogu se pamtiti i u obliku

$$y_1 = \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial x_1}, \text{ odnosno } z_1 = \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial x_1},\ z_2 = \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial x_2}.$$

Ovaj postupak svodjenja kvadratne forme na kanonski (dijagonalni) oblik naziva se *Lagranžov postupak dijagonalizacije.*

(2) U terminima matrica opisani postupak omogućuje da za datu simetričnu matricu A nadjemo regularnu matricu C takvu da je C^TAC dijagonalna. Pri tome sam dijagonalni oblik nije jednoznačno odredjen. Vidimo da je relacija kongruencije koju u skupu matrica indukuje pojam bilinearne funkcije u nekom smislu grublja nego relacija sličnosti, mada su te dve relacije neuporedive.

(3) (*Jakobijev metod dijagonalizacije*) Može se dokazati da je dijagonalni oblik kvadratne forme $F(x_1,...,x_n) = \lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_r x_r^2$ dat jednakostima $\lambda_1 = M_1, \lambda_2 = \frac{M_2}{M_1}, \dots, \lambda_r = \frac{M_r}{M_{r-1}}$, pri čemu su $M_1, \dots M_r$ *glavni minori* matrice A kvadratne funkcije F:

$$M_k = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix},\ k = 1, \dots n.$$

Manjkavost ove metode je što ona ne daje matricu prelaza odnosno formule transformacije.

3 Teorema inercije i pozitivna definitnost

Rang date kvadratne funkcije je jednoznačno odredjen broj. A šta je sa koeficijentima njene kanonske forme? Oni, naravno, nisu jednoznačno odredjeni. U slučaju proizvoljnog polja skalara tu se ne može ništa preciznije reći. Ali kod realnih i kompleksnih vektorskih prostora možemo poboljšati našu klasifikaciju. Naime, ako je V $\mathbb{C}$-vektorski prostor i $F(x_1,\dots,x_n) = \lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_r x_r^2$ kanonska forma naše kvadratne funkcije ranga r, tada "rastezanjem" duž osa

$$\begin{aligned} y_i &= \sqrt{\lambda_i}x_i \quad (i = 1,\dots,r) \\ y_i &= x_i \quad (i = r+1,\dots,n) \end{aligned}$$

(što je regularna transformacija) možemo sve koeficijente kanonske forme koji su $\neq 0$ učiniti jednakim 1 i time dobiti kanonsku formu

$$F(x_1, \dots, x_n) = x_1^2 + \dots + x_r^2.$$

Posledica. Svaka kvadratna funkcija na kompleksnom vektorskom prostoru se izborom baze može svesti na jednu od $n+1$ normalnih formi $x_1^2 + \dots + x_r^2$, pri čemu je r rang funkcije F $(0 \leq r \leq n)$. ∎

Dakle, rang jednoznačno klasifikuje kompleksne kvadratne funkcije, kojih ima samo konačno mnogo. Šta je s poljem $\mathbb{R}$? Ako je F kvadratna funkcija na realnom vektorskom prostoru V, tada se može primeniti skoro ista regularna transformacija. Permutacijom koordinata tako da prvo idu one s pozitivnim λ_i, a zatim one sa negativnim λ_i i transformacijom

$$\begin{array}{rcll} y_i &=& \sqrt{\lambda_i} x_i & (i = 1, \dots, p,\ \lambda_i > 0) \\ y_i &=& \sqrt{-\lambda_i} x_i & (i = p+1, \dots, r,\ \lambda_i < 0) \\ y_i &=& x_i & (i = r+1, \dots, n) \end{array}$$

možemo kanonsku formu nad $\mathbb{R}$ svesti na oblik $x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_r^2$. Ovde, medjutim, nije jasno da li će brojevi p pozitivnih i $q = r - p$ negativnih koeficijenata biti nezavisni od načina svodjenja forme na dijagonalni oblik.

Teorema (Silvestrov zakon inercije). Brojevi p pozitivnih i q negativnih koeficijenata kanonske forme kvadratne funkcije F na realnom vektorskom prostoru su odredjeni jednoznačno i ne zavise od izbora baze.

Dokaz. Neka kvadratna funkcija F ima u bazi e normalnu formu

$$F_e(x_1, \dots, x_n) = x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_r^2$$

a u bazi e' normalnu formu

$$F_{e'}(y_1, \dots, y_n) = y_1^2 + \dots + y_k^2 - y_{k+1}^2 - \dots - y_r^2$$

i neka je $C = (c_{ij}) = C_{e \to e'}$ matrica prelaza. Za proizvoljni vektor $v \in V$ je $F(v) = F_e(x_1, \dots, x_n) = F_{e'}(y_1, \dots, y_n)$, pri čemu su $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ i $y = (y_1, \dots, y_n)^T$ kolone koordinata vektora v u bazama e i e' respektivno. Zato je $x = C \cdot y$ i $x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_r^2 = y_1^2 + \dots + y_k^2 - y_{p+1}^2 - \dots - y_r^2$. Pretpostavimo da je $p < k$. Uočimo linearni sistem

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} c_{11} y_1 & + & \dots & + & c_{1k} y_k & = & 0 \\ & & \dots & & & & \\ c_{p1} y_1 & + & \dots & + & c_{pk} y_k & = & 0 \end{array} \right.$$

u kome je $p < k$ i koji zbog toga ima netrivijalno rešenje $(y_1^{(0)}, \dots, y_k^{(0)})$. Ako je v vektor sa e'-koordinatama $(y_1^{(0)}, \dots, y_k^{(0)}, 0, \dots, 0)$, tada je $v \neq o$ netrivijalno rešenje sistema

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} c_{11} y_1 & + & \dots & + & c_{1n} y_n & = & 0 \\ & & \dots & & & & \\ c_{p1} y_1 & + & \dots & + & c_{pn} y_n & = & 0 \end{array} \right. , \text{ tj. } \left\{ \begin{array}{ccc} x_1 & = & 0 \\ & \dots & \\ x_p & = & 0 \end{array} \right.$$

sa e-koordinatama $(0,\ldots,0,x^{(0)}_{p+1},\ldots,x^{(0)}_n)$. Sada je $F(v) = -(x^{(0)}_{p+1})^2 - \ldots - (x^{(0)}_n)^2 = (y^{(0)}_1)^2 + \ldots + (y^{(0)}_k)^2 > 0$, što je kontradikcija. Iz razloga simetrije, $p > k$ takodje dovodi do kontradikcije. Zato je $p = k$, a pošto je rang jednoznačno odredjen, jednaki su i brojevi negativnih koeficijenata. ∎

Definicija. Par (p,q) iz teoreme 2 naziva se *signaturom* funkcije F.

Posledica. Svaka kvadratna funkcija na realnom vektorskom prostoru se izborom baze može svesti na jednu od $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ normalnih formi $x_1^2 + \ldots + x_p^2 - x_{p+1}^2 + \ldots + x_r^2$, pri čemu je r rang funkcije F $(0 \leq r \leq n)$ i $0 \leq p \leq r$. ∎

Dakle, signatura jednoznačno klasifikuje realne kvadratne funkcije kojih, kao i u kompleksnom slučaju, ima konačno mnogo. Pri tom neke od tih kvadratnih funkcija imaju za nas poseban značaj.

Definicija. Kažemo da je kvadratna funkcija $F : V \to \mathbb{R}$ na realnom vektorskom prostoru V *pozitivno odredjena* ili *pozitivno definitna* ako $\forall v \in V$, $v \neq o \Rightarrow F(v) > 0$ i pišemo $F > 0$. Funkcija F je *nenegativno odredjena* (*nenegativno definitna* ili *pozitivno semidefinitna*) ako $\forall v \in V$, $F(v) \geq 0$. U tom slučaju pišemo $F \geq 0$. Analogno tim pojmovima, postoji *negativna odredjenost* (*negativna definitnost*, $v \neq o \Rightarrow F(v) < 0$, oznaka $F < 0$) i *negativna semidefinitnost* (*nepozitivna definitnost*, $\forall v$, $F(v) \leq 0$, oznaka $F \leq 0$). Očigledno da je $F < 0 \Leftrightarrow -F > 0$; $F \leq 0 \Leftrightarrow -F \geq 0$, pa ova dva pojma nisu posebno značajna. Kvadratna funkcija koja nije ni pozitivno, ni negativno definitna, naziva se *neodredjenom* ili *indefinitnom*.

Zbog velikog značaja koji za euklidsku geometriju imaju pozitivno definitne kvadratne funkcije, što ćemo videti u sledećoj glavi, potrebni su efikasni kriterijumi pozitivne definitnosti. Neki od neophodnih uslova se lako dokazuju.

Lema. Ako je F pozitivno definitna kvadratna forma i $A = (a_{ij})$ njena matrica u proizvoljnoj bazi e, tada su svi dijagonalni elementi $a_{ii} > 0$ i $\det A > 0$.

Dokaz. Biće $a_{ii} = F(e_i) > 0$. S druge strane, u kanonskoj bazi e' matrica $[F]_{e'} = A'$ je dijagonalna i $A = C^T A' C$, pri čemu je $C = C_{e' \to e}$ matrica prelaza. Sada je

$$\det A = \det C^T \cdot \det A' \cdot \det C = (\det C)^2 \cdot a'_{11} \cdot \ldots \cdot a'_n > 0. \ ∎$$

Navedeni uslovi nisu, medjutim, i dovoljni (nadjite kontraprimere). Jedan od načina je nalaženje kanonske forme i signature.

Tvrdjenje. Neka je F kvadratna funkcija na n-dimenzionalnom $\mathbb{R}$-vektorskom prostoru. Tada je:

1) funkcija F pozitivno definitna $(F > 0) \Leftrightarrow$ signatura F je $(n,0)$;

2) funkcija F nenegativno definitna $(F \geq 0) \Leftrightarrow$ signatura F je $(p,0)$ $(0 \leq p \leq n)$.

Dokaz. Smer $\Leftarrow$ je očigledan u oba slučaja: ako je u nekoj bazi

$$F(x_1,\ldots,x_n) = x_1^2 + \ldots + x_p^2,$$

tada je očigledno $F(x) \geq 0$, a ukoliko je pored toga $p = n$, tada je $F(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Dokažimo smer $\Rightarrow$. Neka je (p,q) signatura nenegativno definitne funkcije F. Ako je $q>0$, tada je

$$F(0,\ldots,0,\underset{p+1}{1},0,\ldots,0)=-1<0.$$

Zbog toga mora da bude $q=0$. Ako je sada $p<n$, tada je

$$F(0,\ldots,0,1)=0,$$

a vektor $x=(0,\ldots,0,1)\neq 0$, pa F nije pozitivno definitna. ∎

Prisetimo se da je glavni minor M_k reda k kvadratne matrice $A\in\mathcal{M}(n,\mathbb{F})$ determinanta koja se nalazi na preseku prvih k vrsta i prvih k kolona matrice A. Sledeće tvrdjenje je klasičan kriterijum pozitivne definitnosti računskog tipa bez nalaženja kanonske forme.

Teorema (Silvestrov kriterijum pozitivne definitnosti). Realna kvadratna forma F je pozitivno definitna $\Leftrightarrow$ svi glavni minori njene matrice u proizvoljnoj bazi su pozitivni.

Dokaz. Neka je $e_1,\ldots,e_n$ baza, A matrica F u toj bazi i $W_k=\mathcal{L}(e_1,\ldots,e_k)\subset V$ potprostor dimenzije k, a $F_k=F|_{W_k}$ kvadratna funkcija na W_k dobijena restrikcijom F i A_k njena matrica u bazi $e_1,\ldots,e_k$.Tada je minor $M_k=\det A_k=\det F_k$.

$\Rightarrow$ Ako je $F>0$, tada su sve $F_k>0$, pa je i $\det F_k=M_k>0$ za sve $k=1,\ldots,n$.

Smer $\Leftarrow$ ćemo dokazati u dva koraka. Prvo, pošto je $F_1(v)=F(\lambda e_1)=\lambda^2 a_{11}>0$ za svako $v\neq o$, onda je $F_1>0$. Drugo, dokažimo da $F_{k-1}>0\Rightarrow F_k>0$. Neka je $F_{k-1}>0$. Tada F_{k-1} ima signaturu $(k-1,0)$ i postoji baza $e'_1,\ldots,e'_{k-1}$ u W_{k-1} u kojoj je normalna forma $x_1^2+\ldots+x_{k-1}^2$, a matrica E. Neka je $w\in W_k$, $w\neq o$. Ako je skup $e'_1,\ldots,e'_{k-1},w$ linearno zavisan, tada $w\in W_{k-1}$ i $F_k(w)=F_{k-1}(w)>0$. Neka je taj skup linearno nezavisan, tj. neka predstavlja bazu u W_k. Matrica F_k u toj novoj bazi je

$$A'_k=\begin{pmatrix} 1 & & & a_1\\ & \ddots & & \vdots\\ & & 1 & a_{k-1}\\ a_1 & \cdots & a_{k-1} & a_k\end{pmatrix}$$

(svi izostavljeni elementi su 0), pri čemu je $a_k=F_k(w)$. S druge strane, $A'_k=C^TA_kC$, pri čemu je C matrica prelaza iz baze $e_1,\ldots,e_k$ u bazu $e'_1,\ldots,e'_{k-1},w$. Odavde je $\det A'_k=\det C^T\cdot\det A_k\cdot\det C=(\det C)^2\cdot\det A_k>0$ jer je glavni minor $M_k=\det A_k$ matrice $A=[F]_e$ po pretpostavci pozitivan. Računanjem determinante matrice A'_k (što ostaje za vežbu čitaocu), dobijamo $\det A'_k=a_k-(a_1^2+\ldots+a_{k-1}^2)$, odakle je $F_k(w)=a_k=a_1^2+\ldots+a_{k-1}^2+(\det C)^2\cdot\det A_k>0$. Zato je $F_k>0$. ∎

Primer. Kvadratna forma od dve promenljive $F(x,y)=ax^2+2bxy+cy^2$ je pozitivno definitna $\Leftrightarrow a>0$ i $b^2-ac>0$.

Primedba. Silvestrov kriterijum važi i za nenegativne kvadratne forme u sledećem obliku: kvadratna forma je nenegativno definitna $\Leftrightarrow$ svi njeni glavni minori su nenegativni. Ova se činjenica ponekad zove *Švarcenegerov kriterijum*. Dokaz je nešto složeniji. Ovo prošireno tvrdjenje je značajno za odredjene primene u **matematičkoj analizi** i drugim oblastima matematike.