1 Sopstvene vrednosti i sopstveni vektori

Definicija. Neka je $L : V \to V$ endomorfizam $\mathbb{F}$-vektorskog prostora V tj. preslikavanje prostora V u samoga sebe. Skalar $\lambda \in \mathbb{F}$ je *sopstvena vrednost* operatora L ako je $\mathrm{Ker}(L - \lambda I) \neq O$, tj. ako postoji vektor $v \neq o$ takav da je $L(v) = \lambda v$. Svaki takav vektor v naziva se *sopstveni vektor* operatora L koji odgovara sopstvenoj vrednosti λ. Skup svih takvih sopstvenih vektora zajedno sa nula-vektorom obeležava se $V_{L,\lambda}$ i naziva *sopstveni potprostor* operatora L koji odgovara sopstvenoj vrednosti λ. Skup svih sopstvenih vrednosti operatora L naziva se *spektar operatora* L i obeležava sa $\mathrm{Sp}\, L$.

Skup $V_{L,\lambda} = \{v | L(v) = \lambda v\}$ je zaista potprostor u V jer je $V_{L,\lambda} = \mathrm{Ker}(L - \lambda I)$. Njegova dimenzija se naziva *geometrijska višestrukost* sopstvene vrednosti λ.

Kako naći spektar operatora? Vidimo da je $\lambda \in \mathbb{F}$ sopstvena vrednost $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Ker}(L - \lambda I) \neq 0 \Leftrightarrow L - \lambda I$ nije automorfizam $\Leftrightarrow$ u bilo kojoj bazi e njegova matrica $A - \lambda E$ nije regularna $\Leftrightarrow \det(A - \lambda E) = 0$. Zato ima smisla posebno proučiti ovu determinantu.

Definicija. Neka je A kvadratna matrica reda n. Determinanta $\det(A - xE)$ naziva se *karakteristični polinom matrice* A i obeležava $\chi_A(x)$.

Tvrdjenje. (1) χ_A je polinom u $\mathbb{F}[x]$ stepena n sa najstarijim koeficijentom $(-1)^n$ oblika

$$\chi_A(x) = (-1)^n x^n + a_1(A) \cdot x^{n-1} + \ldots + a_n(A),$$

pri čemu je $a_1(A) = (-1)^{n-1}\,\mathrm{tr}\, A$, $a_n(A) = \det A$.

(2) $A \approx B \Rightarrow \chi_A(x) = \chi_B(x)$, tj. slične matrice imaju isti karakteristični polinom.

Dokaz. (1) Na osnovu formule za potpuni razvoj determinante sledi da je

$$\begin{aligned} \chi_A(x) &= \begin{vmatrix} a_{11} - x & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} - x \end{vmatrix} = (a_{11} - x) \cdot \ldots \cdot (a_{nn} - x) + \text{ostali članovi} = \\ &= (-1)^n x^n + (-1)^{n-1}(a_{11} + \ldots + a_{nn})x^{n-1} + \ldots + a_n(A) \end{aligned}$$

pošto ni u jedan od ostalih članova ne može ulaziti $n-1$ faktor oblika $(a_{ii} - x)$, pa je njihov zbir polinom stepena $< n-1$. Sada je očigledno $a_1(A) = (-1)^{n-1}\,\mathrm{tr}\, A$, $a_n(A) = \chi_A(0) = \det A$.

(2) Ako su A i B slične, tada postoji regularna matrica C takva da je $B = C^{-1} \cdot A \cdot C$. Sada je

$$\begin{aligned} \chi_B(x) &= \det(B - xE) = \det(C^{-1}AC - C^{-1}xEC) = \det[C^{-1}(A - xE)C] = \\ &= (\det C)^{-1} \cdot \det(A - xE) \cdot \det C = \det(A - xE) = \chi_A(x). \ \blacksquare \end{aligned}$$

Posledica-definicija. Ako je L endomorfizam prostora V, *karakteristični polinom operatora* L je polinom $\chi_L = \chi_A$, pri čemu je A matrica endomorfizma L u bilo kojoj bazi. Ovaj polinom ne zavisi od izbora baze. Polinom i njegovi koeficijenti predstavljaju geometrijske invarijante linearnog operatora, odnosno klase sličnih matrica. Definišu se i *trag* $\operatorname{tr} L := trA$ i *determinanta* $\det L := \det A$ operatora L. ∎

Tvrdjenje. $\lambda \in \mathbb{F}$ je sopstvena vrednost operatora $L \Leftrightarrow \chi_L(\lambda) = 0$. Spektar $\operatorname{Sp} L$ je skup svih korena polinoma χ_L u polju $\mathbb{F}$. ∎

Višestrukost sopstvene vrednosti λ kao korena karakterističnog polinoma χ_L naziva se *algebarska višestrukost* sopstvene vrednosti λ (za razliku od geometrijske višestrukosti $\dim V_{L,\lambda}$).

Primedbe i primeri. (1) Svaki polinom n-tog stepena (s tačnošću do konstantnog faktora) može da bude karakteristični polinom neke matrice: ako uzmemo da je

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ & 0 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ a_n & a_{n-1} & \cdots & a_2 & a_1 \end{pmatrix}$$

tada je, posle jednostavnog računa pomoću rekurentne formule (izvedite ga),

$$\chi_A(x) = (-1)^n (x^n - a_1 x^{n-1} - \ldots - a_n).$$

(2) Spektar operatora može da bude i prazan. Ako je L endomorfizam prostora $\mathbb{R}^2$ definisan matricom

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

tada je $\chi_A(x) = x^2 + 1$, pa je $\operatorname{Sp} L = \emptyset$.

(3) Algebarska i geometrijska višestrukost sopstvene vrednosti ne moraju da budu jednake. Ako je L endomorfizam prostora $\mathbb{R}^3$ definisan matricom

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

tada je $\chi_L(x) = -(x-1)^3$, pa je algebarska višestrukost sopstvene vrednosti $\lambda = 1$ jednaka 3. Odgovarajući potprostor $V_{L,1}$ predstavlja jezgro operatora $L - I$ sa matricom

$$A - E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$V_{L,1}$ je prostor rešenja homogenog sistema sa tom matricom. Njen rang je 2, pa je $\dim V_{L,1} = 3 - 2 = 1$. Geometrijska višestrukost za $\lambda = 1$ jednaka je 1.

Kompleksifikacija. Najčešće osnovno polje s kojim se srećemo u primenama jeste polje realnih brojeva $\mathbb{R}$. Njegovo algebarsko zatvorenje je polje kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$. Svaki polinom ima u $\mathbb{C}$ onoliko korena (računatih s višestrukošću) koliki je njegov stepen. Zato se nad $\mathbb{C}$ ne može pojaviti situacija iz primera 6(2): spektar svakog endomorfizma L $\mathbb{C}$-vektorskog prostora V je neprazan i L ima tačno $n = \dim V$ sopstvenih vrednosti (od kojih se neke mogu ponavljati). Da bismo iskoristili tu prednost, naučićemo kako da od $\mathbb{R}$-vektorskih prostora pravimo $\mathbb{C}$-vektorske prostore zamenjujući osnovno polje $\mathbb{R}$ poljem $\mathbb{C}$. Potrebno je da umemo da množimo vektore kompleksnim brojevima tako da ostanu na snazi uobičajeni zakoni računanja:

$$(a + bi) \cdot v = av + biv.$$

Vidimo da je dovoljno da uvedemo nove vektore oblika iv i na taj način proširimo naš polazni vektorski prostor. Ovaj postupak se naziva *kompleksifikacija* i može se izvesti analogno konstrukciji polja $\mathbb{C}$.

Teorema-definicija. Neka je V $\mathbb{R}$-vektorski prostor, a skup $V_{\mathbb{C}} = \{(v, w) | v, w \in V\} = V \times V$. U skup $V_{\mathbb{C}}$ uvedimo operacije sabiranja $(v, w, v', w' \in V)$

$$(v, w) + (v', w') = (v + v', w + w')$$

i množenja kompleksnim brojem $(v, w \in V,\ a + bi \in \mathbb{C},\ a, b \in \mathbb{R})$

$$(a + bi) \cdot (v, w) = (av - bw,\ aw + bv).$$

(1) $V_{\mathbb{C}}$ je vektorski prostor nad poljem $\mathbb{C}$, *kompleksifikacija* prostora V.

(2) Preslikavanje $\varphi : V \to V_{\mathbb{C}}$, $v \mapsto (v, o)$ je monomorfizam Abelovih grupa. Ako $V_{\mathbb{C}}$ posmatramo kao prostor nad $\mathbb{R}$, tada je φ izomorfizam $\mathbb{R}$-vektorskih prostora $V \cong \operatorname{Im} \varphi$ i važi formula

$$(a + bi)(v, o) = (av, bv).$$

Zato identifikujemo V i $\operatorname{Im} \varphi$, vektor (v, w) obeležavamo $v + iw$ po analogiji s poljem $\mathbb{C}$ i smatramo da je $V \subset V_{\mathbb{C}}$, pri čemu je $v = (v, o) = v + io$, a navedena formula postaje

$$(a + bi)v = av + biv.$$

Obe interpretacije simbola iv (kao vektora (o, v) i kao proizvoda kompleksnog broja i i vektora (v, o)) se poklapaju, pa možemo slobodno koristiti asocijativni i distributivni zakon.

(3) Ako je $\dim_{\mathbb{R}} V = n$ i $e_1, \ldots, e_n$ njegova baza nad $\mathbb{R}$, tada isti vektori $e_1, \ldots, e_n$ čine bazu za $V_{\mathbb{C}}$ nad $\mathbb{C}$ i $\dim_{\mathbb{C}} V_{\mathbb{C}} = n$.

(4) Ukoliko je $L : V \to W$ morfizam $\mathbb{R}$-vektorskih prostora, formulom $L_{\mathbb{C}}(v + iw) = L(v) + i \cdot L(w)$ definisan je morfizam $\mathbb{C}$-vektorskih prostora $L_{\mathbb{C}} : V_{\mathbb{C}} \to W_{\mathbb{C}}$ koji nazivamo *kompleksifikacija morfizma* L.

(5) Ako je $A \in \mathcal{M}(m \times n, \mathbb{R})$ matrica morfizma L u bazi $e_1, \ldots, e_n$, tada je ta ista matrica, posmatrana kao element $\mathcal{M}(m \times n, \mathbb{C})$, matrica njegove kompleksifikacije $L_{\mathbb{C}}$ u istoj bazi $e_1, \ldots, e_n$ posmatranoj kao baza $V_{\mathbb{C}}$.

(6) Za svaki endomorfizam $L \in EndV$ je $\chi_{L_C} = \chi_L$.

Dokaz. (1) Aksiome vektorskog prostora se neposredno proveravaju.

(2) Biće

$$\begin{aligned} \varphi(v + w) &= (v + w, o) = (v, o) + (w, o) = \varphi(v) + \varphi(w), \\ \varphi(v) &= \varphi(w) \Rightarrow (v, o) = (w, o) \Rightarrow v = w. \end{aligned}$$

Ostalo je očigledno.

(3) Ako je $v+iw \in V_{\mathbb{C}}$ i $v = a_1e_1 + \ldots + a_ne_n$, $w = b_1e_1 + \ldots + b_ne_n$, tada je

$$v + iw = (a_1 + ib_1)e_1 + \ldots + (a_n + ib_n)e_n.$$

Odatle neposredno sledi da su $e_1, \ldots, e_n$ linearno nezavisni i kao vektori u $V_{\mathbb{C}}$ i da ga razapinju kao vektorski prostor nad $\mathbb{C}$.

(4) Na osnovu definicije, $L_{\mathbb{C}}(v) = L(v)$, $L_{\mathbb{C}}(iv) = iL(v)$, $L_{\mathbb{C}}(v + iw) = L_{\mathbb{C}}(v) + L_{\mathbb{C}}(iw)$, odakle sledi opšta aditivnost $L_{\mathbb{C}}$:

$$L_{\mathbb{C}}[(v + iw) + (v' + iw')] = L_{\mathbb{C}}(v + iw) + L_{\mathbb{C}}(v' + iw').$$

S obzirom na to da je $L_{\mathbb{C}}(\lambda v) = L(\lambda v) = \lambda L(v) = \lambda L_{\mathbb{C}}(v)$, $L_{\mathbb{C}}(iv) = iL(v) = iL_{\mathbb{C}}(v)$, imamo i opštu homogenost $L_{\mathbb{C}}$: $L_{\mathbb{C}}[(\lambda+i\mu)(v+iw)] = (\lambda+i\mu)L_{\mathbb{C}}(v+iw)$.

(5) Na osnovu tačke (3), $e_1, \ldots, e_n$ je baza $V_{\mathbb{C}}$ nad $\mathbb{C}$. Sledi da je $L_{\mathbb{C}}(e_k) = L(e_k)$ pa su i matrice iste.

Tvrdjenje (6) je direktna posledica tvrdjenja (5). ∎

Primedba. Prelaz sa V na $V_{\mathbb{C}}$ može se opisati na sledeći način. Prostor $V_{\mathbb{C}}$ je širi od polaznog V i sadrži sve linearne kombinacije vektora iz V sa kompleksnim koeficijentima:

$$V_{\mathbb{C}} = \{z_1v_1 + \ldots + z_kv_k | v_i \in V, z_i \in \mathbb{C}, k \in \mathbb{N}\}.$$

Vidi se da je baza V nad $\mathbb{R}$ istovremeno i baza $V_{\mathbb{C}}$ nad $\mathbb{C}$: dopustili smo više koeficijenata i dobili više vektora. Pri tom je $\dim_{\mathbb{R}} V = \dim_{\mathbb{C}} V_{\mathbb{C}}$. Ovo je primer jedne konstrukcije koja se u (poli)linearnoj algebri često koristi: proširenje polja skalara pomoću tenzorskog proizvoda. Dobijeni $\mathbb{C}$-prostor $V_{\mathbb{C}}$ može se posmatrati i kao $\mathbb{R}$-prostor (ako zaboravimo" da množimo kompleksnim brojevima) i tada je njegova dimenzija dva puta veća: $2\dim_{\mathbb{R}} V = \dim_{\mathbb{R}} V_{\mathbb{C}}$ (ovaj postupak naziva se *realifikacija* ili *suženje polja skalara*). Taj $\mathbb{R}$-prostor sadrži V kao potprostor na dva različita načina: $V_{\mathbb{C}} = V \oplus iV$, gde je $iV \cong V$. Ako je $e_1, \ldots, e_n$ baza V, tada je $e_1, \ldots, e_n, ie_1, \ldots, ie_n$ baza $V_{\mathbb{C}}$ nad $\mathbb{R}$, pri čemu prva polovina razapinje potprostor V, a druga iV.

Moramo prilagoditi i sâm pojam sopstvene vrednosti i vektora.

Definicija. Neka je $L : V \to V$ endomorfizam $\mathbb{R}$-vektorskog prostora V. Kompleksni broj $\lambda \in \mathbb{C}$ je sopstvena vrednost operatora L (u širem smislu) ako je to sopstvena vrednost (u starom smislu) operatora $L_{\mathbb{C}} : V_{\mathbb{C}} \to V_{\mathbb{C}}$. Skup svih (kompleksnih) sopstvenih vrednosti operatora $L_{\mathbb{C}}$ je kompleksni spektar $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}} L$ operatora L.

Pošto su karakteristični polinomi operatora L i $L_{\mathbb{C}}$ isti, jasno je da su sopstvene vrednosti od L u novom smislu upravo svi (kompleksni) koreni realnog polinoma χ_L i $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}} L = \mathrm{Sp}\, L_{\mathbb{C}}$. Kompleksni spektar operatora ne može biti prazan: u primeru 6(2), $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}} L = \{i, -i\}$ i imamo dve različite jednostruke sopstvene vrednosti.

2 Dijagonalizabilni endomorfizmi

Najjednostavniji tip endomorfizama je svakako onaj čija se matrica pogodnim izborom baze može svesti na dijagonalni oblik tj. matrica u čijoj klasi sličnosti postoji dijagonalna matrica. Pretpostavimo da u bazi $e = (e_1, \dots, e_n)$ $\mathbb{F}$-vektorskog prostora V endomorfizam L ima matricu $[L]_e = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ sa vrednostima $\lambda_i \in \mathbb{F}$ na dijagonali. Pošto su kolone te matrice koordinate slika baznih vektora u bazi e, to znači da je $L(e_i) = \lambda_i e_i$ za sve $i = 1, \dots, n$. Dakle, svi bazni vektori su sopstveni vektori operatora L, a λ_i odgovarajuće sopstvene vrednosti, pri čemu je geometrijska višestrukost λ_i jednaka broju njenih pojavljivanja u nizu $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Lako se vidi i obrnuto: ako se od sopstvenih vektora našeg operatora (koji mogu odgovarati raznim sopstvenim vrednostima) može sastaviti baza prostora V, tada će u toj bazi operator L imati matricu dijagonalnog oblika.

Definicija. Endomorfizam L $\mathbb{F}$-vektorskog prostora V je *dijagonalizabilan* (nad $\mathbb{F}$) ako V ima bazu sastavljenu od sopstvenih vektora operatora L, tj. ako postoji baza e u kojoj je matrica $[L]_e$ dijagonalna. U slučaju osnovnog polja $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, operator L je *poluprost*, ako je $L_{\mathbb{C}}$ dijagonalizabilan.

Ista terminologija važi i za matrice. Matrica $A \in \mathcal{M}(n, \mathbb{F})$ je *dijagonalizabilna*, ako je slična dijagonalnoj matrici. Realna matrica $A \in \mathcal{M}(n, \mathbb{R})$ je *poluprosta* ako je dijagonalizabilna posmatrana kao matrica u $\mathcal{M}(n, \mathbb{C})$.

Primeri. (1) Endomorfizam L standardnog prostora $\mathbb{R}^2$ zadat matricom

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

je dijagonalizabilan. Njegov karakteristični polinom je $\chi_L(x) = x^2 - 1$, ima dva sopstvena potprostora dimenzije 1 koji se dobijaju kao prostori rešenja homogenih sistema s matricama

$$A - E = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \; A + E = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

čiji su bazni vektori $e_1 = (1, 1)^T$ odnosno $e_2 = (1, -1)^T$. Ova dva vektora zajedno čine bazu celog prostora u kojoj je matrica operatora

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

pa je on dijagonalizabilan.

(2) Endomorfizam M standardnog prostora $\mathbb{R}^2$ zadat matricom

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

nije dijagonalizabilan, ali je poluprost. Njegov karakteristični polinom je $\chi_M(x) = x^2 + 1$, realni spektar je prazan, ali ima dve različite kompleksne sopstvene vrednosti i i $-i$. Njegova kompleksifikacija $M_{\mathbb{C}}$ ima dva sopstvena potprostora dimenzije 1 (nad $\mathbb{C}$) koji se dobijaju kao prostori rešenja homogenih sistema s matricama

$$B - iE = \begin{pmatrix} -i & 1 \\ 1 & -i \end{pmatrix}, \ B + iE = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix}$$

čiji su bazni vektori $e_1 = (1, i)^T$, odnosno $e_2 = (1, -i)^T$. Ova dva vektora zajedno čine bazu celog kompleksnog prostora $V_{\mathbb{C}}$ u kojoj je matrica operatora $M_{\mathbb{C}}$

$$B' = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}.$$

Polazni operator se ne može dijagonalizovati nad $\mathbb{R}$, ali može nad $\mathbb{C}$. Drugim rečima, matrica B u $\mathcal{M}(n, \mathbb{R})$ nije slična dijagonalnoj, ali u $\mathcal{M}(n, \mathbb{C})$ jeste.

Ako je e sopstveni vektor operatora L, tada je $L(e) = \lambda e$, pa je, za svaki skalar μ, $L(\mu e) = \mu\lambda e$. To znači da potprostor $W = \mathcal{L}(e)$ ima svojstvo $L(W) \subset W$. Ovakvi potprostori imaju važnu ulogu u izučavanju endomorfizama.

Definicija. Potprostor $W \subset V$ naziva se *invarijantni potprostor* operatora L ako je $L(W) \subset W$.

Svaki sopstveni vektor razapinje jednodimenzionalni invarijantni potprostor. Invarijantni potprostori se dobijaju i kombinacijom takvih.

Lema. Ako su $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ različite sopstvene vrednosti endomorfizma L, tada je suma $W = V_{L,\lambda_1} + \ldots + V_{L,\lambda_k}$ direktna:

$$W = V_{L,\lambda_1} \oplus \ldots \oplus V_{L,\lambda_k},$$

i W je invarijantni potprostor operatora L.

Dokaz. Primenjujemo indukciju po k.

(1) Za $k = 1$ treba dokazati da je potprostor $V_{L,\lambda}$ invarijantan. Ali ako je $v \in V_{L,\lambda}$, tada je $L(v) = \lambda v \in V_{L,\lambda}$.

(2) Neka tvrdjenje važi za $k-1$ različitih sopstvenih vrednosti, neka je $v_i \in V_{L,\lambda_i}$ i $v_1 + \ldots + v_k = o$. Primenom L dobijamo $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_k v_k = o$. Množenjem prve jednakosti sa λ_k i oduzimanjem od druge, dobijamo $(\lambda_1 - \lambda_k)v_1 + \ldots + (\lambda_{k-1} - \lambda_k)v_{k-1} = o$. Na osnovu induktivne hipoteze, suma $V_{L,\lambda_1} + \ldots + V_{L,\lambda_{k-1}}$ je direktna, pa je $(\lambda_i - \lambda_k)v_i = o$ $(i = 1, \ldots, k-1)$, odakle sledi da je $v_i = o$ $(i = 1, \ldots, k-1)$ jer je $\lambda_i \neq \lambda_k$ po polaznoj pretpostavci. Sada je iz prve jednakosti $v_k = o$, pa je cela suma W direktna. Invarijantnost sledi iz jednakosti $L(v_1 + \ldots + v_k) = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_k v_k \in W$. ∎

Razmotrimo detaljnije situaciju koja se ovde javlja. Neka su $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ sve različite sopstvene vrednosti operatora L, $V_i = V_{L,\lambda_i}$ odgovarajući sopstveni potprostori, $m_i = \dim V_i$ geometrijske višestrukosti i neka su $e_1^{(i)}, \ldots, e_{m_i}^{(i)}$ baze u svakom od V_i $(i = 1, \ldots, k)$. Tada je $W = V_1 \oplus \ldots \oplus V_k = [\mathcal{L}(e_1^{(1)}) \oplus \ldots \oplus \mathcal{L}(e_{m_1}^{(1)})] \oplus \ldots \oplus [\mathcal{L}(e_1^{(k)}) \oplus \ldots \oplus \mathcal{L}(e_{m_k}^{(k)})]$ jedan potprostor u V, dimenzije $m = m_1 + \ldots + m_k \leq n$. Može se desiti da je taj potprostor jednak celom V, tj. da je $m = n$, i tada je endomorfizam L dijagonalizabilan. Na osnovu ovih razmatranja neposredno sledi naredno tvr]enje.

Tvrdjenje. Neka je $L \in \operatorname{End} V$. Sledeća tvrdjenja su ekvivalentna.

(1) Endomorfizam L je dijagonalizabilan, tj. V ima bazu sastavljenu od sopstvenih vektora.

(2) Prostor V se razlaže u direktnu sumu jednodimenzionalnih invarijantnih potprostora.

(3) Suma geometrijskih višestrukosti svih sopstvenih vrednosti operatora L je jednaka $n = \dim L$. ∎

Kao posledicu, dobijamo jednostavan dovoljan uslov dijagonalizabilnosti. Prethodno definišimo jedno važno svojstvo spektra.

Definicija. Spektar operatora je *prost*, ako su svi koreni karakterističnog polinoma jednostruki (prosti).

Tvrdjenje. (1) Endomorfizam L sa $n = \dim V$ različitih sopstvenih vrednosti je dijagonalizabilan.

(2) Realni operator sa prostim kompleksnim spektrom je poluprost, a ukoliko je spektar prost i realan, operator je dijagonalizabilan. ∎

Upravo takav slučaj smo imali ranije u primerima. Sada je jasno i poreklo termina poluprosti operator".

Sada ćemo videti geometrijski sadržaj teoreme o determinanti sa blokom nula.

Tvrdjenje. Ako je $L \in \operatorname{End} V$ endomorfizam prostora V i $W \subset V$ invarijantni potprostor, tada karakteristični polinom $\chi_{L|W}(x)$ deli polinom $\chi_L(x)$. Ako se V razlaže u direktnu sumu invarijantnih potprostora $V = W \oplus W'$, tada je $\chi_L(x) = \chi_{L|_W}(x) \cdot \chi_{L|_{W'}}(x)$.

Dokaz. Izaberimo bazu $e_1, \ldots, e_k$ potprostora W i dopunimo je do baze $e_1, \ldots, e_k, e_{k+1}, \ldots, e_n$ prostora V. Zbog invarijantnosti W, $L(W) \subset W$ i matrica operatora L će izgledati na sledeći način:

$$A = [L]_e = \det \begin{pmatrix} B & C \\ O & D \end{pmatrix},$$

jer je $L(e_i) \in W$ za $i = 1, \ldots k$. Sada je $\chi_L = \det(A - \lambda E) = \det(B - \lambda E) \cdot \det(D - \lambda E) = \chi_{L|_W} \cdot \det(D - \lambda E)$, tj. $\chi_{L|_W}$ deli χ_L. Ako je $V = W \oplus W'$ i $e_{k+1}, \ldots, e_n$ baza invarijantnog potprostora W', tada je $C = O$ i $\det(D - \lambda E) = \chi_{L|_{W'}}$. ∎

Primetimo da se tvrdjenje može jednostavno uopštiti na sumu više invarijantnih potprostora.