Linearna algebra 2019/2020
Letnji semestar
Predavanje 5. (26.03.2020.)

Potprostori, faktorprostori, direktna suma

Da li dimenzija potprostora može biti veća od dimenzije celog prostora? Kako naći dimenziju faktorprostora? Daćemo odgovor na ova i slična pitanja.

Tvrenje. Neka je V n-dimenzionalni vektorski prostor, a $U \subset V$ njegov potprostor. Tada je:
(1) U takoe konačnodimenzionalan i $\dim U \leq \dim V$;
(2) V/U konačnodimenzionalan i $\dim V/U = \dim V - \dim U$;
(3) $\dim U = \dim V \Leftrightarrow U = V$.

Dokaz. (1) Ako je B baza u U, tada je to linearno nezavisan skup u $U \subset V$, pa se može dopuniti do baze B' u V koja mora da bude konačna. Zato je i B konačna i $\dim U \leq \dim V$.

(2) Neka je $\{u_1, \ldots, u_k\}$ baza potprostora U i $\{\bar{v}_i | i \in I\}$ baza faktorprostora V/U, pri čemu su $v_i \in V$, $\bar{v}_i = f(v_i)$ i f je kanonska projekcija $V \to V/U$. Dokažimo da je $B = \{u_1, \ldots, u_k\} \cup \{v_i | i \in I\}$ baza u V. Neka je $v \in V$. Tada je $f(v) = \sum_i a_i \bar{v}_i = \sum_i a_i f(v_i) = f(\sum_i a_i v_i)$ za neke $a_i \in \mathbb{F}$ od kojih je samo konačno mnogo $\neq 0$. Odavde sledi da je $f(v - \sum_i a_i v_i) = 0$, pa vektor $v - \sum_i a_i v_i \in \operatorname{Ker} f = U = \mathcal{L}(u_1, \ldots, u_k)$. Zato je $v - \sum_i a_i v_i = b_1 u_1 + \ldots + b_k u_k$, tj. $v = \sum_i a_i v_i + b_1 u_1 + \ldots + b_k u_k$. To upravo znači da B generiše V. Ako je sada $\sum_i a_i v_i + b_1 u_1 + \ldots + b_k u_k = o$, primenom f dobija se $o = f(\sum_i a_i v_i + b_1 u_1 + \ldots + b_k u_k) = \sum_i a_i \bar{v}_i$, odakle zbog linearne nezavisnosti v_i sledi da je $a_i = 0$ $(i \in I)$, a zatim $b_1 u_1 + \ldots + b_k u_k = o$, pa zbog linearne nezavisnosti $u_1, \ldots, u_k$ imamo $b_1 = \ldots = b_k = 0$. Dakle, skup B je linearno nezavisan. Prema tome, B je baza u V i kao takva konačna. Zato je $I = \{1, \ldots, m\}$ konačan, $B = \{u_1, \ldots, u_k, v_1, \ldots, v_m\}$ i $\dim V = k + m$.

(3) $\dim U = \dim V \Rightarrow \dim V/U = 0 \Rightarrow V/U = O \Rightarrow U = V$. ∎

To tvrenje zajedno s teoremom o homomorfizmu daje jednu važnu formulu. Prethodno uvedimo neke geometrijske karakteristike linearnih operatora.

Definicija. Neka je $L : V \to W$ linearno preslikavanje konačnodimenzionalnih prostora. Broj $\dim \operatorname{Ker} L$ naziva se *defekt* operatora L i obeležava sa $d(L)$, a broj $\dim \operatorname{Im} L$ se naziva *rang* operatora L i obeležava sa $r(L)$.

Posledica. Ako je $L : V \to W$ linearno preslikavanje, tada je

$$r(L) + d(L) = \dim V.$$

Dokaz. Na osnovu teoreme o homomorfizmu, $V/\operatorname{Ker} L \cong \operatorname{Im} L$. Zato je

$$r(L) = \dim \operatorname{Im}\ L = \dim V/\operatorname{Ker} L = \dim V - \dim \operatorname{Ker} L = \dim V - d(L). \ ∎$$

Posledica. Neka je $L : V \to W$ linearno preslikavanje.
(1) L je monomorfizam $\Leftrightarrow$ njegov je defekt $d(L) = 0$.
(2) L je epimorfizam $\Leftrightarrow$ njegov je rang $r(L) = \dim W$.

(3) Ako je $\dim V = \dim W$, tada

$$L \text{ je izomorfizam } \Leftrightarrow L \text{ je monomorfizam } \Leftrightarrow L \text{ je epimorfizam.}$$

Dokaz. Svojstva (1) i (2) su očigledna na osnovu definicija i prethodne posledice.

(3) Iz navedene formule sledi da je L mono $\Leftrightarrow 0 = d(L) = \dim V - r(L) = \dim W - r(L) \Leftrightarrow r(L) = \dim W \Leftrightarrow L$ epi. ∎

Poslednja posledica se često primenjuje na endomorfizme. Da bi se dokazalo da je neki endomorfizam $L : V \to V$ invertibilan, tj. da je bijekcija, dovoljno je dokazati ili da je epi, ili da je mono. Drugo svojstvo odmah sledi iz prvog. Algebarska strana ovoga je upravo tvrenje koje smo već ranije dokazali pomoću determinanata.

Posledica. Ako su $A, B \in \mathcal{M}(n, \mathbb{F})$ kvadratne matrice, tada

$$AB = E \Leftrightarrow BA = E \Leftrightarrow A \text{ i } B \text{ su regularne i } B = A^{-1}.$$

Dokaz. Neka su $L, M \in \mathrm{End}(\mathbb{F}^n)$ endomorfizmi koji odgovaraju matricama A, B respektivno. Tada $AB = E \Rightarrow L \circ M = I \Rightarrow M$ je monomorfizam $\Rightarrow M$ je automorfizam $\Rightarrow L$ je automorfizam $\Rightarrow A$ i B su regularne. ∎

Tvrenje (prva teorema o izomorfizmu, ponegde nazvana i druga teorema o izomorfizmu"). Neka je W vektorski prostor, a $U, V \subset W$ dva njegova potprostora. Tada je V potprostor od $U + V$, $U \cap V$ potprostor od U i odgovarajući faktorprostori su izomorfni:

$$(U + V)/V \cong U/(U \cap V).$$

Dokaz. Neka je $L : U \xrightarrow{i} U + V \xrightarrow{p} (U + V)/V$ kompozicija inkluzije $U \subset U + V$ i kanonske projekcije $U + V \to (U + V)/V$. Naimo $\mathrm{Im}\, L$ i $\mathrm{Ker}\, L$. Svaki element $z \in (U + V)/V$ je oblika $z = p(x)$ za neki $x \in U + V$. Sada je $x = u + v$ i $z = p(u + v) = p(u) + p(v) = p(u)$ jer je $V = \mathrm{Ker}\, p$. Zato je $z = p(u) = L(u)$ pa je $\mathrm{Im}\, L = (U + V)/V$, tj. L je epimorfizam. Za svako $u \in U$ imamo sada $u \in \mathrm{Ker}\, L \Leftrightarrow L(u) = p(u) = o \Leftrightarrow u \in V$. Zato je $\mathrm{Ker}\, L = U \cap V$. Primenimo teoremu o homomorfizmu na L. Dobijamo $U/\mathrm{Ker}\, L \cong \mathrm{Im}\ L$, tj. $U/(U \cap V) \cong (U + V)/V$. ∎

Posledica (Grasmanova formula). Za svaka dva potprostora U, V vektorskog prostora W važi

$$\dim(U + V) = \dim U + \dim V - \dim(U \cap V).$$

Dokaz. Iz prethodne teoreme biće $\dim U - \dim(U \cap V) = \dim U/(U \cap V) = \dim(U + V)/V = \dim(U + V) - \dim V$. ∎

Vidimo da za bilo koja dva potprostora $U, V \subset W$ dimenzija preseka $U \cap V$ mora zadovoljavati sledeću nejednakost: $\max\{0, \dim U + \dim V - \dim W\} \leq \dim U \cap V \leq \min\{\dim U, \dim V\}$.

Definicija. Potprostori U i V seku se *transverzalno* ako $\dim U \cap V$ ima najmanju moguću vrednost:

$$\dim U \cap V = \max\{0, \dim U + \dim V - \dim W\}.$$

Recimo, presek dva dvodimenzionalna potprostora u trodimenzionalnom prostoru je transverzalan ako je njegova dimenzija $2+2-3=1$. Primetimo da pojam zavisi od dimenzije ambijentnog prostora: u navedenom primeru ovaj presek u četvorodimenzionalnom prostoru ne bi bio transverzalan.

Veoma značajan slučaj transverzalnog preseka je kada je njegova dimenzija jednaka nuli.

Tvrenje. Sledeća tvrenja su ekvivalentna:

(1) $U \cap V = O$;

(2) $\dim(U \cap V) = 0$;

(3) reprezentacija svakog vektora $x \in U+V$ u obliku $x = u+v$ sa $u \in U$, $v \in V$ je jednoznačna;

(4) $\dim(U+V) = \dim U + \dim V$.

Dokaz. Ekvivalenciju (1) $\Leftrightarrow$ (2) znamo od ranije. Ekvivalencija (2) $\Leftrightarrow$ (4) je direktna posledica Grasmanove formule. Dokažimo implikaciju (1) $\Rightarrow$ (3). Ako su $x = u+v = u'+v'$ dve reprezentacije istog vektora sa $u, u' \in U$, $v, v' \in V$, tada je $u-u' = v'-v \in U \cap V$. Pošto je $U \cap V = O = \{o\}$, onda je $u = u'$, $v = v'$. Dokažimo implikaciju (3) $\Rightarrow$ (1). Ako je $x \in U \cap V$, tada su $x = x+o = o+x$ dve reprezentacije istog vektora sa $x, o \in U$, $o, x \in V$ pa je, zbog jedinstvenosti takve reprezentacije, $x = o$. Zato je $U \cap V = \{o\}$. ∎

Definicija. Ako su $U, V \subset W$ dva potprostora za koje važi jedan od ekvivalentnih uslova tvrenja 9, kažemo da je suma $U+V$ *direktna* i obeležavamo to sa $U \oplus V$.

Oznaka $U \oplus V$ predstavlja isto što i $U+V$, uz dodatni uslov $U \cap V = O$. Primetimo da, ukoliko je suma $U+V$ direktna i imamo baze $u_1, \dots, u_k$ i $v_1, \dots, v_m$ u U i V respektivno, tada je $u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_m$ baza prostora $U \oplus V$.

Tvrenje (teorema o komplementu). Za svaki potprostor $V \subset W$ vektorskog prostora W postoji potprostor $V' \subset W$ takav da je $W = V \oplus V'$.

Dokaz. Neka je $v_1, \dots, v_k$ baza V. Dopunimo je do baze $v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n$ celog prostora W i uzmimo da je $V' = \mathcal{L}(v_{k+1}, \dots, v_n)$. U skladu sa prethodnom primedbom, tada je $W = V \oplus V'$. ∎

Naravno, ovaj potprostor, koji smo nazvali komplement, nije jednoznačno odreen, što se vidi i iz samog dokaza: baza potprostora se na mnogo načina može dopuniti do baze celog prostora.

Pojam direktne sume se uopštava i na više sabiraka. Od ekvivalentnih uslova 1-4, uslov 3 najlakše dopušta uopštavanje, dok uslov 1 zahteva nešto drugačiju formulaciju.

Definicija. Neka su $V_i \subset W$ $(i = 1, \dots, k)$ potprostori vektorskog prostora W. Kažemo da je suma $V = V_1 + \ldots + V_k$ *direktna* i zapisujemo to $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_k$ ako se svaki vektor $x \in V$ na jedinstveni način zapisuje u obliku $x = v_1 + \ldots + v_k$ sa $v_i \in V_i$ $(i = 1, \dots, k)$.

Tvrenje. Sledeća tvrenja su ekvivalentna:

(1) suma $V_1 + \ldots + V_k$ je direktna $(= V_1 \oplus \ldots \oplus V_k)$;

(2) za svako $i = 1, \dots, k$ je $V_i \cap (V_1 + \ldots + V_{i-1} + V_{i+1} + \ldots + V_k) = O$.

Dokaz. (1) $\Rightarrow$ (2). Neka je suma direktna i neka $x \in V_i' = V_i \cap (V_1 + \ldots + V_{i-1} + V_{i+1} + \ldots + V_k)$. Tada je $x = v_1 + \ldots + v_{i-1} + v_{i+1} + \ldots + v_k \in V_i$ pa je $v_1 + \ldots + v_{i-1} - x + v_{i+1} + \ldots + v_k = o$ reprezentacija nule u direktnoj sumi $V_1 \oplus \ldots \oplus V_k$. Zato su svi $v_j = o$ i $x = o$.

(2) $\Rightarrow$ (1). Neka su $x = v_1 + \ldots + v_k = w_1 + \ldots + w_k$ dve reprezentacije jednog vektora sa $v_i, w_i \in V_i$. Tada je $v_i - w_i = (w_1 - v_1) + \ldots + (w_{i-1} - v_{i-1}) + (w_{i+1} - v_{i+1}) + \ldots + (w_k - v_k)$ element iz $V_i \cap (V_1 + \ldots + V_{i-1} + V_{i+1} + \ldots + V_k) = O$ pa je $v_i = w_i$. Pošto ovo važi za svako $i = 1, \ldots, k$, tvrenje je dokazano. ∎

Primedba. Možemo primetiti da vektori $e_1, \ldots, e_k$ čine bazu potprostora $V \subset W$ ako i samo ako je $V = \mathcal{L}(e_1) \oplus \ldots \oplus \mathcal{L}(e_k)$. Jednoznačnost zapisa označava upravo linearnu nezavisnost ovih vektora.