Linearna algebra 2019/2020
Letnji semestar
Predavanje 4. (19.03.2020.)

Matrica linearnog operatora.

Neka je $L : V \to W$ linearno preslikavanje vektorskih prostora. Pretpostavimo da smo u svakom od njih izabrali po jednu bazu, v u V i w u W. Tada se može postaviti pitanje kako se u koordinatama zapisuje preslikavanje L, tj. kako zavise koordinate vektora $L(v) \in W$ od koordinata vektora $v \in V$. Ako su $\varphi_v : V \to \mathbb{F}^n$ i $\varphi_w : W \to \mathbb{F}^m$ odgovarajući koordinatni izomorfizmi, imamo dijagram

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "L"] \arrow[d, "\varphi_v"'] & W \arrow[d, "\varphi_w"] \\ \mathbb{F}^n \arrow[r, dashed, "L'"'] & \mathbb{F}^m \end{tikzcd}$$

u kome je isprekidana strelica određena tako da on komutira:

$$L' = \varphi_w \circ L \circ {\varphi_v}^{-1} : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m.$$

Ovo je koordinatni zapis preslikavanja L. Na taj način se izučavanje prostora $\mathcal{L}(V, W)$ svodi na izučavanje prostora $\mathcal{L}(\mathbb{F}^n, \mathbb{F}^m)$, pri čemu je $n = \dim V$, $m = \dim W$ (ovde podrazumevamo prostore kolona). Kako izgleda preslikavanje L'?

Tvrđenje. Svaki linearni operator $L' : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$ zapisuje se u obliku

$$L'(x) = A \cdot x$$

sa jednoznačno određenom matricom $A \in \mathcal{M}(m \times n, \mathbb{F})$, koju ćemo obeležiti sa $A = [L']$.

Dokaz. Iz prethodne formule se vidi da kolone tražene matrice $A = (a_{ij})$ moraju da budu slike standardnih baznih vektora:

$$L'(e_i) = A \cdot e_i = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1_i \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix}.$$

Odatle sledi i jedinstvenost matrice A. Pri tom je očigledno

$$\begin{aligned} L'(x) &= x_1 L'(e_1) + \ldots + x_n L'(e_n) = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} \cdot x_1 + \ldots + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \cdot x_n = \\ &= \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} = A \cdot x. \ \blacksquare \end{aligned}$$

Sada imamo dovoljno motivacije za sledeću definiciju.

Definicija. Neka je $L : V \to W$ linearno preslikavanje i neka su $e = (e_1, \ldots, e_n)$ i $f = (f_1, \ldots, f_m)$ baze u prostorima V i W respektivno. Matrica $A \in \mathcal{M}(m \times n, \mathbb{F})$, sastavljena od kolona koordinata $[L(e_i)]_f$ slika baznih vektora e_i u bazi f naziva se *matrica linearnog preslikavanja* L u bazama e, f i obeležava sa $A = [L]_{e,f}$ ili samo $[L]$ ako su baze poznate.

Ako je L' linearno preslikavanje iz gornjeg komutativnog dijagrama, tada je očigledno $[L]_{e,f} = [L']$.

!! Obratite pažnju na zamenu redosleda n i m.

Teorema. (1) U situaciji iz prethodne definicije, preslikavanje $L \mapsto [L]_{e,f}$,

$$[-]_{e,f} : \mathcal{L}(V, W) \to \mathcal{M}(\dim W \times \dim V, \, \mathbb{F})$$

je izomorfizam vektorskih prostora.

(2) Ako je $M : W \to U$ još jedno linearno preslikavanje i g baza u U, tada je

$$[M \circ L]_{e,g} = [M]_{f,g} \cdot [L]_{e,f},$$

tj. matrica kompozicije jednaka je proizvodu matrica.

(3) Ako je $I : V \to V$ identiteta, tada je $[I]_{e,e} = E$, tj. matrica identitete je jedinična matrica.

Dokaz. (1) Preslikavanje $[-]$ je očigledno bijekcija. Pošto je $[(\lambda L + \mu K)(e_i)]_f = [\lambda L(e_i) + \mu K(e_i)]_f = \lambda[L(e_i)]_f + \mu[K(e_i)]_f$ zbog linearnosti koordinatnih izomorfizama, onda je $[\lambda L + \mu K] = \lambda[L] + \mu[K]$.

(2) Neka je $B = (b_{ij}) = [M]$ i $A = (a_{jk}) = [L]$. Tada je $(M \circ L)(e_k) = M(L(e_k)) = M(\sum_j a_{jk} f_j) = \sum_j a_{jk} M(f_j) = \sum_j a_{jk} \sum_i b_{ij} g_i = \sum_i (\sum_j b_{ij} a_{jk}) g_k$. To znači da su koordinate vektora $(M \circ L)(e_j)$ u bazi g upravo $c_{ik} = \sum_j b_{ij} a_{jk}$ elementi proizvoda matrica $B \cdot A$. Dakle, $[M \circ L] = B \cdot A$.

(3) Jasno je da je $I(e_i) = e_i$, odakle sledi tvrđenje. ∎

Izbor baza u V i W omogućuje da identifikujemo operatore $L \in \mathcal{L}(V, W)$ sa matricama $A \in \mathcal{M}(m \times n, \mathbb{F})$. Najzad imamo objašnjenje za neobičnu definiciju proizvoda matrica. To je operacija koja, sa geometrijskog stanovišta, odgovara vrlo prirodnoj operaciji - kompoziciji preslikavanja.

Posledica. $\dim \mathcal{L}(V, W) = \dim V \cdot \dim W$. ∎

Dakle, izborom baza e i f dobijamo koordinatni zapis linearnog preslikavanja u sledećem obliku:

$$[L(v)]_f = [L]_{e,f} \cdot [v]_e,$$

ili razvijeno

$$\begin{array}{ccccccc} y_1 & = & a_{11}x_1 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n \\ & & & & \cdots & & \\ y_m & = & a_{m1}x_1 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n \end{array}.$$

Ispitajmo sada kako se menja matrica linearnog operatora kada baze e i f zamenimo drugim bazama.

Tvrđenje. Ako su e' i f' nove baze u V i W respektivno, $C = C_{e \to e'}$ i $D = C_{f \to f'}$ odgovarajuće matrice prelaza i $A' = [L]_{e',f'}$ matrica našeg preslikavanja u novom paru baza, tada je

$$A' = D^{-1} \cdot A \cdot C.$$

Dokaz. Biće $[v]_e = C[v]_{e'}$ i $[L(v)]_f = D[L(v)]_{f'}$, odakle je

$$A' \cdot [v]_{e'} = [L(v)]_{f'} = D^{-1}[L(v)]_f = D^{-1}A \cdot [v]_e = D^{-1}A \cdot C \cdot [v]_{e'}$$

i tvrđenje sledi zbog jedinstvenosti matrice linearnog operatora. ∎

Dakle, $A' = D^{-1} \cdot A \cdot C \sim A$, tj. radi se o elementarnoj ekvivalenciji matrica. Sve matrice iz jedne klase elementarne ekvivalencije (među njima je jedinstvena matrica E_r) su matrice jednog linearnog operatora prilikom različitog izbora parova baza e, f. Pri tome je r rang, tj. dimenzija slike operatora L. Pošto znamo da je svaka matrica A elementarno ekvivalentna matrici E_r, za svako linearno preslikavanje $L : V \longrightarrow W$ postoji izbor baza e i f takav da je $[L]_{e,f} = E_r$. U koordinatama to znači da je $(y_1, \dots, y_m)^T = E_r \cdot (x_1, \dots, x_n)^T$,tj.

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1, \\ &\dots, \\ y_r &= x_r, \\ y_{r+1} &= 0, \\ &\dots, \\ y_m &= 0, \end{aligned}$$

odnosno da je preslikavanje L kompozicija dva preslikavanja: prvo $\mathbb{F}^n \longrightarrow \mathbb{F}^r$, $(x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_r)$, što je projekcija na koordinatni r-potprostor, a zatim $\mathbb{F}^r \longrightarrow \mathbb{F}^m$, $(x_1, \dots, x_r) \mapsto (x_1, \dots, x_r, 0, \dots, 0)$, što je inkluzija koordinatne r-ravni u m-prostor. Dakle, svako linearno preslikavanje je kompozicija projekcije (epimorfizma) i inkluzije (monomorfizma).

Endomorfizmi

Ako je $V = W$, tj. ako posmatramo endomorfizme prostora V, nemamo izbor dve baze, već samo jednė izbor baze u kodomenu određuje i bazu u domenu.

Definicija. Ako je $L \in \mathrm{End}(V)$ i e baza prostora V, *matrica endomorfizma* L *u bazi* e je matrica $[L]_e = [L]_{e,e}$.

Posledica. Za svaku bazu e, preslikavanje $[-]_e : \mathrm{End}(V) \to \mathcal{M}(n, \mathbb{F})$ je izomorfizam prstena. Automorfizmima prostora V odgovaraju regularne matrice:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{End}(V) & \to & \mathcal{M}(n,\mathbb{F}) \\ \cup & & \cup \\ \mathrm{Aut}(V) = GL(V) & \to & GL(n,\mathbb{F}) \end{array}$$

pri čemu je

$$[L^{-1}] = [L]^{-1}.$$

Dokaz. Svojstva (1) i (2) iz teoreme znače da je $[-]_e$ izomorfizam prstena, a svojstvo (3) obezbeđuje da automorfizmima odgovaraju regularne matrice i

$$E = [I] = [L \circ L^{-1}] = [L] \cdot [L^{-1}]. \ \blacksquare$$

Prilikom zamene baze $e \to e'$, matrica endomorfizma će se promeniti po formuli (4.6) sa $D = C$:

$$A' = C^{-1} \cdot A \cdot C.$$

Ova formula definiše jednu novu relaciju među kvadratnim matricama.

Definicija. Neka su $A, B \in \mathcal{M}(n, \mathbb{F})$. Kažemo da su matrice A i B *slične* i pišemo to $A \approx B$ ako postoji regularna matrica $C \in GL(n, \mathbb{F})$ takva da je

$$B = C^{-1} \cdot A \cdot C.$$

Tvrđenje. Sličnost $\approx$ je relacija ekvivalencije na $\mathcal{M}(n, \mathbb{F})$.

Dokaz. Refleksivnost: $A = E^{-1}AE \Rightarrow A \approx A$. Simetričnost: $A \approx B \Rightarrow B = C^{-1}AC \Rightarrow A = CBC^{-1} = (C^{-1})^{-1}B(C^{-1}) \Rightarrow B \approx A$. Tranzitivnost: $A \approx B \approx C \Rightarrow B = P^{-1}AP$ i $C = Q^{-1}BQ \Rightarrow C = Q^{-1}P^{-1}APQ = (PQ)^{-1}A(PQ) \Rightarrow A \approx C$. ∎

Klase ekvivalencije relacije sličnosti su *klase sličnosti* u $\mathcal{M}(n, \mathbb{F})$. Sve matrice iz jedne klase sličnosti predstavljaju matrice jednog endomorfizma u raznim bazama. Zato se može reći da prirodni geometrijski objekat nije sama matrica, već njena klasa sličnosti. Primetimo da se takva relacija može definisati u bilo kojoj (multiplikativnoj) grupi, kada se naziva *relacija konjugacije* i ima vrlo korisnu ulogu u proučavanju unutrašnje strukture grupe.

Primedba. Ako je $L : V \to V$, $A = (a_{ij}) = [L]_e$ matrica endomorfizma L u bazi e, $v \in V$ vektor sa kolonom koordinata $x = [v]_e$ i $w = L(v)$ vektor sa kolonom koordinata $y = [w]_e$, tada je, na osnovu svega prethodno rečenog,

$$y = A \cdot x$$

ili, u razvijenom obliku,

$$\begin{array}{ccccccc} y_1 & = & a_{11}x_1 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n \\ & & & & \cdots & & \\ y_m & = & a_{n1}x_1 & + & \cdots & + & a_{nn}x_n \end{array}.$$

Navedene formule izgledaju isto kao formule za zamenu baze iz teoreme 5. To nije slučajno. Ako je L automorfizam, tj. matrica $[L]_e$ regularna, tada L slika bazu e u novu bazu, koju ćemo obeležiti sa $L(e)$. Dejstvo automorfizma L može se shvatiti i kao transformacija baze $e \to L(e)$. Na osnovu definicija sledi da je

$$C_{e \to L(e)} = [L]_e.$$

Dakle, na zamenu baze u prostoru možemo gledati na dva načina. Prvi, koji nazivamo „pasivnim" gledištem, polazi od stanovišta da je prostor fiksiran, a mi menjamo bazne vektore i zato imamo različite vrednosti koordinata x i y **istog** vektora v u raznim bazama. Drugi, koji nazivamo „aktivnim" gledištem, polazi od toga da sam prostor transformišemo pomoću automorfizma L, a baza ostaje ista. Tada polaznom vektoru v sa koordinatama x odgovara novi vektor $w = L(v)$ sa koordinatama y u **istoj** bazi. U prvom slučaju je $x = C \cdot y$ a u drugom $y = A \cdot x$. Vidimo da u koordinatnom zapisu matrica prelaza C u „pasivnoj" koncepciji igra ulogu matrice **inverznog** (!!) automorfizma u „aktivnoj" koncepciji, jer je

$$A \cdot x = y = C^{-1} \cdot x.$$

Kontradikcija je samo prividna, u šta je najlakše uveriti se na primeru: u ravni $\mathbb{R}^2$ rotacija standardne baze za 45^0 u smeru kretanja skazaljke na satu je, sa geometrijskog stanovišta, isto što i rotacija cele ravni (u odnosu na fiksnu bazu) za 45^0 u smeru **suprotnom** od kretanja skazaljke na satu.

Oznaka „!!” u tekstu pokazuje mesto na kome treba obratiti pažnju. U latinskim starim knjigama pisalo je „*caveat lector*” - „čitalac neka pazi”.