Linearna algebra 2019/2020
Letnji semestar
Predavanje 3. (12. mart 2020)

Zamena baze

Neka je $v = (v_1, \ldots, v_n)$ baza n-dimenzionalnog vektorskog prostora V. Svaki vektor $u \in V$ ima tada jednoznačnu reprezentaciju $u = x_1 v_1 + \ldots + x_n v_n$.

Definicija. Jednoznačno određenu n-torku koeficijenata x_i ove linearne kombinacije nazivamo *koordinatama* vektora u u bazi v i obeležavamo

$$[u]_v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Zbog štednje prostora ponekad ćemo kolonu koordinata zapisivati kao transponovanu vrstu koordinata $[u]_v = \begin{pmatrix} x_1 & \ldots & x_n \end{pmatrix}^T$, zaboravljajući i na transponovanje i pišući $[u]_v = \begin{pmatrix} x_1 & \ldots & x_n \end{pmatrix}$. Pri tom u svim izračunavanjima uvek imamo u vidu da je to kolona. Dakle, $[u]_v \in \mathbb{F}^n$ i uzimanje koordinata definiše preslikavanje $[-]_v : V \to \mathbb{F}^n$. Jasno je da pri tom baza v prelazi u standardnu bazu e prostora $\mathbb{F}^n$:

$$[v_i]_v = (0, \ldots, \underset{i}{1}, \ldots, 0)^T.$$

Tada je $[-]_v$ izomorfizam vektorskih prostora, tzv. *koordinatni izomorfizam* određen izborom baze v.

O odnosu između geometrije i algebre. Imajući u vidu prethodna razmatranja, možemo o izboru izomorfizma $V \cong \mathbb{F}^n$ između n-dimenzionalnog vektorskog prostora V i standardnog aritmetičkog prostora $\mathbb{F}^n$ reći sledeće. Proizvoljni vektorski prostor V nema ni jednu apriori izdvojenu bazu, dok je $\mathbb{F}^n$ ima: to je standardna baza $e = (e_1, \ldots, e_n)$. Izabrati izomorfizam $V \cong \mathbb{F}^n$ je isto što i izabrati u V neku bazu (upravo onu koja se tim izomorfizmom prevodi u standardnu bazu $\mathbb{F}^n$). Različitih izomorfizama $V \cong \mathbb{F}^n$ ima onoliko koliko i različitih baza u V. Može se reći da tu leži suštinska razlika između geometrije i algebre: u geometrijskoj situaciji sve su baze ravnopravne, geometrija je homogena i nema privilegovanih „pravaca”, ali u toj situaciji ne možemo koristiti aparat algebre. Da bismo ga koristili, te da bismo eksplicitno računali sa vektorima, moramo izabrati bazu ili, što je isto, koordinatni izomorfizam $V \cong \mathbb{F}^n$. Svojstva vektora, vektorskih prostora i preslikavanja koja ne zavise od izbora baze, odnosno od koordinatnog izomorfizma smatramo pravim geometrijskim svojstvima. Na primer, svojstvo skupa vektora u aritmetičkom prostoru $\mathbb{F}^n$ da im je prva komponenta jednaka 0 nije geometrijsko, a linearna zavisnost jeste. Cilj linearne algebre je da primenom algebarskih metoda pronalazi upravo takva, geometrijska svojstva, nezavisna od izbora baze.

Da bismo realizovali postavljeni zadatak i istraživali geometrijska svojstva, potrebno je da razjasnimo kako se menjaju algebarske formule prilikom drugačijeg izbora baze. Zbog pojednostavljenja formula uvedimo novu formalnu operaciju množenja između uređenih n-torki vektora u $\mathbb{F}$-vektorskom prostoru i matrica nad $\mathbb{F}$.

3. **Definicija.** Ako je $v = (v_1, \dots, v_m)$ uređena m-torka vektora i $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}(m \times k, \mathbb{F})$ matrica tipa $m \times k$, tada je $v \cdot A$ uređena k-torka vektora

$$w_j = a_{1j}v_1 + \ldots + a_{mj}v_m \ (j = 1, \ldots, k).$$

Drugim rečima, u pitanju je formalni proizvod

$$(v_1, \ldots, v_m) \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mk} \end{pmatrix} = (a_{11}v_1 + \ldots + a_{m1}v_m, \ldots, a_{1k}v_1 + \ldots a_{mk}v_m).$$

Lema. (1) Ako je B matrica tipa $k \times l$, tada je $(v \cdot A) \cdot B = v \cdot (A \cdot B)$.

(2) Ako je v linearno nezavisna m-torka vektora i B matrica tipa $m \times k$, tada

$$v \cdot A = v \cdot B \Rightarrow A = B.$$

Dokaz. Svojstvo (1) se proverava neposrednim računom, isto kao asocijativnost množenja matrica.

(2) Neka je $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}(m \times k, \mathbb{F})$. Uslov $v \cdot A = v \cdot B$ znači

$$a_{1j}v_1 + \ldots + a_{mj}v_m = b_{1j}v_1 + \ldots + b_{mj}v_m \ (j = 1, \ldots, k)$$

odnosno

$$(a_{1j} - b_{1j})v_1 + \ldots + (a_{mj} - b_{mj})v_m = o \ (j = 1, \ldots, k).$$

Zbog linearne nezavisnosti v_i odavde sledi da je

$$a_{ij} - b_{ij} = 0 \ (i = 1, \ldots, m, \ j = 1, \ldots, k)$$

tj. $A = B$. ∎

Ovakav način pisanja pomaže nam da preglednije zapisujemo formule. Recimo, razlaganje vektora po bazi

$$v = x_1e_1 + \ldots + x_ne_n$$

može se kompaktno zapisati formulom

$$v = e \cdot x,$$

a koordinatni izomorfizam $\varphi_e = [-]_e : V \to \mathbb{F}^n$ formulama

$$\varphi_e(e \cdot x) = x, \ {\varphi_e}^{-1}(x) = e \cdot x.$$

Teorema. Neka su $e = (e_1, \ldots, e_n)$ i $e' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ dve baze vektorskog prostora V i neka je $C = C_{e \to e'}$ matrica tipa $n \times n$ čije su kolone redom kolone koordinata vektora $e'_1, \ldots, e'_n$ u bazi e. Tada je

$$e' = e \cdot C.$$

Neka je $v \in V$ proizvoljan vektor, $x = [v]_e$, $x' = [v]_{e'}$ njegove kolone koordinata u bazama e i e' respektivno. Tada je

$$x = C \cdot x'.$$

Dokaz. Članovi matrice $C = (c_{ij})$ su koordinate vektora baze e' u bazi e, tj.

$$e'_i = c_{1i}e_1 + \ldots + c_{ni}e_n$$

što u kompaktnom zapisu upravo predstavlja prvu jednakost $e' = e \cdot C$. Za svaki vektor u imamo dva njegova koordinatna zapisa:

$$u = e \cdot x = e' \cdot x' = (e \cdot C) \cdot x' = e \cdot (C \cdot x'),$$

odakle na osnovu prethodne leme možemo „skratiti” e i dobiti drugu jednakost:

$$x = C \cdot x'. \ \blacksquare$$

Definicija. Matrica $C_{e \to e'}$ naziva se *matricom prelaza* iz baze e u bazu e'.

Tvrđenje. (a) Ako je e'' treća baza prostora V, tada je $C_{e \to e''} = C_{e \to e'} \cdot C_{e' \to e''}$.

(b) $C_{e \to e} = E$.

(v) Svaka matrica prelaza $C_{e \to e'}$ je regularna i njen inverz je $(C_{e \to e'})^{-1} = C_{e' \to e}$.

Dokaz. (a) Na osnovu teoreme, $e' = e \cdot C_{e \to e'}$ i $e'' = e' \cdot C_{e' \to e''}$. Zamenom i primenom leme 4 dobija se $e'' = (e \cdot C_{e \to e'}) \cdot C_{e' \to e''} = e \cdot (C_{e \to e'} \cdot C_{e' \to e''})$. S druge strane, $e'' = e \cdot C_{e \to e''}$. Izjednačavanjem jednakosti i primenom leme 4 dobija se traženo tvrđenje. Tvrđenje pod (b) je očigledno. Na osnovu prethodnog, $E = C_{e \to e} = C_{e \to e'} \cdot C_{e' \to e}$ odakle sledi regularnost i tvrđenje pod (v).