1 Orijentacija

Obratimo se opet neizostavnoj geometrijskoj intuiciji. Neke transformacije ravni mogu se izvesti kretanjem te ravni po samoj sebi, bez promene njenog položaja u prostoru, na primer rotacija ravni, dok neke druge to ne mogu, već se moraju ostvariti kretanjem u prostoru, na primer osna simetrija ravni. Još je teže u trodimenzionalnom prostoru. Nikakvim kretanjem u prostoru ne mogu se poklopiti leva i desna rukavica! Da bismo to uradili, morali bismo da "izadjemo" u četvrtu dimenziju. U ovom odeljku biće opisana ovakva svojstva transformacija vektorskih prostora. Pri tom te pojave nastaju samo u realnim prostorima jer su vezane za uredjenost polja $\mathbb{R}$. Zato ćemo ovde razmatrati samo $\mathbb{R}$-vektorske prostore.

1. **Definicija.** Reći ćemo da su uredjene baze $(e_1, \ldots, e_n)$ i $(e'_1, \ldots, e'_n)$ realnog prostora V *jednako* ili *isto orijentisane* i napisati $e \sim e'$ ako je $\det C_{e \to e'} > 0$. U protivnom, ako je ova determinanta negativna (ona je uvek različita od nule jer je reč o bazama), kažemo da su baze *suprotno orijentisane*.

2. **Lema.** Relacija $\sim$ je relacija ekvivalencije na skupu $\mathcal{B}$ svih uredjenih baza i $\mathcal{B}/_\sim$ je dvoelementni skup.

Dokaz. Očigledno je $e \sim e$ sa matricom prelaza $C_{e \to e} = E$ (refleksivnost). Ako je $e \sim e'$ sa matricom prelaza C, onda je $\det C > 0$, pa je $\det C^{-1} > 0$ i $e' \sim e$ sa matricom prelaza C^{-1} (simetričnost). Najzad, ako je $e \sim e'$ sa matricom prelaza C, a $e' \sim e''$ sa matricom prelaza D, tada je $\det CD = (\det C)(\det D) > 0$ i $e \sim e''$ sa matricom CD (tranzitivnost). Ako je sada $e = (e_1, \ldots, e_n)$ bilo koja baza i $e' = (e_2, e_1, \ldots, e_n)$, tada one odredjuju dve različite klase ekvivalencije jer je $\det C_{e \longrightarrow e'} < 0$. Ukoliko je e'' treća baza neekvivalentna sa e, ona mora da bude ekvivalentna sa e' jer iz $\det C_{e'' \longrightarrow e} < 0$ sledi $\det C_{e'' \longrightarrow e'} = (\det C_{e'' \longrightarrow e})(\det C_{e \longrightarrow e'}) > 0$. ∎

3. **Definicija.** Svaka od dve klase ekvivalencije — dva elementa skupa $\mathcal{B}/_\sim$ naziva se *orijentacija* prostora V. Prostor sa izabranom orijentacijom je *orijentisani vektorski prostor*, izabrana orijentacija je *pozitivna orijentacija*, dok se ona druga naziva *negativnom orijentacijom.* Baze iz pozitivne (negativne) orijentacije nazivaju se pozitivno (negativno) orijentisanim ili, jednostavno, pozitivnim (negativnim) bazama.

4. **Primeri.** Opišimo intuitivno geometrijski smisao pojma orijentacije na pravoj, u ravni i u prostoru.

1) Neka je $V = \mathbb{R}$ prava. Baze se sastoje od pojedinih vektora e i e', pri čemu je matrica prelaza u stvari skalar $C_{e \to e'} = \lambda$ takav da je $e' = \lambda e$. Baze su isto orijentisane ako je $\lambda > 0$. To znači da e i e' imaju isti smer na pravoj V, pa je orijentacija prave — izbor jednog od dva moguća smera. U ravni crteža ili table pozitivnom orijentacijom horizontalne prave se obično smatra smer udesno, a pozitivnom orijentacijom vertikalne prave smer nagore, ali to je samo opšteprihvaćena konvencija.

2) Neka je sada V ravan $\mathbb{R}^2$. Baze $e_1 e_2$ i $e'_1 e'_2$ imaju po dva vektora. Može se pokazati da su one jednako orijentisane, tj. pripadaju istoj klasi ako imaju isti smer rotacije od prvog ka drugom baznom vektoru (u stvari je situacija obrnuta: ovo je pravi način da se nejasni pojam smera rotacije strogo definiše). Obično

se pozitivnom orijentacijom ravni crteža ili table smatra smer rotacije suprotan kretanju skazaljke na satu, ali i to je samo konvencija. Naime, ako pogledamo na našu ravan s druge strane, izabrana orijentacija postaje negativna. Ovde nema nikakve logičke protivrečnosti jer mi živimo u trodimenzionalnom prostoru i geometrijske ravni doživljavamo uvek kao ravni smeštene u naš prostor, pa intuitivno poimanje orijentacije zavisi od načina tog smeštanja. Sam pojam orijentacije je, medjutim, apstraktan i ne zavisi od načina smeštanja ravni u prostor.

3) Kao poslednji primer uzmimo prostor $V = \mathbb{R}^3$. Intuitivno poimanje jednake orijentisanosti baznih trojki $e_1e_2e_3$ i $e'_1e'_2e'_3$ je sledeće: ako kretanjem prostora dovedemo do poklapanja ravni $\mathcal{L}(e_1, e_2) = \mathcal{L}(e'_1, e'_2)$ tako da se poklope i njihove orijentacije, tj. da e_1e_2 i $e'_1e'_2$ budu jednako orijentisane u toj ravni, onda vektori e_3 i e'_3 mogu da budu "usmereni" na istu ili na strane suprotne u odnosu na ravan $\mathcal{L}(e_1, e_2)$. Baze su jednako orijentisane ako su oni usmereni na istu stranu. Uobičajen izbor pozitivne orijentacije prostora opisuje se pravilom zavrtnja: trojka $e_1e_2e_3$ je pozitivno orijentisana ako smer vektora e_3 pokazuje smer kretanja zavrtnja koji se uvrće kretanjem od e_1 ka e_2. Pošto ima, mada retko, zavrtnjeva koji se uvrću suprotno ili pošto neko nikada nije ni uvrtao zavrtanj, može da bude korisno i pravilo tri prsta desne ruke: ako prvi prst — palac i drugi prst — kažiprst desne ruke pokazuju smerove vektora e_1 i e_2 respektivno, onda treći — srednji prst pokazuje smer vektora e_3. To je, naravno, takodje samo konvencija, a u nekim tehničkim naukama se čak pozitivnom smatra orijentacija suprotna opisanoj. Ovde je umesno reći da ne postoji objektivan matematički razlog izbora jedne od dveju mogućih orijentacija: obe su potpuno ravnopravne. Medjutim, izbor orijentacije prostora je, za razliku od ravni, sa intuitivnog gledišta odredjen: mi ne možemo da pogledamo prostor s druge strane otišavši "iza ogledala" ili izvrnuvši prostor naopako kao rukavicu. Izbor orijentacije najčešće je povezan s ljudskom fiziologijom: postoji objektivna fiziološka razlika izmedju leve (strane na kojoj se kod većine ljudi nalazi srce) i desne strane tela. Dugo je bilo otvoreno pitanje da li postoje fizički procesi (nezavisno od čoveka i njegove fiziologije) koji nisu levo-desno simetrični, tj. nezavisni od izbora orijentacije, i na osnovu kojih bismo mogli objektivno da izaberemo pozitivnu orijentaciju fizičkog (ne apstraktnog) prostora. Sredinom šezdesetih godina XX veka uz opšte čudjenje, eksperimentima sa slabim nuklearnim silama dobijen je potvrdan odgovor na to pitanje. Vaseljena zaista razlikuje levo od desnog i "ispred" od "iza ogledala"!

Regularne matrice s pozitivnom determinantom pojavljuju se kao matrice prelaza izmedju jednako orijentisanih baza. Ako zamenu baze posmatramo s aktivnog gledišta - kao dejstvo automorfizma, tada se automorfizam koji čuva orijentaciju naziva *svojstveni* ili *direktni*, a onaj koji menja orijentaciju - *nesvojstveni* ili *indirektni*. Poreklo termina "svojstveni" opisano je na početku odeljka: svojstveni endomorfizam se realizuje unutar samog prostora, dok nesvojstveni zahteva izlazak u veće dimenzije. Pokažimo da to svojstvo ne zavisi od izbora baze.

5. **Tvrdjenje.** Neka je $L \in GL(V)$. Sledeća svojstva su ekvivalentna:

(1) $L(e) \sim e$ za neku bazu e; (2) $L(e) \sim e$ za svaku bazu e;

(3) $\det[L]_e > 0$ u nekoj bazi e; (4) $\det[L]_e > 0$ u svakoj bazi e.

Dokaz. Pošto je $[L]_{e'} = C^{-1}[L]_e C$, pri čemu je $C = C_{e\to e'}$ matrica prelaza, onda je $\det[L]_{e'} = (\det C)^{-1}(\det[L]_e)(\det C) = \det[L]_e$. Odatle je (3) $\Leftrightarrow$ (4). S druge strane, primedba 4.5.15 o odnosu "pasivnog" i "aktivnog" gledišta daje $C_{e\to L(e)} = [L]_e$, što odmah dokazuje ekvivalencije (1) $\Leftrightarrow$ (3) i (2) $\Leftrightarrow$ (4). ∎

6. **Primedba.** U navedenom dokazu dobijena je i jedna važna činjenica, koja će se ponovo javiti u glavi 5. Naime, broj $\det[L]_e$ ne zavisi od izbora baze e. Zato ima smisla govoriti o determinanti $\det L$ endomorfizma L.

7. **Tvrdjenje-definicija.** Svojstveni automorfizmi čine podgrupu grupe svih automorfizama, koju obeležavamo $SL(V) \subset GL(V)$ i nazivamo *specijalna linearna grupa*:

$$SL(V) = \{L \in GL(V) |\, \det L > 0\}.$$

U matričnom zapisu njoj odgovara grupa matrica

$$SL(n, \mathbb{F}) = \{A \in GL(n, \mathbb{F}) |\, \det A > 0\} \subset GL(n, \mathbb{F}),$$

koja se, takodje, naziva specijalna linearna grupa (matrica). Grupe $SL(V)$ i $SL(n, \mathbb{F})$, gde je $n = \dim V$, su izomorfne:

$$SL(V) \cong SL(n, \mathbb{F}).$$

Drugim rečima, izbor baze e definiše komutativni dijagram

$$\begin{array}{ccc} GL(V) & \overset{\cong}{\to} & GL(n,\mathbb{F}) \\ \cup & & \cup \\ SL(V) & \underset{\cong}{\to} & SL(n,\mathbb{F}) \end{array}.$$

Dokaz. Ako $L, M \in SL(V)$, tada je $\det[L \circ M^{-1}] = \det[L] \cdot \det[M]^{-1} > 0$, pa je i $L \circ M^{-1} \in SL(V)$, što dokazuje da je $SL(V)$ podgrupa. Ostalo je očigledno. ∎

2 Orijentacija u euklidskom prostoru. Zapremina paralelopipeda

Neka je $a = (a_1, \ldots, a_k)$ (uredjeni) skup vektora u euklidskom prostoru V.

1. **Definicija.** *Zapremina paralelopipeda* nad skupom vektora a je realan broj

$$\mathrm{Vol}(a) = \mathrm{Vol}(a_1, \ldots, a_k) := \sqrt{\det G(a)} \geq 0.$$

2. **Primedbe.** (1) Ovaj broj je dobro definisan jer je determinanta Gramove matrice uvek nenegativna. Pri tom je

$$\mathrm{Vol}(a) = 0 \Leftrightarrow \text{ skup } a \text{ je linearno zavisan.}$$

(2) Za $k=2$ zapremina paralelopipeda naziva se *površina paralelograma* $S(a,b)$ nad vektorima a,b:

$$S(a,b)=\sqrt{\begin{vmatrix} (a,a) & (a,b) \\ (a,b) & (b,b) \end{vmatrix}}=\|a\|\cdot\|b\|\cdot\sqrt{1-\left(\frac{(a,b)}{\|a\|\cdot\|b\|}\right)^2}=\|a\|\cdot\|b\|\cdot\sin\sphericalangle(a,b),$$

pri čemu je reč o sinusu neorijentisanog ugla izmedju a i b. To je, u stvari, elementarno-geometrijska formula

$$\text{površina paralelograma} = \text{osnovica} \times \text{visina},$$

jer je, na osnovu primedbe 7.5.7.(1), $\|b\|\cdot\sin\measuredangle(a,b)$ intenzitet normalne komponente vektora b u odnosu na a, tj. visina paralelograma. Da i u opštem, n-dimenzionalnom slučaju važi induktivna formula:

$$\begin{aligned} &\text{zapremina } k\text{-dimenzionalnog paralelopipeda} = \\ &= \text{zapremina } (k-1)\text{-dimenzionalne osnovice} \times \text{visina}, \end{aligned}$$

pokazuje sledeće tvrdjenje.

3. **Tvrdjenje.** Ako je $a_1 = a_1' + a_1''$ razlaganje vektora a_1 na komponentu $a_1' \in \mathcal{L}(a_2,\ldots,a_k)$ i $a_1'' \perp \mathcal{L}(a_2,\ldots,a_k)$, tada je

$$\mathrm{Vol}(a_1,\ldots,a_k)=\|a_1''\|\cdot\mathrm{Vol}(a_2,\ldots,a_k).$$

Dokaz. U determinanti $\det G(a_1,\ldots,a_k)$ razložimo prvu vrstu na zbir dve: $(a_1,a_j)=(a_1',a_j)+(a_1'',a_j)$, iskoristimo aditivnost determinante i ortogonalnost, a zatim isto uradimo s prvom kolonom: $(a_j,a_1)=(a_j,a_1')+(a_j,a_1'')$. Dobićemo

$$\begin{aligned}
&\det G(a_1,\ldots,a_k)= \\
&=\begin{vmatrix} (a_1',a_1) & (a_1',a_2) & \cdots & (a_1',a_k) \\ (a_2,a_1) & (a_2,a_2) & \cdots & (a_2,a_k) \\ & & \cdots & \\ (a_k,a_1) & (a_k,a_2) & \cdots & (a_k,a_k) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} (a_1'',a_1) & 0 & \cdots & 0 \\ (a_2,a_1) & (a_2,a_2) & \cdots & (a_2,a_k) \\ & & \cdots & \\ (a_k,a_1) & (a_k,a_2) & \cdots & (a_k,a_k) \end{vmatrix} = \\
&=\begin{vmatrix} (a_1',a_1') & (a_1',a_2) & \cdots & (a_1',a_k) \\ (a_2,a_1') & (a_2,a_2) & \cdots & (a_2,a_k) \\ & & \cdots & \\ (a_k,a_1') & (a_k,a_2) & \cdots & (a_k,a_k) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} (a_1',a_1'') & (a_1',a_2) & \cdots & (a_1',a_k) \\ 0 & (a_2,a_2) & \cdots & (a_2,a_k) \\ & & \cdots & \\ 0 & (a_k,a_2) & \cdots & (a_k,a_k) \end{vmatrix} + \\
&\qquad + (a_1'',a_1)\cdot\det G(a_2,\ldots,a_k) = \\
&=\det G(a_1',a_2,\ldots,a_k)+(a_1',a_1'')\cdot\det G(a_2,\ldots,a_k)+(a_1'',a_1)\cdot\det G(a_2,\ldots,a_k) = \\
&\qquad = 0+0+(a_1'',a_1'')\cdot\det G(a_2,\ldots,a_k),
\end{aligned}$$

odakle korenovanjem dobijamo traženu jednakost. ∎

U slučaju $k=\dim V$ uvodimo još jedan pojam u vezi sa zapreminom.

4. **Definicija.** Neka je $e=(e_1,\ldots,e_n)$ ortonormirana baza prostora V i $a=(a_1,\ldots,a_n)$ (uredjen) skup vektora. *Orijentisana zapremina paralelopipeda*

nad skupom a u odnosu na bazu e je broj $\Pi_e(a) = \det A$, pri čemu je A matrica sastavljena od kolona koordinata vektora a u bazi e.

Na prvi pogled, to je nov pojam, koji zavisi od izbora baze. Ali ne mnogo!

5. **Tvrdjenje.** (1) $|\Pi_e(a)| = \mathrm{Vol}(a)$.

(2) Skup a je linearno zavisan $\Leftrightarrow \Pi_e(a) = 0$.

(3) Ako je a baza, tada je $a \sim e \Leftrightarrow \Pi_e(a) > 0$. Ukoliko je a ortonormirana baza, tada je $\Pi_e(a) = \pm 1$ i a i e su isto orijentisane ako je $\Pi_e(a) = 1$, a suprotno orijentisane ako je $\Pi_e(a) = -1$.

Dokaz. (1) Ako je e ortonormirana baza, tada je $G(a) = A^T A$, pa je

$$\mathrm{Vol}(a) = \sqrt{\det(G(a))} = \sqrt{\det(A^T A)} = \sqrt{(\det(A))^2} = |\Pi_e(a)|\,.$$

Tvrdjenje (2) je očigledno na osnovu tvrdjenja (1) i svojstava $G(a)$.

(3) Ako je a baza, tada je matrica $A = C_{e \to a}$ u stvari matrica prelaza, pa tvrdjenje sledi iz definicije orijentacije. Ukoliko su obe baze ortonormirane, tada je A ortogonalna matrica, pa je $|\det A| = 1$, odakle sledi ostalo. ∎

Dakle, orijentisana zapremina paralelopipeda nad $n = \dim V$ vektora je po modulu jednaka neorijentisanoj, a znak odredjuje odnos izmedju orijentacija polazne baze e i našeg skupa vektora. Ako je V euklidski prostor u kojem smo izabrali jednu od dve orijentacije (orijentisani euklidski prostor), sa $\Pi(a)$ ćemo obeležavati orijentisanu zapreminu paralelopipeda nad a u odnosu na (bilo koju) pozitivno orijentisanu bazu. Ovaj pojam je sada potpuno invarijantan u odnosu na izbor baze.

3 Vektorski i mešoviti proizvod u trodimenzionalnom prostoru

Neka je V trodimenzionalni orijentisani euklidski prostor. Definisaćemo jednu pravu binarnu operaciju na V — vektorski proizvod. Neka su v i w dva vektora iz V. Uočimo preslikavanje $f : V \to \mathbb{R}$, definisano sa $f(x) = \Pi(x, v, w)$. Vrednost $f(x)$, kao što znamo, ne zavisi od izbora baze u kojoj se računa Π. Pri tom je funkcija f zbog svojstava determinte linearna po argumentu x, dakle $f \in V^*$. Na osnovu stava o reprezentaciji linearnih funkcija, postoji jedinstveni vektor $u \in V$ takav da je, za svako $x \in V,\ f(x) = (u, x)$.

1. **Definicija.** Jedinstveni vektor $u \in V$ koji reprezentuje linearnu funkciju $\Pi(-, v, w)$, tj. takav da je, za svako $x \in V$, $\Pi(x, v, w) = (u, x)$, naziva se *vektorski proizvod* vektora v i w i obeležava sa $u = v \times w$.

2. **Tvrdjenje.**(1) Preslikavanje $V^2 \to V$, $(v, w) \mapsto v \times w$ je bilinearno i antisimetrično.

(2) Ako je $e = (i, j, k)$ pozitivno orijentisana ortonormirana baza i koordinate $[v]_e = (a, b, c)^T$, a $[w]_e = (a', b', c')^T$, tada su koordinate

$$[v \times w]_e = \left(\begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \right).$$

(3) Vektor $v \times w$ je ortogonalan na vektore v i w.

(4) $v \times w = o \Leftrightarrow v$ i w su linearno zavisni.

(5) Ako su v i w linearno nezavisni, $(v \times w, v, w)$ je pozitivno orijentisana baza prostora V.

(6) $\|v \times w\| = S(v, w)$.

(7) Za svaka tri vektora $u, v, w \in V$ je $\Pi(u, v, w) = (u, v \times w)$.

Dokaz. (1) Neka je $u = v \times w$ i $u' = w \times v$. Tada je $(u, x) = \Pi(x, v, w) =$ (antisimetričnost determinante po kolonama) $= -\Pi(x, w, v) = -(u', x) = (-u', x)$. Dakle, vektori u i $-u'$ reprezentuju istu linearnu funkciju, pa je zbog jedinstvenosti $u' = -u$, tj. $w \times v = -v \times w$.

Neka je $u = v \times w$, $u' = v' \times w$, $u'' = (\alpha v + \alpha' v') \times w$. Tada je $(u'', x) = \Pi(x, \alpha v + \alpha' v', w) =$ (linearnost determinante kao funkcije kolona) $= \alpha \Pi(x, v, w) + \alpha' \Pi(x, v', w) = \alpha(u, x) + \alpha'(u', x) = (\alpha u + \alpha' u', x)$. S druge strane, vektori $\alpha u + \alpha' u'$ i u'' reprezentuju istu linearnu funkciju, pa je, zbog jedinstvenosti $u'' = \alpha u + \alpha' u'$, tj. $(\alpha v + \alpha' v') \times w = \alpha(v \times w) + \alpha'(v' \times w)$. Linearnost po drugom argumentu sledi iz navedena dva svojstva:

$$v \times (\alpha w + \alpha' w') = -(\alpha w + \alpha' w') \times v = -(\alpha(w \times v) + \alpha'(w' \times v)) = \alpha(v \times w) + \alpha'(v \times w').$$

(2) Naime, koordinate (x, y, z) vektora $v \times w$ u ortonormiranoj bazi (i, j, k) su

$$\begin{aligned}
x &= (i, v \times w) = \Pi(i, v, w) = \begin{vmatrix} 1 & a & a' \\ 0 & b & b' \\ 0 & c & c' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b & b' \\ c & c' \end{vmatrix}, \\
y &= (j, v \times w) = \Pi(j, v, w) = \begin{vmatrix} 0 & a & a' \\ 1 & b & b' \\ 0 & c & c' \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a & a' \\ c & c' \end{vmatrix}, \\
z &= (k, v \times w) = \Pi(k, v, w) = \begin{vmatrix} 0 & a & a' \\ 0 & b & b' \\ 1 & c & c' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

(3) Pošto je determinanta s dve iste kolone jednaka nuli, tada je $(v \times w, v) = \Pi(v, v, w) = 0$ i isto tako $(v \times w, w) = \Pi(w, v, w) = 0$.

(4) Ako su v i w linearno zavisni, tada je, zbog svojstava determinante za svako $x \in V$, $\Pi(x, v, w) = 0$, tj. $(x, v \times w) = 0 = (x, o)$, što zbog jednoznačnosti reprezentacije daje $v \times w = o$. Ako su pak v i w linearno nezavisni, biće $\dim \mathcal{L}(v, w) = 2$. Uzmimo bilo koji vektor $x \neq o$ iz ortogonalnog komplementa $\mathcal{L}(v, w)^{\perp}$. Tada je $\operatorname{rang}\{x, v, w\} = 3$ i $\Pi(x, v, w) = (x, v \times w) \neq 0$, što znači da je $v \times w \neq o$.

(5) Neka je $u = v \times w$. Sada je $\Pi(u, v, w) = (u, u) = \|u\|^2 \geq 0$ i važi jednakost $\Leftrightarrow u = o \Leftrightarrow v$ i w su linearno zavisni. Ako su v, w nezavisni, tada je $\Pi(u, v, w) > 0$, pa je u, v, w pozitivno orijentisana baza.

(6) Neka je $u = v \times w$. Sada je

$$\begin{aligned} \|u\|^2 &= \mathrm{Vol}(u,v,w) = \sqrt{G(u,v,w)} = \\ &= \sqrt{\begin{vmatrix} (u,u) & (u,v) & (u,w) \\ (v,u) & (v,v) & (v,w) \\ (w,u) & (w,v) & (w,w) \end{vmatrix}} = \sqrt{\begin{vmatrix} (u,u) & 0 & 0 \\ 0 & (v,v) & (v,w) \\ 0 & (w,v) & (w,w) \end{vmatrix}}. \end{aligned}$$

Ukoliko je $\|u\| = 0$, tada su v i w linearno zavisni, pa je $G(v,w) = S(v,w) = 0$ i važi jednakost. Ako je pak $\|u\| \neq 0$, tada skraćivanjem dobijamo opet $\|u\| = \sqrt{G(v,w)} = S(v,w)$.

(7) Ovo svojstvo je očigledno iz definicije. ∎

Ako vektorski proizvod shvatimo kao binarnu operaciju na prostoru V, svojstvo (1) znači njenu obostranu distributivnost u odnosu na sabiranje vektora, homogenost u odnosu na množenje vektora skalarom i antikomutativnost, tj. promenu znaka prilikom zamene mesta faktora. Ovaj spisak svojstava takodje ostvaruje vezu sa standardnom elementarnom definicijom vektorskog proizvoda $v \times w$ kao vektora čiji je intenzitet jednak površini paralelograma nad v i w (svojstvo (6)), koji je normalan na ravan koju razapinju v i w (svojstvo (3)) i čiji je smer takav da je trojka vektora $v, w, v \times w$ (ili $v \times w, v, w$, što je isto) pozitivno orijentisana (svojstvo (5)). Može se pokazati da ova tri svojstva jednoznačno karakterišu vektorski proizvod.

3. **Tvrdjenje.** Neka su v i w dva linearno nezavisna vektora, a $u \in V$ vektor sa svojstvima: (1) $u \perp \mathcal{L}(v,w)$, (2) $\|u\| = S(v,w)$ i (3) orijentacija trojke (u,v,w) je pozitivna. Tada je $u = v \times w$.

Dokaz. Neka je $u' = v \times w$. Na osnovu tvrdjenja 2, $\mathcal{L}(u') = \mathcal{L}(v,w)^{\perp}$. Pošto $u \in \mathcal{L}(v,w)^{\perp}$, za neko λ je $u = \lambda u'$. Sada je $S(v,w) = \|u\| = |\lambda| \cdot \|u'\| = |\lambda| \cdot S(v,w)$, odakle je $\lambda = \pm 1$. Najzad, ako je $\lambda = -1$, tada je $\Pi(u,v,w) = \Pi(-u',v,w) = -\Pi(u',v,w) < 0$, što znači da je trojka (u,v,w) negativno orijentisana i predstavlja kontradikciju. Zato je $\lambda = 1$ i $u = u'$. ∎

Ovako definisan vektorski proizvod se bez problema može definisati i za skup od $n-1$ vektora u n-dimenzionalnom euklidskom prostoru. Time bi se mogla definisati jedna $(n-1)$-arna antisimetrična $(n-1)$-linearna operacija u našem prostoru. U stvari, to je samo specijalan slučaj binarne operacije spoljnog proizvoda vektora, koja se definiše u **polilinearnoj algebri**.

Svojstvo (7) iz tvrdjenja 2 povezuje vektorski i skalarni proizvod sa orijentisanom zapreminom paralelopipeda.

4. **Definicija.** *Mešoviti proizvod* tri vektora u, v, w je broj

$$\langle u,v,w \rangle := (u, v \times w) = \Pi(u,v,w).$$

Termin "mešoviti proizvod" potiče od "mešanja" vektorskog i skalarnog proizvoda. To je preslikavanje $V^3 \to \mathbb{R}$. Na osnovu svega što je rečeno neposredno se dobijaju mnoga svojstva mešovitog proizvoda, koja se svode na svojstva determinante. Na primer,

$$\langle u,v,w \rangle = \langle v,w,u \rangle = \langle w,u,v \rangle = -\langle v,u,w \rangle = -\langle u,w,v \rangle = -\langle w,v,u \rangle,$$

zatim linearnost po svakom argumentu ponaosob (trilinearnost) itd.

Na pitanje da li je vektorski proizvod $\times$ asocijativan, odgovor je negativan. Imamo formulu koja u potpunosti rešava to pitanje.

5. **Tvrdjenje** (*formula dvostrukog vektorskog proizvoda*). Za svaka tri vektora u, v, w je

$$(u \times v) \times w = (u, w) \cdot v - (v, w) \cdot u.$$

Dokaz. Izaberimo ortonormiranu bazu i, j, k tako da bude $i \in \mathcal{L}(u)$ i $j \in \mathcal{L}(u, v)$. Tada su koordinate vektora $u = (x_1, 0, 0)$, $v = (x_2, y_2, 0)$ i $w = (x_3, y_3, z_3)$. Neposrednim računom na osnovu prethodnih teorema dobijamo u koordinatama

$$\begin{aligned}
u \times v &= (0, 0, x_1 y_2), (a \times b) \times c = (-x_1 y_2 y_3, x_1 y_2 x_3, 0), \\
(u, w) &= x_1 x_3,\ (v, w) = x_2 x_3 + y_2 y_3, \\
(u, w)v - (v, w)u &= (x_1 x_2 x_3 - x_1 x_2 x_3 - x_1 y_2 y_3, x_1 y_2 x_3, 0). \ \blacksquare
\end{aligned}$$

6. **Posledica** (*Jakobijev identitet*). Za svaka tri vektora u, v, w je

$$(u \times v) \times w + (v \times w) \times u + (w \times u) \times v = 0. \ \blacksquare$$

Vektorski proizvod na $\mathbb{R}^3$ predstavlja, dakle, antikomutativnu bilinearnu binarnu operaciju koja umesto asocijativnosti zadovoljava Jakobijev identitet. Takve algebarske strukture nazivaju se *Lijeve algebre* (nad poljem realnih brojeva $\mathbb{R}$) i značajne su u **teoriji Lijevih grupa** — oblasti **diferencijalne geometrije**.