Polarno razlaganje operatora

U prethodnim odeljcima razmatrali smo dve familije endomorfizama euklidskog vektorskog prostora - ortogonalne i simetrične. Prvi se karakterišu time što čuvaju rastojanja (to su izometrijske transformacije našeg prostora), a drugi time što su dijagonalizabilni u ortonormiranoj bazi (to geometrijski znači da predstavljaju rastezanja odnosno skaliranja prostora duž uzajamno normalnih osa). U ovom odeljku ćemo dokazati pomalo neočekivan rezultat da su na taj način opisani svi endomorfizmi euklidskog prostora: tačnije, svaki je endomorfizam kompozicija ortogonalnog i simetričnog. Biće nam potrebno nekoliko pomoćnih konstrukcija.

Definicija. Kažemo da je simetrični linearni operator L *nenegativan* (i zapisujemo $L \geq 0$) ako je $(Lu, u) \geq 0$ za svaki $u \in V$. Kažemo da je L *pozitivan* (i zapisujemo $L > 0$) ako je nenegativan i $(Lu, u) = 0 \Leftrightarrow u = o$.

Drugim rečima, L je nenegativan (pozitivan) ako je kvadratna forma koju on definiše nenegativno definitna (pozitivno definitna), odnosno ako su mu sve sopstvene vrednosti nenegativne (pozitivne).

Lema-definicija. Neka je L simetrični operator na V. Ako je $L \geq 0$, tada postoji nenegativan simetrični operator M (*koren operatora* L) takav da je $M^2 = L$. Sopstvene vrednosti operatora M su $\sqrt{\lambda_i}$, pri čemu su λ_i sve sopstvene vrednosti L, i L je izomorfizam $\Leftrightarrow$ M je izomorfizam.

Dokaz. Neka je e ortonormirana sopstvena baza za operator L a $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sve sopstvene vrednosti L. Tada je $L \geq 0 \Rightarrow \lambda_i \geq 0$. Ako je M operator čija je matrica u bazi e $[M]_e = \operatorname{diag}\left(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_n}\right)$, tada je $[M^2]_e = [M]_e^2 = [L]_e$, odakle sledi da je $M^2 = L$. Ovaj operator je nenegativan i simetričan. Tvrdjenje o izomorfizmu je očigledno. ∎

Lema. Neka je L **proizvoljan** endomorfizam. Tada je L^*L nenegativan simetrični operator i $L^*L > 0 \Leftrightarrow L$ je automorfizam. Koren tog operatora nazivamo *desnim modulom operatora* L. Analogno tvrdjenje važi za operator LL^*. Njegov koren je *levi modul* operatora L.

Dokaz. $(L^*L)^* = L^*L^{**} = L^*L$, pa je L^*L simetričan. $(L^*Lv, v) = (Lv, Lv) \geq 0$, pa je nenegativan. Ako je L izomorfizam, tada je $(L^*Lv, v) = 0 \Rightarrow (Lv, Lv) = 0 \Rightarrow Lv = o \Rightarrow v = o$, tj. $L^*L > 0$. Obrnuto, ako je $L^*L > 0$, tada je $Lv = o \Rightarrow 0 = (Lv, Lv) = (L^*Lv, v) \Rightarrow v = o$. Tvrdjenje za LL^* dobijamo primenom dokazanog na operator $K = L^*$, jer je $LL^* = L^{**}L^* = (L^*)^* (L^*) = K^*K$. ∎

Teorema (*polarno razlaganje automorfizma*). Neka je V euklidski vektorski prostor, a $L : V \to V$ njegov automorfizam. Tada se L razlaže u proizvod ortogonalnog i simetričnog operatora na dva, u opštem slučaju različita, načina: $L = L_s \circ L_o = L_o' \circ L_s'$ za ortogonalne operatore $L_o, L_o' \in O(V)$ (koje nazivamo desnim, odnosno levim *faznim faktorom*) i pozitivne simetrične operatore L_s, L_s' (levi, odnosno desni *modul*). Svako od tih razlaganja je jednoznačno odredjeno i naziva se (levo, odnosno desno) *polarno razlaganje* operatora L.

Dokaz. Operator L^*L je pozitivan simetričan operator, pa je $L^*L = M^2$ gde je M desni modul operatora L. M je pozitivan i simetričan automorfizam.

Dokažimo da je LM^{-1} ortogonalan operator. Biće

$$(LM^{-1})^*(LM^{-1}) = (M^{-1})^*(L^*L)M^{-1} = (M^*)^{-1}M^2M^{-1} = M^{-1}M = I.$$

Dakle, $L'_o = LM^{-1}$ je ortogonalan, $L'_s = M$ je simetričan i $L = LM^{-1} \cdot M$. Na potpuno isti način dobija se razlaganje $L_o = N^{-1}L$, $L_s = N$ gde je sad N levi modul operatora L. Treba dokazati još jedinstvenost. Ako je $L = L_s \circ L_o = \bar{L}_s \circ \bar{L}_o$, tada je $\bar{L}_s^{-1} \circ L_s = \bar{L}_o \circ L_o^{-1}$ nenegativan, simetričan i ortogonalan automorfizam, odakle sledi da su mu sve sopstvene vrednosti jednake 1 i on je jednak I, tj. $\bar{L}_s = L_s$, $\bar{L}_o = L_o$. ∎

Primedbe i posledice. (1) Levi i desni modul automorfizma L ne moraju biti jednaki, ali su medjusobno konjugovani. Naime, iz $L^*L = M^2$ sledi $L^* = M^2L^{-1}$ i $N^2 = LL^* = LM^2L^{-1}$. To znači da M^2 i N^2, a zato i njihovi koreni M i N imaju iste sopstvene vrednosti.

(2) Teorema se može dokazati za proizvoljni operator L, a ne samo za automorfizam. Medjutim, u opštem slučaju gubi se jedinstvenost faznog tj. ortogonalnog faktora, dok je modul tj. nenegativni simetrični faktor i dalje jednoznačno odredjen. Pošto je on sad nenegativan a ne pozitivan, ne može se koristiti njegov inverz, što komplikuje dokaz, koji izlazi izvan okvira ove knjige.

(3) Svaki automorfizam euklidskog prostora je kompozicija izometrije i rastezanja (skaliranja duž osa) u ortonormiranoj bazi.

(4) Ovi rezultati se mogu izložiti i u matričnoj formi. Svaka regularna matrica se jednoznačno predstavlja kao proizvod jedne ortogonalne i jedne pozitivno definitne simetrične matrice.

(5) Analogan rezultat važi u slučaju osnovnog polja $\mathbb{C}$ u unitarnim prostorima, samo treba pojam "ortogonalan" zameniti sa "unitaran", a pojam "simetričan" sa "ermitski".

(6) Polarno razlaganje se može shvatiti kao uopštenje uobičajenog razlaganja kompleksnog broja $z = |z| \cdot \exp(i\varphi)$, odakle potiče terminologija "modul", "fazni faktor", "polarno razlaganje".

(Chapter head:)Neka važna uopštenja
(Chapter head:)

Teorija euklidskih prostora predstavlja teorijsku podlogu naše "obične" euklidske geometrije. Nameće se pitanje da li se s drugim osnovnim poljem skalara, umesto polja $\mathbb{R}$, može izgraditi neka teorija vektorskih prostora i njima odgovarajuća geometrija. Osnovu za to i dalje predstavlja skalarni proizvod. Definicija euklidskog prostora nad proizvoljnim poljem ne prolazi: mi možemo definisati skalarni proizvod kao bilinearnu simetričnu funkciju na V, ali problemi nastaju kod pozitivne definitnosti, u kojoj je potrebna uredjenost osnovnog polja. Setimo se da je pozitivna definitnost dovela do osnovnih posledica geometrijskog karaktera u vezi sa dužinama i uglovima. Zbog toga je očigledno da svako uopštenje pojma euklidskog prostora mora dovesti do gubitka nekih standardnih geometrijskih svojstava. Skalarni proizvod i dalje predstavlja osnovu izgradnje geometrije. Ovde ćemo ukratko opisati dva slučaja takvih uopštenja, značajnih za fiziku. Prvo nastaje kada odustanemo od pozitivne definitnosti skalarnog proizvoda, a drugo - kada umesto polja $\mathbb{R}$ posmatramo polje kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$.

Prostor Minkovskog

Neka je V n-dimenzionalni vektorski prostor nad poljem $\mathbb{R}$, a $(-,-)$ simetrična bilinearna funkcija na V. Tada ona ima jednoznačno odredjenu signaturu (p,q), pri čemu je $p+q=r$ rang naše funkcije. Možemo smatrati da smo izabrali bazu $e=(e_1,\dots,e_n)$ u kojoj ona ima kanonski oblik

$$x_1y_1+\dots+x_py_p-x_{p+1}y_{+1}-\dots-x_ry_r$$

te smatrati da je $V=\mathbb{R}^n$. Odgovarajuća kvadratna funkcija

$$x_1^2+\dots+x_p^2-x_{p+1}^2-\dots-x_r^2$$

treba da igra ulogu kvadrata dužine u našoj geometriji. Ukoliko je $r<n$, postojaće čitav potprostor $W=\mathcal{L}(e_{r+1},\dots,e_n)$ čije su jednačine

$$x_1=\dots=x_r=0,$$

u kojem su svi vektori dužine 0 i na kojem je skalarni proizvod trivijalan:

$$(u,v)=0 \text{ za } \forall u,v\in W.$$

Taj potprostor nema sadržajnu geometriju, pa možemo odmah smatrati da je $r=n$, tj. da skalarni proizvod ima maksimalan rang (kažemo još da je nedegenerisan). Medjutim, i tada se mogu javiti vektori dužine 0, tzv. *izotropni vektori*, koji čine konus

$$x_1^2+\dots+x_p^2-x_{p+1}^2-\dots-x_n^2=0$$

Ovakvi prostori nazivaju se ponekad *pseudoeuklidski*. Jedan prostor sa takvom metričkom formom ima važnu ulogu u fizici. Evolucija fizičkih procesa opisuje se pomoću četiri podatka: tri prostorne koordinate i vremena. Zbog toga je $\mathbb{R}^4$ osnovni skup u kojem se "geometrijski" predstavljaju fizički procesi. U **specijalnoj teoriji relativnosti**, koja opisuje dinamičke pojave pri velikim relativnim brzinama kretanja, javlja se potreba uvodjenja jedne pseudoeuklidske metričke forme sa signaturom $(3,1)$, oblika

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2-c^2x_4^2$$

pri čemu znak $-$ stoji ispred vremenske koordinate i treba da ukaže na osoben položaj vremena u našem četvorodimenzionalnom prostoru-vremenu, a c je realna konstanta (brzina svetlosti). Pseudoeuklidski prostor $\mathbb{R}^4$ sa ovom metričkom formom, tj. skalarnim proizvodom, naziva se *prostor Minkovskog* ili prostor specijalne teorije relativnosti. Ako koordinatni početak $O=(0,0,0,0)$

predstavlja položaj posmatrača u datom trenutku vremena, njegovo kretanje u prostoru opisuje se linijom koja polazi iz O, tzv. *svetskom linijom.* Konus izotropnih vektora

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - c^2 x_4^2 = 0$$

predstavlja kretanje svetlosti čiji je izvor kod posmatrača. Taj konus deli prostor na dva dela: "unutrašnjost" i "spoljašnjost". Sve svetske linije naše tačke moraju da budu u unutrašnjosti konusa. Prostorno-vremenske tačke koje se nalaze u spoljašnjosti su nedostižne za posmatrača: nikakvom evolucijom on ne može dospeti u njih, jer bi mu za to bila potrebna brzina veća od brzine svetlosti. Geometrija prostora Minkovskog se umnogome razlikuje od uobičajene euklidske geometrije.

Unitarna geometrija

Za matematiku, a i za fiziku važna teorija se dobija kada, umesto nad poljem $\mathbb{R}$, pokušamo da zasnujemo "euklidsku" geometriju nad poljem kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$. Već smo se sreli s potrebom da predjemo u polje $\mathbb{C}$ kod izučavanja strukture linearnih operatora i rešavali to kompleksifikacijom polaznog vektorskog prostora i operatora.

Neka je V dati kompleksni vektorski prostor. Ako pokušamo da na V uvedemo skalarni proizvod kao bilinearnu simetričnu funkciju maksimalnog ranga, tada se svaka takva funkcija svodi na oblik

$$x_1^2 + \ldots + x_n^2,$$

uzima kompleksne vrednosti i ima izotropne vektore. Mi želimo da pomoću te metričke forme dobijemo geometriju sličnu euklidskoj, a posebno da dužina vektora bude definisan realni broj. Zato metrička forma mora zadovoljavati neku zamenu za pozitivnu definitnost, koja će garantovati da izotropnih vektora nema. To se može postići, ali se moramo odreći bilinearnosti našeg skalarnog proizvoda. Naše uslove bi zadovoljila metrička forma

$$F(x) = |x_1|^2 + \ldots + |x_n|^2$$

gde se pojavljuju moduli kompleksnih brojeva x_i. Tada je $F(x) \in \mathbb{R}$, $F(x) \geq 0$ i $F(x) = 0 \Leftrightarrow x = o$. Medjutim, to nije kvadratna forma u starom smislu reči: ona nije nastala iz bilinearne forme, već iz jedne funkcije veoma bliske bilinearnoj. Naime, $F(x) = B(x, x)$, pri čemu je

$$B(x, y) = x_1 \overline{y_1} + \ldots + x_n \overline{y_n},$$

a označava kompleksnu konjugaciju. Ova funkcija $B : V \times V \to \mathbb{C}$ ipak nije tako loša - aditivna je po oba argumenta, homogena po prvom, a po drugom "polovično" homogena:

$$B(x, \lambda y) = \bar{\lambda} \cdot B(x, y).$$

Ovakve forme se zbog toga nazivaju $1\frac{1}{2}$-*linearnim* ili *seskvilinearnim* (lat. *sesqui* - jedan i po).

Definicija. Neka je V kompleksni vektorski prostor. Preslikavanje $B : V \times V \to \mathbb{C}$ je seskvilinearna funkcija na V ako je linearno po prvom argumentu, tj.

$$B(\lambda u + \mu v, w) = \lambda \cdot B(u, w) + \mu \cdot B(v, w),$$

a aditivno i poluhomogeno po drugom argumentu, tj.

$$B(u, v + w) = B(u, v) + B(u, w);\ B(u, \lambda v) = \bar{\lambda} \cdot B(u, v),$$

pri čemu su $u, v, w \in V$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

Za seskvilinearne funkcije na kompleksnom vektorskom prostoru može se razviti potpuno paralelna teorija kao za bilinearne funkcije na proizvoljnom vektorskom prostoru. Posebno, koordinatni zapis seskvilinearne funkcije, tj. seskvilinearna forma je

$$B(u, v) = x^T \cdot A \cdot \bar{y} = \sum_{i,j} a_{ij} x_i \overline{y_j},$$

pri čemu su x i y kolone koordinata vektora u i v, a $A \in \mathcal{M}(n, \mathbb{C})$ (kompleksna) matrica forme B. I ovde postoji korespondencija izmedju matrica i formi i definiše se rang forme kao rang odgovarajuće matrice. Simetričnost bilinearne forme se ovde zamenjuje nešto drugačijim pojmom.

Definicija. Seskvilinearna funkcija B na V je *ermitska* ako je, za svaka dva vektora $u, v \in V$, $B(v, u) = \overline{B(u, v)}$ (kompleksna konjugacija).

Analogno simetričnim bilinearnim funkcijama, i ovde postoji matrična karakterizacija.

Tvrdjenje-definicija. Seskvilinearna funkcija je ermitska $\Leftrightarrow$ njena matrica u nekoj (a onda svakoj) bazi je *ermitska*, tj. zadovoljava $\bar{A}^T = A$. ∎

Ermitska seskvilinearna funkcija omogućuje da zadamo jednu kvadratnu realnu funkciju $F : V \to \mathbb{R}$ jer je $F(u) = B(u, u) = \overline{B(u, u)} \in \mathbb{R}$. Ovo svojstvo je polazna tačka za geometriju na kompleksnom vektorskom prostoru, analognu euklidskoj geometriji.

Definicija. Kompleksni vektorski prostor V, zajedno sa ermitskom seskvilinearnom funkcijom maksimalnog ranga $(-, -)$, naziva se *unitarni vektorski prostor*, a sama funkcija $(-, -)$ *skalarni proizvod* na V.

I ovde, kao i kod euklidskih prostora, skalarni proizvod omogućuje da definišemo osnovne geometrijske pojmove — dužine vektora i uglove izmedju njih. Norma vektora je, kao i pre, $\|v\| = \sqrt{(v, v)}$ i to je jedan negativan realan broj koji je jednak 0 ako i samo ako je v nula-vektor. Kao i pre, norma jednoznačno odredjuje skalarni proizvod, samo je formula polarizacije nešto drugačija. Naime,

$$\begin{aligned}
\|u + v\|^2 &= (u + v, u + v) = \\
&= (u, u) + (u, v) + (v, u) + (v, v) = \|u\|^2 + \|v\|^2 + (u, v) + \overline{(u, v)}, \\
\|u + iv\|^2 &= (u + iv, u + iv) = \\
&= (u, u) - i(u, v) + i(v, u) + (v, v) = \|u\|^2 + \|v\|^2 - i(u, v) + i\overline{(u, v)},
\end{aligned}$$

odakle je

$$
\begin{aligned}
Re(u,v) &= \frac{1}{2}\left[(u,v)+\overline{(u,v)}\right] = \frac{1}{2}\left(\|u+v\|^2-\|u\|^2-\|v\|^2\right),\\
Im(u,v) &= \frac{1}{2i}\left[(u,v)-\overline{(u,v)}\right] = \frac{1}{2}\left(\|u+iv\|^2-\|u\|^2-\|v\|^2\right),
\end{aligned}
$$

pa se lako dobija ceo skalarni proizvod (u,v):

$$
(u,v) = \frac{1}{2}\left(\|u+v\|^2-\|u\|^2-\|v\|^2\right) + \frac{i}{2}\left(\|u+iv\|^2-\|u\|^2-\|v\|^2\right).
$$

Nejednakost CS, nejednakost trougla, kao i ostala svojstva norme važe i ovde, u unitarnom prostoru, samo što se ovde radi o modulu kompleksnog broja. Na već poznati način definiše se i ugao, pojam ortogonalnosti, ortonormirane baze. Pitagorina teorema, teorema o ortogonalnom komplementu, Gram-Šmitov postupak ortogonalizacije — sve to važi u unitarnim prostorima i dokazuje se na isti način kao u euklidskim. Specifičnost se javlja prilikom zamene baza. Ako je e ortonormirana baza, $C \in GL(n,\mathbb{C})$ regularna matrica i $e' = e \cdot C$ nova baza, tada je e' ortonormirana $\Leftrightarrow$ matrica C je *unitarna* tj. $C^{-1} = \bar{C}^T$. Sve unitarne matrice formiraju novu grupu - *unitarnu grupu* $U(n)$. U njoj postoji kao podgrupa *specijalna unitarna grupa* $SU(n) = \{C \in U(n) \,|\det C = 1\}$. Te grupe, kao i ortogonalne, odnosno specijalne ortogonalne grupe imaju važnu ulogu u matematici.

Klasifikacija operatora u unitarnim prostorima mora, u odnosu na odgovarajuću klasifikaciju u euklidskim prostorima, takodje pretrpeti izmene. I ovde se definiše adjungovani operator jednakošću $(Lu,v) = (u,L^*v)$ i samoadjungovani operator jednakošću $L^* = L$. Samoadjungovani operatori ovde nose naziv *ermitski* i postoji odgovarajuća analogna karakterizacija: operator je ermitski $\Leftrightarrow$ njegova matrica u svakoj ortonormiranoj bazi je ermitska. Za ermitske operatore važi takodje fundamentalna teorema o realnosti spektra.

Operatori koji prevode ortonormirane baze u ortonormirane i ovde se karakterišu svojstvom $(Lu,Lv) = (u,v)$ ili svojstvom $L \circ L^* = I$ i nazivaju unitarnim operatorima. Kao i u euklidskom slučaju, unitarni operatori i zamene ortonormiranih baza su dva aspekta — aktivni i pasivni — jedne iste geometrijske situacije, čija je algebarska sadržina unitarnost matrica. Postoji i odgovarajuća karakterizacija: operator je unitaran $\Leftrightarrow$ njegova matrica u svakoj ortonormiranoj bazi je unitarna.

I u unitarnoj geometriji važi teorema o polarnom razlaganju operatora: svaki se operator razlaže u kompoziciju unitarnog i nenegativnog ermitskog operatora.

Kao što vidimo, teorija unitarnih (kompleksnih) vektorskih prostora je skoro potpuno paralelna teoriji euklidskih (realnih) vektorskih prostora. Zbog toga se ona u mnogim udžbenicima i izlaže paralelno, odnosno istovremeno s euklidskom. Ovde nije primenjen taj pristup zbog veće geometričnosti euklidske teorije koja olakšava razumevanje osnovnih činjenica. Jednom savladana euklidska teorija omogućiće vrlo brzo razumevanje unitarne teorije, onda kada to bude potrebno.