Ortogonalne transformacije vektorskog euklidskog prostora

Linearni operatori su prirodna preslikavanja vektorskih prostora koja "poštuju" njihovu strukturu. Ali kada se vektorskom prostoru doda euklidska struktura, prirodna klasa preslikavanja koja se s njom u vezi pojavljuje mora da bude manja. To su samo ona linearna preslikavanja koja "poštuju" skalarni proizvod ili rastojanje. Opišimo ih. Neka je V euklidski prostor i $L : V \to V$ endomorfizam.

Tvrdjenje. Sledeća svojstva su ekvivalentna:

(1) $(u, v) = (Lu, Lv)$ za svaka dva vektora $u, v \in V$;

(2) $\|u\| = \|Lu\|$ za svaki vektor $u \in V$;

(3) postoji ortonormirana baza e takva da je Le ortonormirana baza;

(4) za svaku ortonormiranu bazu e, baza Le je ortonormirana;

(5) postoji ortonormirana baza e u kojoj je matrica $[L]_e$ ortogonalna;

(6) u svakoj ortonormiranoj bazi e matrica $[L]_e$ je ortogonalna.

Dokaz. (1)⇒(2) $\|u\|^2 = (u, u) = (Lu, Lu) = \|Lu\|^2$.

(2)⇒(1) Po formuli polarizacije $(u, v) = \frac{1}{2}\left(\|u + v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2\right) = \frac{1}{2}\left(\|L(u + v)\|^2 - \|Lu\|^2 - \|Lv\|^2\right) = \frac{1}{2}\left(\|Lu + Lv\|^2 - \|Lu\|^2 - \|Lv\|^2\right) = (Lu, Lv)$.

(1) i (2)⇒(4) Pokažimo prvo da L prevodi bazu u bazu, tj. da je L izomorfizam. Imamo $Lu = o \Rightarrow \|Lu\| = 0 \Rightarrow \|u\| = \|Lu\| = 0 \Rightarrow u = o$, tj. L je monomorfizam. Ali pošto je L endomorfizam, L mora da bude i "na". Ako je sada e ortonormirana baza, Le je baza. Ali $(Le_i, Le_j) = (e_i, e_j) = \delta_{ij}$ (Kronekerov delta-simbol), pa je Le ortonormirana.

(4)⇒(3) je očigledno.

(3)⇒(1) Naime, ako je e baza i $u = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n$, onda je $Lu = x_1Le_1 + \cdots + x_nLe_n$, tj. koordinate vektora Lu u bazi Le su iste kao i koordinate vektora u u bazi e. Pošto su obe baze ortonormirane, onda je, za proizvoljni vektor $v = y_1e_1 + \cdots + y_ne_n$,

$$(Lu, Lv) = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n = (u, v),$$

pri čemu je leva strana izračunata u bazi Le, a desna u bazi e.

(3)⇔(5) i (4)⇔(6) su reformulacije. Naime, izomorfizam L se može interpretirati i kao zamena baze i tada je matrica operatora $[L]_e = C = C_{e \to Le}$ u stvari matrica prelaza iz baze e u bazu Le. Pri tom, ako je e ortonormirana, onda je Le ortonormirana⇔matrica C je ortogonalna. To dokazuje obe ekvivalencije. ∎

Definicija. Endomorfizam $L \in \operatorname{End} V$ koji zadovoljava neki od uslova prethodnog tvrdjenja (a zato i sve) naziva se *ortogonalna transformacija* ili (*vektorska*) *izometrija* prostora V. Skup svih ortogonalnih transformacija prostora V obeležavamo sa $O(V)$.

Svojstva (1) odnosno (2) se mogu koristiti za definisanje izometrijskog preslikavanja u opštijoj situaciji. Ako su V i W dva euklidska prostora, linearno preslikavanje $L : V \to W$ je *izometrija* ukoliko je $(u, v) = (Lu, Lv)$ za svaka dva vektora $u, v \in V$. Na osnovu dokaza tvrdjenja 1 odmah se vidi da L zadovoljava i uslov (2) (i obrnuto), kao i da L mora da bude monomorfizam. Drugim rečima, L je izomorfizam $V \cong \operatorname{Im} V \subset W$, koji čuva rastojanja i dužine. Može se zato smatrati da je $V \subset W$, pa ta prividno opštija definicija ne donosi ništa novo. Zato je dovoljno posmatrati samo endomorfizme.

Navedimo dva jednostavna korisna svojstva sopstvenih vrednosti i vektora ovakvih operatora.

Tvrdjenje. Ako je L ortogonalan endomorfizam, tada: (1) jedine realne sopstvene vrednosti mogu da budu 1 i -1; (2) sopstveni vektori koji odgovaraju različitim sopstvenim vrednostima su ortogonalni.

Dokaz. (1) $0 \neq (v,v) = (Lv, Lv) = (\lambda v, \lambda v) = \lambda^2 (v,v) \Rightarrow \lambda^2 = 1$.

(2) Ako je $Lv_i = \lambda_i v_i, \lambda_1 \neq \lambda_2$, tada je $\lambda_1 \lambda_2 \neq 1$ i $(v_1, v_2) = (Lv_1, Lv_2) = \lambda_1 \lambda_2 (v_1, v_2)$, odakle sledi da je $(v_1, v_2) = 0$. ∎

Navedeno tvrdjenje važi i na matričnom jeziku — za ortogonalne matrice. Primetimo da, na osnovu svojstva 1(4), svaka ortogonalna transformacija prostora prevodi neku bazu opet u bazu. Zbog toga je svaka ortogonalna transformacija nužno automorfizam prostora, tj. element grupe $GL(V)$.

Tvrdjenje. $O(V)$ je podgrupa u $GL(V)$. Izomorfizam $GL(V) \xrightarrow{\cong} GL(n, \mathbb{R})$ odredjen izborom baze u V definiše izomorfizam grupa $O(V) \xrightarrow{\cong} O(n, \mathbb{R})$.

Dokaz. Ovo je direktna posledica svojstva 1(6). ∎

Definicija. Grupa $O(V)$ se, kao i kod matrica, naziva *ortogonalna grupa* euklidskog prostora V.

Svaki $L \in O(V)$ prevodi baze iz $\mathcal{B}_o$ opet u ortonormirane baze. Šta se dešava sa orijentacijom baze? Ako je $L \in O(V)$ i $e \in \mathcal{B}_o$, tada baza $Le \in \mathcal{B}_o$ ne mora da ima istu orijentaciju kao e. Naime, ako je $C = [L]_e = C_{e \to Le}$, tada je $Le \sim e \Leftrightarrow \det C > 0$. Svojstvo da L ne menja orijentaciju baze u stvari ne zavisi u stvari od izbora te baze.

Tvrdjenje. Sledeća svojstva su ekvivalentna:

(1) $Le \sim e$ za neku ortonormiranu bazu e; (2) $Le \sim e$ za svaku ortonormiranu bazu e.

Skup $SO(V)$ svih L koji ne menjaju orijentaciju baza je podgrupa u $O(V)$ koja je u koordinatnom izomorfizmu $GL(V) \cong GL(n)$ izomorfna podgrupi

$$\begin{aligned} SO(n) &= O(n) \cap GL^+(n) = \{ A \in O(n) \,|\det A > 0 \} = \\ &= O(n) \cap SL(n) = \{ A \in O(n) \,|\det A = 1 \} \end{aligned}$$

u $GL(n)$. Podgrupa $SO(V)$ je indeksa 2 u $O(V)$. Ako je $S \in O(V) \backslash SO(V)$ proizvoljan, tada se svaki automorfizam $L \in O(V) \backslash SO(V)$ može jednoznačno predstaviti kao kompozicija $L = M \circ S$ za neki $M \in SO(V)$ i isto tako $L = S \circ M'$ za neki $M' \in SO(V)$.

Dokaz. Očigledno da (2) $\Rightarrow$ (1). Obrnuto, neka je $e \sim Le$, A matrica L u bazi e, e' neka druga ortonormirana baza, A' matrica L u toj bazi i $C = C_{e \to e'}$ matrica prelaza. Tada je $\det A > 0$ i $A' = C^{-1} A C$, pa je $\det A' = \det C^{-1} \cdot \det A \cdot \det C = \det A > 0$. Ostala tvrdjenja su direktna posledica koordinatnog izomorfizma i strukture grupe ortogonalnih matrica, ali se mogu i direktno dokazati. Ako je $S \in O(V) \backslash SO(V)$, tada $\det S^{-1} = \det S = -1$ i za svaki $L \in O(V) \backslash SO(V)$, $\det L \circ S^{-1} = (-1)(-1) = 1$, pa je $M = L \circ S^{-1} \in SO(V)$. Jednoznačnost sledi neposredno, a na isti način i druga reprezentacija. ∎

Definicija. Grupa $SO(V)$ se, kao i kod matrica, naziva *specijalna ortogonalna grupa* euklidskog vektorskog prostora V. Automorfizmi iz $SO(V)$ nazivaju se *svojstveni automorfizmi*, za razliku od *nesvojstvenih automorfizama* iz $O(V)\backslash SO(V)$.

Vidimo da, kao što $O(V)$ dejstvuje na prirodni skup $\mathcal{B}_o$ baza euklidskog prostora (ortonormiranih baza), tako $SO(V)$ dejstvuje na prirodnom skupu $\mathcal{B}_o^+$ baza orijentisanog euklidskog prostora (pozitivno orijentisanih ortonormiranih baza), a svaki operator iz $O(V)\backslash SO(V)$ menja orijentaciju.

Primeri. (1) Neka je $V = \mathbb{R}$ jednodimenzionalni vektorski prostor. Tada je $O(V) = O(1) = \{1, -1\}$ dvoelementna grupa koja se sastoji od identične izometrije i simetrije u odnosu na o, a $SO(1) = \{1\}$ je trivijalna podgrupa.

(2) Neka je $V = \mathbb{R}^2$ dvodimenzionalni $\mathbb{R}$-vektorski prostor, tj. ravan. Struktura grupe $O(2) = O(2, \mathbb{R})$ je poznata: ona se sastoji iz dve familije matrica

$$A_\varphi^+ = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \text{ i } A_\varphi^- = \begin{pmatrix} -\cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix},$$

pri čemu je $\varphi \in [0, 2\pi)$. Prva familija daje podgrupu $SO(2)$, a druga njen komplement $O(2)\backslash SO(2)$. Pri tom je svaka matrica S iz tog komplementa simetrična, pa je čak $S^2 = SS^T = E$ (to se naziva *involutivnost*). Sa geometrijskog stanovišta, svojstveni automorfizmi iz $SO(V)$ su rotacije za ugao φ, bez sopstvenih vrednosti i vektora. Nesvojstveni automorfizmi imaju dve sopstvene vrednosti, 1 i -1, pa su dijagonalizabilni i sve odgovarajuće matrice iz $O(2)\backslash SO(2)$ su medjusobno slične. Zato, sa geometrijskog gledišta, postoji suštinski samo jedan takav automorfizam ravni V, koji u nekoj ortonormiranoj bazi ima matricu $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ i naziva se simetrija ravni (u odnosu na drugi bazni vektor). Zaključujemo da je svaki svojstveni automorfizam ravni rotacija (i u suštini zavisi od ugla rotacije), a nesvojstveni — simetrija (i odredjen je jednim vektorom). Klase konjugacije u $SO(2)$ su parametrizovane jednim realnim parametrom, dok se $O(2)\backslash SO(2)$ sastoji od jedne jedine klase sličnosti.

(3) Neka je $V = \mathbb{R}^3$ trodimenzionalni $\mathbb{R}$-vektorski prostor. Struktura grupe $O(3) = O(3, \mathbb{R})$ je složenija nego grupe $O(2)$. Pošto je karakteristični polinom svakog $L \in O(V)$ stepena 3, L ima bar jednu realnu sopstvenu vrednost $\lambda = \pm 1$. Razmotrimo dva slučaja.

a) $L \in SO(V)$. Dokažimo da tada L mora da ima sopstvenu vrednost 1. Ako je nema, tada L ima sopstvenu vrednost $\lambda = -1$. Neka je v odgovarajući sopstveni vektor. Ortogonalni komplement $W = \mathcal{L}(v)^\perp$ je sopstveni potprostor operatora L, koji definiše automorfizam ravni $L|_W : W \to W$. Pri tom je $\det L = -\det L|_W$, pa je $L|_W$ nesvojstveni automorfizam. Zato $L|_W$, a s njim i L ima sopstvenu vrednost 1, što je kontradikcija. Neka je, dakle, $\lambda = 1$ sopstvena vrednost sa odgovarajućim sopstvenim vektorom v i $W = \mathcal{L}(v)^\perp$. Tada je $L|_W$ svojstveni automorfizam ravni, dakle rotacija ravni W, a L je rotacija prostora V oko ose $\mathcal{L}(v)$.

b) $L \in O(V)\backslash SO(V)$. Dokažimo da L ima sopstvenu vrednost -1. Ako je nema, tada L ima sopstvenu vrednost $\lambda = 1$. Kao i malopre, pokazujemo da postoji ravan W takva da je $L|_W$ nesvojstveni automorfizam. Zato $L|_W$, a s njim i L ima sopstvenu vrednost -1, što je kontradikcija. Neka je, dakle, $\lambda = -1$ sopstvena vrednost sa odgovarajućim sopstvenim vektorom v i $W = \mathcal{L}(v)^{\perp}$. Tada je $L|_W$ svojstveni automorfizam ravni, tj. rotacija ravni W, a L kompozicija rotacije prostora oko $\mathcal{L}(v)$ i simetrije u odnosu na W.

Zaključujemo da je svaki svojstveni automorfizam prostora rotacija oko ose (i odredjen je baznim vektorom ose i uglom rotacije), a nesvojstveni — kompozicija rotacije i ravanske simetrije u odnosu na ravan ortogonalnu osi rotacije (i takodje je odredjen vektorom ose i uglom rotacije). Klase sličnosti u $SO(3)$, kao i u $O(3)\backslash SO(3)$ su parametrizovane jednim realnim parametrom. U suštini, prethodnim rasudjivanjima dokazali smo klasičnu teoremu o strukturi $SO(3)$.

Tvrdjenje (Ojlerova teorema). Za svaki $L \in SO(\mathbb{R}^3)$ postoji ortonormirana baza e u kojoj je

$$[L]_e = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Drugim rečima, rotacije su jedine svojstvene izometrije prostora $\mathbb{R}^3$. ∎

Leonard Ojler rodjen je 1707. u Bazelu (Švajcarska), u svešteničkoj porodici. Studirao je u Bazelu teologiju i klasične jezike, ali je imao sreću da mu matematiku, koju je takodje slušao, predaje Johan Bernuli, Lajbnicov učenik. Primetivši Ojlerovu obdarenost, Bernuli ga je dodatno podučavao i formirao u matematičara. Godine 1725, neposredno pred smrt, ruski car Petar Veliki otvorio je Akademiju nauka u Sankt-Petersburgu, odakle je 1727. godine Ojler dobio poziv da radi. Tu on ostaje do 1741. i postaje, po svedočenju savremenika, najveći svetski matematičar. Zbog nemirne situacije u Rusiji Ojler prelazi u Berlin, ali se 1766, posle stupanja na presto Katarine II Velike (1762) i sredjivanja prilika u Rusiji, vraća u Petersburg. Poslednjih sedamnaest godina svog života bio je skoro slep, ali je radio neverovatno mnogo. Samo u toku 1777. godine je, uz pomoć sekretara i učenika, pripremio za štampu oko sto radova. Umro je 18. septembra 1783. i ostavio preko 800 dela, od kojih neka u 2-3 toma. Njegove radove nisu stizali da štampaju za života, pa je jednom u šali rekao da će, kad umre, ostaviti časopisu Akademije radove za štampu za sledećih dvadeset godina. Tu je ipak pogrešio: njegove radove su štampali posmrtno tokom osamdeset godina. Njegovi najveći radovi su iz oblasti matematičke analize, ali dva njegova rada smatraju se prvim radovima dveju savremenih grana matematike. Jedan je bio posvećen u to doba čuvenom problemu kenigsberških mostova. U gradu Kenigsbergu (*Königsberg*, za vreme sovjetske Rusije Kalinjingrad) dva ostrva sa obalama reke na odredjen način povezuje sedam mostova. Može li se preći svih sedam mostova u jednoj šetnji tako da se preko svakog mosta predje tačno jedanput? Ojler je rešio ovaj problem, generalisao ga i time označio početak danas veoma značajne **teorije grafova**.

Adjungovani operator. Simetrični operatori

Definicija. Neka je V euklidski prostor, a $L : V \to V$ njegov endomorfizam. Kažemo da je endomorfizam $M : V \to V$ *adjungovan* (ili *konjugo-*

van, ili *spregnut*) sa endomorfizmom L ako je, za svaka dva vektora $u, v \in V$, $(Mu, v) = (u, Lv)$.

Tvrdjenje. Adjungovani endomorfizam postoji, jednoznačno je odredjen i obeležava se sa L^*. Ako je u nekoj ortonormiranoj bazi e matrica operatora $[L]_e = A$, tada je matrica $[L^*]_e = A^T$.

Dokaz se bazira na očiglednoj matričnoj formuli $x^T(Ay) = (A^T x)^T y$. Neka je e proizvoljna ortonormirana baza, A matrica operatora L u njoj i L^* operator koji odgovara matrici A^T. Tada navedena formula dokazuje da je $(u, Lv) = (L^*u, v)$ za bilo koja dva vektora u, v sa koordinatama x, y respektivno. ∎

Tvrdjenje. (1) $(L+M)^* = L^* + M^*$, (2) $(L \circ M)^* = M^* \circ L^*$, (3) $I^* = I$, (4) $(L^*)^{-1} = (L^{-1})^*$, (5) $(L^*)^* = L$.

Dokaz. Navedena svojstva se mogu dokazati korišćenjem definicije i jedinstvenosti adjungovanog operatora.

(1) $((L^* + M^*)u, v) = (L^*u + M^*u, v) = (L^*u, v) + (M^*u, v) = (u, Lv) + (u, Mv) = (u, (L+M)v)$, odakle sledi tražena jednakost.

(2) $(M^* \circ L^*(u), v) = (L^*u, Mv) = (u, L \circ M(v))$, odakle sledi tražena jednakost.

(3) $(I^*u, v) = (u, Iv) = (u, v) = (Iu, v)$, odakle je $I^* = I$.

(4) $(L^{-1})^* \circ L^* = (L \circ L^{-1})^* = I^* = I$, odakle sledi da je $(L^{-1})^* = (L^*)^{-1}$.

(5) $(L^{**}u, v) = (u, L^*v) = (L^*v, u) = (v, Lu) = (Lu, v)$, odakle je $L^{**} = L$. ∎

Pomoću adjungovanog operatora vrlo se jednostavno formuliše ortogonalnost: endomorfizam L je ortogonalan $\Leftrightarrow$ važi jedan od uslova (a zato i svi):

$$L \circ L^* = I,\ L^* \circ L = I,\ L^* = L^{-1}.$$

Postoji još jedna zanimljiva klasa operatora - operatori kod kojih je $L^* = L$.

Definicija. Linearni operator $L : V \to W$ je *simetričan* ili *samoadjungovan* ako je $L^* = L$.

Tvrdjenje. Sledeća svojstva su ekvivalentna:

(1) Endomorfizam L je simetričan;

(2) $(u, Lv) = (Lu, v)$;

(3) u nekoj ortonormiranoj bazi matrica $[L]$ je simetrična;

(4) u svakoj ortonormiranoj bazi ta matrica je simetrična.

Dokaz. (1) $\Rightarrow$ (2) je očigledno na osnovu definicije adjungovanog operatora.

(2) $\Rightarrow$ (4). Neka je $e = (e_1, \ldots, e_n)$ proizvoljna ortonormirana baza i matrica $[L]_e = (a_{ij})$. Na osnovu definicije matrice $[L]$, $a_{ij} = i$-ta koordinata vektora $L(e_j) = (e_i, Le_j) = (Le_i, e_j) = j$-ta koordinata vektora $L(e_i) = a_{ji}$, tj. matrica je simetrična.

(4) $\Rightarrow$ (3) je očigledno.

(3) $\Rightarrow$ (1). Neka je u bazi e matrica $A = (a_{ij}) = [L]_e$ simetrična, a x i y kolone koordinata vektora u i v respektivno. Sada je

$$\begin{aligned} (u, Lv) &= \left(\sum x_i e_i, L\left(\sum y_j e_j\right)\right) = \ldots = \\ &= \sum x_i y_j \cdot (e_i, Le_j) = \sum a_{ij} x_i y_j = \sum a_{ji} x_i y_j = \ldots = (Lu, v), \end{aligned}$$

odakle, zbog jedinstvenosti adjungovanog operatora, sledi da je $L^* = L$. ∎

Pored koordinatnog zapisa kvadratnih funkcija, simetrične matrice na euklidskom prostoru imaju i drugu ulogu: to su matrice simetričnih operatora u ortonormiranim bazama. Ako je dat simetrični operator L, tada on definiše simetričnu bilinearnu funkciju (Lu, v), $u, v \in \mathbb{R}$ i odgovarajuću kvadratnu funkciju (Lu, u). Pokazaćemo da važi i obrnuto.

Tvrdjenje. Za svaku kvadratnu funkciju $F : V \to \mathbb{R}$ postoji jedinstveni simetrični linearni operator $L : V \to V$ takav da je $(Lu, u) = F(u)$ za sve $u \in V$.

Dokaz. Neka je e ortonormirana baza, $A = [F]_e$ i $L : V \to V$ endomorfizam zadat matricom A u bazi e. Tada je A simetrična, pa je L simetričan i $(Lu, u) = \Sigma a_{ij} x_i x_j$, pri čemu je x kolona koordinata vektora u u bazi e. Ako je L' drugi operator s tim svojstvom, tada je $[F]_e = [L]_e = [L']_e$, pa je $L = L'$. ∎

Na taj način smo u euklidskom prostoru uspostavili obostrano jednoznačnu korespondenciju izmedju simetričnih bilinearnih funkcija ili kvadratnih funkcija, simetričnih linearnih operatora i simetričnih matrica. Geometrijska klasifikacija svih tih objekata u odnosu na ortogonalne transformacije (zamene ortonormiranih baza, tj. dejstvo grupe $O(V)$) je ista jer se u ovom slučaju formule za transformaciju matrica bilinearnih funkcija i operatora poklapaju, $A' = C^{-1} \cdot A \cdot C = C^T \cdot A \cdot C$, zbog ortogonalnosti matrice C.

Primetimo da simetrični operator ne može da bude nilpotentan: ako je L simetričan i nilpotentan, onda je $L = O$. Naime, ako je $L^k = O$, $v = L^{k-1}u \neq o$, $k \geq 2$, tada je $0 \neq (v, v) = (L^{k-1}u, L^{k-1}u) = (L^k u, L^{k-2}u) = 0$. Zato je $k = 1$ i $L = O$.

Razmotrimo sada pitanje kada su simetrični operatori dijagonalizabilni. Odgovor će biti pomalo neočekivan: uvek! Da bismo to ispitali, uvedimo jednu specijalniju vrstu dijagonalizabilnosti.

Definicija. Neka je L endomorfizam euklidskog prostora V. Reći ćemo da je L *dijagonalizabilan u ortonormiranoj bazi* ako postoji ortonormirana baza e takva da je $[L]_e$ dijagonalna.

Na osnovu prethodno rečenog, takav operator je obavezno simetričan.

Lema. Sopstveni vektori simetričnog operatora koji odgovaraju različitim sopstvenim vrednostima su ortogonalni.

Dokaz. Neka je $Le_1 = \lambda_1 e_1$, $Le_2 = \lambda_2 e_2$ i $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Tada je $\lambda_1(e_1, e_2) = (Le_1, e_2) = (e_1, Le_2) = \lambda_2(e_1, e_2)$, odakle sledi da je $(e_1, e_2) = 0$. ∎

Iz ove leme sledi da dijagonalizabilni simetrični operator mora da bude dijagonalizabilan i u ortonormiranoj bazi. Prema tome, dovoljno je da dokažemo da je svaki simetrični operator dijagonalizabilan.

Teorema. Simetrični operator na euklidskom prostoru ima sve sopstvene vrednosti realne i dijagonalizabilan je u ortonormiranoj bazi.

Dokaz. Neka je $L : V \to V$ endomorfizam i $L_{\mathbb{C}} : V_{\mathbb{C}} \to V_{\mathbb{C}}$ njegova kompleksifikacija ($V_{\mathbb{C}} = V + iV$, $L_{\mathbb{C}}(v_1 + iv_2) = Lv_1 + iLv_2$). Uvedimo na kompleksnom vektorskom prostoru $V_{\mathbb{C}}$ jednu vrstu skalarnog proizvoda formulom

$$(v_1 + iv_2, w_1 + iw_2) := [(v_1, w_1) + (v_2, w_2)] + i \cdot [(v_2, w_1) - (v_1, w_2)],$$

pri čemu su $v_1, v_2, w_1, w_2 \in V$, a skalarni proizvodi na desnoj strani su uobičajeni proizvodi u euklidskom prostoru V. Neposredno se dobija da za $v, w \in V_{\mathbb{C}}$ i $\lambda \in \mathbb{C}$ važi:

(a) $((\lambda v, w) = \lambda(v, w)$;

(b) $(v, \lambda w) = \bar{\lambda} \cdot (v, w)$ (homogenost po prvom i semihomogenost po drugom argumentu);

(v) $(v, v) = 0 \Leftrightarrow v = o$;

(g) $(L_{\mathbb{C}} v, v) = (v, L_{\mathbb{C}} v)$.

Prve dve jednakosti se proveravaju na osnovu definicije. Kada je reč o trećoj, $(v, v) = (v_1 + iv_2, v_1 + iv_2) = \|v_1\|^2 + \|v_2\|^2 + i \cdot [(v_1, v_2) - (v_1, v_2)] = \|v_1\|^2 + \|v_2\|^2$, pa je $(v, v) = 0 \Leftrightarrow v_1 = v_2 = o \Leftrightarrow v = o \in V_{\mathbb{C}}$. Najzad, četvrto svojstvo sledi iz simetričnosti L: $(L_{\mathbb{C}}(v_1 + iv_2), v_1 + iv_2) = (Lv_1 + iLv_2, v_1 + iv_2) = [(Lv_1, v_1) + (Lv_2, v_2)] + i \cdot [(Lv_2, v_1) - (Lv_1, v_2)] = [(v_1, Lv_1) + (v_2, Lv_2)] + i \cdot [(v_2, Lv_1) - (v_1, Lv_2)] = (v_1 + iv_2, Lv_1 + iLv_2) = (v_1 + iv_2, L_{\mathbb{C}}(v_1 + iv_2))$. Primetimo da poslednje svojstvo zavisi od L: konstruisana funkcija nije simetrična, što se vidi iz definicije. Takve funkcije na kompleksnim vektorskim prostorima opisaćemo u narednom predavanju, nazivaju se *seskvilinearne* (ili *jedan i po linearne,* lat. *sesqui* "i pola") *funkcije*, a pojavljuju se pri uvodjenju geometrije analogne euklidskoj u kompleksnim vektorskim prostorima. Setimo se da L i $L_{\mathbb{C}}$ imaju isti karakteristični polinom. Ako je $\lambda \in \mathbb{C}$ sopstvena vrednost L, tada je λ i sopstvena vrednost $L_{\mathbb{C}}$. Neka je $v \in V_{\mathbb{C}}$ odgovarajući sopstveni vektor. Tada je $\lambda \cdot (v, v) = (\lambda v, v) = (L_{\mathbb{C}} v, v) = (v, L_{\mathbb{C}} v) = (v, \lambda v) = \bar{\lambda} \cdot (v, v)$ i pošto je $(v, v) \neq 0$, mora da bude $\lambda = \bar{\lambda} \in \mathbb{R}$. Dakle, sve sopstvene vrednosti su realne. Dijagonalizabilnost L dokazujemo indukcijom po $n = \dim V$. Za $n = 1$ svaki je operator dijagonal(izabil)an. Neka je n proizvoljno, $\lambda \in \mathbb{R}$ jedna sopstvena vrednost operatora L geometrijske višestrukosti $k > 0$ i $V_1 = V_{L,\lambda_1}$ odgovarajući sopstveni potprostor dimenzije k. Na osnovu teoreme o ortogonalnom komplementu, $V = V_1 \oplus V_1^{\perp}$. Pokažimo da je $V_1^{\perp}$ invarijantan potprostor operatora L. Ako je $v \in V_1^{\perp}$ i $Lv = v_1 + v_2$, sa $v_1 \in V_1$, $v_2 \in V_1^{\perp}$, tada je $0 = (v, \lambda_1 v) = (v, Lv_1) = (Lv, v_1) = (v_1 + v_2, v_1) = (v_1, v_1) + (v_2, v_1) = \|v_1\|^2$, odakle sledi da je $v_1 = o$ i $Lv = v_2 \in V_1^{\perp}$. Neka je $L_1 = L|_{V_1^{\perp}}$ restrikcija operatora L. Operator L_1 je simetričan na prostoru dimenzije $n - k < n$. Na osnovu pretpostavke indukcije, L_1 je dijagonalizabilan, pa ima sopstvenu bazu $e'_1, \ldots, e'_{n-k}$. Dopunimo je do baze celog prostora proizvoljnom bazom $e_1, \ldots, e_k$ potprostora V_1. Tada je $e_1, \ldots, e_k, e'_1, \ldots, e'_{n-k}$ tražena sopstvena baza operatora L. ∎

Posledica. Svaka realna kvadratna forma (ili realna simetrična matrica) ima sve sopstvene vrednosti realne i može se svesti na dijagonalni oblik izometrijskom transformacijom (odnosno sprezanjem s nekom ortogonalnom matricom).