

Desanka P. Radunović

**N U M E R I Ć K E
M E T O D E**

kroz modele i primere

Beograd, 2007

Ova skripta je objavljena u okviru projekta WUS Austria CDP+ 040/2006
finansiranog od strane Austrian Cooperation

Besplatan primerak

The publishing of this script is part of the project CDP+ 040/2006 financed by
Austrian Cooperation through WUS Austria

This copy is not for sale

Sadržaj

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Aproksimacija funkcija | 1 |
| 1.1 | Srednjekvadratna aproksimacija | 2 |
| 1.2 | Metoda najmanjih kvadrata | 5 |
| 1.3 | Fourier-ova transformacija | 11 |
| 1.4 | Talasići | 18 |
| 2 | Cauchy-jevi problemi | 29 |
| 2.1 | Metode tipa Runge-Kutt-a | 33 |
| 2.2 | Prediktor-korektor metode | 38 |
| 2.3 | Stabilnost numeričkih algoritama | 41 |
| 2.4 | Aproksimativne metode | 45 |
| 3 | Granični problemi | 51 |
| 3.1 | Metoda gađanja | 52 |
| 3.2 | Metoda konačnih razlika | 56 |
| 3.3 | Metoda konačnih elemenata | 61 |
| 3.4 | Sopstvene vrednosti diferencijalnog operatora | 65 |
| 4 | Mešoviti problemi | 69 |
| 4.1 | Jednačina provođenja toplote | 69 |
| 4.2 | Talasna jednačina | 73 |

Slike

| | | |
|------|--|----|
| 1.1 | Lagrange-ova interpolacija polinomom osmog stepena | 1 |
| 1.2 | Podaci i njihova interpolacija polinomom dvadesetog stepena | 2 |
| 1.3 | Srednjekvadratna aproksimacija polinomom osmog stepena | 4 |
| 1.4 | Fitovanje pravom i kubnom parabolom | 7 |
| 1.5 | Fitovanje eksponencijalnom funkcijom | 7 |
| 1.6 | Srednjekvadratna aproksimacija tačaka kružnicom | 10 |
| 1.7 | Harmonici | 12 |
| 1.8 | Predstavljanje funkcije u vremenskom i frekvencijskom domenu | 13 |
| 1.9 | Kompresija signala u frekvencijskom domenu | 13 |
| 1.10 | Dirac-ova funkcija aproksimirana sa 5 i 100 sabiraka | 15 |
| 1.11 | Heaviside-ova funk. aproksimirana sa 5 i 100 sabiraka | 15 |
| 1.12 | Linearna funkcija aproksimirana sa 5 i 100 sabiraka | 15 |
| 1.13 | Izračunavanje diskretne Fourier-ove transformacije za dati vektor | 17 |
| 1.14 | Stacionaran ($f1$) i nestacionaran ($f2$) signal | 18 |
| 1.15 | Fourier-ov spektar stacionarnog ($f1$) i nestacionarnog ($f2$) signala | 19 |
| 1.16 | Dilatacija sinusoide i talasića | 20 |
| 1.17 | Translacija talasića | 20 |
| 1.18 | Haar-ova četvrtka i talasić | 22 |
| 1.19 | Aproksimacije linearnog splajna četvrtkom | 23 |
| 1.20 | Razlaganje signala piramidalnim algoritmom | 24 |
| 1.21 | Originalni i kompresovani signali | 25 |
| 1.22 | Daubechies Db2 funkcija skaliranja (levo) i talasić (desno) | 26 |
| 1.23 | Daubechies Db3 funkcija skaliranja (levo) i talasić (desno) | 26 |
| 2.1 | Model primenjen na početku (levo) i kraju (desno) perioda | 30 |
| 2.2 | Model primenjen na ceo period (linearna i logaritamska skala) | 30 |
| 2.3 | Logistička kriva | 32 |
| 2.4 | Kvadraturene formule primenjene u Euler-ovim metodama | 34 |
| 2.5 | Promena broja zečeva i lisica sa vremenom | 37 |
| 2.6 | Promena broja zečeva i lisica sa definisanim optimumom | 37 |
| 2.7 | Matematičko klatno | 38 |
| 2.8 | Fazna ravan matematičkog klatna | 40 |
| 2.9 | Numerički stabilna rešenja | 43 |
| 2.10 | Numerički nestabilna rešenja | 43 |

| | | |
|------|---|----|
| 2.11 | Rešenje krutog sistema određeno dvema metodama | 44 |
| 2.12 | Aproksimacije parcijalnim sumama reda | 46 |
| 3.1 | Putanja projektila i lopte | 54 |
| 3.2 | Raspodela temperature u štapu određena metodom gađanja | 56 |
| 3.3 | Uticaoj aproksimacije graničnog uslova na tačnost rešenja | 57 |
| 3.4 | Oblast i mreža u primeru 7 | 59 |
| 3.5 | Oblast i mreža u primeru 8 | 60 |
| 3.6 | Krov funkcije i njihove slike na kanonskom elementu | 62 |
| 3.7 | Rešenje određeno sa 4 elementa (levo), i zavisnost greške od broja elemenata (desno) | 66 |
| 3.8 | Izvijanje grede pod dejstvom bočne sile | 66 |
| 3.9 | Metodom mreže određene aproksimacije sopstvenih vrednosti (levo) i funkcija (desno) | 68 |
| 4.1 | Šablon eksplicitne (levo), Crank-Nicolson-ove (sredina) i implicitne (desno) šeme | 72 |
| 4.2 | Promena temperature u štapu sa vremenom | 73 |
| 4.3 | Kretanje veličine sa vremenom u desno ($c > 0$), ili u levo ($c < 0$) | 73 |
| 4.4 | Kretanje duž karakteristika | 75 |
| 4.5 | Rešenje talasne jednačine reda dva | 77 |
| 4.6 | Oblasti zavisnosti i uticaja određene karakteristikama | 78 |
| 4.7 | Optimalan izbor diferencijske šeme | 78 |
| 4.8 | Uticaoj odnosa koraka po vremenu i prostoru na diferencijsku šemu | 79 |
| 4.9 | Šablon za eksplicitnu (levo) i implicitnu (desno) šemu sa težinama | 80 |
| 4.10 | Eksplicitna i implicitna diferencijska šema | 83 |

Predgovor

Možda će se neko zapitati čemu još jedan naslov na spisku literature za izučavanje predmeta *Numeričke metode*. Namera autora, svakako, nije bila da dodatno optereti studente, već da im pomogne da lakše savladaju gradivo predviđeno pomenutim predmetom. Promena u načinu realizacije kursa proistekla je iz želje nastavnika da nauči svoje studente da misle pre i za vreme računanja, a ova skripta trebalo bi da u tome pomogne.

U jednom izveštaju Američkog udruženja za industrijsku i primenjenu matematiku (SIAM) izneto je mišljenje da su "najpotrebnije veštine matematička formulacija problema, i modeliranje i simulacija. Pri tome treba imati u vidu da problemi nikad nisu formulisani kao matematički problemi." Primenbe anketiranih studenata, koji su položili ispit iz pomenutog predmeta, jesu da se nedovoljno povezuje izloženo gradivo sa mogućnostima njegove primene u rešavanju praktičnih problema i simuliranju realnih situacija. Namena ove skripte jeste upravo da pokaže kako se gradivo izloženo u udžbeniku može primeniti, tj. da pokaže kako se formiraju matematički modeli realnih problema i kako se oni približno rešavaju. Korišćeni su jednostavni modeli kako bi izloženo gradivo bilo studentima razumljivo i zanimljivo, primereno njihovom poznavanju drugih nauka. Izvedeno je nekoliko modela koji su zasnovani na osnovnim zakonima fizike. Dimenzionom analizom proverena je konzistentnost izvedenog modela i definisan je odgovarajući bezdimenzioni matematički model. Pokazano je kako se skaliranjem može doći do numerički stabilnog modela. Birani su računski primeri koji ilustruju bitne karakteristike obrađenih metoda, sa posebnim osvrtom na probleme koji se mogu pojaviti u procesu rešavanja zadatka. Skoro svi rezultati su prikazani i vizuelno, putem grafika, kako bi izloženi tekst bio jasniji čitaocu.

Skripta su dopuna postojećoj literaturi za predmet *Numeričke metode*, udžbeniku [28], pomoćnom udžbeniku [18] i zbirci zadataka [29]. U skriptama se, fusnotama na odgovarajućim mestima, čitaoci upućuju na relevantne teorijske sadržaje, koji su dati u navedenoj literaturi. Na taj način skripta su rasterećena od strogih matematičkih formulacija i dokaza koji stoje u osnovi obrađenih metoda. Ostavljeno je čitaocu da se, ukoliko ima potrebe ili želje, putem udžbenika upozna sa relevantnom matematičkom teorijom, a putem zbirke sa konkretnom računskom i računarskom realizacijom odgovarajućih algoritama. Stoga skripta sadržajno prate koncept udžbenika i zbirke, ali ne obuhvataju sve oblasti koje su u ovima obrađene. Ona se odnose na sadržaje koji su predmet izučavanja budućeg jed-

nosemestralnog kursa *Numeričke metode 2*, predviđenog reformom studijskih programa na Matematičkom fakultetu. Ukoliko se ovaj način prezentovanja sadržaja pokaže uspešnim, i ostale oblasti će biti obrađene na sličan način.

Izloženi materijal je podeljen u četiri poglavlja. Prvo poglavlje posvećeno je aproksimaciji funkcija. Obrađeni su kontinualni problemi koji se rešavaju primenom srednjekvadratne aproksimacije i diskretni modeli obrađeni metodom najmanjih kvadrata. Rešavani su linearni modeli, ali je primerima ilustrovano kako se neki nelinearni problemi mogu opisati linearnim modelima. Posebna pažnja posvećena je Fourier-ovoj analizi i analizi talasićima, zbog njihovog značaja za obradu signala i slike, što je, pak, bitno u svim domenima informaciono-komunikacionih tehnologija. Ilustrovana je ideja kompresije signala i čišćenje signala od šuma, i pri tome primenjeni algoritmi Brze Fourier-ove transformacije (FFT) i Brze transformacije talasićima (FWT).

Ostala tri poglavlja odnose se na modeliranje diferencijalnim jednačinama, što je srazmerno zastupljenosti ovog tipa jednačina u realnim modelima. Zbog svoje različite prirode, metode za rešavanje Cauchy-jevih problema i metode za rešavanje graničnih problema su razdvojene u posebna poglavlja. Drugo poglavlje se bavi modelima zasnovanim na problemima početnih vrednosti (Cauchy-jevim problemima) za obične diferencijalne jednačine. Razvijeni su populacioni model, model kamata i model matematičkog klatna, i oni su rešavani različitim numeričkim metodama. Posebno je ukazano na problem tačnosti i stabilnosti metoda.

Sledeće, treće poglavlje posvećeno je metodama za rešavanje graničnih problema za diferencijalne jednačine. Najpre su obrađeni jedno-dimenzioni problemi, a zatim su izložene ideje uopštene na više-dimenzione modele. Uvodnim primerom modelovanja putanje projektila ispaljenog iz topa, koji treba da pogodi zadati cilj, objašnjena je razlika između dva tipa problema definisanih diferencijalnim jednačinama i dva pristupa njihovom numeričkom rešavanju. Prirodni nastavak ovoj priči je metoda gađanja. Metoda konačnih razlika (metoda mreže) objašnjena je na primeru modelovanja temperature štapa. Sa štapa se prelazi na ploču, dakle dvo-dimezioni objekat, i rešava se problem određivanja temperature ploče metodom mreže (kao primer rešavanja parcijalne diferencijalne jednačine eliptičkog tipa). Na kraju, kao ilustracija varijacionih metoda, metodom konačnog elementa određuje se rešenje modela raspodele temperature u štapu.

Poslednje, četvrto poglavlje posvećeno je mešovitim problemima koji su definisani isključivo parcijalnim diferencijalnim jednačinama. Saglasno cilju i obimu ovog kursa, numeričke metode za njihovo rešavanje su obrađene samo na početnom nivou, povezivanjem metoda i algoritama obrađenih u prethodna dva poglavlja o diferencijalnim jednačinama. Metode su ilustrovane na nestacionarnim modelima provođenja toplote u štapu (kao primer jednačine parabolikog tipa) i žice koja treperi (kao primer jednačine hiperboličkog tipa).

Na kraju svakog poglavlja date su teme za samostalan rad studenata. One podrazumevaju formulisanje matematičkog modela za odgovarajući problem, njegovo numeričko rešavanje, implementaciju algoritma na računaru i vizuelno predstavljanje dobijenih rezultata. Problemi su različitiog nivoa težine i kompleksnosti, te

moгу biti rađeni kao domaći zadaci, seminarski radovi ili završni radovi na diplomskim (master) studijama.

Mada su skripta napisana da pomognu studentima matematike da bolje razumeju različite teme iz oblasti numeričke matematike, ona će sigurno korisno poslužiti i studentima drugih fakulteta koji koriste matematički aparat u svojoj oblasti, kao i stručnjacima koji imaju potrebu da koriste matematičke modele u svom radu. Čitanje rukopisa ne zahteva posebno predznanje.

Posebnu zahvanost dugujem WUS AUSTRIA, koji je podržao inoviranje sadržaja kursa *Numeričke metode* kroz CDP+ (Course Development Program +) projekat finansiran od strane Austrian Cooperation. Zahvaljujući ovoj podršci, autoru je omogućen kraći studijski boravak na prestižnim evropskim univerzitetima, Univerzitetu u Oksfordu i Tehničkom univerzitetu u Minhenu, gde je kroz razgovore sa kolegama i upoznavanje sa njihovim načinom rada u ovoj oblasti stekla značajno iskustvo. Takođe, zahvaljujući odobrenim sredstvima, fakultetska biblioteka je obogaćena sa devet novih knjiga, a nabavljen je za fakultet i edukativni softver AnyLogic. Kao rezultat rada na ovom projektu nastala su skripta koja su pred vama, i za koja se nadam da će pomoći čitaocima da primenom matematike uspešno reše različite realne probleme.

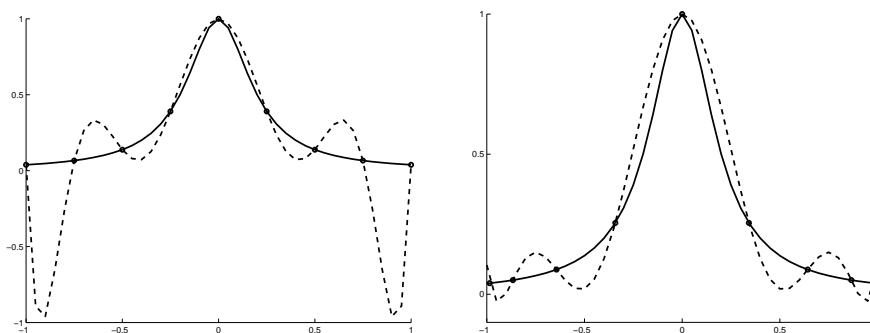
1

Aproksimacija funkcija

Interpolacija¹ je jedan vid aproksimacije u kojoj dve funkcije smatramo bliskim ako se one poklapaju u konačno mnogo različitih tačaka, tzv. čvorovima interpolacije. Međutim, to ne mora da znači da će u svim tačkama rastojanje među funkcijama biti malo.

PRIMER 1. *Aproksimirajmo polinomom osmog stepena na intervalu $[-1, 1]$ racionalnu funkciju $f(x) = 1/(1 + 25x^2)$.*

Ako koristimo interpolacioni polinom definisan ravnomerno raspoređenim čvorovima, na krajevima intervala odstupanje aproksimacije od funkcije je veliko (slika 1.1, levo). Jedan način prevazilaženja ovog problema je da se umesto ravnomernog izabere Čebiševljevi raspored čvorova interpolacije (slika 1.1, desno). Drugi način je da se izabere drugi vid aproksimacije, o čemu će biti reči u ovom poglavlju. ■



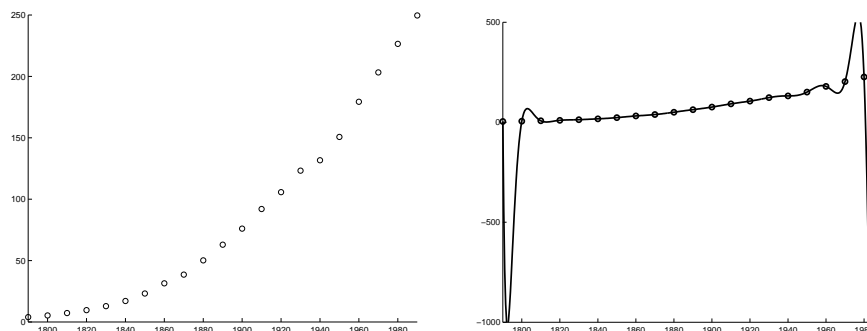
Slika 1.1: Lagrange-ova interpolacija polinomom osmog stepena

¹[28], strana 11

U primeru 1. funkcija koju aproksimiramo je zadata analitički, i imamo mogućnost da pogodnim izborom čvorova interpolacije povećamo tačnost aproksimacije. Ako je funkcija zadata tabelarno, na primer vrednostima određenim merenjem, interpolacija kao vid aproksimacije može biti sasvim nepodesna.

PRIMER 2. *Aproksimirati interpolacionim polinomom funkciju $u(t)$, koja predstavlja broj stanovnika SAD, izražen u milionima, u periodu od 1790. do 1990. godine*

| | | | | | | | | | | | |
|--------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| t | 1790 | 1800 | 1810 | 1820 | 1830 | 1840 | 1850 | 1860 | 1870 | 1880 | |
| $u(t)$ | 3.929 | 5.308 | 7.240 | 9.638 | 12.87 | 17.07 | 23.19 | 31.44 | 38.56 | 50.16 | |
| | 1890 | 1900 | 1910 | 1920 | 1930 | 1940 | 1950 | 1960 | 1970 | 1980 | 1990 |
| ... | 62.95 | 75.99 | 91.97 | 105.7 | 123.2 | 131.7 | 150.7 | 179.3 | 203.2 | 226.5 | 249.6 |



Slika 1.2: Podaci i njihova interpolacija polinomom dvadesetog stepena

Na osnovu raspoloživih podataka možemo konstruisati interpolacioni polinom 20. stepena, što nema mnogo smisla. Ovaj polinom osciluje, posebno na krajevima (slika 1.2), te bi, na primer, procena broja stanovnika SAD u novom milenijumu, određena ovim polinomom, bila sasvim pogrešna. Osim toga, podaci, na osnovu kojih je polinom konstruisan, dati su samo približno. ■

Relevantnije informacije ćemo dobiti korišćenjem aproksimacije jednostavnije forme, koja u srednjem (integralnom) smislu ne odstupa mnogo od naših podataka. Ovaj vid aproksimacije naziva se srednjekvadratna aproksimacija.²

1.1 Srednjekvadratna aproksimacija

Vratimo se primeru 1. i pokažimo kako možemo na drugi način aproksimirati funkciju.

²[28], strana 71

PRIMER 3. Odredimo na intervalu $[-1, 1]$ polinom osmog stepena najbolje sred-njekvadratne aproksimacije funkcije $f(x) = 1/(1+25x^2)$, i ocenimo grešku aproksi-macije.

Mi želimo da minimiziramo površinu između naše funkcije i njene aproksimacije. Površina između dve krive se može izračunati pomoću određenog integrala razlike ove dve krive u zadatim granicama. S obzirom da razlika može menjati znak, a da apsolutna vrednost funkcije nije diferencijabilna funkcija, za meru rastojanja se uzima integral kvadrata razlike funkcija. Tražimo polinom osmog stepena $P_8(x) = \sum_{k=0}^8 c_k x^k$ za koji će funkcija devet argumenata

$$I(c_0, \dots, c_8) = \int_{-1}^1 (f(x) - P_8(x))^2 dx$$

imati najmanju vrednost. Potrebni uslovi za dostizanje ekstremne vrednosti u nekoj tački su

$$\frac{\partial I}{\partial c_j} = 0, \quad \text{tj.} \quad \int_{-1}^1 (f(x) - P_8(x)) x^j dx = 0, \quad j = 0, \dots, 8,$$

što, posle sređivanja, daje sistem linearnih jednačina

$$\sum_{i=0}^8 c_i \int_{-1}^1 x^i x^j dx = \int_{-1}^1 f(x) x^j dx, \quad j = 0, \dots, 8.$$

Imajući u vidu da su bazisne funkcije, kojima je izražena aproksimacija $P_8(x)$, monični polinomi $g_n(x) = x^n$, $n = 0, \dots, 8$, prethodni sistem može da se zapiše pomoću novih oznaka na sledeći način

$$(1) \quad \sum_{i=0}^8 c_i (g_i, g_j) = (f, g_j), \quad j = 0, \dots, 8, \quad \text{gde je} \quad (u, v) = \int_{-1}^1 u(x)v(x) dx.$$

Matrica sistema (1) je puna matrica i loše uslovljena ($\text{cond} = 3.1 * 10^5$), jer je kombinacija Hilbertovih matrica, te sistem nije pogodan za numeričko rešavanje.

Problem rešavanja sistema jednačina (1) možemo izbeći ako za bazisne funkcije izaberemo Legendre-ove polinome $L_n(x)$ (n je stepen polinoma) umesto moničnih polinoma x^n . Ovi polinomi definisani su rekurentnom formulom,

$$L_0(x) = 1, \quad L_1(x) = x,$$

$$(n+1)L_{n+1}(x) = (2n+1)xL_n(x) - nL_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, \dots,$$

i ortogonalni su u odnosu na definisani skalarni proizvod,

$$(L_m, L_n) = \int_{-1}^1 L_m(x)L_n(x) dx = \begin{cases} \frac{2}{2n+1}, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases}.$$

Posledica pomenute ortogonalnosti jeste da je matrica sistema (1) dijagonalna,

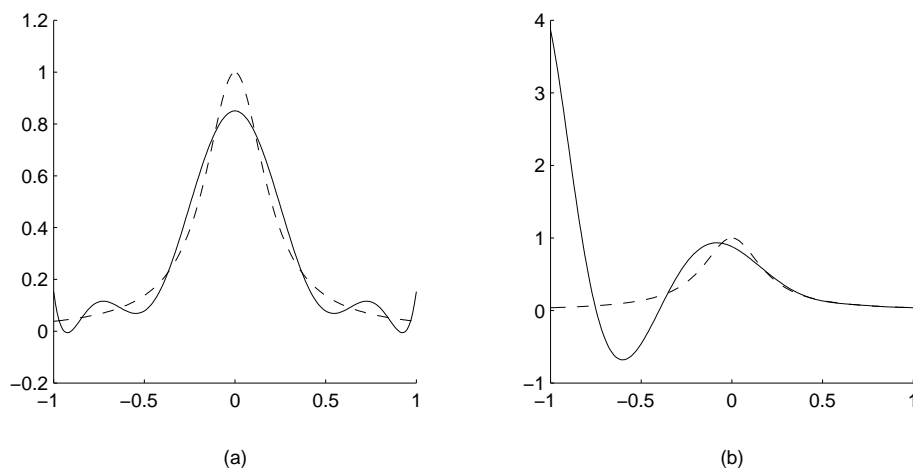
$$\frac{2}{2j+1} c_j = \int_{-1}^1 f(x)L_j(x) dx, \quad j = 0, \dots, 8,$$

te rešenje direktno računamo. Tražena aproksimacija je

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{1}{1+25x^2} &\approx P_8(x) = \sum_{k=0}^8 c_k L_k(x) \\ &= 0.2747 L_0(x) - 0.4691 L_2(x) + 0.4272 L_4(x) - .3461 L_6(x) + .26638 L_8(x) \\ &= 0.8504 - 7.1990x^2 + 23.1048x^4 - 29.9951x^6 + 13.3919x^8. \end{aligned}$$

Kvadrat greške aproksimacije je

$$E_8^2(f) = \|f - P_8\|^2 = \int_{-1}^1 (f(x) - P_8(x))^2 dx = 0.7 * 10^{-2}.$$



Slika 1.3: Srednjekvadratna aproksimacija polinomom osmog stepena

Slike 1.3 prikazuju dve različite srednjekvadratne aproksimacije naše funkcije polinomom osmog stepena. Slika 1.3, levo, prikazuje aproksimaciju kod koje je svim tačkama intervala dat jednak značaj (polinom $P_8(x)$), a slika 1.3, desno, prikazuje aproksimaciju kod koje je veći značaj dat tačkama u desnom kraju intervala (površina između dve funkcije je u desnoj polovini intervala skoro jednaka nuli). Različito ponderisanje tačaka intervala postiže se uvođenjem težinske funkcije $p(x) > 0$ u skalarni proizvod,

$$(u, v) = \int_{-1}^1 p(x)u(x)v(x) dx.$$

Na slici 1.3, levo, uzeto je da je težinska funkcija $p(x) \equiv 1$, a na slici 1.3, desno, je uzeto da je $p(x) = e^{10x}$.

1.2 Metoda najmanjih kvadrata

U slučaju kada je funkcija zadata samo vrednostima u diskretnim tačkama (primer 2), skalarni proizvod se definiše sumom a ne integralom, a odgovarajuća metoda se naziva metoda najmanjih kvadrata.³

PRIMER 4. *Italijanski astronom Piazzini je 1. januara 1801. godine otkrio asteroid Ceres. Pratio je njegovo kretanje šest nedelja, a zatim ga je izgubio iz vida zbog interferencije prouzrokovane Suncem. Mnogi istaknuti astronomi toga vremena su u publikovanim radovima predviđali orbitu asteroida. Jedan od njih je bio i istaknuti matematičar Gauss, čija se pretpostavka o orbiti asteroida znatno razlikovala od procena ostalih. Ipak, kada je sedmog decembra iste godine i prvog januara 1802. godine Ceres ponovo uočen, pokazalo se da je Gauss-ova procena bila najbolja. On je za svoju procenu koristio metodu najmanjih kvadrata.* ■

Standardna tehnika u matematičkom i statističkom modeliranju je fitovanje krivom zadatog oblika skupa tačaka u ravni metodom najmanjih kvadrata. Kriva je obično grafik neke standardne funkcije, kao što je prava, polinom ili trigonometrijski polinom. Pošto podaci mogu sadržati greške merenja ili eksperimenta, ne zahtevamo da kriva prolazi kroz zadate tačke, tj. ne vršimo interpolaciju podataka. Kao što smo videli u primeru 2, interpolacija može dati procene sa velikom greškom. Umesto toga, kriva se određuje tako da zbir kvadrata rastojanja tačaka od krive bude minimalan. Nezavisno od Gauss-a, metodu je razvio i Legendre.

PRIMER 5. *Na osnovu podataka datih u primeru 2, proceniti broj stanovnika SAD 2000 godine. (On je jednak 281.422 miliona.)*

Ako bismo ekstrapolisali traženu vrednost Lagrange-ovim polinomom stepena 20, konstruisanim u primeru 2, dobili bismo da je taj broj jednak $7.5 * 10^5$ miliona.

Aproksimiraćemo funkciju $u(x)$ pravom $P_1(x) = c_0 + c_1x$ na drugi način. Postavimo zahtev da prava $P_1(x)$ prolazi kroz dvadeset jednu datu tačku,

$$(2) \quad P_1(x_i) = c_0 + c_1x_i = u(x_i), \quad i = 0, \dots, 20,$$

što, svakako, nije moguće osim u slučaju kada su tačke kolinearne. U našem modelu populacije SAD, prema slici 1.2, one to nisu. Matematički formulisano, sistem (2) je preodređen, jer ima dvadeset jednu jednačinu i dve nepoznate c_0 i c_1 . Ove nepoznate parametre ćemo odrediti tako da ukupna greška u svim jednačinama bude što je moguće manja. Greška u i -toj jednačini predstavlja odstupanje i -te tačke od prave,

$$d_i = u(x_i) - c_0 - c_1x_i, \quad i = 0, \dots, 20.$$

Ukupnu grešku ćemo definisati zbirom kvadrata grešaka svake jednačine, tj. l_2 normom vektora greške $\mathbf{d} = (d_0, \dots, d_{20})^\top$,

$$(3) \quad F(c_0, c_1) \equiv \sum_{i=0}^{20} d_i^2 = \sum_{i=0}^{20} (u(x_i) - c_0 - c_1x_i)^2.$$

³[28], strana 76

Izabrana je l_2 norma jer je neprekidno-diferencijabilna funkcija parametara c_i , te se jednostavno nalaze tačke ekstrema funkcije greške. Potreban uslov ekstrema je

$$(4) \quad \begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial c_0} &= 0 \\ \frac{\partial F}{\partial c_1} &= 0 \end{aligned} \quad \text{tj.} \quad \begin{aligned} c_0 \sum_{i=0}^{20} 1 \cdot 1 + c_1 \sum_{i=0}^{20} x_i \cdot 1 &= \sum_{i=0}^{20} u(x_i) \cdot 1 \\ c_0 \sum_{i=0}^{20} 1 \cdot x_i + c_1 \sum_{i=0}^{20} x_i \cdot x_i &= \sum_{i=0}^{20} u(x_i) \cdot x_i \end{aligned}$$

što predstavlja sistem oblika (1) dimenzije dva,

$$(5) \quad \begin{aligned} c_0(g_0, g_0) + c_1(g_1, g_0) &= (f, g_0) \\ c_0(g_0, g_1) + c_1(g_1, g_1) &= (f, g_1) \end{aligned} \quad \text{gde je} \quad (u, v) = \sum_{k=0}^{20} u(x_k)v(x_k).$$

Bazisne funkcije su $g_0(x) = 1$ i $g_1(x) = x$, a skalarni proizvod je definisan sumom po tačkama x_i u kojima su dati podaci o funkciji. Ne menjajući suštinu zadatka, a radi dobijanja bolje uslovljenog sistema linearnih jednačina, pri rešavanju uvodimo smenu $x_i = (t_i - 1890)/100$, $i = 0, \dots, 20$.

Zapišimo preodređeni sistem (2) u matičnom obliku

$$(6) \quad A \mathbf{c} = \mathbf{b}, \quad \text{gde je} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & x_0 \\ 1 & x_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_{20} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} u(x_0) \\ u(x_1) \\ \vdots \\ u(x_{20}) \end{pmatrix}.$$

Množenjem sistema (6) sa A^T dobijamo upravo vektorski zapis sistema (4),

$$(7) \quad A^T A \mathbf{c} = A^T \mathbf{b}.$$

Rešenje sistema (7) je linearna aproksimacija $P_1(x) = 1.2154x - 2211.3$, određena metodom najmanih kvadrata. Ovom aproksimacijom se procenjuje da je broj stanovnika SAD godine 2000. jednak $P_1(21) = 219.4153$ miliona (slika 1.4, levo).

Slika, očigledno, pokazuje da populacija SAD ne raste linearno, te aproksimacija ovih podataka pravom nije dobra ideja (dobija se da je populacija negativna za $t < 1790$). Raspored tačaka i analiza podataka u tabeli pokazuju da je potrebno koristiti polinom višeg stepena, ili pretpostaviti neki drugi oblik funkcionalne zavisnosti, možda eksponencijalnu (tema 2.2 za seminarski rad).

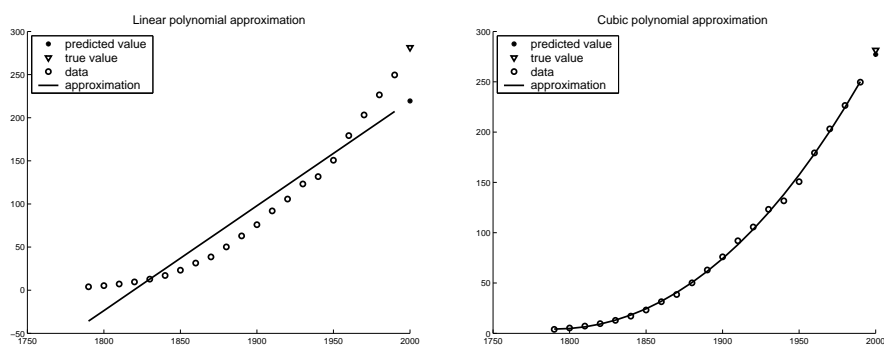
Algoritmom, analognim opisanom, dobija se da je polinom

$$P_3(x) = 4.21324 * 10^{-6}x^3 - 0.0173450x^2 + 21.6013x - 7251.49$$

najbolja srednjekvadratna aproksimacija polinomom trećeg stepena (slika 1.4, desno). Ovim polinomom se procenjuje da je broj stanovnika SAD godine 2000. jednak $P_3(21) = 277.1620$, što je vrlo blizu tačnom broju.

Ako se naši osrednjeni podaci direktno fituju eksponencijalnom funkcijom,

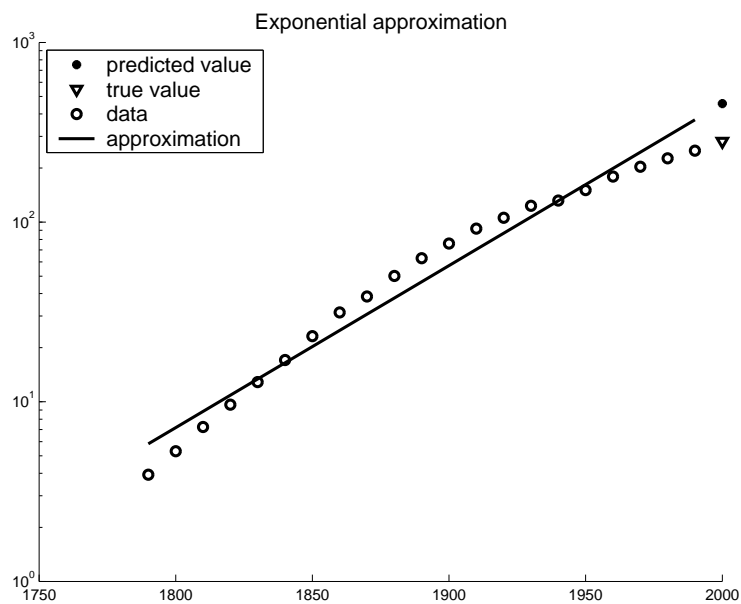
$$(8) \quad u(x) \approx Q(x) = \bar{c}_0 e^{c_1 x},$$



Slika 1.4: Fitovanje pravom i kubnom parabolom

funkcija greške (3) će biti nelinearna funkcija parametara \bar{c}_0 i c_1 . To ima za posledicu da je sistem jednačina (4) nelinearan sistem. Novi model možemo svesti na sistem linearnih jednačina, tako što ćemo tražiti najbolju srednjekvadratnu aproksimaciju pravom logaritama podataka iz primera 2. Naime, logaritmovanjem relacije (8), dobijamo da je

$$\ln(u(x)) \approx \ln(Q(x)) = \ln(\bar{c}_0) + c_1 x = c_0 + c_1 x.$$



Slika 1.5: Fitovanje eksponencijalnom funkcijom

Opisanim postupkom za fitovanje podataka pravom dobijamo da je

$$\ln(Q(x)) = 3.8402 + 2.07645x,$$

odakle sledi da je (slika 1.5, sa logaritamskom skalom na y -osi)

$$Q(x) = 46.5363 e^{2.07645x}.$$

Ekstrapolacijom pomoću ove funkcije dobijamo da je procenjeni broj stanovnika SAD godine 2000 jednak $Q(21) = 456.84$ miliona. Očigledno je da je i ova procena prilično loša, tj. da model eksponencijalnog rasta broja stanovnika nije realan. Najbolju procenu tačnog broja $u(2000) = 281.422$, očigledno daje kubna parabola. Primereniji matematički modeli, koji bolje opisuju populacionu dinamiku, definisani su problemima početnih vrednosti za obične diferencijalne jednačine (vidi primer 1). ■

Pokažimo da se i u opštem slučaju rešenje preodređenog sistema linearnih jednačina, sa najmanjom srednjekvadratnom greškom, dobija množenjem sistema sa leve strane matricom transponovanom (u kompleksnom slučaju konjugovanom) matrici sistema. Sistem sa kvadratnom singularnom matricom možemo tretirati kao preodređeni sistem, jer su vektori kolona singularne matrice linearno zavisni.

PRIMER 6. *Analizirajmo rešenje preodređenog ($m > n$) ili neodređenog ($m < n$) sistema linearnih jednačina,*

$$(9) \quad A \mathbf{x} = \mathbf{b},$$

gde je

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Ako se sa $\mathbf{a}_j = (a_{1,j}, \dots, a_{m,j})$ označi vektor j -te kolone matrice A , sistem (9) može se zapisati i u sledećem obliku

$$(10) \quad x_1 \mathbf{a}_1 + x_2 \mathbf{a}_2 + \dots + x_n \mathbf{a}_n = \mathbf{b}.$$

Rešiti sistem znači odrediti vrednosti x_i , $i = 1, \dots, n$, koje zadovoljavaju jednačinu (9), odnosno (10).

Ako je $n > m$, vektori \mathbf{a}_j , $j = 1, \dots, n$, su linearno zavisni, i reprezentacija (10) nije jedinstveno određena. Drugim rečima, rešenje neodređenog sistema nije jedinstveno.

Neka je $n < m$ i neka je \mathcal{V} potprostor prostora \mathcal{R}^m određen vektorima \mathbf{a}_j , $j = 1, \dots, n$. U specijalnom slučaju, ako vektor $\mathbf{b} \in \mathcal{V}$, rešenje sistema postoji. U opštem slučaju, kada $\mathbf{b} \notin \mathcal{V}$, rešenje sistema ne postoji, i izraz ne levoj strani jednačine (10) predstavlja samo aproksimaciju vektora \mathbf{b} u prostoru \mathcal{V} . Koeficijenti

u aproksimaciji su x_i , $i = 1, \dots, n$, komponente rešenja sistema (9). Ako želimo da l_2 norma vektora greške bude najmanja, prema primeru (5), koeficijente x_i određujemo kao rešenja sistema jednačina (analogno sistemu (5))

$$\sum_{i=1}^n x_i(\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j) = (\mathbf{b}, \mathbf{a}_j), \quad j = 1, \dots, n,$$

što se u matricnom obliku može zapisati izrazom

$$\begin{pmatrix} (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_1) & (\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_1) & \dots & (\mathbf{a}_n, \mathbf{a}_1) \\ (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) & (\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_2) & \dots & (\mathbf{a}_n, \mathbf{a}_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_n) & (\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_n) & \dots & (\mathbf{a}_n, \mathbf{a}_n) \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} (\mathbf{b}, \mathbf{a}_1) \\ (\mathbf{b}, \mathbf{a}_2) \\ \dots \\ (\mathbf{b}, \mathbf{a}_n) \end{pmatrix}$$

Ovo je upravo sistem koji se dobija kada se polazni sistem (9) pomnoži sa leve strane matricom transponovanom matrici sistema,

$$(11) \quad A^\top A \mathbf{x} = A^\top \mathbf{b}.$$

■

Model rasta populacije SAD, opisan u primeru 5, ilustruje linearni model. Aproksimacija se traži u obliku generalisanog polinoma $Q_n(x) = \sum_{k=0}^n c_k g_k(x)$, koji je linearna funkcija parametara c_k . Stoga se model svodi na sistem linearnih jednačina. Ako aproksimacija nije linearna funkcija parametara, nalaženje najbolje aproksimacije svodi problem na rešavanje sistema nelinearnih jednačina.

PRIMER 7. *Ilustrovaćemo metodu jednim primerom iz domena kontrole kvaliteta. Mnogi proizvodi, kao što su diskovi, cevi i slično, treba da budu kružnog oblika. Međutim, u toku proizvodnje, može doći do deformacije, što treba povremeno proveravati. Putem odgovarajućih merača izmerena je pozicija n tačaka (x_i, y_i) , $i = 1, \dots, n$, koje bi trebalo da pripadaju poprečnom preseku našeg proizvoda, kružnici*

$$(12) \quad (x - c_1)^2 + (y - c_2)^2 = r^2.$$

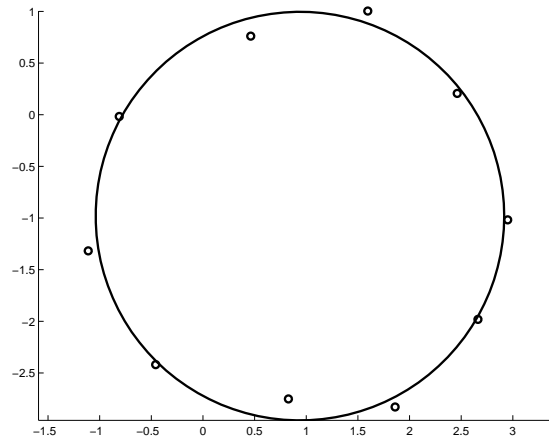
Želimo da odredimo koordinate centra (c_1, c_2) te kružnice i njen poluprečnik r , i izračunamo odstupanje datih tačaka od kružnice, da bi, na primer, ocenili da li oblik testiranog proizvoda odstupa od kružnog oblika više nego što je dozvoljeno.

Rešićemo problem na dva načina. Prvi način je rešavanje osnovnog problema metodom najmanjih kvadrata. Neka se odstupanje i -te tačke od kružnice izražava veličinom

$$(13) \quad d_i = r^2 - (x_i - c_1)^2 - (y_i - c_2)^2, \quad i = 1, \dots, n.$$

Kako ove veličine mogu biti i pozitivne i negativne, ukupnu grešku ćemo definisati l_2 normom vektora $\mathbf{d} = (d_1, \dots, d_n)^\top$, i ona je funkcija parametara kružnice c_1 , c_2 i r ,

$$(14) \quad F(c_1, c_2, r) = \sum_{i=1}^n d_i^2 = \sum_{i=1}^n (r^2 - (x_i - c_1)^2 - (y_i - c_2)^2)^2.$$



Slika 1.6: Srednjekvadratna aproksimacija tačkaka kružnicom

Parametre određujemo tako da greška bude minimalna. Potreban uslov da funkcija više promenljivih ima minimum u nekoj tački daje sistem jednačina

$$(15) \quad \frac{\partial F}{\partial c_1} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial c_2} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial r} = 0.$$

koji je, s obzirom na (14), nelinearan sistem i nije ga jednostavno rešiti.

Stoga ćemo naš matematički model formulisati na drugi način. Jednačinu kruga

$$2xc_1 + 2yc_2 + (r^2 - c_1^2 - c_2^2) = x^2 + y^2$$

možemo zamenom parametra r novim parametrom $c_3 = r^2 - c_1^2 - c_2^2$, zapisati na sledeći način

$$(16) \quad 2xc_1 + 2yc_2 + c_3 = x^2 + y^2.$$

Aproksimacija (16) je sada linearna funkcija parametara c_1 , c_2 i c_3 . Postavljajući zahtev da tačke pripadaju krugu, dobijamo preodređeni sistem linearnih jednačina po parametrima c_i ,

$$(17) \quad 2x_i c_1 + 2y_i c_2 + c_3 = x_i^2 + y_i^2, \quad i = 1, \dots, n.$$

Ako je $n > 3$ ne postoji tačno rešenje sistema, osim u slučaju specijalnog izbora tačkaka (x_i, y_i) .

Zapišimo preodređeni sistem (17) u matičnom obliku

$$A \mathbf{c} = \mathbf{b},$$

gde je

$$A = \begin{pmatrix} 2x_1 & 2y_1 & 1 \\ 2x_2 & 2y_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 2x_n & 2y_n & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} x_1^2 + y_1^2 \\ x_2^2 + y_2^2 \\ \vdots \\ x_n^2 + y_n^2 \end{pmatrix}.$$

Kao što smo pokazali u primeru 6, rešenje preodređenog sistema koje ima najmanju srednjekvadratnu grešku, je rešenje pridruženog sistema sa kvadratnom simetričnom matricom

$$(18) \quad A^T A \mathbf{c} = A^T \mathbf{b}.$$

Taj sistem, u razvijenom obliku, jednak je

$$(19) \quad \begin{aligned} c_1 4 \sum_{i=1}^n x_i^2 + c_2 4 \sum_{i=1}^n x_i y_i + c_3 2 \sum_{i=1}^n x_i &= 2 \sum_{i=1}^n (x_i^2 + y_i^2) x_i, \\ c_1 4 \sum_{i=1}^n x_i y_i + c_2 4 \sum_{i=1}^n y_i^2 + c_3 2 \sum_{i=1}^n y_i &= 2 \sum_{i=1}^n (x_i^2 + y_i^2) y_i, \\ c_1 2 \sum_{i=1}^n x_i + c_2 2 \sum_{i=1}^n y_i + c_3 n &= \sum_{i=1}^n (x_i^2 + y_i^2). \end{aligned}$$

Ako su koordinate izmerenih tačaka

| | | | | | | | | | | |
|-------|--------|-------|-------|-------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| x_i | 2.950 | 2.461 | 1.595 | 0.462 | -0.811 | -1.111 | -0.458 | 0.827 | 1.861 | 2.662 |
| y_i | -1.018 | 0.206 | 1.004 | 0.760 | -0.017 | -1.318 | -2.419 | -2.751 | -2.830 | -1.981 |

njegovo rešenje određuje centar traženog kruga i njegov poluprečnik (slika 1.6)

$$(c_1, c_2) = (0.939, -0.982), \quad r = \sqrt{c_3 + c_1^2 + c_2^2} = 1.978.$$

Odstupanje i -te tačke od idealne kružnice jednako je

$$e_i = r - \sqrt{(x_i - c_1)^2 + (y_i - c_2)^2}, \quad i = 1, \dots, 10.$$

Mera kvaliteta odgovarajućeg proizvoda je l_2 norma vektora $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_{10})^T = (-0.034, 0.047, -0.11, 0.17, -0.020, -0.10, -0.027, 0.21, -0.087, -0.014)^T$,

$$\|\mathbf{e}\|^2 = 0.33.$$

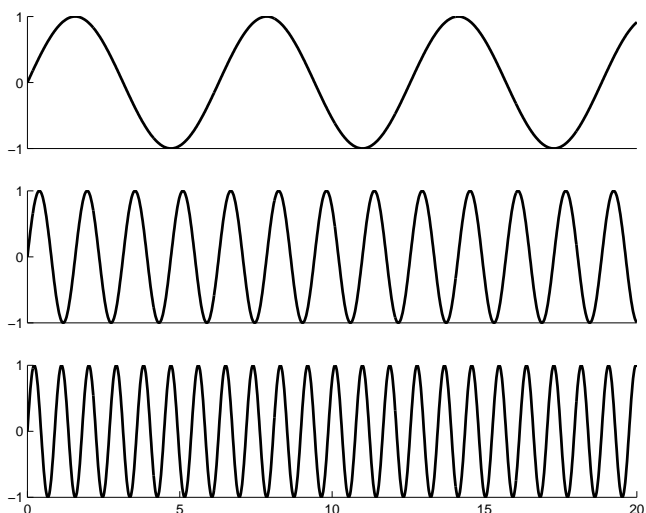
■

1.3 Fourier-ova transformacija

Ako je potrebno aproksimirati periodične funkcije, prirodno je za bazisne funkcije izabrati takođe periodične funkcije (slika 1.7).

Početakom XIX veka Joseph Fourier je proučavao zvuk i oscilatorno kretanje, i 1807. godine izneo tezu da se 2π -periodične funkcije mogu predstaviti svojim koeficijentima u razvoju po zbiru sinusa i kosinusa. Uočio je da se, na primer, oblik žice koja vibrira može predstaviti funkcijom

$$(20) \quad u(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin \frac{2\pi kx}{L},$$



Slika 1.7: Harmonici

gde je L dužina žice, a žica je pričvršćena na krajevima. Red (20) naziva se Fourier-ov trigonometrijski red⁴, a skup koeficijenata a_k Fourier-ov spektar funkcije $u(x)$. Koeficijenti a_k daju informaciju o zvuku koji žica pri vibriranju proizvodi, jer svaki harmonik (sinus određene učestanosti) proizvodi određeni ton, koji je to izraženiji što je $|a_k|$ veće. Ova informacija se ne može lako dobiti iz uobičajenog zapisa $u = f(x)$, koji prikazuje oblik žice u prostornom domenu, ali je jasno iskazana Fourier-ovim spektrom funkcije, koji predstavlja grafik funkcije u frekvencijskom domenu (slika 1.8).

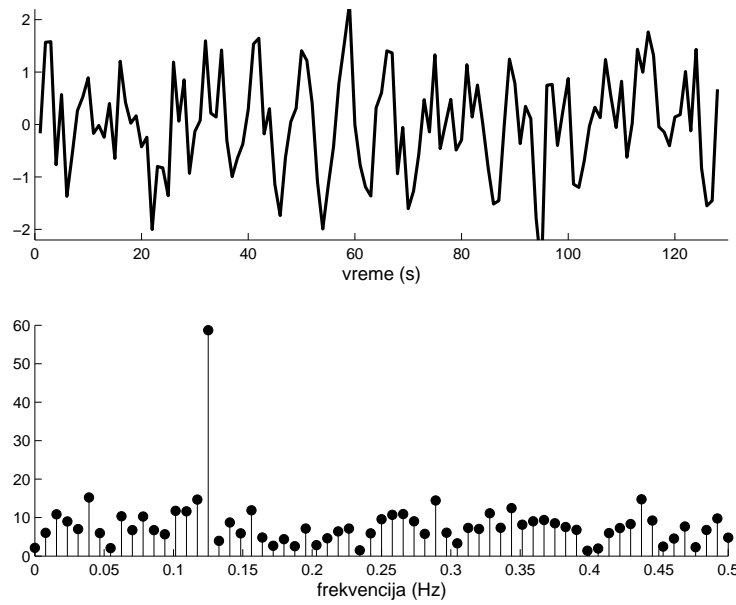
Fourier-ov spektar funkcije se koristi u obradi signala. Signal je diskretna ili kontinualna funkcija vremena. Osnovni zadaci naučne discipline koja se naziva obrada signala jesu analiza i dijagnostika, kodiranje, kvantizacija i kompresija, prenos i čuvanje, sinteza i rekonstrukcija signala. U primenama se najčešće obrađuju diskretni signali. Formiranje diskretnog od kontinualnog signala je vrlo važna faza u procesu obrade signala, jer je od suštinske važnosti da se kontinualni signal može potpuno rekonstruisati na osnovu svoje diskretizacije (teorema odabiranja, [30]).

PRIMER 8. *Prikažaćemo čišćenje od šuma i kompresiju jednostavnog signala predstavljenog čistom sinusoidom sa belim šumom. Diskretni signal je definisan funkcijom (slika 1.8, gore)*

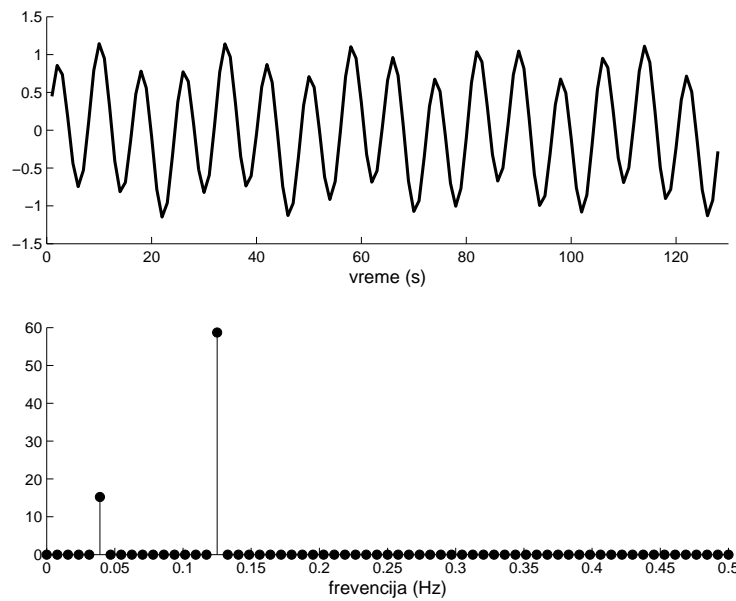
$$u(t) = \sin 2\pi\omega t + 0.75 \text{rndn}(\text{size}(t)), \quad t = 0, \dots, 128,$$

za $\omega = 0.125$, gde je $\text{rndn}(\text{size}(t))$ generator slučajnih brojeva sa normalnom raspodelom MATLAB-a, koji predstavlja beli šum. Uzeli smo da je korak odbirka jednak jedan, tako da t označava i indeks i absolutno vreme.

⁴[28], strana 74



Slika 1.8: Predstavljanje funkcije u vremenskom i frekvencijskom domenu



Slika 1.9: Kompresija signala u frekvencijskom domenu

Očigledno je da je na gornjoj slici 1.8 teško prepoznati sinusoidu. Na Fourier-ovom spektru (slika 1.8, dole) jasno se uočava pik na frekvenciji 0.125. Ovde ćemo kompresijom, tj. zamenom nulama svih koeficijenata spektra koji su po modulu manji od utvrđenog praga, na primer 15, donekle grubo očistiti signal. Signal, rekonstruisan kompresovanim spektrom, i kompresovani spektar prikazani su na slici 1.9. ■

Pored toga što se kompresijom uklanjanja šum, smanjuje se i obim podataka kojima se registruje signal, tako da se ovaj lakše čuva, prenosi, obrađuje. U primeru 8, kompresovani signal se može zapisati samo sa dva preostala Fourier-ova koeficijenta, i na osnovu njih potpuno rekonstruisati.

Izraz (20) daje reprezentaciju funkcije $u(x)$ po celobrojnim harmonicima, jer je njen Fourier-ov spektar predstavljen diskretnim vrednostima $|a_k|$ (slika 1.8, dole). Kontinualna funkcija Fourier-ovih koeficijenata neperiodične funkcije $u(x)$ određena je njenom Fourier-ovom transformacijom,⁵

$$(21) \quad \hat{u}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x) e^{i\omega x} dx,$$

gde je i imaginarna jedinica (diskretno k zamenjeno je neprekidnim ω). U ovom slučaju, Fourier-ov spektar je definisan funkcijom $\hat{u}(\omega)$, i neprekidna je funkcija frekvencije ω . Umesto redom, u kontinualnom slučaju funkcija se predstavlja integralom,

$$(22) \quad u(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(\omega) e^{-i\omega x} d\omega,$$

koji se naziva inverzna Fourier-ova transformacija. Za definisanje transformacija (21) i (22) korišćen je opštiji oblik zapisa bazisnih funkcija $e^{i\omega x} = \cos \omega x + i \sin \omega x$, te je opštiji oblik Fourier-ovog reda na intervalu $[0, 2\pi]$ jednak

$$(23) \quad u(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{-ikx}, \quad c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{ikx} dx \quad k = 0, \pm 1, \dots$$

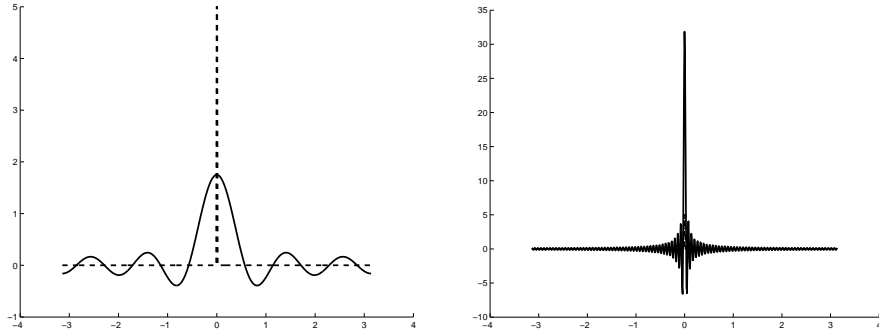
U praksi aproksimiramo funkciju parcijalnom sumom reda (23). Ona predstavlja najbolju srednjekvadratnu aproksimaciju funkcije po ortogonalnom bazu $\{e^{-ikx}\}_{k=0}^n$. Fourier-ovi koeficijenti su rešenja sistema oblika (1), sa n jednačina. Zbog ortogonalnosti bazisa matrica sistema je dijagonalna.

Sledeći primer ilustruje koliko tačnost aproksimacije zavisi od broja harmonika (sabiraka) u sumi (23).

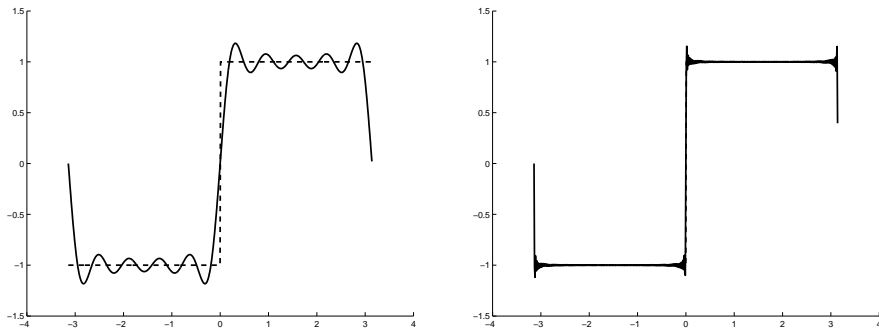
PRIMER 9. *Predstavimo graficima aproksimacije Dirac-ove (slika 1.10), Heaviside-ove (slika 1.11) i linearne (slika 1.12) funkcije na intervalu $[-\pi, \pi]$, koje su određene sa 5 (slike levo) i 100 (slike desno) sabiraka reda (23).*

Treba uočiti tzv. Gibbs-ov fenomen, oscilacije koje se javljaju u tačkama prekida predstavljenih funkcija. Ove oscilacije postaju uže, ali se ne smanjuju sa povećanjem broja sabiraka. ■

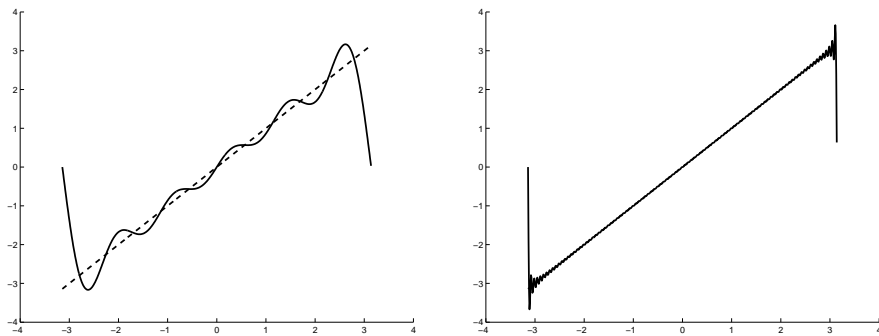
⁵[28], strana 75



Slika 1.10: Dirac-ova funkcija aproksimirana sa 5 i 100 sabiraka



Slika 1.11: Heaviside-ova funk. aproksimirana sa 5 i 100 sabiraka



Slika 1.12: Linearna funkcija aproksimirana sa 5 i 100 sabiraka

Diskretna Fourier-ova transformacija. Kako odrediti Fourier-ov spektar date funkcije, bilo da je ona zadana tabelom svojih vrednosti ili analitičkim izrazom? Drugim rečima, kako izračunati Fourier-ove koeficijente, koji su definisani integralom (23), ako je dat digitalni signal (ili analogni, koga ne možemo ili ne želimo analitički da integralimo)? Metoda kojom se računaju elementi (koeficijenti) Fourier-ovog spektra naziva se Diskretna Fourier-ova transformacija.⁶ Ona se može tumačiti i kao interpolacija u kompleksnoj ravni funkcije $u(x)$ polinomom stepena $(n-1)$, pri čemu su čvorovi interpolacije n -ti koreni iz jedinice (kojih ima n),

$$(24) \quad W = e^{i \frac{2\pi}{n}} = \sqrt[n]{e^{i2\pi}}.$$

Polinom je parcijalna suma Fourier-ovog reda (23), te se koeficijenti Fourier-ovog spektra c_j na osnovu poznatih vrednosti funkcije u_k , ili, obrnuto, vrednosti funkcije na osnovu poznatog Fourier-ovog spektra, računaju, redom, izrazima

$$(25) \quad c_j = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} u_k W^{kj}, \quad u_j = \sum_{k=0}^{n-1} c_k \overline{W}^{kj}, \quad j = 0, \dots, n-1.$$

Najefikasniji algoritam za realizaciju diskretne Fourier-ove transformacije je Brza Fourier-ova transformacija (FFT)⁷.

PRIMER 10. *Metodom brze Fourier-ove transformacije odredimo diskretnu Fourier-ovu transformaciju vektora $\mathbf{u} = (0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7)^\top$.*

Nalaženje koeficijenata c_j predstavljeno je na slici 1.13. Kada se dobijeni koeficijenti c_j podele sa dimenzijom vektora $n = 8$, dobija se diskretna Fourier-ova transformacija datog vektora

$$\mathbf{c} = (3.5 \quad -0.5 - 1.21i \quad -0.5 - 0.5i \quad -0.5 - 0.21i \\ -0.5 \quad -0.5 + 0.21i \quad -0.5 + 0.5i \quad -0.5 + 1.21i)^\top.$$

■

Ovaj brzi algoritam, pored ostalog, koristi se i za efikasno (u odnosu na broj računskih operacija) računanje diskretne konvolucije dva vektora.

PRIMER 11. *Izračunati diskretnu konvoluciju dva vektora primenom FFT algoritma.*

Diskretna konvolucija dva vektora

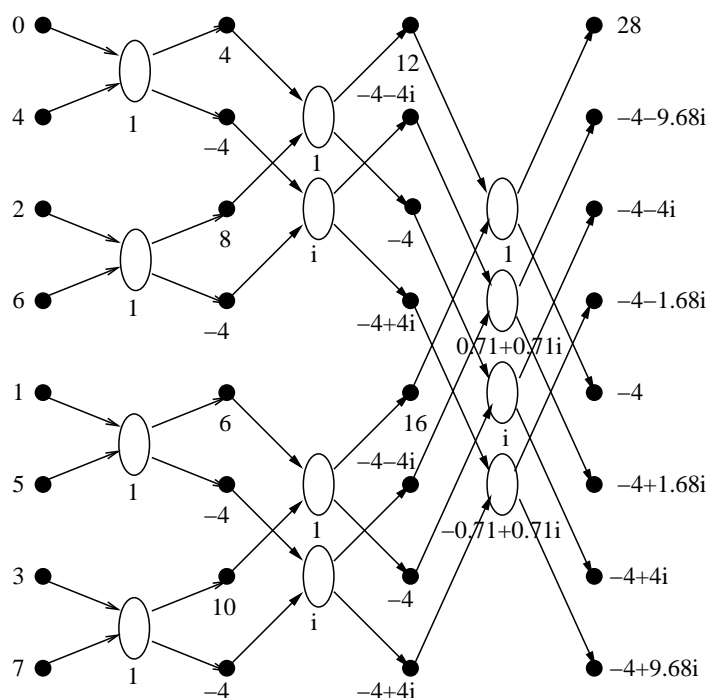
$$\mathbf{f} = (f_0, \dots, f_{n-1})^\top, \quad \mathbf{g} = (g_0, \dots, g_{n-1})^\top,$$

definiše se kao vektor dimenzije n u oznaci $\mathbf{f} * \mathbf{g}$, čija je m -ta koordinata, $m = 0, \dots, n-1$, suma proizvoda $f_j g_k$ za $j+k = m$ ili $j+k = m+n$,

$$(26) \quad \mathbf{f} * \mathbf{g} = \begin{pmatrix} f_0 g_0 + f_1 g_{n-1} + f_2 g_{n-2} + \dots + f_{n-1} g_1 \\ f_0 g_1 + f_1 g_0 + f_2 g_{n-1} + \dots + f_{n-1} g_2 \\ \vdots \\ f_0 g_{n-1} + f_1 g_{n-2} + \dots + f_{n-1} g_0 \end{pmatrix}.$$

⁶[28], strana 79

⁷[28], strana 72



Slika 1.13: Izračunavanje diskretne Fourier-ove transformacije za dati vektor

Izraz (26) se može predstaviti i proizvodom ciklične (Toeplitz-ove) matrice, određene vektorom \mathbf{f} , i vektora \mathbf{g} ,

$$\mathbf{f} * \mathbf{g} = \begin{pmatrix} f_0 & f_{n-1} & f_{n-2} & \cdots & f_1 \\ f_1 & f_0 & f_{n-1} & \cdots & f_2 \\ f_2 & f_1 & f_0 & \cdots & f_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n-1} & f_{n-2} & f_{n-3} & \cdots & f_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} g_0 \\ g_1 \\ \vdots \\ g_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Efikasan algoritam zasniva se na osobini diskretne konvolucije da je Fourier-ova transformacija diskretne konvolucije n -dimenzionih vektora \mathbf{f} i \mathbf{g} jednaka proizvodu njihovih diskretnih Fourier-ovih transformacija, pomnoženom sa n ,

$$\mathbf{f} * \mathbf{g} = n F^* (\hat{\mathbf{f}} \hat{\mathbf{g}}) \quad \text{gde je} \quad \hat{\mathbf{f}} = \frac{1}{n} F \mathbf{f}, \quad \hat{\mathbf{g}} = \frac{1}{n} F \mathbf{g}.$$

Dakle, FFT algoritmom se odrede Fourier-ovi spektri vektora \mathbf{f} i \mathbf{g} , oni pomnože po elementima, i inverznom FFT transformacijom tako dobijenog spektra, odredi vektor diskretne konvolucije. ■

Na diskretnoj konvoluciji zasnivaju se razni korisni algoritmi, na primer, za množenje polinoma, množenje vektora cikličnom matricom, i drugi.

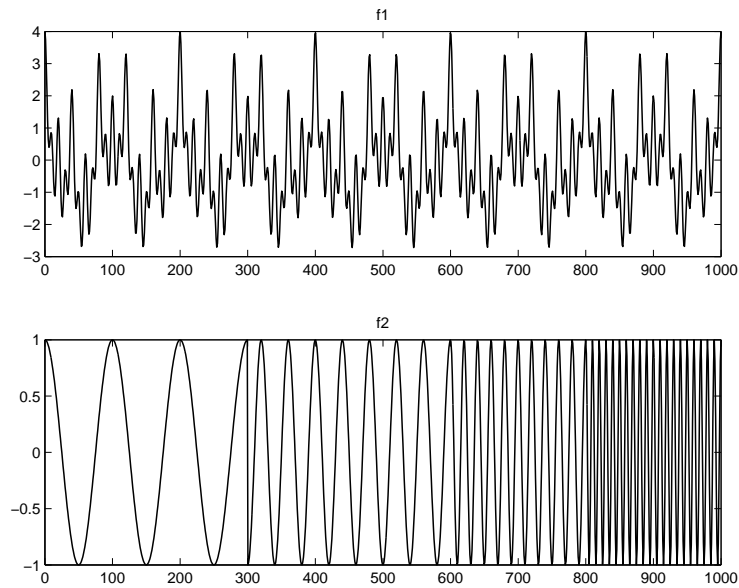
1.4 Talasići

Zbog neograničenog trajanja sinusoide, Fourier-ova analiza nije pogodna za obradu nestacionarnih signala, a to su oni čiji se frekventijski sadržaj menja sa vremenom. Ilustrujemo problem sledećim primerom.

PRIMER 12. *Predstaviti u vremenskom i frekventijskom domenu funkcije*

$$f1(x) = \cos(2\pi * 10 * x) + \cos(2\pi * 25 * x) \\ + \cos(2\pi * 50 * x) + \cos(2\pi * 100 * x)$$

$$f2(x) = \begin{cases} \cos(2\pi * 10 * x), & 0 < x < 300 \\ \cos(2\pi * 25 * x), & 300 < x < 600 \\ \cos(2\pi * 50 * x), & 600 < x < 800 \\ \cos(2\pi * 100 * x), & 800 < x < 1000 \end{cases}$$

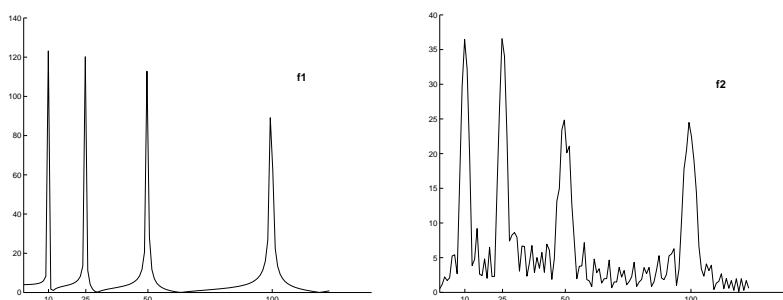


Slika 1.14: Stacionaran ($f1$) i nestacionaran ($f2$) signal

Funkcije $f1(x)$ i $f2(x)$ su predstavljene sa iste četiri sinusne funkcije. Razlika među njima je u tome što u funkciji $f1(x)$ sve četiri sinusoide traju sve vreme (za svako x u posmatranom intervalu), a u funkciji $f2$ kada se prva sinusoida završi, počinje druga, pa se ona nastavlja trećom, i na kraju signal završava četvrtom sinusoidom. Dakle, frekventijski sadržaj signala $f2$ se menja sa vremenom, te stoga kažemo

da je signal nestacionaran. Grafici funkcija f_1 i f_2 po vremenu x su, očigledno, potpuno različiti (slika 1.14).

Međutim, njihovi frekventijski spektri su vrlo slični. Grafici (slika 1.15) prikazuju zavisnost funkcija od frekvencije. Izrazite su vrednosti koeficijenata koji odgovaraju periodima pomenutih sinusoida, s tim što se na grafiku funkcije f_2 može uočiti šum koji je posledica smanjene glatkosti u tačkama spajanja različitih sinusoida. ■



Slika 1.15: Fourier-ov spektr stacionarnog (f_1) i nestacionarnog (f_2) signala

Tako se došlo do ideje da se nestacionaran signal podeli na manje vremenske intervale, i analizira frekventijski sadržaj svakog pojedinog dela. Jasno je da bismo Fourier-ovom analizom delova funkcije f_2 na intervalima dužine 100, dobili pravu informaciju o frekventijskom sadržaju te funkcije u svakom od intervala. Metoda, koja se zasniva na ovoj ideji, naziva se Kratkotrajna Fourier-ova transformacija (STFT = Short Time Fourier Transformation).

Ako deljenje funkcije na intervale vršimo pomoću tzv. prozorske funkcije,

$$W(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, 1) \\ 0, & x \notin [0, 1) \end{cases}$$

kratkotrajna Fourier-ova transformacija je jednaka Fourier-ovoj transformaciji u datom intervalu,

$$STFT_f(\omega, \tau) = \hat{f}(\omega), \quad x \in [\tau, \tau + 1],$$

i određena je kao Fourier-ova transformacija (21) funkcije $f(x)W(x - \tau)$.

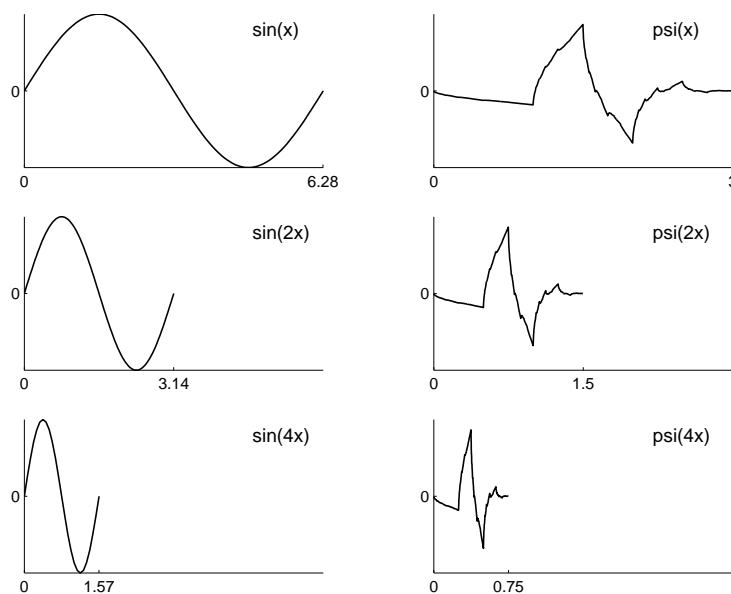
Svakako, mogli bismo definisati prozorsku funkciju i na drugi način, ali ostaje kao glavni nedostatak ovoga pristupa konstantna "dužina prozora". Bilo bi mnogo pogodnije kada bismo koristili "uži prozor" u delu gde je signal jako promenljiv, a "širi prozor" u delu gde se signal sporo menja.

Transformacija talasićima (WT = Wavelet Transformation) upravo omogućava korišćenje "prozora" promenljive dužine. Kao što je sinusoida osnovna funkcija Fourier-ove transformacije, talasić⁸

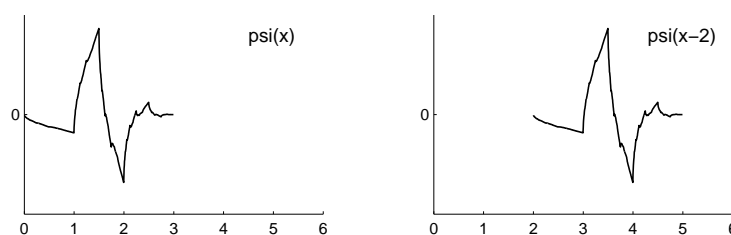
$$\psi_{a,b}(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{x-b}{a}\right)$$

⁸[28], strana 84

je osnovna funkcija transformacije talasićima. Kao i sinusoida, talasić je oscilatorna funkcija (ima srednju vrednost nula), ali je, za razliku od sinusoida, različit od nule samo na konačnom intervalu. Zbog oscilatorne prirode nazvan je talasom, a zbog ograničenog trajanja malim talasom ili talasićem. Kao i sinusoida, promenom parametra a može se skupljati ili širiti (dilatacija, slika 1.16), a promenom parametra b pomerati duž vremenske ose (translacija, slika 1.17).



Slika 1.16: Dilatacija sinusoide i talasića



Slika 1.17: Translacija talasića

Jasno je da se izborom parametara a i b podešava širina i pozicija prozora. Širina prozora određuje frekventijsku i vremensku rezoluciju. Što je vremenska rezolucija bolja, frekventijska rezolucija je lošija, i obrnuto. To znači da ne možemo tačno reći koje frekvencije postoje u datom vremenskom trenutku (princip neodređenosti).

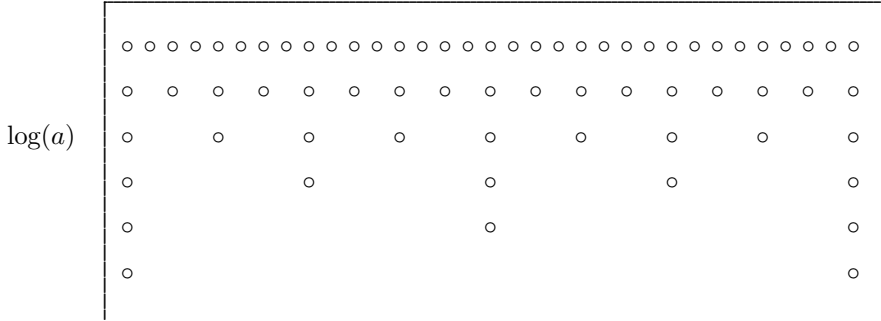
Ono što, takođe, treba pomenuti jeste da je Fourier-ova analiza definisana određenom funkcijom, sinusoidom, dok talasić nije jednoznačno određen – defini-

sana su samo pravila koja treba da budu zadovoljena da bi talasić imao određena svojstva.

Parametri a i b se mogu kontinualno menjati, što nije korisno sa stanovišta primene. Može se pokazati da se i pomoću prebrojivo mnogo dilatacija i translacija jednoga talasića može rekonstruisati signal. Tako dolazimo do pojma diskretni talasići. Oni su određeni izborom diskretnih vrednosti parametara a i b . Najčešće su te vrednosti stepeni broja 2, čime je definisana tzv. diadska mreža $a = 2^j$, $b = k 2^j$. Svakoj tački (k, j) ove mreže pridružen je talasić $\psi_{jk}(x)$, dobijen dilatacijom i translacijom osnovnog talasića $\psi(x)$ ("majke"),

$$\psi_{jk}(x) = 2^{-j/2} \psi(2^{-j}x - k), \quad \psi_{jk}(x) \neq 0, \quad x \in [2^j k, 2^j(k+1)].$$

Diadska mreža parametara predstavljena u je u $(k, \log_2(a))$ koordinatnom sistemu, jer se k menja linearno, a parametar a kao stepen broja 2.



Parametar a se na svakom novom nivou udvostručuje u odnosu na vrednost sa prethodnog nivoa, što znači da talasić postaje dvostruko širi. Broj tačaka u kojima se definišu talasići postaje dvostruko manji u odnosu na ovaj broj na prethodnom nivou, tj. rezolucija se smanjuje. Na taj način ostvaruje se koncept multirezolucije. Za opisivanje brzo promenljivog dela signala koriste se uski, gusto raspoređeni talasići, a za opisivanje sporo promenljivog dela signala koriste se razvučeni, retko raspoređeni talasići,

$$f(x) = \sum_{j \in \mathcal{Z}} \sum_{k \in \mathcal{Z}} b_{j,k} \psi_{j,k}(x)$$

Teorijski, stepeni broja 2 mogu ići od $-\infty$ do $+\infty$. U praksi, broj nivoa rezolucije je konačan, što se postiže uvođenjem u aproksimaciju funkcije skaliranja $\varphi(x)$,

$$(27) \quad f(x) \approx \sum_{k \in \mathcal{Z}} a_{J,k} \varphi_{j,k}(x) + \sum_{j=1}^J \sum_{k \in \mathcal{Z}} b_{j,k} \psi_{j,k}(x)$$

Opseg u kome će se kretati parametar k zavisi od vremenskog trajanja signala.

Funkcija skaliranja $\varphi(x)$ predstavlja osnov teorije talasića. Ona je rešenje dilatacione jednačine,

$$(28) \quad \varphi(x) = \sum_{k \in \mathcal{Z}} c(k) \sqrt{2} \varphi(2x - k).$$

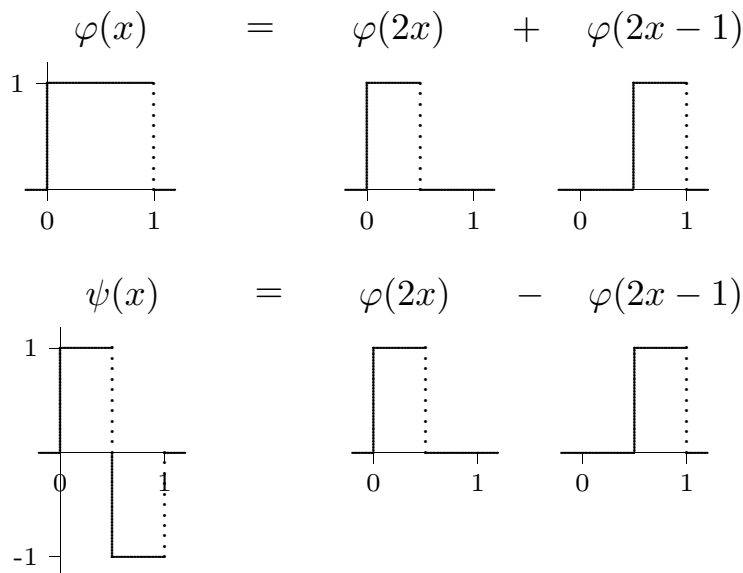
Ovo je jedini tip jednačine čije rešenje je funkcija različita od nule na konačnom intervalu, ukoliko jednačina ima konačan broj sabiraka. Osobine rešenja u potpunosti zavise od koeficijenata $c(k)$ dilatacione jednačine.

Linearnom kombinacijom dilatacija i translacija funkcije skaliranja, tzv. jednačinom talasića, definisan je osnovni talasić ("majka"),

$$(29) \quad \psi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} d(k) \sqrt{2} \varphi(2x - k).$$

PRIMER 13. *Određiti rešenje dilatacione jednačine (28), koja ima samo dva koeficijenta različita od nule, $c(0) = c(1) = 1/\sqrt{2}$. Definirati jednačinom (29) odgovarajući talasić.*

Rešenje date dilatacione jednačine je četvrtka. Četvrtkom, sa koeficijentima $d(0) = -d(1) = 1/\sqrt{2}$ u jednačini (29), definisan je Haar-ov talasić (Haar, 1909),

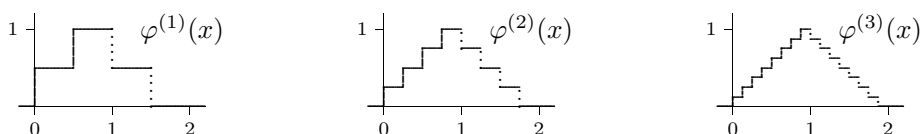


Slika 1.18: Haar-ova četvrtka i talasić

Korišćenjem ovih funkcija signal se predstavlja stepenastom funkcijom, pri čemu su dužine konstantnih intervala različite – veće tamo gde se signal sporo menja, a manje u delovima gde se on brzo menja.

PRIMER 14. *Kardinalni linearni B-splajn je funkcija skaliranja definisana dilatacionom jednačinom (28) sa koeficijentima $c(0) = c(2) = 1/(2\sqrt{2})$, $c(1) = 1/\sqrt{2}$.*

Slika 1.19 prikazuje aproksimaciju ove funkcije četvrtkom na različitim nivoima rezolucije. Primer ujedno ilustruje tzv. kaskadni algoritam za rešavanje dilatacione jednačine.



Slika 1.19: Aproksimacije linearnog splajna četvrtkom

Piramidalni algoritam je algoritam kojim se brzo računaju koeficijenti $a_{J,k}$ i $b_{j,k}$ u multirezolucijskoj reprezentaciji signala (27),

$$(30) \quad a_{j,k} = \sum_l c(l-2k)a_{j-1,l}, \quad b_{j,k} = \sum_l d(l-2k)a_{j-1,l},$$

pod uslovom da funkcije $\varphi(x)$ i $\psi(x)$ (odnosno koeficijenti c i d) zadovoljavaju određene uslove⁹. Ako su ovi koeficijenti poznati, signal se efikasno rekonstruiše korišćenjem inverznog piramidalnog algoritma,

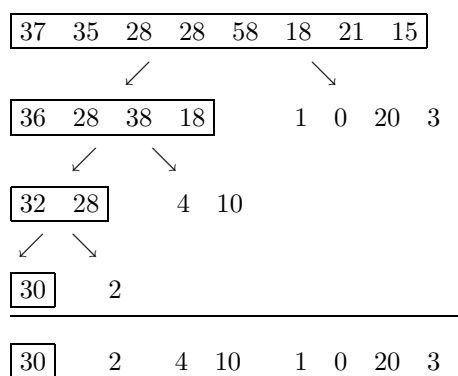
$$(31) \quad a_{j-1,l} = \sum_k (c(l-2k)a_{j,k} + d(l-2k)b_{j,k}).$$

Rekurzijama (30) i (31) je definisana Brza transformacija talasićima (FWT=Fast Wavelet Transformation), koja predstavlja efikasan algoritam savršene reprodukcije (analogon FFT algoritmu u Fourier-ovoj analizi).

PRIMER 15. *Ilustrujmo piramidalni algoritam na primeru četvrtke, kojom se računaju aritmetičke sredine susednih vrednosti u signalu, i Harovog talasića, kojim se računaju razlike susednih vrednosti u signalu. Koeficijenti kojima se transformacija vrši su koeficijenti jednačine skaliranja i jednačine talasića (primer 13),*

$$c(0) = c(1) = d(0) = -d(1) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

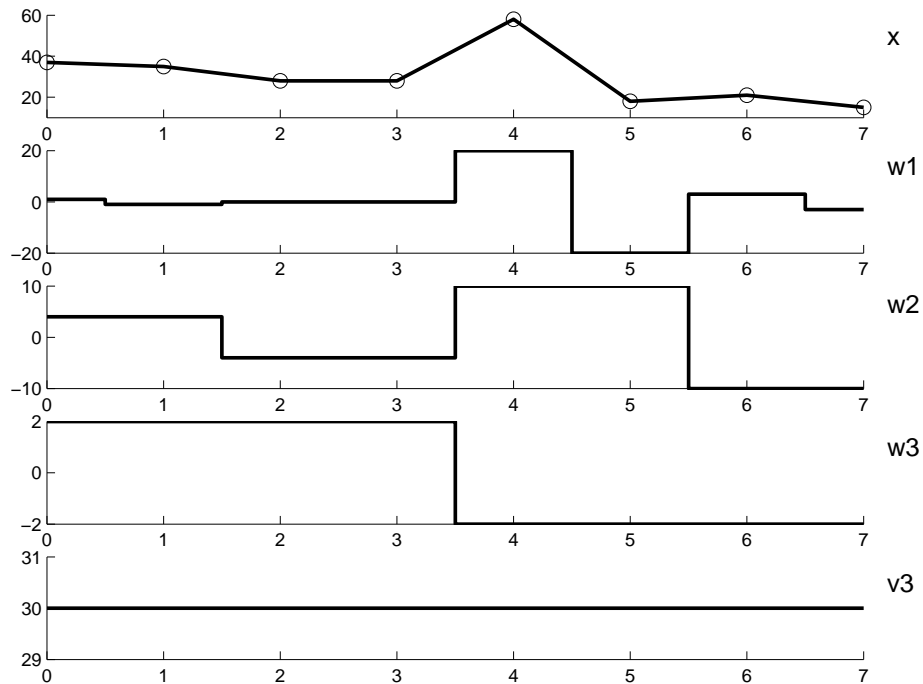
Račun, u kome je izostavljeno deljenje svih brojeva sa $\sqrt{2}$, prikazan je sledećom šemom



⁹[28], strana 89

Poslednja vrsta šeme sadrži jedan koeficijent funkcije skaliranja (uokviren), i sedam koeficijenata talasića: $2^0 = 1$ na poslednjem, trećem, nivou, $2^1 = 2$ na drugom, i $2^2 = 4$ na prvom nivou rezolucije.

Na slici 1.20 predstavljeni su izlomljenom linijom grafik signala (X), i detalji na sva tri nivoa (koeficijenti talasića W_1 , W_2 i W_3), kao i osrednjenje na poslednjem, najgrubljem nivou rezolucije (koeficijent funkcije skaliranja V_3). Detalji i osrednjenje predstavljaju "wavelet" spektar signala.



Slika 1.20: Razlaganje signala piramidalnim algoritmom

Na šemi izračunavanja se može uočiti da je jedan koeficijent talasića jednak nuli, a od preostalih šest neki se mogu zanemariti, tj. zameniti nulom, bez velikih posledica po izgled signala.

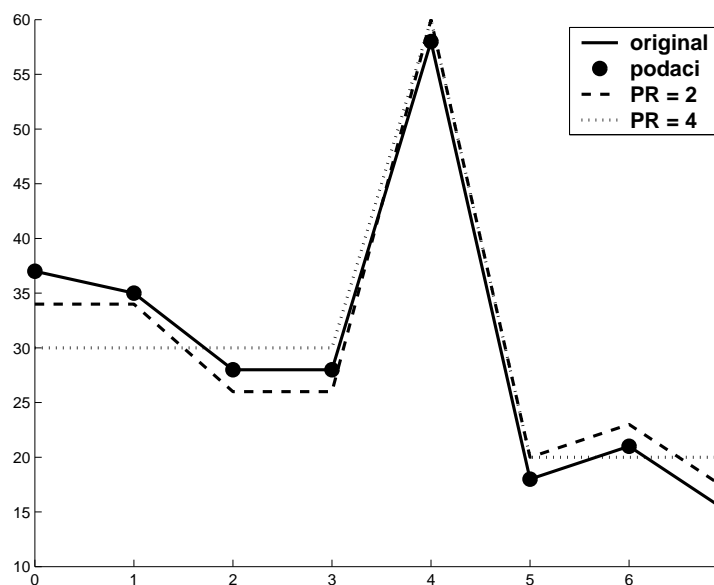
PRIMER 16. *Signal, koji je razložen u primeru 15, kompresovćemo tako što ćemo zameniti nulama sve koeficijente manje od ili jednake pragu $PR = 2$, odnosno pragu $PR = 4$. Pomoću kompresovanih koeficijenata ćemo inverznim piramidalnim algoritmom rekonstruisati signal u oba slućaja.*

Naredne dve šeme prikazuju postupak kompresije i sinteze, tj. rekonstrukcije kompresovanih signala na osnovu njihovih koeficijenata talasića i funkcije skaliranja. Kada ne bismo zanemarili ni jedan koeficijent razlićit od nule, dobili bismo polazni signal, što predstavlja savršenu rekonstrukciju.

Kompresija:

| <i>prag = 2</i> | | | | | | | | <i>prag = 4</i> | | | | | | | |
|-----------------|----|----|----|----|----|----|----|-----------------|----|----|----|----|----|----|----|
| 30 | 2 | 4 | 10 | 1 | 0 | 20 | 3 | 30 | 2 | 4 | 10 | 1 | 0 | 20 | 3 |
| 30 | 0 | 4 | 10 | 0 | 0 | 20 | 3 | 30 | 0 | 0 | 10 | 0 | 0 | 20 | 0 |
| 30 | 30 | 4 | 10 | 0 | 0 | 20 | 3 | 30 | 30 | 0 | 10 | 0 | 0 | 20 | 0 |
| 34 | 26 | 40 | 20 | 0 | 0 | 20 | 3 | 30 | 30 | 40 | 20 | 0 | 0 | 20 | 0 |
| 34 | 34 | 26 | 26 | 60 | 20 | 23 | 17 | 30 | 30 | 30 | 30 | 60 | 20 | 20 | 20 |

Slika 1.21 prikazuje originalni (puna linija) i kompresovane signale ($prag = 2$ isprekidana linija, $prag = 4$ tačkasta linija). Kompresija pri pragu jednakom dva je omogućila da se signal zapisan sa osam brojeva sačuva sa pet podataka, a pri pragu jednakom četiri samo sa tri podatka. Izbor praga zavisi od konkretnog problema i dozvoljene tolerancije, ali i od potrebe za kompresijom.



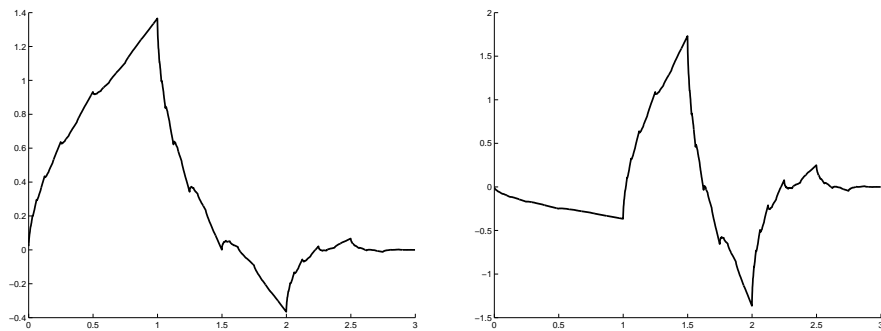
Slika 1.21: Originalni i kompresovani signali

Dobar izbor talasića je onaj koji će produkovati male koeficijente (detalje), tako da se ovi mogu zanemariti bez velike promene signala posle kompresije. Smanjenje broja podataka omogućava efikasan prenos na daljinu, skladištenje i brzo pretraživanje baze signala.

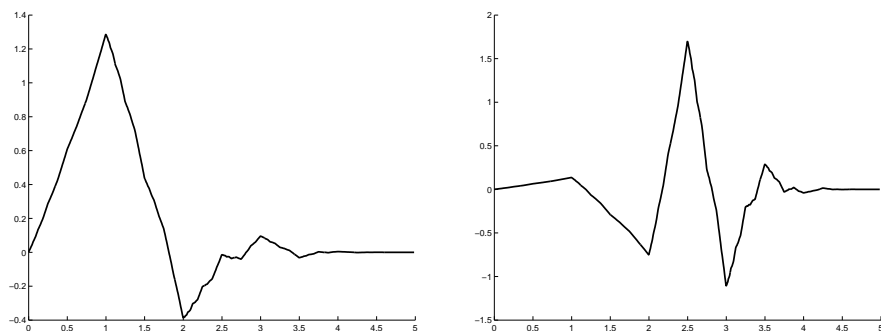
Daubechies talasići DbN. Za formulisanje pravila za konstrukciju talasića koji dopuštaju brzu transformaciju i imaju i druge poželjne osobine zaslužna je Ingrid Daubechies. Ona je 1988. godine objavila rad o novoj familiji talasića, koji su potom nazvani njenim imenom. Karakterišu se time da:

- nemaju eksplicitan izraz (izuzev Haar-ovog, $N = 1$),
- imaju kompaktno nosač $[0, 2N - 1]$ (interval na kome su različiti od 0),
- ortogonalni su (može se primeniti piramidalni algoritam),
- tačno reprodukuju polinome stepena ne većeg od $(N - 1)$,
- glatkost im se povećava sa povećanjem N .

Na slici 1.22 predstavljeni su Daubechies funkcija skaliranja (levo) i talasić (desno) za $N = 2$, a na slici 1.23 ove funkcije za $N = 3$.



Slika 1.22: Daubechies Db2 funkcija skaliranja (levo) i talasić (desno)



Slika 1.23: Daubechies Db3 funkcija skaliranja (levo) i talasić (desno)

Primene. S obzirom na razvoj informacionih i komunikacionih tehnologija, teorija talasića, iako mlada oblast, intenzivno se razvija i primenjuje u različitim oblastima obrade signala i slike, kao i u konstrukciji novih numeričkih algoritama.

- *Obrada signala* (analiza, sinteza, kompresija)
 - lociranje i predviđanje zemljotresa,
 - proučavanje udaljenih galaksija,
 - analiza i kompresija medicinskih signala (ECG, EEG),
 - kontrola kvaliteta analizom zvučnog signala,
 - komunikacije (kompresija).

- *Obrada slike*
 - kompresija otisaka prstiju u odnosu 20:1 (JPEG 2000),
 - kompresija slike,
 - kompjuterska grafika (uzastopno renderisanje),
 - kompjuterska vizija (multirezolucijski pristup).

- *Numeričke metode*
 - teorija aproksimacija,
 - multigrid tehnika,
 - modeliranje diferencijalnim jednačinama.

Teme

- 2.1 Ekonomski rast ([23], pp.13)
- 2.2 Rast populacije u SAD ([23], pp.26)
- 2.3 Savitzky-Golay filter ([13], pp.133)
- 2.4 Procena parametara fitovanih krivih ([23],pp.285)
- 2.5 Lociranje aviona ([13], pp.372)
- 3.1 Fourier-ov razvoj različitih funkcija ([26],pp.185)
- 3.2 Filtriranje signala putem Fourier-ovog spektra ([12],pp.152, M5)
- 3.3 Kompresija i rekonstrukcija signala putem FFT ([13],pp. 133)
- 3.4 FFT algoritam za brzo množenje polinoma ([26],pp.167)

- 3.5 Filtar definisan najmanjim kvadratima ([13], pp.138)
- 3.6 Fourier-ova metoda rešavanja jednačine provođenja toplote ([11],pp.239)
- 3.7 Dvodimenziona brza Fourier-ova transformacija
- 3.8 Diskretna kosinusna transformacija
- 3.9 Dvodimenziona konvolucija u prostornom i frekvencijskom domenu
- 3.10 Čitanje i zapis osnovnih formata slike
- 4.1 Određivanje spektra signala talasićima, i rekonstrukcija signala na osnovu datog spektra ([13],pp.133)
- 4.2 Kaskadni algoritam ([30],pp.42)
- 4.3 Algoritam rekurzije ([30],pp.47)
- 4.4 Piramidalni algoritam ([14],pp.13)
- 4.5 Črtanje grafika funkcije skaliranja i talasića pomoću piramidalnog algoritma ([14],pp.16)
- 4.6 Detektovanje ivica putem talasića ([26],pp.58)
- 4.7 Zavisnost osobina talasića od koeficijenata filtra
- 4.8 Interpolacioni talasići ([4],pp.17)
- 4.9 Modifikovani ("lifted") talasići ([14],pp.28)
- 4.10 Piramidalni algoritam za biortogonalne talasiće ([14],pp.10)
- 4.11 Kompresija slike pomoću talasića ([14],pp.33,[25],[33])
- 4.12 Konstrukcija polinoma najbolje ravnomerne aproksimacije ([6],pp.326)

2

Cauchy-jevi problemi

U primeru 1.5 formirali smo, na osnovu poznatih podataka, različite matematičke modele koji opisuju promenu broja stanovnika SAD u dužem vremenskom periodu. Konstatovali smo da ovaj pristup nije optimalan. Matematički model koji bolje opisuje ovaj proces je tzv. populacioni model. Njime se simulira promena broja jedinki neke biljne ili životinjske vrste u toku vremena. Opisan je običnim diferencijalnim jednačinama, kojima se najčešće opisuje promena (rast ili opadanje) neke veličine sa vremenom.

Ilustrujmo kreiranje matematičkog modela na primeru populacionog modela.

PRIMER 1. *Malthus-ov populacioni model*

Prvi populacioni model dao je engleski demograf i ekonomista Thomas Malthus 1798. godine. Pretpostavio je da su stopa (učestanost) rađanja, označimo je sa β , i stopa umiranja, označimo je sa δ , po jedinici vremena konstantne. Ako sa $u(t)$ označimo broj jedinki u trenutku t , posle vremena Δt broj jedinki će biti jednak

$$u(t + \Delta t) = u(t) + (\beta - \delta) u(t) \Delta t.$$

U graničnom slučaju, kada $\Delta t \rightarrow 0$, prethodna diferencna jednačina prelazi u običnu diferencijalnu jednačinu reda jedan

$$(1) \quad \frac{d}{dt} u(t) = \gamma u(t),$$

gde je sa $\gamma = \beta - \delta$ označena stopa priraštaja populacije. Na osnovu jednačine (1) možemo, na primer, odgovoriti na pitanje: za koliko vremena će se udvostručiti populacija u odnosu na prvobitni broj jedinki. Ne možemo, međutim, dobiti odgovor koliki je broj jedinki u datom trenutku. Jasno je da on zavisi od broja jedinki na početku praćenja promena $u(0)$, što znači da rešenje diferencijalne jednačine (1) nije jednoznačno određeno.

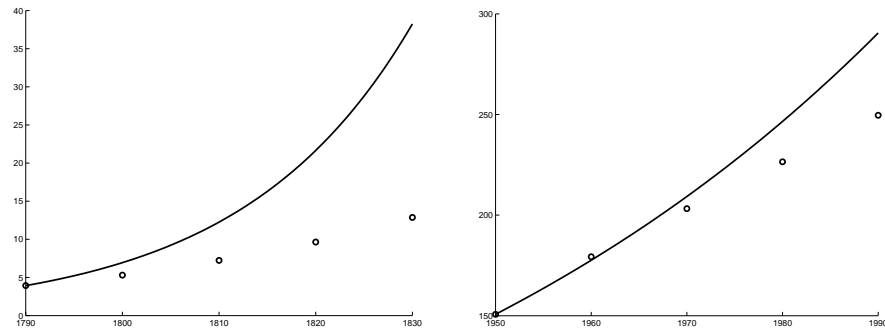
Integraljenjem jednačine (1) od početnog trenutka posmatranja do nekog vremena t , dobijamo da je broj jedinki u trenutku t jednak

$$(2) \quad u(t) = u(0) e^{\gamma t}.$$

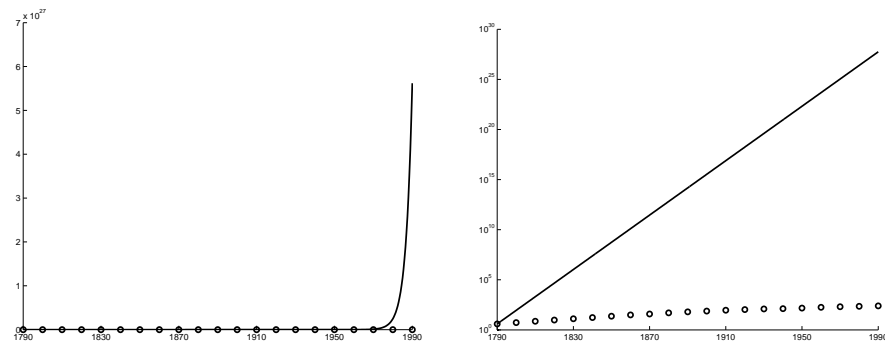
Za različiti izbor početnog broja populacije dobićemo različite funkcije $u(t)$. Rešenje će biti jednoznačno određeno ako zadamo i početni uslov $u(0) = u_0$. Stoga, korektno postavljen Malthus-ov model, u smislu postojanja jedinstvenog rešenja problema, je linearan Cauchy-jev problem ili problem početnih vrednosti¹

$$(3) \quad \frac{d}{dt} u(t) = \gamma u(t), \quad u(0) = u_0.$$

Primitimo da ovim kontinualnim modelom simuliramo diskretnu veličinu – broj jedinki neke populacije. ■



Slika 2.1: Model primenjen na početku (levo) i kraju (desno) perioda



Slika 2.2: Model primenjen na ceo period (linearna i logaritamska skala)

Slike 2.1 i 2.2 prikazuju rešenje modela (3), kada su početni uslov i parametar γ određeni podacima iz primera 1.5. Slika 2.1, levo, daje aproksimaciju rešenja modelom (3) za period 1790–1830 godina, a slika 2.1, desno, za period 1950–1990. Očigledno je da rast populacije u početnom periodu nije bio eksponencijalan, te je greška modela veća u odnosu na grešku modela na kraju posmatranog perioda. Slika 2.2 prikazuje rešenje modela (3) kada se uzmu u obzir svi raspoloživi podaci.

¹[28], strana 189

Slika levo predstavlja grafik rešenja na linearnoj skali, a slika desno grafik rešenja na logaritamskoj skali. Primetimo da rešenje (3) eksponencijalno raste (ili opada, ako je stopa smrtnosti veća od stope rađanja).

Zbog ograničenosti prirodnih resursa (hrane, vode, vazduha), logično je pretpostaviti da će rast populacije biti usporen. Rešenje Malthus-ovog modela teži beskonačnosti, što nije realno.

PRIMER 2. *Logistički populacioni model*

Novi matematički model je predložio belgijski matematičar Pierre Verhulst 1838. godine. Da bi maksimalni broj jedinki bio ograničen, što je realnija pretpostavka, Verhulst je, umesto konstantnih stopa rađanja i umiranja, pretpostavio da su ove stope linearne funkcije broja jedinki $u(t)$,

$$\beta(t) = \beta_0 - \beta_1 u(t), \quad \delta(t) = \delta_0 + \delta_1 u(t), \quad \beta_1, \delta_1 > 0.$$

Na taj način, sa povećanjem broja jedinki opada stopa rađanja, a raste stopa smrtnosti, jer je veća borba oko korišćenja ograničenih prirodnih resursa. Priraštaj populacije je linearna funkcija vremena, $\gamma(t) = (\beta_0 - \delta_0) - (\beta_1 - \delta_1) u(t)$, i može se predstaviti u obliku

$$(4) \quad \gamma(t) = \gamma_0 \left(1 - \frac{1}{U} u(t)\right),$$

gde je γ_0 maksimalni priraštaj (definiše rast populacije bez ograničenja), a U je optimalni broj jedinki. Kada se dostigne optimalni broj, priraštaj je jednak nuli ($u(t) = U \rightarrow \gamma(t) = 0$). Zamenom izraza (4) za γ u jednačini (3), dobijamo tzv. logistički model koji opisuje dinamiku neke populacije Cauchy-jevim problemom

$$(5) \quad \frac{d}{dt} u(t) = \gamma_0 \left(1 - \frac{1}{U} u(t)\right) u(t), \quad u(0) = u_0.$$

Rešenje nelinearnog modela (5) je

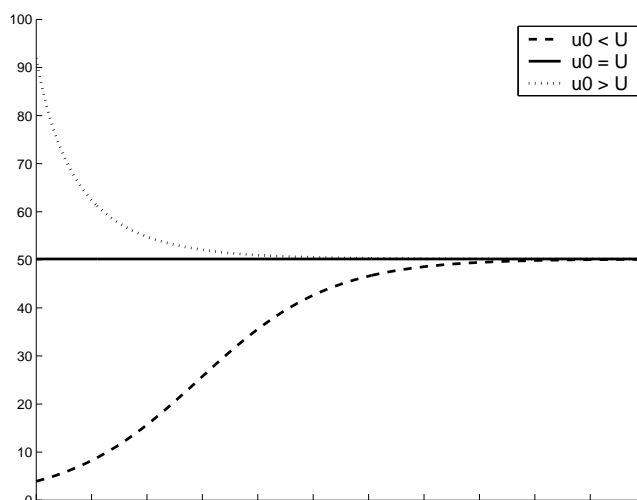
$$(6) \quad u(t) = \frac{u_0 U}{u_0 + (U - u_0) e^{-\gamma_0 t}}.$$

Mogući oblici rešenja logističkog modela predstavljeni su na slici 2.3.

Kada je $u_0 < U$ populacija se povećava i dostiže optimum. Ova kriva S-oblika naziva se logistička kriva. Kada je $u_0 > U$ populacija opada do optimalnog nivoa. Ako je $u_0 = U$ ili $u_0 = 0$ populacija se ne menja (ravnotežno stanje). ■

Nedostatak populacionog modela je što parametar γ_0 definiše i brzinu rasta (za $u_0 < U$), ali i brzinu opadanja (za $u_0 > U$) populacije do optimalnog broja. Nije očigledno da organizmi koji imaju nisku stopu reprodukcije, imaju i nisku stopu umiranja. Ovo ukazuje na potrebu daljeg usavršavanja modela.

Složenija situacija nastaje kada se posmatra međusobno delovanje više populacija. Ovi problemi se opisuju modelima definisanim sistemima diferencijalnih jednačina.



Slika 2.3: Logistička kriva

PRIMER 3. *Lotka-Volterra model, ili model grabljivice i plena.*

Posmatraćemo jednostavan ekosistem koga čine samo populacija mesojeda i populacija biljojeda (i trava kojom se ovi hrane). Neka $u_1(t)$ označava broj jedinki populacije biljojeda, a $u_2(t)$ broj jedinki populacije mesojeda u trenutku t . Neka su specifične brzine promene broja ovih jedinki

$$(7) \quad \mu_1 = \frac{1}{u_1} \frac{du_1}{dt} \quad \text{i} \quad \mu_2 = \frac{1}{u_2} \frac{du_2}{dt}.$$

Kada ne bi bilo uzajamnog delovanja između ove dve populacije i ukoliko drugi faktori ne bi uticali na njihov rast, na osnovu primera 1 se da zaključiti da bi se broj jedinki u ovim populacijama eksponencijalno menjao. Populacija biljojeda bi eksponencijalno rasla. Imala bi dovoljno hrane (trave), te bi njena brzina rasta bila pozitivna, $\mu_1 = a_1$ (više se jedinki rađa nego umire). Populacija mesojeda ne bi imala hrane (ne hrane se travom), te bi eksponencijalno izumirala. Brzina rasta ove populacije bila bi negativna, $\mu_2 = -a_2$ (veća smrtnost od rađanja). a_1 i a_2 su pozitivne konstante, i jednačine (7) nisu spregnute. One su oblika (1) i imaju rešenja oblika (2).

U našem ekosistemu mesojedi jedu biljojede, čime usporavaju rast populacije biljojeda. Najjednostavnija pretpostavka je da je smanjenje brzine rasta biljojeda srazmerno broju mesojeda,

$$\mu_1 = a_1 - b_1 u_2, \quad b_1 = \text{const} > 0.$$

Izumiranje mesojeda je usporeno i srazmerno je broju biljojeda kojima se hrane,

$$\mu_2 = -a_2 + b_2 u_1, \quad b_2 = \text{const} > 0.$$

Zamenom poslednjih izraza u jednačine (7), dobijamo sistem od dve obične diferencijalne jednačine reda jedan,

$$(8) \quad \begin{aligned} \frac{d}{dt}u_1(t) &= (a_1 - b_1 u_2(t)) u_1(t), \\ \frac{d}{dt}u_2(t) &= (-a_2 + b_2 u_1(t)) u_2(t), \end{aligned}$$

poznate pod nazivom Lotka-Volterra jednačine. Ovo je najjednostavniji model koji opisuje odnose grabljivice i plena. Zadavanjem početnih uslova $u_1(0)$ i $u_2(0)$, tj. broja jedinki na početku posmatranja, sistem definiše Cauchy-jev problem, koji predstavlja matematički model našeg jednostavnog ekosistema. ■

2.1 Metode tipa Runge-Kutt-a

Iako naizgled jednostavan, sistem (8) se ne može rešiti analitički, već se koriste numeričke metode za nalaženje približnog rešenja. Jednostavnu numeričku metodu za rešavanje zadatka ovoga tipa koriste bankari.

PRIMER 4. *Uložite 1000 dinara na račun kod banke, koja plaća 6% kamate na godišnjem nivou. Koliko je stanje na vašem računu posle godinu dana?*

Bankari računaju stanje na računu tako što dodaju kamatu u diskretnim vremenskim intervalima h , koji predstavlja godinu ili deo godine. Na primer, ako se kamata dodaje mesečno $h = 1/12$. Veličina v_n , stanje posle n vremenskih intervala, se računa rekurzijom

$$(9) \quad v_{n+1} = v_n + h r v_n, \quad v_0 = u(0),$$

gde je $u(0)$ vaš početni ulog, a r kamata. Dakle, posle godinu dana na računu imate v_{12} dinara, što nalazite uzastopnom primenom formule (9),

$$\begin{aligned} v_1 &= 1000 + \left(\frac{1}{12} \frac{6}{100}\right) 1000 = 1000 + (5 \cdot 10^{-3}) 1000 = 1005, \\ v_2 &= 1005 + (5 \cdot 10^{-3}) 1005 = 1010.025 \\ &\vdots \\ v_{12} &= 1000 (1.005)^{12} = 1061.68, \end{aligned}$$

jer je

$$v_{n+1} = v_n + h r v_n = v_n (1 + h r) = v_{n-1} (1 + h r)^2 = \dots = v_0 (1 + h r)^{n+1}.$$

Rekurziju (9) možemo zapisati i u sledećem obliku

$$(10) \quad \frac{v_{n+1} - v_n}{h} = r v_n.$$

Ako vreme označimo sa $t = nh$ i sa $u(t) = \lim_{h \rightarrow 0} v_n$ sumu novca u trenutku t , za $t = nh = \text{const}$, granični oblik izraza (10), kada $h \rightarrow 0$, opisuje nam kontinualni model dodavanja kamate

$$(11) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(t+h) - u(t)}{h} = \frac{d}{dt}u(t) = ru(t).$$

Rekurzija (9) predstavlja numerički algoritam za rešavanje Cauchy-jevog problema

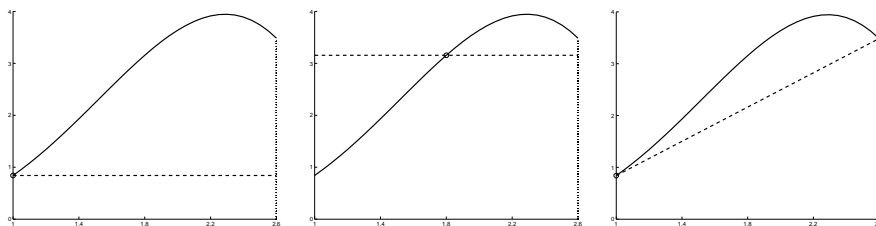
$$(12) \quad u'(t) = ru(t), \quad u(0) \text{ je zadato,}$$

poznat pod nazivom Euler-ova metoda². Banke, dakle, koriste Euler-ovu metodu za izračunavanje kamate na ulog.

Rešenje problema (12), za $r = 0.06$ i $u(0) = 1000$, je

$$(13) \quad u(t) = u(0)e^{rt} = 1000e^{0.06t},$$

što daje vrednost na račun u posle godinu dana $u(1) = 1000e^{0.06} = 1061.84$. Greška približnog rešenja v_{12} , određenog Euler-ovom metodom (9), u tački $t = 1$ jednaka je $|u(1) - v_{12}| = 0.16$. Dakle, banka nam zakine 16 para na 1000 dinara svake godine. ■



Slika 2.4: Kvadraturne formule primenjene u Euler-ovim metodama

Algoritam (9) se može dobiti integraljenjem jednačine (12) u intervalu $[t, t+h]$, pri čemu se integral $\int_t^{t+h} ru(s) ds$ aproksimira kvadraturnom formulom levih pravougaonika (slika 2.4, levo). Za Cauchy-jev problem formulisan u opštem obliku,

$$(14) \quad u'(t) = f(t, u(t)), \quad u(t_0) = u_0,$$

Euler-ova metoda glasi

$$(15) \quad v_{n+1} = v_n + hf(t_n, v_n).$$

Tačnija aproksimacija će se dobiti ako se ovaj integral aproksimira formulom srednjih pravougaonika (slika 2.4, u sredini) ili formulom trapeza (slika 2.4, desno). Ove modifikacije Euler-ove metode definisane su, redom, rekurzijama³

$$(16) \quad v_{n+1} = v_n + hf(t_{n+1/2}, v_{n+1/2}),$$

²[28], strana 195

³[28], strana 196

gde se koriste oznake $t_{n+1/2} = t_0 + (n + 1/2)h$ i $v_{n+1/2} \approx u(t_{n+1/2})$, i

$$(17) \quad v_{n+1} = v_n + \frac{h}{2} \left(f(t_n, v_n) + f(t_{n+1}, v_{n+1}) \right).$$

Problem u primeni algoritama (16) i (17) nastaje stoga što su argumenti funkcije f nepoznate vrednosti $v_{n+1/2}$ u form.(16), i v_{n+1} u form.(17). One se mogu aproksimirati, bez umanjavanja tačnosti, osnovnom Euler-ovom metodom (15)

$$v_{n+1/2} = v_n + \frac{h}{2} f(t_n, v_n), \quad \text{odnosno} \quad v_{n+1} = v_n + h f(t_n, v_n).$$

PRIMER 5. *Izračunati rast štednje iz primera 4, kada se matematički model rešava modifikacijama (16) i (17) Euler-ove metode.*

Poređenja radi, u tabeli koja sledi prikazan je rast štednje iz primera 4, kada se kamata računa kontinualno, po form.(13), i Euler-ovom metodom i njenim modifikacijama, form.(15), (16) i (17).

| t meseci | $u(t)$ (13) | $v_n^{(1)}$ (15) | $v_n^{(2)}$ (16) | $v_n^{(3)}$ (17) |
|------------|-------------|------------------|------------------|------------------|
| 0 | 1000.0000 | 1000.0000 | 1000.0000 | 1000.0000 |
| 1 | 1005.0125 | 1005.0000 | 1005.0125 | 1005.0125 |
| 2 | 1010.0502 | 1010.0250 | 1010.0501 | 1010.0502 |
| 3 | 1015.1131 | 1015.0751 | 1015.1130 | 1015.1131 |
| 4 | 1020.2013 | 1020.1505 | 1020.2013 | 1020.2014 |
| 5 | 1025.3151 | 1025.2513 | 1025.3150 | 1025.3152 |
| 6 | 1030.4545 | 1030.3775 | 1030.4544 | 1030.4546 |
| 7 | 1035.6197 | 1035.5294 | 1035.6196 | 1035.6198 |
| 8 | 1040.8108 | 1040.7070 | 1040.8106 | 1040.8109 |
| 9 | 1046.0279 | 1045.9106 | 1046.0277 | 1046.0280 |
| 10 | 1051.2711 | 1051.1401 | 1051.2709 | 1051.2712 |
| 11 | 1056.5406 | 1056.3958 | 1056.5404 | 1056.5407 |
| 12 | 1061.8365 | 1061.6778 | 1061.8363 | 1061.8367 |

U ovom primeru rešenje određeno form. (17) računato je kao rešenje diferencne jednačine

$$v_n^{(3)} = u(0) \left(\frac{2 + hr}{2 - hr} \right)^n,$$

a ne rekurzijom koja koristi procenu vrednosti rešenja u desnom kraju intervala. To je urađeno stoga što se za ovakav oblik desne strane jednačine (14) metoda (17) svodi na metodu (16),

$$(17): \quad v_{n+1}^{(3)} = v_n^{(3)} + \frac{hr}{2} (v_n^{(3)} + (v_n^{(3)} + hr v_n^{(3)})) = v_n^{(3)} \left(1 + hr + \frac{h^2 r^2}{2} \right),$$

$$(16): \quad v_{n+1}^{(2)} = v_n^{(2)} + rh (v_n^{(2)} + \frac{hr}{2} v_n^{(2)}) = v_n^{(2)} \left(1 + hr + \frac{h^2 r^2}{2} \right)$$

■

Ideja Euler-ove metode i njenih modifikacija se može uopštiti tako što se integral aproksimira kvadraturnom formulom višeg reda tačnosti. Metode izvedene na ovaj način nazivaju se metode tipa Runge-Kutt-a⁴. Metode tipa Runge-Kutt-a isključivo se primenjuju na jednačine ili sisteme jednačina reda jedan.

PRIMER 6. *Idealizovani ekosistem čine lisice i zečevi, pri čemu se lisice hrane zečevima, a zečevi travom koje ima u izobilju. U vremenskom trenutku t broj lisica je označen sa $u_2(t)$, a broj zečeva sa $u_1(t)$. Saglasno modelu izvedenom u primeru 3, za izabrane vrednosti parametara, matematički model koji opisuje ovaj ekosistem je definisan jednačinama*

$$(18) \quad \begin{aligned} u_1'(t) &= (3 - 2u_2(t)) u_1(t), & u_1(0) &= 1, \\ u_2'(t) &= (-2.5 + u_1(t)) u_2(t), & u_2(0) &= 1 \end{aligned}$$

Naći njegovo rešenje.

Sistem se ne može analitički rešiti, pa je rešen metodom Runge-Kutt-a reda 4⁵

$$\begin{aligned} v_{1,0} &= 1, & v_{2,0} &= 1, \\ k_{1,1} &= h(3 - 2v_{2,i})v_{1,i}, & i &= 1, 2, \dots, \\ & & k_{2,1} &= h(-2.5 + v_{1,i})v_{2,i}, \\ k_{1,2} &= h(3 - 2(v_{2,i} + 0.5k_{2,1}))(v_{1,i} + 0.5k_{1,1}), & & \\ & & k_{2,2} &= h(-2.5 + (v_{1,i} + 0.5k_{1,1}))(v_{2,i} + 0.5k_{2,1}), \\ k_{1,3} &= h(3 - 2(v_{2,i} + 0.5k_{2,2}))(v_{1,i} + 0.5k_{1,2}), & & \\ & & k_{2,3} &= h(-2.5 + (v_{1,i} + 0.5k_{1,2}))(v_{2,i} + 0.5k_{2,2}), \\ k_{1,4} &= h(3 - 2(v_{2,i} + k_{2,3}))(v_{1,i} + k_{1,3}), & & \\ & & k_{2,4} &= h(-2.5 + (v_{1,i} + k_{1,3}))(v_{2,i} + k_{2,3}), \\ v_{1,i+1} &= v_{1,i} + \frac{1}{6}(k_{1,1} + 2k_{1,2} + 2k_{1,3} + k_{1,4}), \\ v_{2,i+1} &= v_{2,i} + \frac{1}{6}(k_{2,1} + 2k_{2,2} + 2k_{2,3} + k_{2,4}). \end{aligned}$$

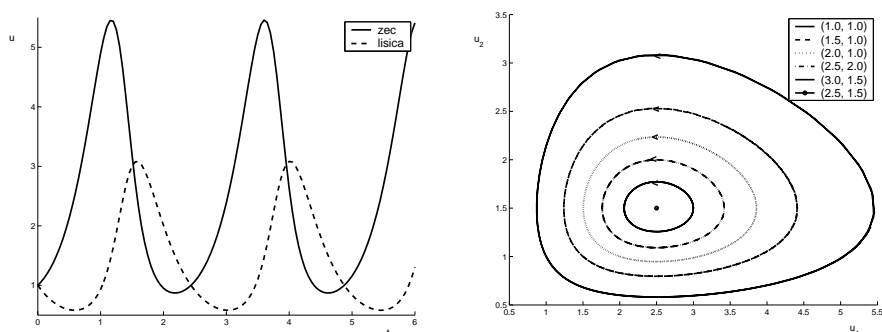
Rezultati izračunavanja prikazani su na slici 2.5

Slika 2.5, levo, prikazuje promenu broja zečeva (puna linija) i broja lisica (isprekidana linija) sa vremenom. Uočljivo je da pikovi rešenja u_2 (broj lisica) kasne za pikovima rešenja u_1 (broj zečeva). Kada je broj zečeva u porastu, počinje da raste i broj lisica, jer ima više hrane. Više lisica jede zečeve, pa broj zečeva počinje da opada. Usled nedostatka hrane, ubrzo potom počinje da opada i broj lisica. Ovaj proces se ciklično ponavlja.

Zavisnost broja lisica od broja zečeva može se predstaviti u tzv. faznoj ravni, određenoj koordinatnim osama u_1 i u_2 . U faznoj ravni predstavljenoj na slici 2.5, desno, zatvorene krive predstavljaju zavisnost broja lisica od broja zečeva za različite početne vrednosti broja jedinki. Krive su zatvorene, jer su funkcije u_1 i

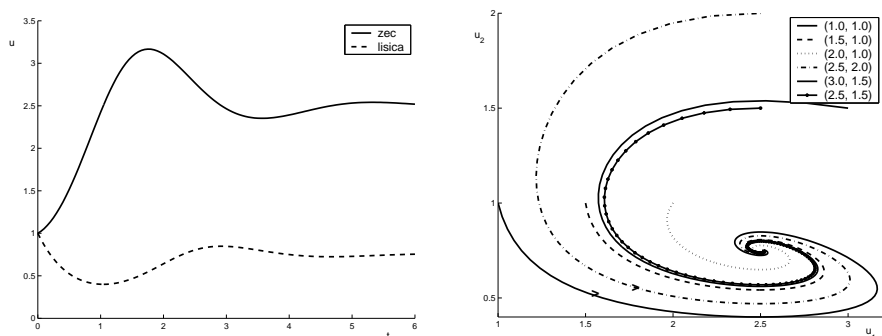
⁴[28], strana 193

⁵[28], strana 197



Slika 2.5: Promena broja zečeva i lisica sa vremenom

u_2 periodične (leva slika). Vreme raste u smeru označenom strelicama. Tačka u sredini predstavlja degenerisanu zatvorenu krivu određenu početnim vrednostima $(u_1(0), u_2(0)) = (2.5, 1.5)$. Za ovaj početni uslov broj lisica i broj zečeva se ne menja sa vremenom, što znači da je $u_1(t) \equiv 2.5$ i $u_2(t) \equiv 1.5$ za svako t . ■



Slika 2.6: Promena broja zečeva i lisica sa definisanim optimumom

PRIMER 7. Neograničeni rast populacije zečeva, u slučaju kada nema lisica, nije realna pretpostavka. Model ćemo popraviti tako što ćemo uzeti u obzir činjenicu da broj zečeva sporije raste što ih više ima, zbog ograničenosti količine njihove hrane (trave).

Saglasno primeru 2, prvu jednačinu modifikujemo tako da, kada populacija zečeva dostigne optimalni broj U , njen rast prestaje. Jednačina koja definiše promenu populacije lisica se ne menja. Popravka modela (18) je definisana Cauchy-jevim problemom

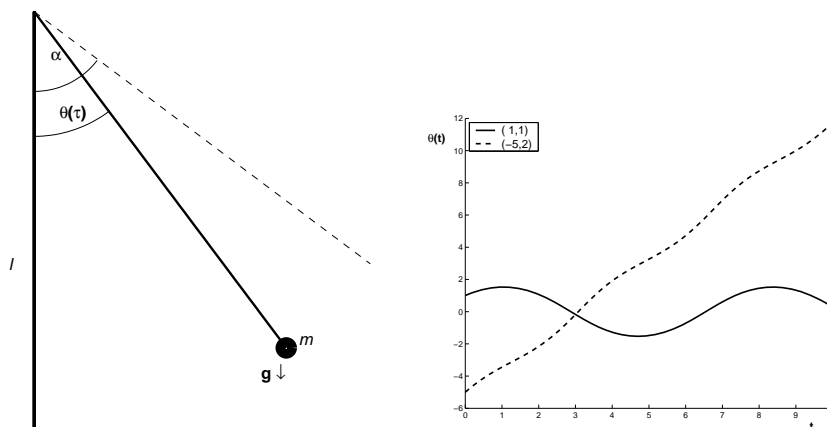
$$\begin{aligned} u_1'(t) &= \left(3\left(1 - \frac{u_1(t)}{U}\right) - 2u_2(t)\right) u_1(t), & u_1(0) &= 1, \\ u_2'(t) &= (-2.5 + u_1(t)) u_2(t), & u_2(0) &= 1. \end{aligned}$$

Broj zečeva $u_1(t)$ ne može biti veći od U , jer je u tom slučaju $u'_1(t) < 0$, pa funkcija $u_1(t)$ počinje da opada. Grafik rešenja ovog modela, za $U = 5$ (u hiljadama), predstavljen je na slici 2.6. Desna slika jasno pokazuje da se, bez obzira na početne uslove, posle izvesnog vremena uspostavlja stacionarno stanje, približno $(2.5, 0.7)$. ■

2.2 Prediktor-korektor metode

Metode tipa Runge-Kutt-a zahtevaju izračunavanje desne strane diferencijalne jednačine u više unutrašnjih tačaka intervala $(t, t + \Delta t)$, i tih tačaka je to više što je red metode veći. Kada je desna strana složena funkcija, povećava se vreme računanja i zauzeće memorije. Višeslojnim metodama⁶ ovaj se problem prevazilazi korićenjem već izračunatih vrednosti rešenja u tačkama mreže $t_i = t_0 + i\Delta t$, $i = 0, 1, 2, \dots$

PRIMER 8. *Klatno mase m , okačeno na kanap (koji se ne isteže) dužine l , izvedeno je iz ravnotežnog položaja za ugao $\alpha < \pi/2$ (slika 2.7, levo). Definišimo matematički model koji opisuje oscilovanje klatna, i pomoću njega odredimo ugao odstupanja klatna od ravnotežnog položaja $\Theta(\tau)$ u trenutku τ .*



Slika 2.7: Matematičko klatno

Grafici na slici 2.7, desno, prikazuju ugao između položaja klatna i ravnotežnog položaja kao funkciju vremena t , za dva različita početna položaja klatna. Kada je početni ugao α manji od $\pi/2$ i početni impuls koji je dat klatnu mali (ili nula), klatno periodično osciluje. Ako ne uzmemo u obzir otpor vazduha, klatno će stalno oscilovati sa istom amplitudom i neće se zaustaviti, što prikazuje grafik predstavljen punom linijom. Ako je početni ugao klatna veći od $\pi/2$, i, uz to mu je dat početni impuls ($\Theta'(0) \neq 0$), klatno će odleteti na drugu stranu i neće oscilovati, što prikazuje grafik predstavljen isprekidanom linijom.

⁶[28], strana 199

Objasnimo kako smo došli do ovih grafika. Da bismo pojednostavili model, pretpostavićemo da klatno ne rotira. Zbog krutosti kanapa, klatno se kreće po luku kruga poluprečnika l , čiji je centar drugi kraj kanapa. Komponente kretanja (brzina, ubrzanje) su tangencijalne na ovaj krug, a radijalne komponente su jednake nuli. Ugaona brzina predstavlja promenu ugla sa vremenom $\frac{d\Theta(\tau)}{d\tau}$. Brzina klatna na luku jednaka je proizvodu ugaone brzine i poluprečnika luka $v = l \frac{d\Theta(\tau)}{d\tau}$. Vučna sila je srazmerna proizvodu mase klatna i ubrzanja, i deluje u istom pravcu a suprotnom smeru od pravca i smeru kretanja klatna, $-m l \frac{d^2\Theta(\tau)}{d\tau^2}$. Gravitaciona sila $m g$ (g je gravitaciono ubrzanje) deluje na masu klatna vertikalno na dole (u pravcu i smeru središta Zemlje). Njena komponenta koja utiče na kretanje klatna je komponenta u pravcu tangente na kružnu putanju, $m g \sin \Theta(\tau)$. Dakle, kretanje klatna je rezultat delovanja ove dve sile, koje teže da se uravnoteže (Drugi Newton-ov zakon),

$$-m l \frac{d^2\Theta(\tau)}{d\tau^2} = m g \sin \Theta(\tau).$$

Uzimajući u obzir i zadate početne uslove, matematički model klatna je, stoga, definisan nelinearnim Cauchy-jevim problemom

$$(19) \quad m l \Theta''(\tau) + m g \sin \Theta(\tau) = 0, \quad \Theta(0) = \alpha, \quad \Theta'(0) = 0.$$

Posle deljenja diferencijalne jednačine sa masom m , dimenzionom analizom proveravamo saglasnost jedinica mere u modelu. Ako sa $[L]$ označimo jedinicu za dužinu, sa $[T]$ jedinicu za vreme i sa $[1]$ bezdimenzionu veličinu (radian, kojim se meri ugao), veličine koje učestvuju u modelu imaju sledeće dimenzije

$$l = [L], \quad \Theta''(\tau) = [T]^{-2}, \quad g = [L] [T]^{-2}, \quad \sin \Theta(\tau) = [1],$$

što znači da su u jednačini (19) sabirci dimenziono jednaki (ne možemo sabirati babe i žabe).

Dimenziona analiza nam ukazuje i na smenu kojom model transformišemo u bezdimezioni model,

$$\tau = t \sqrt{\frac{l}{g}}, \quad \Theta(\tau) = \theta(t), \quad \longrightarrow \quad \Theta''(\tau) = \frac{g}{l} \theta''(t).$$

Zamenom u formulama (19) dobijamo bezdimezioni matematički model klatna

$$(20) \quad \theta''(t) + \sin \theta(t) = 0, \quad \theta(0) = \alpha, \quad \theta'(0) = 0,$$

koji ćemo rešavati primenom višeslojnih numeričkih metoda. Da bismo mogli primeniti ove metode potrebno je, kao i u slučaju metoda tipa Runge-Kutt-a, diferencijalnu jednačinu reda dva svesti na sistem od dve diferencijalne jednačine reda jedan. Smenom $u_1(t) = \theta(t)$, $u_2(t) = \theta'(t)$ model (20) se predstavlja Cauchy-jevim problemom za sistem od dve obične diferencijalne jednačine reda jedan,

$$(21) \quad \begin{aligned} u_1'(t) &= u_2(t), & u_1(0) &= \alpha \\ u_2'(t) &= -\sin u_1(t), & u_2(0) &= 0. \end{aligned}$$

Rešićemo ga prediktor-korektor metodama: metodom Milne-a⁷

$$v_{1,i}^* = v_{1,i-4} + \frac{4h}{3} (2v_{2,i-1} - v_{2,i-2} + 2v_{2,i-3}), \quad i = 4, 5, \dots,$$

$$v_{2,i}^* = v_{2,i-4} + \frac{4h}{3} (-2 \sin(v_{1,i-1}) + \sin(v_{1,i-2}) - 2 \sin(v_{1,i-3})),$$

$$v_{1,i} = v_{1,i-2} + \frac{h}{3} (v_{2,i}^* + 4v_{2,i-1} + v_{2,i-2}),$$

$$v_{2,i} = v_{2,i-2} + \frac{h}{3} (-\sin(v_{1,i}^*) - 4 \sin(v_{1,i-1}) - \sin(v_{1,i-2})),$$

i metodom Adamsa⁸,

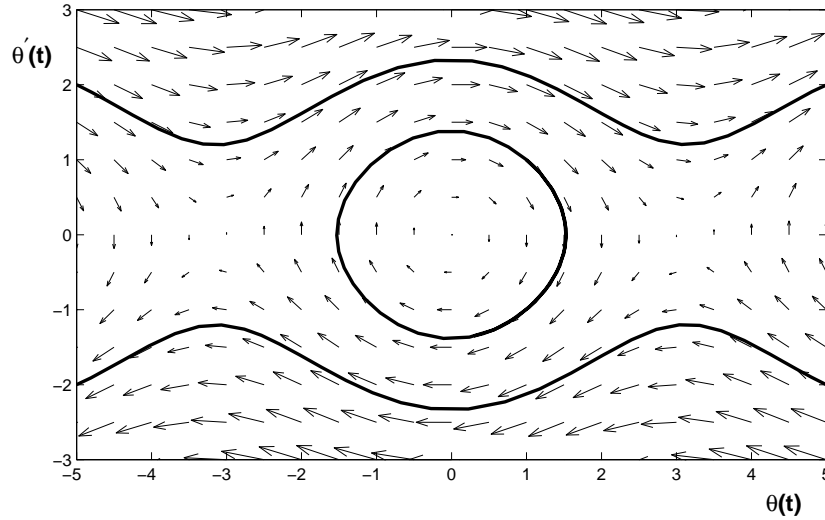
$$v_{1,i}^* = v_{1,i-1} + \frac{h}{24} (55v_{2,i-1} - 59v_{2,i-2} + 37v_{2,i-3} - 9v_{2,i-4}), \quad i = 4, 5, \dots,$$

$$v_{2,i}^* = v_{2,i-1} + \frac{h}{24} (-55 \sin(v_{1,i-1}) + 59 \sin(v_{1,i-2}) - 37 \sin(v_{1,i-3}) + 9 \sin(v_{1,i-4})),$$

$$v_{1,i} = v_{1,i-1} + \frac{h}{24} (9v_{2,i}^* + 19v_{2,i-1} - 5v_{2,i-2} + v_{2,i-3}),$$

$$v_{2,i} = v_{2,i-1} + \frac{h}{24} (-9 \sin(v_{1,i}^*) - 19 \sin(v_{1,i-1}) + 5 \sin(v_{1,i-2}) - \sin(v_{1,i-3})).$$

Početni odsečak određen je početnim uslovima $v_{1,0} = \alpha$, $v_{2,0} = \beta$, i, za $i = 1, 2, 3$, metodom Taylor-ovog razvoja u primeru 12.



Slika 2.8: Fazna ravan matematičkog klatna

⁷[28], strana 200

⁸[28], strana 201

Rezultati izračunavanja su prikazani u faznoj ravni (slika 2.8), radi preglednije predstavljanja rezultata modeliranja. U ovom slučaju, grafik predstavlja zavisnost u_2 od u_1 , odnosno zavisnost ugaone brzine klatna od njegovog položaja. MATLAB funkcija quiver faznu ravan predstavlja vektorskim poljem, tako da je svaka tačka označena vektorom (strelicom) $[u_2, -\sin u_1]$ (dužina vektora je skalirana). Gornja otvorena puna linija u faznoj ravni odgovara rešenju problema (21) predstavljenom isprekidanom linijom na slici 2.7, desno, dok donja otvorena puna linija odgovara njemu simetričnom rešenju (određeno početnim uslovima $(5, -2)$). Kružna linija u faznoj ravni odgovara rešenju problema (21) predstavljenom punom linijom na slici 2.7, desno, i ukazuje na početne uslove koji daju stabilno rešenje (periodičnu funkciju). ■

Za seminarski rad (2.2) je ponuđena tema složenijeg modela klatna.

2.3 Stabilnost numeričkih algoritama

Uparedimo stabilnost navedenih numeričkih metoda na jednostavnom ekološkom modelu.⁹

PRIMER 9. Model opisuje smanjenje zagađenja vode u jezeru. Pretpostavimo da voda u jezeru ima konstantnu zapreminu V . Neka su čestice zagađenja ravnomerno izmešane u jezerskoj vodi. Meru zagađenja u trenutku τ , nazovimo je koncentracija zagađenja $x(\tau)$, definišimo kao masu zagađivača, izraženu u gramima, sadržanu u jednom kubnom metru jezerske vode. Neka r označava konstantnu brzinu kojom voda izlazi iz jezera (na primer, zbog isparavanja), izraženu u kubnim metrima po danu. Pošto smo pretpostavili da se količina vode u jezeru ne menja, r označava i brzinu kojom voda ulazi u jezero (na primer, kroz padavine). Ukoliko pretpostavimo da nema novog zagađenja, brzina promene koncentracije zagađivača u jezerskoj vodi opisana je diferencijalnom jednačinom prvog reda

$$\frac{d}{d\tau}(x(\tau)V) = 0 - r x(\tau)$$

$$\begin{array}{l} \text{promena} = \text{ulaz} - \text{izlaz} \\ \text{koncentracije} \quad \text{zagađenja} \end{array}$$

tj. jednačinom

$$(22) \quad \frac{d}{d\tau} x(\tau) = -\frac{r}{V} x(\tau).$$

Dimenziona analiza

$$[T]^{-1} ([M] [L]^{-3}) = ([L]^3 [T]^{-1}) [L]^{-3} ([M] [L]^{-3}),$$

gde je $[T]$ oznaka za jedinicu vremena, $[L]$ jedinicu dužine, a $[M]$ jedinicu mase, pokazuje saglasnost matematičkog modela sa fizičkim, i ukazuje na smene koje treba uvesti da bi se dobio bezdimenzioni model.

⁹[28], strana 202

Smenama $t = \tau/T$, gde je T maksimalni broj dana za koji računamo rešenje, i $u(t) = x(\tau)/x(0)$ u jednačini (22), dobijamo bezdimenzioni model definisan Cauchy-jevim problemom

$$(23) \quad \frac{d}{dt} u(t) = a u(t), \quad 0 < t < 1, \quad u(0) = 1,$$

gde je $a = -Tr/V$ bezdimenziona konstanta. Rešenje $u(t)$ problema (23) predstavlja relativnu koncentraciju zagađenja u odnosu na početnu (procenat smanjenja zagađenja u datom trenutku u odnosu na početno stanje). Stvarna koncentracija zagađenja u trenutku $\tau = Tt$ jednaka je $x(\tau) = x(0)u(t)$.

Da bismo analizirali stabilnost numeričkih metoda na problemu (23), odredimo i njegovo tačno rešenje. Integraljenjem jednačine (23) od početnog trenutka posmatranja do nekog vremena t , dobijamo da je relativna koncentracija zagađenja u jezeru u trenutku Tt jednaka

$$(24) \quad u(t) = e^{at}.$$

Dakle, koncentracija zagađenja eksponencijalno opada ($a < 0$), a brzina opadanja zavisi od konstante r/V , koja predstavlja brzinu promene vode u odnosu na ukupnu zapreminu jezera. Ako postoji dotok zagađenja, koji je veći od njegovog isteka, u ovom idealnom modelu bilo bi $a > 0$. Sličan ovome modelu je i Malthus-ov populacioni model, opisan u primeru 1 ($a > 0$), ili model koji simulira vreme raspada radioaktivnog izotopa nekog hemijskog elementa ($a < 0$).

Cauchy-jev problem (23) ćemo rešiti i prethodno definisanim numeričkim metodama i dobijene rezultate uporediti sa tačnim rešenjem. Ostaćemo do kraja dosledni i rešavati realne probleme, te ćemo izračunati smanjenje zagađenja u periodu od $T = 100$ godina ($\approx 36 \cdot 10^3$ dana) u Velikim jezerima (SAD):

- jezero Erie: zapremina $V = 458 \cdot 10^9 \text{ m}^3$, prosečan dotok (i istek) $r = 479582208 \text{ m}^3/\text{dan}$, odakle sledi da je $a = -37.7$;
- jezero Michigan: $V = 4871 \cdot 10^9 \text{ m}^3$, prosečan dotok $r = 433092096 \text{ m}^3/\text{dan}$, odakle sledi da je $a = -3.2$.

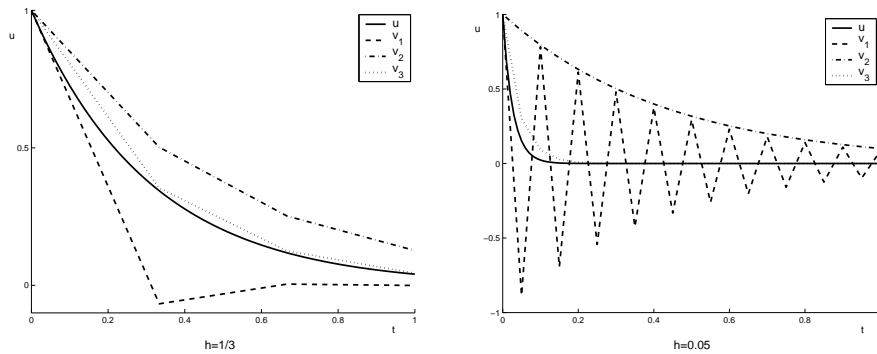
Numerička rešenja diferencnih jednačina, kojima su za jednačinu (23) definisane Euler-ove metode (primeri 4 i 5) i metoda Runge–Kutta¹⁰, su jednaka

$$(25) \quad \begin{aligned} v_{1,n} &= (1 + ha)^n, && \text{Euler-ova metoda} \\ v_{2,n} &= \left(1 + ha + \frac{h^2 a^2}{2}\right)^n, && \text{Euler-ova modifikovana metoda} \\ v_{3,n} &= \left(1 + ha + \frac{h^2 a^2}{2} + \frac{h^3 a^3}{6} + \frac{h^4 a^4}{24}\right)^n && \text{metoda Runge-Kutta} \end{aligned}$$

Da bi numerička rešenja, kao i tačno rešenje, težila nuli kada $n \rightarrow \infty$, potrebno je da osnove stepena po n u formulama (25) budu po modulu manje od jedan, što

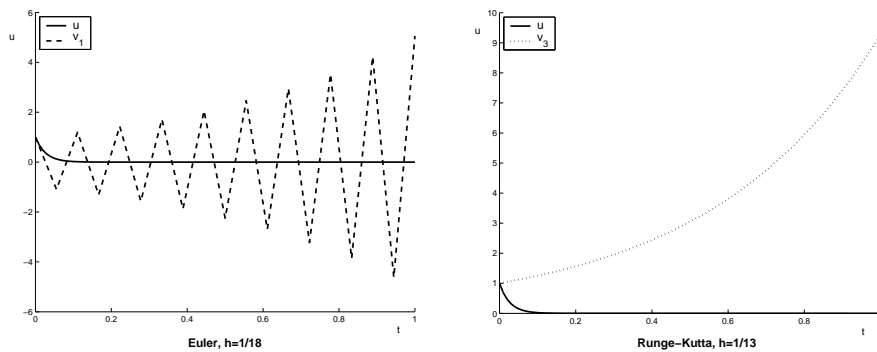
¹⁰[28], strana 204

određuje maksimalne vrednosti koraka h koje daju stabilna numerička rešenja. U primeru jezera Michigan koeficijent a je mali po apsolutnoj vrednosti (-3.2), te se stabilno rešenje dobija svakom od metoda za relativno veliki korak h (slika 2.9, levo). Za jezero Erie koeficijent a je veliki po apsolutnoj vrednosti, te su sve metode stabilne samo za malo h (slika 2.9, desno).



Slika 2.9: Numerički stabilna rešenja

Kada je korak h takav da je osnova stepena u formulama (25) veća po modulu od jedan numerička rešenja ne konvergiraju ka tačnom rešenju, što je ilustrovano slikom 2.10 za podatke date za jezero Erie.



Slika 2.10: Numerički nestabilna rešenja

Za Euler-ovu metodu je $h = 1/19$ maksimalna vrednost koraka koja daje konvergentno numeričko rešenje, jer je $1 + a/19 = -0.9840$. Već za $h = 1/18$ rešenje ne konvergira (slika 2.10, levo), jer je $1 + a/18 = -1.0942$. Prag konvergencije za metodu Runge-Kutta je $h = 1/14$, jer je izraz $1 + ha + \frac{h^2 a^2}{2} + \frac{h^3 a^3}{6} + \frac{h^4 a^4}{24}$ jednak 1.1867 za $h = 1/13$, i jednak 0.8690 za $h = 1/14$. ■

Ekološki model opisan primerom 9 je vrlo jednostavan, i na osnovu sprovedene analize jasan nam je izvor problema. Analizirani model je matematički identičan Maltus-ovom populacionom modelu izvedenom u primeru 1. I logistički model, popravka Maltus-ovog modela, koji je razvijen u primeru 2, daje vrlo zanimljivu analizu stabilnosti numeričkih metoda za rešavanje Cauchy-jevih problema za obične diferencijalne jednačine. I to je jedna od zanimljivih tema za seminarski rad.

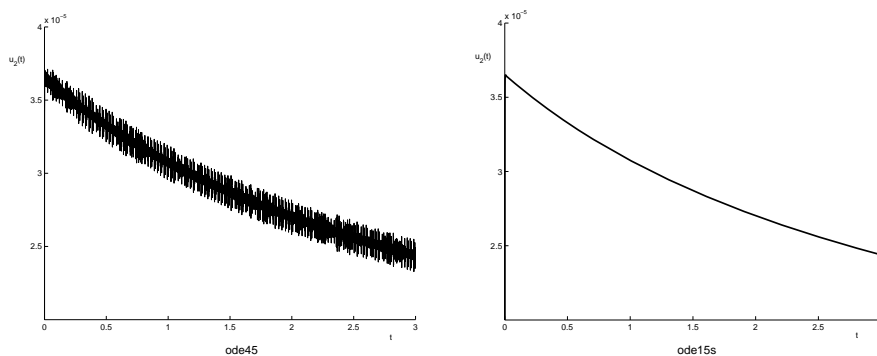
Mnogo je teže uočiti lošu uslovljenost problema ako je model definisan jednačinom višeg reda ili sistemom diferencijalnih jednačina prvog reda. Ovakvi problemi nazivaju se kruti (stiff) problemi, i treba biti vrlo obazriv u primeni metoda i odabiru parametara pri njihovom numeričkom rešavanju.

PRIMER 10. *Robertson-ov sistem običnih diferencijalnih jednačina*

$$\begin{aligned}u_1'(t) &= -0.04u_1(t) + 10^4u_2(t)u_3(t) \\u_2'(t) &= 0.04u_1(t) - 10^4u_2(t)u_3(t) - 3 \cdot 10^7u_2(t)^2 \\u_3'(t) &= 3 \cdot 10^7u_2(t)^2\end{aligned}$$

modeluje reakciju između tri hemikalije. Odrediti njegovo rešenje.

Model je rešen primenom MATLAB-ovih rutina ode45 (Runge-Kutt-a metoda) i ode15s (višeslojna metoda pogodna za krute probleme), i rešenje $u_2(t)$ je predstavljeno na slici 2.11. Slika levo prikazuje nestabilnost numeričkog rešenja određenog metodom Runge-Kutt-a, dok je stabilno rešenje na slici desno određeno pomenutom višeslojnom metodom.



Slika 2.11: Rešenje krutog sistema određeno dvema metodama

Rešenje je određeno u okolini početne tačke $[1, 0, 0]$. Jakobijeva matrica funkcija koje definišu desnu stranu sistema je čak singularna u datoj početnoj tački. Velika razlika u redu veličine koeficijenata sistema nagoveštava krutost sistema. ■

2.4 Aproksimativne metode

Za razliku od numeričkih metoda, koje približno rešenje daju u tabelarnom obliku, na diskretnom skupu tačaka posmatranog intervala, ovim metodama se približno rešenje određuje u analitičkom obliku.

Metoda uzastopnih aproksimacija se svodi na iterativnu metodu za rešavanje integralnih jednačina.¹¹

PRIMER 11. *Ilustrirajmo je na primeru 8. matematičkog modela klatna (21), u kome ćemo zadati opštiji oblik drugog početnog uslova, $u_2(0) = \beta$.*

Integraljenjem obe jednačine u granicama od 0 do t , dobijamo sistem integralnih jednačina

$$u_1(t) = \alpha + \int_0^t u_2(x) dx, \quad u_2(t) = \beta - \int_0^t \sin(u_1(x)) dx.$$

Iterativni algoritam, određen ovim sistemom, definisan je sledećim rekurzijama

$$\begin{aligned} u_1^{(n+1)}(t) &= \alpha + \int_0^t u_2^{(n)}(x) dx, & u_1^{(0)}(t) &= \alpha, \\ u_2^{(n+1)}(t) &= \beta - \int_0^t \sin(u_1^{(n)}(x)) dx, & u_2^{(0)}(t) &= \beta, \end{aligned} \quad n = 0, 1, \dots$$

Prvih nekoliko iteracija,

$$\begin{aligned} u_1^{(1)}(t) &= \alpha + \int_0^t \beta dx = \alpha + t\beta, \\ u_2^{(1)}(t) &= \beta - \int_0^t \sin \alpha dx = \beta - t \sin \alpha \\ u_1^{(2)}(t) &= \alpha + \int_0^t (\beta - x \sin \alpha) dx = \alpha + t\beta - \frac{t^2}{2} \sin \alpha, \\ u_2^{(2)}(t) &= \beta - \int_0^t \sin(\alpha + x\beta) dx = \beta + \frac{1}{\beta} (\cos(\alpha + t\beta) - \cos \alpha), \\ &\vdots \end{aligned}$$

ukazuje na problem koji se najčešće javlja u primeni ove metode. Podintegralne funkcije postaju sve složenije, te integrale nije moguće analitički izračunati. Zato se ova metoda obično koristi za nalaženje početnog odsečka za neku višeslojnu metodu, za šta je dovoljna gruba aproksimacija rešenja početnim aproksimacijama, jer se traže približne vrednosti rešenja u neposrednoj okolini početne tačke. ■

¹¹[28], strana 191

Metoda Taylor-ovog razvoja aproksimira rešenje Cauchy-jevog problema parcijalnom sumom njegovog Taylor-ovog razvoja¹²

PRIMER 12. *Odredimo aproksimaciju rešenja problema definisanog primerom 8 Taylor-ovim polinomom petog stepena.*

Za primenu ove metode koristićemo formulaciju (20) iz navedenog primera. Početni uslovi i sama jednačina određuju prva tri koeficijenta Taylor-ovog razvoja rešenja u okolini nule,

$$\theta(0) = \alpha, \quad \theta'(0) = \beta, \quad \theta''(0) = -\sin \alpha.$$

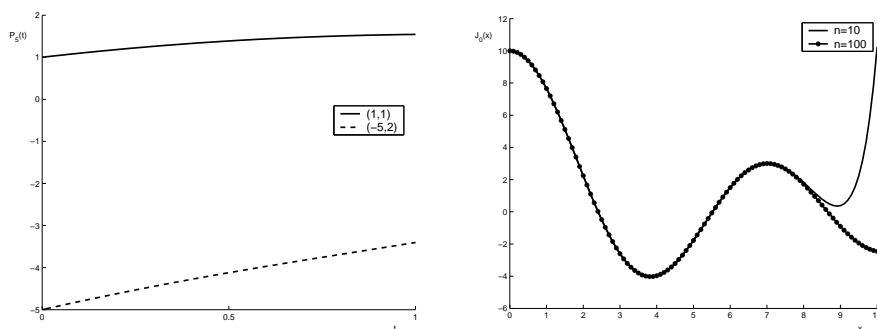
Uopštili smo postavku zadatka zadavanjem početnog uslova $\theta'(0) = \beta$, kako bismo mogli koristiti dobijenu aproksimaciju za određivanje početnog odsečka za višeslojne metode korišćene u primeru 8. Preostala dva koeficijenta dobijamo diferenciranjem jednačine i računanjem dobijenih izvoda u tački $t = 0$,

$$\begin{aligned} \theta'''(t) &= -\theta'(t) \cos(\theta(t)), & \theta'''(0) &= -\beta \cos \alpha, \\ \theta^{(4)}(t) &= -\theta''(t) \cos(\theta(t)) + (\theta'(t))^2 \sin(\theta(t)), & \theta^{(4)}(0) &= (\beta^2 + \cos \alpha) \sin \alpha \end{aligned}$$

Tražena aproksimacija rešenja polinomom petog stepena je parcijalna suma Taylor-ovog razvoja rešenja u okolini početne tačke $t = 0$,

$$P_5(t) = \alpha + t\beta - t^2 \frac{\sin \alpha}{2!} - t^3 \frac{\beta \cos \alpha}{3!} + t^4 \frac{(\beta^2 + \cos \alpha) \sin \alpha}{4!}.$$

Grafici polinoma za dva izbora početnih parametara su predstavljeni na slici 2.12, levo. Poređenje sa desnom slikom 2.7 pokazuje da ovi polinomi daju dobru aproksimaciju rešenja u okolini tačke $t = 0$, ovde u intervalu $[0, 1]$, i mogu biti korišćeni za određivanje početnog odsečka za dalju primenu višeslojnih metoda. ■



Slika 2.12: Aproksimacije parcijalnim sumama reda

¹²[28], strana 191

Metoda stepenih redova. Mnoge važne diferencijalne jednačine drugog reda, koje se često pojavljuju u praksi, su oblika

$$(26) \quad (1 + r_m x^m) \frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{1}{x} (p_0 + p_m x^m) \frac{du}{dx} + \frac{1}{x^2} (q_0 + q_m x^m) u = 0,$$

gde je m pozitivan ceo broj. Na primer, za $m = 2$ i različite izbore koeficijenata p , q i r , definisane su jednačine čija rešenja su ortogonalni polinomi ili druge specijalne funkcije.

PRIMER 13. *Metodom stepenih redova*¹³ *odredićemo Čebišev-ljev polinom $T_n(x)$ stepena n .*

On je rešenje Cauchy-jevog problema

$$(27) \quad (1 - x^2) \frac{d^2 T_n}{dx^2} - x \frac{dT_n}{dx} + n^2 T_n = 0,$$

$$T_n(0) = \begin{cases} (-1)^m, & n = 2m \\ 0, & n = 2m + 1 \end{cases} \quad T_n'(0) = \begin{cases} 0, & n = 2m \\ (-1)^m, & n = 2m + 1 \end{cases}$$

Potražimo rešenje u obliku stepenog reda. Pod pretpostavkom da je red uniformno konvergentan, rešenje i njegovi izvodi su jednaki

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k, \quad T_n'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k x^{k-1}, \quad T_n''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) c_k x^{k-2}.$$

Zamenimo ove izraze u diferencijalnu jednačinu (27) i dobijamo

$$(1 - x^2) \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) c_k x^{k-2} - x \sum_{k=1}^{\infty} k c_k x^{k-1} + n^2 \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = 0.$$

Sređivanjem poslednje jednakosti, dobija se da je

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1) c_{k+2} x^k - \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) c_k x^k - \sum_{k=1}^{\infty} k c_k x^k + n^2 \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = 0,$$

tj., objedinjavanjem sabiraka pod zajedničku sumu, dobijamo identitet

$$(2 \cdot 1 c_2 + n^2 c_0) x^0 + (3 \cdot 2 c_3 - c_1 + n^2 c_1) x + \sum_{k=2}^{\infty} ((k+2)(k+1) c_{k+2} - (k^2 - n^2) c_k) x^k = 0.$$

Izjednačavanjem koeficijenata uz jednake stepene x na levoj i desnoj strani (da bi rešenje $T_n(x)$ zadovoljavalo jednačinu za svako x) dobijamo rekurentne veze za koeficijente c_k ,

$$c_2 = -\frac{n^2}{2} c_0, \quad c_3 = \frac{1-n^2}{6} c_1, \quad c_{k+2} = \frac{k^2 - n^2}{(k+2)(k+1)} c_k, \quad k = 2, 3, \dots$$

¹³[28], strana 192

Očigledno je da se svi koeficijenti sa parnim indeksom izražavaju pomoću c_0 , a sa neparnim indeksom pomoću c_1 ,

$$\begin{aligned} c_{2j} &= \frac{((2j-2)^2 - n^2) ((2j-4)^2 - n^2) \dots (2^2 - n^2)(-n^2)}{(2j)(2j-1)(2j-2)(2j-3) \dots 2 \cdot 1} c_0, \\ c_{2j+1} &= \frac{((2j-1)^2 - n^2) ((2j-3)^2 - n^2) \dots (3^2 - n^2)(1^2 - n^2)}{(2j+1)(2j)(2j-1)(2j-2) \dots 3 \cdot 2} c_1, \end{aligned} \quad j = 1, 2, \dots$$

Iz početnih uslova zaključujemo da je

$$c_0 = \begin{cases} (-1)^m, & n = 2m \\ 0, & n = 2m + 1 \end{cases} \quad c_1 = \begin{cases} 0, & n = 2m \\ (-1)^m, & n = 2m + 1 \end{cases},$$

te je za

$n = 2m$

$$u_{2m}(x) = (-1)^m \left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{((2j-2)^2 - (2m)^2) ((2j-4)^2 - (2m)^2) \dots (-2m)^2}{(2j)!} x^{2j} \right),$$

$n = 2m + 1$

$$u_{2m+1}(x) = (-1)^m \left(x + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{((2j-1)^2 - (2m+1)^2) \dots (1^2 - (2m+1)^2)}{(2j+1)!} x^{2j+1} \right).$$

Jasno je da su obe sume konačne, jer su koeficijenti u obe sume jednaki nuli kada je $j \geq m+1$ (u prvoj sumi za $2j-2 \geq 2m$, a u drugoj za $2j-1 \geq 2m+1$). Rešenje je, stoga, polinom stepena n (paran za n parno i neparan za n neparno),

$$T_n(x) = \begin{cases} (-1)^{n/2} \left(1 + \sum_{j=1}^{n/2} \frac{((2j-2)^2 - n^2) \dots (-n^2)}{(2j)!} x^{2j} \right), & n \text{ parno} \\ (-1)^{(n-1)/2} \left(x + \sum_{j=1}^{(n-1)/2} \frac{((2j-1)^2 - n^2) \dots (1^2 - n^2)}{(2j+1)!} x^{2j+1} \right), & n \text{ neparno} \end{cases}$$

i to je Čebišev-ljev polinom $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$. ■

Slično, kao rešenje Cauchy-jevog problema definisanog diferencijalnom jednačinom

$$x^2 \frac{d^2 u}{dx^2} + x \frac{du}{dx} + (x^2 - p^2) u = 0,$$

gde je n je prirodan broj ili nula, a p je realan broj, dobija se *Bessel-ova funkcija* $J_p(x)$. Na primer, za $p = 0$ dobija se Bessel-ova funkcija reda nula,¹⁴

$$(28) \quad J_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2^k k!)^2} x^{2k}.$$

Na slici 2.12, desno, predstavljene su parcijalne sume reda (28) od 10 (puna linija) i 100 sabiraka (puna linija sa zvezdicom). Jasno je da se sa povećanjem broja sabiraka povećava tačnost u široj okolini početne tačke.

¹⁴[16], strana 142

Teme

- 1.1 Promena zaliha ili koncentracije ([7], pp.296)
- 1.2 Projektil ([5],pp.164; [24],pp.225)
- 1.3 Baždarenje ([13],pp.181)
- 1.4 Aerozagadenje ([24],pp.227)
- 1.5 Dijabetes ([3],pp.128)
- 1.6 Dete i igračka ([13], pp.3)
- 1.7 Potera ([15], pp.154)
- 1.8 Procesi u molekulu ([10], pp.271-ch.7)
- 1.9 Fotosinteza ([7], pp.314)
- 1.10 Zemljin satelit ([13], pp.333)
- 2.1 Padobranac ([11],pp.32;[24],pp.225)
- 2.2 Raketa ([3],pp.36)
- 2.3 Džoger i pas ([13],pp.6)
- 2.4 Skok u dalj ([24],pp.226)
- 2.5 Protok glukoze kroz membranu ([23], pp.383)
- 2.6 Klatno koje i rotira ([7], pp.126,172,352)
- 2.7 Putanja teniske loptice ([13], pp.26)
- 2.8 Čigra ([13], pp.171)
- 2.9 Skijaš na vodi ([5],pp.160)
- 3.1 Plamen ([24],pp.205)
- 3.2 Fraktali
- 3.3 Interakcija tri tela ([13],pp.52)
- 3.4 Lorenz-ov atraktor ([7], pp.380,[24], pp.202)
- 3.5 Migracija populacije ([13], pp.351)
- 3.6 Proboj ([13], pp.201)
- 3.7 Strateško investiranje ([13], pp.356)
- 4.1 Hipergeometrijske funkcije ([16], pp.162)

- 4.2 Jacobi-jeve funkcije ([16], pp.183)
- 4.3 Čebišev-ljevi polinomi ([16], pp.174)
- 4.4 Bessel-ove funkcije ([16], pp.141)
- 4.5 Legendre-ove funkcije i polinomi ([16], pp.157)

3

Granični problemi

Za razliku od Cauchy-jevih problema, ili problema početnih vrednosti kod kojih je partikularno rešenje određeno zadavanjem uslova u jednoj tački (početnih uslova), granični problemi se karakterišu zadavanjem dodatnih uslova u više od jedne tačke.¹ Prvobitno su to bili problemi kod kojih su uslovi definisani samo na krajevima intervala, te otuda potiče naziv. Kako je broj uslova koji određuju jednoznačno partikularno rešenje jednak redu jednačine, ovi problemi se ne mogu definisati za jednačine prvog reda.

PRIMER 1. *Formulišimo matematički model koji opisuje raspodelu toplote u tankom štapa, koji je izolovan na desnom kraju, a na čijem se levom kraju održava konstantna temperatura.*

Neka je $U(X)$ temperatura štapa u tački X , $0 \leq X \leq D$, D je dužina štapa, i $U(0) = U_0$ njegova temperatura na levom kraju. Izolovanost desnog kraja štapa znači da nema promene temperature na desnom kraju, što se matematički zapisuje uslovom $dU(D)/dX = 0$. Jednačina difuzije opisuje raspodelu toplote, te je matematički model opisanog fizičkog modela definisan graničnim problemom

$$(1) \quad A \frac{d^2 U(X)}{dX^2} - K P U(X) = 0, \quad U(0) = U_0, \quad \frac{dU(D)}{dX} = 0,$$

gde je A površina, a P obim poprečnog preseka štapa, i K karakteriše toplotnu provodljivost. Dimenzionom analizom pokazujemo da matematički model dimenziono odgovara fizičkom modelu,

$$[L]^2 [C] [L]^{-2} - [L]^{-1} [L] [C] = 0.$$

Smenama

$$(2) \quad X = D x \quad U(X) = U_0 u(x), \quad c = \frac{K P D^2}{A},$$

¹[28], strana 205

problem (1) se svodi na bezdimenzioni granični problem

$$(3) \quad u''(x) - cu(x) = 0, \quad x \in [0, 1], \quad u(0) = 1, \quad u'(1) = 0.$$

Na primer, izborom parametara, $P = 15.3\text{cm}$, $A \approx 13\text{cm}^2$, $K = 5.46 * 10^{-4} \text{cm}^{-1}$, $D = 122\text{cm}$ i $U_0 = -12^\circ\text{C}$, smene (2) postaju

$$X = 120x \text{ cm}, \quad U(X) = -12 u(x) ^\circ\text{C}, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

a u graničnom problemu (3) bezdimenziona konstanta je $c = 9.6$. ■

Za jednačine ili sisteme jednačina višeg reda granični problemi su raznovrsniji, jer je broj zadatih uslova veći i oni mogu biti zadati i u unutrašnjim tačkama intervala.

PRIMER 2. *Bezdimenzioni granični problem*

$$\begin{aligned} u^{(4)}(x) &= f(x), & 0 \leq x \leq 1, \\ u(x_i) &= 0, \quad i = 1, 2, 3, 4, & 0 \leq x_1 < x_2 < x_3 < x_4 \leq 1, \end{aligned}$$

opisuje deformaciju grede pod uticajem spoljašnje sile $f(x)$, ako se u četiri tačke x_i greda oslanja na nosače. ■

Granični problemi su mnogo složeniji od Cauchy-jevih. Kod Cauchy-jevih problema rešenje je potpuno određeno uslovima zadatim u jednoj tački. Stoga, krećući se od te tačke u pravcu određenom jednačinom, približno rekonstruišemo rešenje, tj. računamo približne vrednosti rešenja u drugim tačkama intervala. Kod graničnih problema, uslovima zadatim u početnoj tački rešenje nije jednoznačno određeno. Iz familije integralnih krivih koje zadovoljavaju dati početni uslov treba odabrati onu koja će proći kroz ostale tačke, odnosno zadovoljiti uslove zadate u ostalim tačkama. Iterativno podešavanje krive, tako da ona zadovolji sve zadate uslove, je u osnovi metode gađanja.²

3.1 Metoda gađanja

Za vreme Drugog svetskog rata od matematičara je zatraženo da izrade tabele, na osnovu kojih bi artiljerci podešavali ugao cevi oružja kako bi pogodili cilj na poznatom rastojanju. Ugao položaja cevi topa je nepoznati početni uslov, i izračunava se na osnovu poznatog rastojanja do cilja, tj. podatka o rešenju u nekoj drugoj tački.

PRIMER 3. *Formirajmo matematički model koji opisuje putanju projektila izbačenog iz topa, na osnovu koje se može izračunati traženi ugao.*

Uprostićemo model tako što ćemo pretpostaviti da nema vetra, rotacije projektila, i slično. Deluju samo sila zemljine teže mg vertikalno na dole (m je masa projektila, a g ubrzanje zemljine teže), i sila otpora vazduha cv^2 (v je intenzitet

²[28], strana 207

brzine projektila, a c konstanta), koja deluje u pravcu kretanja i smeru suprotnom od smera kretanja projektila. U koordinatnom sistemu xOy sa $\theta(t)$ označimo ugao koji u trenutku t tangenta na putanju zaklapa sa pozitivnim delom x -ose, a sa v_x i v_y komponente vektora brzine u pravcu koordinatnih osa. Važe sledeće veze

$$(4) \quad v_x = \frac{dx}{dt} = v \cos \theta, \quad v_y = \frac{dy}{dt} = v \sin \theta, \quad v^2 = v_x^2 + v_y^2, \quad \theta = \arctan \frac{v_y}{v_x}.$$

Jednačine kretanja projektila, koje proizilaze iz opšteg zakona kretanja $m \frac{dv}{dt} = \sum F$ (sila je jednaka masa puta ubrzanje), mogu se zapisati u obliku

$$(5) \quad \frac{d}{dt} v_x(t) = -\frac{c v^2}{m} \cos(\theta), \quad \frac{d}{dt} v_y(t) = -\frac{c v^2}{m} \sin(\theta) - g.$$

Prva jednačina predstavlja jednakost komponenti u pravcu ose Ox sila koje deluju, a druga jednakost komponenti ovih sila u pravcu ose Oy . Jednačine (5), uzimajući u obzir oznake (4), imaju zapis

$$\begin{aligned} x''(t) &= v'_x(t) = -\frac{c}{m} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} x'(t) \\ y''(t) &= v'_y(t) = -\frac{c}{m} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} y'(t) - g. \end{aligned}$$

Ako želimo da ovim jednačinama modeliramo na početku formulisani zadatak, u levom kraju posmatranog intervala zadajemo da je $x(0) = y(0) = 0$ (koordinatni početak je postavljen u tačku iz koje projektil polazi), a u desnom kraju treba da je $x(T) = D$ i $y(T) = 0$, gde je D rastojanje na kome se u odnosu na početnu tačku nalazi meta. Dakle, matematički model kojim se može odrediti nagib cevi topa $\theta(0)$ definisan je nelinearnim graničnim problemom

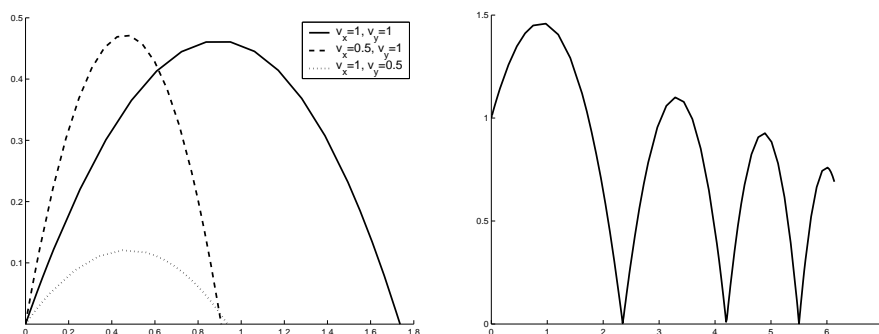
$$(6) \quad \begin{aligned} x''(t) &= -\frac{c}{m} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} x'(t), & x(0) &= 0, & x(T) &= D, \\ y''(t) &= -\frac{c}{m} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} y'(t) - g, & y(0) &= 0, & y(T) &= 0. \end{aligned}$$

Nagib cevi topa i brzina ispaljivanja projektila su, prema (4), jednaki

$$(7) \quad \theta(0) = \arctan \frac{y'(0)}{x'(0)}, \quad v = \sqrt{(x'(0))^2 + (y'(0))^2}.$$

Model treba odgovarajućim smenama transformisati u bezdimenzioni model. Na taj način se relativizuje dužina trajanja procesa T .

Slika 3.1, levo, prikazuje različite putanje i domete projektila za različito zadatu početnu brzinu i nagib (koji su, prema (7), definisani zadavanjem $v_x(0)$ i $v_y(0)$). Putanje su određene rešavanjem Cauchy-jevih problema definisanih jednačinama (6), kada je drugi granični uslov zamenjen početnim uslovom po komponentama brzine $x'(0) = v_x(0)$ i $y'(0) = v_y(0)$. Kada bi model (6) opisivao putanju loptice, koja se odbija od zemlje, dobila bi se putanja prikazana na slici 3.1, desno. ■



Slika 3.1: Putanja projektila i lopte

PRIMER 4. Fizički model koji opisuje putanju projektila, može se aproksimirati i nešto drugačijim matematičkim modelom od onoga koji je dat u primeru 3, tako da se brzina projektila i nagib topa direktno računaju u modelu. Pored koordinata položaja projektila u svakom trenutku, kao nepoznate funkcije definišaćemo i njegovu brzinu v i nagib putanje θ .

Vektori brzine i ubrzanja su

$$\mathbf{v} = (v \cos \theta, v \sin \theta), \quad \longrightarrow \quad \mathbf{v}' = (\cos \theta, \sin \theta) v' + (-\sin \theta, \cos \theta) v \theta'.$$

Komponenta ubrzanja u pravcu kretanja je v' , a komponenta ortogonalna na taj pravac je $v \theta'$. Sila otpora vazduha deluje u pravcu kretanja i suprotnom smeru (komponenta ortogonalna na pravac kretanja je jednaka nuli), a silu zemljine teže razložimo na komponente u navedena dva pravca. Ponovo, na osnovu opšte jednačine kretanja, model može da se zapiše i pomoću sistema od četiri diferencijalne jednačine prvog reda,

$$(8) \quad \begin{aligned} x'(t) &= v(t) \cos \theta(t), & y'(t) &= v(t) \sin \theta(t), \\ \theta'(t) &= -\frac{g}{v(t)} \cos \theta(t), & v'(t) &= -\frac{c v(t)^2}{m} - g \sin \theta(t). \end{aligned}$$

Cauchy-jev problem kojim "gađamo" rešenje fizičkog modela je definisan početnim uslovima

$$(9) \quad x(0) = 0, \quad y(0) = 0, \quad \theta(0) = \Theta, \quad v(0) = V,$$

pri čemu parametre Θ i V (nagib topa i početna brzina projektila) podešavamo tako da rešenje Cauchy-jevog problema (8)-(9) zadovoljava uslov na desnom kraju putanje $x(T) = D, y(T) = 0$. Model(8)-(9) je i matematički model kretanja projektila (tema 1.2) ili skoka u dalj (tema 2.4) poglavlja 2, posvećenog Cauchy-jevima problemima. ■

Metoda gađanja se sastoji u tome da se granični problem svede na Cauchy-jev, i podešavaju se parametri pridruženog (jednog ili više) Cauchy-jevog problema, dok njegovo rešenje ne pogodi granične uslove zadate u drugim tačkama.³

³[28], strana 207

Za linearne granične probleme metoda je mnogo jednostavnija. Koristi se činjenica da je rešenje nehomogenog linearnog problema jednako zbiru ma kog njegovog partikularnog rešenja i rešenja odgovarajućeg homogenog problema, pa se granični problem svodi na konačan broj Cauchy-jevih zadataka. Cauchy-jevi problemi se rešavaju nekom od numeričkih metoda o kojima je bilo reči u prethodnom poglavlju.

PRIMER 5. *Rešimo metodom gađanja linearni granični problem (3).*

Rešenje tražimo u obliku linearne kombinacije dve funkcije

$$(13) \quad u(x) = u_1(x) + \gamma u_2(x).$$

U opštem slučaju, funkcija $u_1(x)$ treba da zadovoljava datu jednačinu, a funkcija $u_2(x)$ odgovarajuću homogenu jednačinu. Kako je jednačina homogena, obe funkcije treba da zadovoljavaju homogenu jednačinu,

$$(14) \quad u_1''(x) - c u_1(x) = 0, \quad u_2''(x) - c u_2(x) = 0.$$

Da bi levi granični uslov linearna kombinacija (13) zadovoljila za svako γ , potrebno je da je

$$(15) \quad u(0) = u_1(0) + \gamma u_2(0) = 1, \quad \text{tj.} \quad u_1(0) = 1, \quad u_2(0) = 0.$$

Drugi početni uslov za definisanje Cauchy-jevih problema možemo izabrati proizvoljno, uz ograničenje da mora biti $u_2'(0) \neq 0$. U protivnom bi bilo $u_2(x) \equiv 0$, kao rešenje potpunog homogenog problema, što bi nam onemogućilo da odgovarajućim izborom konstante γ "pogodimo" zadati desni granični uslov.

Dakle, na osnovu (14) i (15), granični problem (3) smo sveli na dva Cauchy-jeva problema

$$(16) \quad u_1''(x) - c u_1(x) = 0, \quad u_1(0) = 1, \quad u_1'(0) = 0,$$

$$(17) \quad u_2''(x) - c u_2(x) = 0, \quad u_2(0) = 0, \quad u_2'(0) = 1.$$

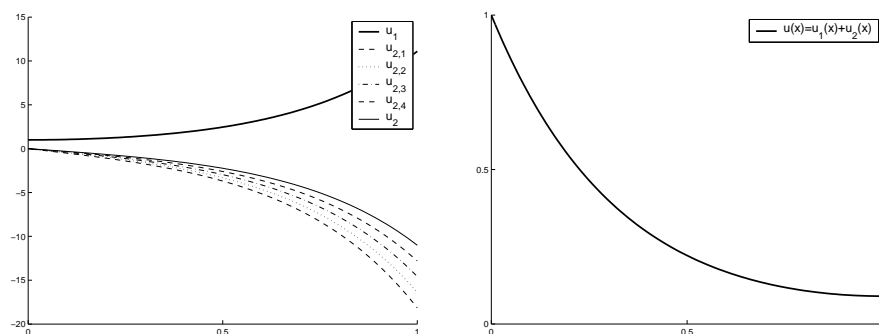
Rešavamo ih nekom od metoda koje su opisane u poglavlju 2. Na osnovu dobijenih vrednosti za $c = 9.6$,

$$u_1(1) = 11.1023, \quad u_1'(1) = 34.2579, \quad \text{i} \quad u_2(1) = 3.5688, \quad u_2'(1) = 11.1023,$$

nalazimo da će funkcija (13) zadovoljavati desni granični uslov problema (3) ako je

$$u'(1) = u_1'(1) + \gamma u_2'(1) = 0, \quad \text{tj.} \quad \gamma = -\frac{u_1'(1)}{u_2'(1)} = -3.0857.$$

Funkcije $u_1(x)$ i $\gamma u_2(x)$, za različito γ , predstavljene su slikom 3.2, levo. Temperatura štapa $u(x)$, koja je rešenje problema (3), predstavljena je slikom 3.2, desno. ■



Slika 3.2: Raspedela temperature u štapu određena metodom gadanja

3.2 Metoda konačnih razlika

Ova metoda zasniva se na zameni izvoda količnicima konačnih razlika.⁴ Ilustrujmo je rešavanjem matematičkog modela izvedenog u primeru 1.

PRIMER 6. *Odredimo raspodelu temperature u štapu, čiji se jedan kraj drži na konstantnoj temperaturi, a drugi je izolovan.*

U primeru 1. (form.(3)) ovaj fizički model opisali smo bezdimenzionim matematičkim modelom definisanim graničnim problemom

$$(18) \quad u''(x) - c u(x) = 0, \quad u(0) = 1, \quad u'(1) = 0.$$

S obzirom da se konačne razlike izražavaju linearnom kombinacijom vrednosti funkcije na diskretnom skupu tačaka, neophodno je na intervalu $[0, 1]$ definisati mrežu diskretnih tačaka. Radi jednostavnosti, koristićemo ravnomernu mrežu kod koje je rastojanje između susednih tačaka, tzv. čvorova mreže, jednako i definisano konstantnim korakom h ,

$$\bar{\omega}_h = \{ x_i \mid x_i = ih, i = 0, \dots, n, h = \frac{1}{n} \}.$$

Sada je aproksimacija drugog izvoda funkcije u tački x_i , tačnosti $O(h^2)$, jednaka

$$(19) \quad u_{\bar{x}x,i} = \frac{1}{h^2} (u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1}))) = u''(x_i) + O(h^2).$$

Granični uslov u desnom kraju intervala je zadat prvim izvodom rešenja, te nam je neophodna i diskretna aproksimacija prvog izvoda. Možemo koristiti standardnu aproksimaciju definisanu konačnom razlikom unazad, tačnosti $O(h)$,

$$(20) \quad u_{\bar{x},i} = \frac{1}{h} (u(x_i) - u(x_{i-1})) = u'(x_i) + O(h).$$

Manja tačnost aproksimacije izvoda u graničnom čvoru, u odnosu na tačnost aproksimacije koršćene u unutrašnjim tačkama mreže, smanjiće tačnost rezultata u celini.

⁴[28], strana 209

Dobro je koristiti u numeričkom modelu aproksimacije istog reda tačnosti. Stoga ćemo, polazeći od aproksimacije (20), izvesti aproksimaciju prvog izvoda u desnom kraju intervala tačnosti $O(h^2)$,

$$(21) \quad \begin{aligned} u_{\bar{x},n} &= \frac{1}{h} (u(x_n) - u(x_{n-1})) = \frac{1}{h} (u(x_n) - u(x_n) + hu'(x_n) - \frac{h^2}{2} u''(x_n) + O(h^3)) \\ &= u'(x_n) - \frac{h}{2} u''(x_n) + O(h^2). \end{aligned}$$

Uzimajući u obzir da je $u'(x_n) = 0$ i $u''(x_n) = cu(x_n)$ (iz (18)), dobijamo da je

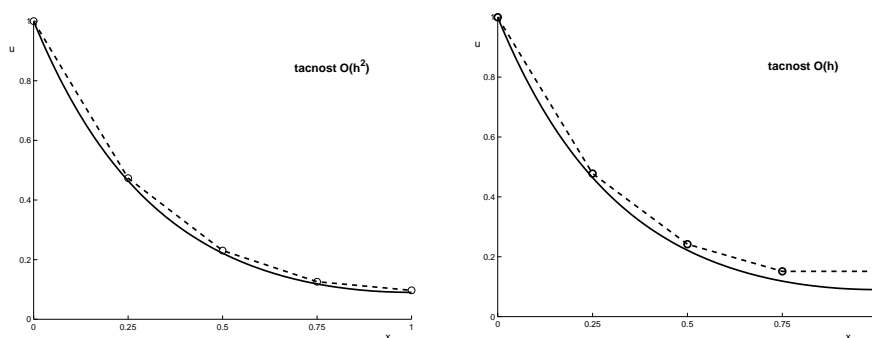
$$(22) \quad u_{\bar{x},n} = -\frac{ch}{2} u(x_n) + O(h^2).$$

Zamenom funkcije $u(x)$ i njenih izvoda u graničnom problemu (18) izrazima (19) i (22), izostavljajući član $O(h^2)$, vršimo diskretizaciju polaznog problema u čvorovima mreže $\bar{\omega}_h$. Kontinualnu veličinu $u(x)$ aproksimiramo vektorom $\mathbf{v} = (v_0, \dots, v_n)^T$, pri čemu je $v_i \approx u(x_i)$, a granični problem (18) diskretnim problemom

$$v_0 = 1, \quad v_{\bar{x},i} - cv_i = 0, \quad \text{za } i = 1, \dots, n-1, \quad v_{\bar{x},n} + \frac{ch}{2} v_n = 0,$$

koji se naziva diferencijskom šemom. Ona predstavlja sistem linearnih jednačina po komponentama vektora \mathbf{v} ,

$$(23) \quad \begin{aligned} v_0 &= 1 \\ v_{i-1} - (2 + ch^2)v_i + v_{i+1} &= 0 \\ v_{n-1} - \left(1 + \frac{ch^2}{2}\right)v_n &= 0 \end{aligned}$$



Slika 3.3: Uticaj aproksimacije graničnog uslova na tačnost rešenja

Slika 3.3, levo, prikazuje rešenje sistema (23) za $h = 0.25$. Numeričko rešenje je predstavljeno isprekidanom linijom, a tačna raspodela temperature u štapu, definisana modelom u primeru 1, predstavljena je punom linijom. Slika 3.3, desno, predstavlja numeričko rešenje određeno aproksimacijom (20) desnog graničnog uslova, koja je tačnosti $O(h)$. ■

Dvodimenzioni problem. U prethodnom primeru modelirali smo raspodelu toplote u tankom štapu, predmetu sa izraženom jednom dimenzijom, te je matematički model opisan jednodimenzionim graničnim problemom. Kako se modeluje i rešava višedimenzioni granični problem?

PRIMER 7. *Oredimo približno temperaturu izolovane šestougaone ploče, čija je temperatura na ivicama zadata poznatom funkcijom $g(x, y)$, a izvor toplote definisan datom funkcijom $f(x, y)$.*

Ploču ćemo posmatrati kao objekat u dve dimenzije, čija je debljina zanemarena. Raspodela toplote u ploči biće funkcija dve promenljive $u(x, y)$. Matematički model raspodele toplote opisan je Laplace-ovim operatorom

$$(24) \quad \Delta u(x, y) \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Pretpostavimo da smo fizički model opisali bezdimenzionim modelom definisanim na oblasti

$$\Omega = \{(x, y) \mid |x| < 1, |y| < 1, |x - y| < 1\},$$

sa granicom

$$\Gamma = \{(x, y) \mid |x| = 1, |y| = 1, |x - y| = 1\}.$$

Neka je raspodela temperature na granici ploče zadata funkcijom $g(x, y) = |x| + |y|$, a izvor toplote funkcijom $f(x, y) = x^2 + y^2$. Tada je matematički model formulisan u obliku graničnog problema

$$(25) \quad \Delta u(x, y) = x^2 + y^2, \quad (x, y) \in \Omega, \quad u(x, y) = |x| + |y|, \quad (x, y) \in \Gamma.$$

Sada će i mreža biti dvodimenziona, konstruisana dvema familijama paralelnih pravih,

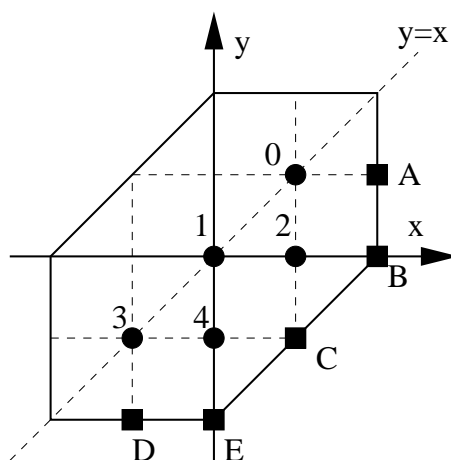
$$\bar{\omega}_h = \{(x_i, y_j) \mid x_i = ih, y_j = jh, i, j = 0, \dots, n, h = \frac{1}{n}\}.$$

Model smo krajnje uprostiti pretpostavkom da su koraci mreže u oba koordinatna pravca jednaki, tj. da je mreža kvadratna. Kao i u primeru 6, aproksimaciju graničnog problema (25) definišemo u čvorovima mreže (x_i, y_j) , tako što izvode u unutrašnjim čvorovima aproksimiramo količnicima konačnih razlika (19) u odgovarajućim pravcima, a vrednosti rešenja u graničnim čvorovima računamo zadatom funkcijom $g(x, y)$,

$$(26) \quad \begin{aligned} v_{\bar{x}x, i, j} + v_{\bar{y}y, i, j} &= x_i^2 + y_j^2, & i, j &= 1, \dots, n-1, \\ v_{i, j} &= |x_i| + |y_j|, & (i=0) \vee (j=0) \vee (i=n) \vee (j=n). \end{aligned}$$

Skup jednačina (26) naziva se diferencijskom šemom.⁵ Uzećemo u obzir simetriju oblasti i funkcija f i g u odnosu na pravu $y = x$, te ćemo problem rešavati u polovini oblasti (slika 3.4), što će smanjiti dimenziju sistema linearnih jednačina (26). Ova sistem je zapisan na nestandardan način, jer je rešenje predstavljeno matricom elemenata $v_{i, j}$, a ne jednodimenzionim vektorom.

⁵[18], strana 147



Slika 3.4: Oblast i mreža u primeru 7

Ako unutrašnje čvorove (kružići) numerišemo redom kao na slici 3.4, za $h = 1/2$ dobijamo sistem

$$\begin{aligned} (v_A - 2v_0 + v_2) + (v_A - 2v_0 + v_2) &= \frac{1}{8} \\ (v_2 - 2v_1 + v_4) + (v_2 - 2v_1 + v_4) &= 0 \\ (v_B - 2v_2 + v_1) + (v_0 - 2v_2 + v_C) &= \frac{1}{16} \\ (v_4 - 2v_3 + v_D) + (v_4 - 2v_3 + v_D) &= \frac{1}{8} \\ (v_C - 2v_4 + v_3) + (v_1 - 2v_4 + v_E) &= \frac{1}{16} \end{aligned}$$

U graničnim čvorovima (kvadratići na slici) vrednosti su određene graničnim uslovom

$$v_A = \frac{3}{2}, \quad v_B = 1, \quad v_C = 1, \quad v_D = \frac{3}{2}, \quad v_E = 1,$$

pa se u unutrašnjim čvorovima dobija da je približno rešenje jednako

$$v_0 = 1.2500, \quad v_1 = 1.0625, \quad v_2 = 1.0625, \quad v_3 = 1.2500, \quad v_4 = 1.0625.$$

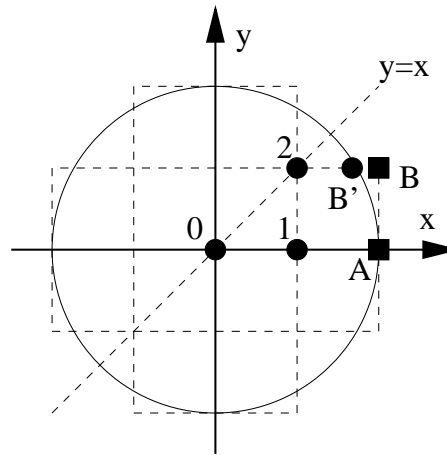
Mreža je prilično gruba, ali je očigledno da je rešenje simetrično i u odnosu na pravu $y = -x$. ■

Ukoliko granični čvorovi ne pripadaju mreži, potrebno je izvršiti i aproksimaciju rešenja u graničnim čvorovima.

PRIMER 8. Rešimo fizički problem definisan primerom 7, u oblasti predstavljenoj jediničnim krugom,

$$\Omega = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\}, \quad \text{sa granicom } \Gamma = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}.$$

Pošto je krug sa centrom u koordinatnom početku simetričan u odnosu na sve svoje prečnike, a ostali parametri zadatka se nisu promenili, iskoristićemo zaključak o simetriji rešenja i model rešavati u kružnom isečku ugla $\pi/4$ (slika 3.5). Kao i u prethodnom primeru definišaćemo kvadratnu mrežu i u njenim čvorovima aproksimirati jednačinu diferencijskom šemom. Javlja se problem kako definisati granične čvorove. Naime, granica se više ne poklapa sa linijama mreže, te ne pripadaju svi granični čvorovi granici. Stoga prvo treba da definišemo koji su čvorovi granični, a zatim kako da odredimo približne vrednosti rešenja u njima.



Slika 3.5: Oblast i mreža u primeru 8

Za $h = 0.5$ "krst" šema u unutrašnjim čvorovima se svodi na sistem jednačina

$$4v_1 - 4v_0 = 0$$

$$(v_A - 2v_1 + v_0) + (v_2 - 2v_1 + v_2) = \frac{1}{16}$$

$$(v_B - 2v_2 + v_1) + (v_B - 2v_2 + v_1) = \frac{1}{8}$$

Granični čvor A pripada granici oblasti, pa je $v_A = 1$. Vrednost u graničnom čvoru B se može oceniti ekstrapolacijom pomoću vrednosti v_2 i $v_{B'}$ na sledeći način:

$$v_B = -\frac{\delta}{h - \delta}v_2 + \frac{h}{h - \delta}v_{B'},$$

gde je sa δ označeno rastojanje između tačaka B' i B . Tačka B' je presek kruga i prave $y = \frac{1}{2}$, pa je $\delta = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$. Stoga je $v_B = -0.36603v_2 + 1.86603$. Rešavanjem prethodnog sistema linearnih jednačina dopunjenog poslednjim vezama, dobijamo da je približno rešenje u čvorovima mreže

$$v_0 = v_1 = 1.1426, \quad v_2 = 1.2452, \quad v_A = 1, \quad v_B = 1.4102.$$

■

U primerima 7 i 8 matematički model je definisan dvodimenzionim Laplace-ovim operatorom (24). U opštem slučaju, u prostoru dimenzije m , jednostavniji granični problemi opisani su Laplace-ovim operatorom dimenzije m ,

$$(27) \quad \Delta u(x_1, \dots, x_m) \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_m^2}.$$

Jednačina oblika $\Delta u = f$, gde je f data funkcija, je parcijalna diferencijalna jednačina eliptičkog tipa.

3.3 Metoda konačnih elemenata

Granični problemi, bilo u jednoj ili više dimenzija, mogu se rešavati i varijacionim metodama.⁶ Aproksimativno rešenje se određuje u unapred zadatom konačno dimenzionom prostoru, zadatom bazisnim funkcijama.

Dobar izbor bazisa, koji vodi ka sistemu jednačina sa retkom matricom, je suština metode konačnog elementa. Ilustrovaćemo metodu na matematičkom modelu razvijenom u primeru 1. U prethodnim primerima model je rešavan metodom gađanja i metodom konačnih razlika, što nam daje mogućnost da poredimo različite numeričke metode. Koristićemo Ritz-Galerkin-ovu metodu sa linearnim B-splajnovima kao bazisnim funkcijama.

PRIMER 9. *Matematički model koji opisuje raspodelu temperature u štapu, čiji se jedan kraj drži na konstantnoj temperaturi a drugi je izolovan, zadat je bezdimenzionim graničnim problemom (primer 1)*

$$(28) \quad u''(x) - cu(x) = 0, \quad u(0) = 1, \quad u'(1) = 0.$$

Aproksimaciju ćemo odrediti u prostoru linearnih splajnova (deo po deo prava), čiji je bazis definisan linearnim B-splajnovima (slika 3.6, levo)

$$(29) \quad \phi_i(x) = \begin{cases} 1 + \frac{x-x_i}{h_{i-1}}, & x \in [x_{i-1}, x_i] \\ 1 - \frac{x-x_i}{h_i}, & x \in [x_i, x_{i+1}] \\ 0, & x \notin [x_{i-1}, x_{i+1}] \end{cases}, \quad i = 0, \dots, n,$$

određenim podelom intervala $[0, 1]$,

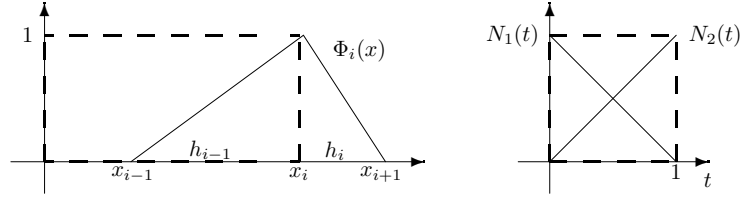
$$\bar{\omega} = \{x_i \mid x_{i+1} - x_i = h_i, i = 0, \dots, n-1, \sum_{i=0}^{n-1} h_i = 1\}.$$

Uzeli smo da je $x_{-1} = x_0 = 0$ i $x_{n+1} = x_n = 1$. Intervali $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, \dots, n-1$, se nazivaju konačni elementi.

Na levom kraju je zadat nehomogeni Dirichlet-ov granični uslov (esencijalni), te ćemo rešenje tražiti u obliku

$$(30) \quad v(x) = \phi_0(x) + \sum_{i=1}^n v_i \phi_i(x).$$

⁶[28], strana 217



Slika 3.6: Krov funkcije i njihove slike na kanonskom elementu

S obzirom na izbor bazisnih funkcija, tj. da je $\phi_i(x_j) = \delta_{ij}$, biće

$$v(0) = \phi_0(0) = 1, \quad v(x_i) = v_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

što znači da koeficijenti u reprezentaciji (30) predstavljaju približne vrednosti rešenja graničnog problema u čvorovima mreže $\bar{\omega}$. Desni granični uslov (prirodni) će odrediti formu funkcionala. Ritz-ovi uslovi,

$$(v'' - cv, \phi_j) = 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

uzimajući u obzir da je $\phi_j(0) = 0$, $j = 1, \dots, n$, i uslov na desnom kraju $v'(1) = 0$, daju, posle parcijalne integracije, jednačine

$$(31) \quad \int_0^1 v'(x)\phi_j'(x) dx + c \int_0^1 v(x)\phi_j(x) dx = 0, \quad j = 1, \dots, n.$$

Zamenom reprezentacije (30) u jednačine (31), dobijamo sistem linearnih jednačina po koeficijentima v_i ,

$$(32) \quad \int_0^1 (\phi_0'\phi_j' + c\phi_0\phi_j) dx + \sum_{i=1}^{n-1} v_i \int_0^1 (\phi_i'\phi_j' + c\phi_i\phi_j) dx = 0, \quad j = 1, \dots, n.$$

Sistem linearnih jednačina (32) u matičnom zapisu ima oblik

$$(33) \quad K\mathbf{v} = \mathbf{f},$$

gde je $K = (k_{ij})$ simetrična, kvadratna matrica dimenzije n sa elementima

$$k_{ij} = \int_0^1 (\phi_i'\phi_j' + c\phi_i\phi_j) dx, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Kako bazisne funkcije (29) imaju kompaktne nosače, matrica K je trodijagonalna,

$$(34) \quad k_{i,j} = 0, \quad |i-j| > 1, \quad i = 1, \dots, n,$$

$$k_{i-1,i} = \int_{x_{i-1}}^{x_i} (\phi_{i-1}'\phi_i' + c\phi_{i-1}\phi_i) dx \quad k_{i,i} = \sum_{j=0}^1 \int_{x_{i-1+j}}^{x_{i+j}} (\phi_i'^2 + c\phi_i^2) dx.$$

Vektor $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)^\top$ je nepoznati vektor, i $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_n)^\top$ je vektor sa elementima,

$$f_j = - \int_0^1 (\phi_0' \phi_j' + c \phi_0 \phi_j) dx, \quad j = 1, \dots, n.$$

Na konačnom elementu (intervalu) $[x_i, x_{i+1}]$ različite od nule su samo bazisne funkcije $\phi_i(x)$ i $\phi_{i+1}(x)$. Označimo prave koje predstavljaju delove ovih funkcija na posmatranom elementu sa $N_{1,i}(x)$ i $N_{2,i}(x)$, redom,

$$(35) \quad N_{1,i}(x) = \frac{1}{h_i}(x_{i+1} - x), \quad N_{2,i}(x) = \frac{1}{h_i}(x - x_i).$$

Tada aproksimacija $v(x)$, data izrazom (30), na elementu $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 1, \dots, n-1$, ima zapis

$$(36) \quad v(x) = v_i \phi_i(x) + v_{i+1} \phi_{i+1}(x) = v_i N_{1,i}(x) + v_{i+1} N_{2,i}(x),$$

jer su ostale bazisne funkcije na tom elementu identički jednake nuli. Sistem (33) se na elementu svodi na dve jednačine

$$(37) \quad \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left((v_i N_{1,i}' + v_{i+1} N_{2,i}') N_{j,i}' + c (v_i N_{1,i} + v_{i+1} N_{2,i}) N_{j,i} \right) dx = 0, \\ j = 1, 2, \quad i = 1, \dots, n-1.$$

Desna strana je jednaka nuli, jer je određena funkcijom $\phi_0(x)$, koja je identički jednaka nuli na svim elementima, izuzev na prvom. Na prvom elementu $[x_0, x_1]$ aproksimacija je oblika

$$v(x) = \phi_0(x) + v_1 \phi_1(x),$$

i on, u globalnom sistemu (33) daje doprinos samo promenljivoj v_1 ,

$$(38) \quad v_1 \int_{x_0}^{x_1} ((N_{2,0}')^2 + c(N_{2,0})^2) dx = - \int_{x_0}^{x_1} (N_{1,0}' N_{2,0}' + c N_{1,0} N_{2,0}) dx.$$

Globalni sistem (33) se može odrediti sabiranjem odgovarajućih koeficijenata sistema po elementima (37)–(38). Asembliranje se sastoji u tome da se saberu koeficijenti uz promenljivu v_i sistema (37)–(38), napisanih za elemente $[x_{i-1}, x_i]$ i $[x_i, x_{i+1}]$, kojima je čvor x_i zajednički čvor, za $i = 1, \dots, n-1$.

Izračunajmo, prvo, koeficijente sistema (37). Očigledno je da su svi istog oblika, nezavisno od indeksa elementa i . Stoga ćemo proizvoljan element preslikati na kanonski, izračunati koeficijente sistema, i inverznim preslikavanjem odrediti polazni sistem i -tog elementa. Ako za kanonski element izaberemo interval $[0, 1]$, preslikavanje proizvoljnog elementa $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, \dots, n-1$, na kanonski element zadato je izrazom

$$(39) \quad x = x_i + h_i t = x_i(1-t) + x_{i+1}t, \quad t \in [0, 1].$$

Smenom (39) linearni delovi (35) bazisnih funkcija preslikavaju se u bazisne funkcije kanonskog elementa $N_1(t)$ i $N_2(t)$ (slika 3.6, desno),

$$(40) \quad N_{1,i}(x) \equiv N_1(t) = 1-t, \quad N_{2,i}(x) \equiv N_2(t) = t, \quad x \in [x_i, x_{i+1}], \quad t \in [0, 1].$$

Pomoću ovih funkcija preslikavanje (39) može se zapisati izrazom

$$x(t) = x_i N_1(t) + x_{i+1} N_2(t), \quad i = 1, \dots, n-1,$$

a probna funkcija (36) je oblika

$$(41) \quad v(x(t)) = v_i N_1(t) + v_{i+1} N_2(t).$$

Konačni elementi, čije je preslikavanje na kanonski element definisano bazisnim funkcijama (što je ovde slučaj), nazivaju se izoparametarski elementi.

Smenom (39), uzimajući u obzir da na osnovu (40) za svako i važi da je

$$\frac{d}{dx} N_{j,i}(x) = \left(\frac{d}{dt} N_j(t) \right) \frac{dt}{dx} = \frac{1}{h_i} N_j'(t), \quad j = 1, 2,$$

integrali (37) transformišu se u integrale

$$(42) \quad \int_0^1 \left(\frac{1}{h_i^2} (v_i N_1'(t) + v_{i+1} N_2'(t)) N_j'(t) + c (v_i N_1(t) + v_{i+1} N_2(t)) N_j(t) \right) h_i dt = 0, \quad j = 1, 2.$$

Ponovo na osnovu (40), oni se mogu zapisati u sledećem obliku

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{h_i} (v_i - v_{i+1}) + c h_i (v_i (1-t) + v_{i+1} t) (1-t) \right) dt = 0$$

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{h_i} (v_{i+1} - v_i) + c h_i (v_i (1-t) + v_{i+1} t) t \right) dt = 0,$$

što, posle izračunavanja integrala, daje sistem

$$(43) \quad \frac{v_i - v_{i+1}}{h_i} + \frac{c h_i}{6} (2v_i + v_{i+1}) = 0$$

$$\frac{v_{i+1} - v_i}{h_i} + \frac{c h_i}{6} (v_i + 2v_{i+1}) = 0.$$

Sistem se može zapisati u matičnom obliku

$$(44) \quad k_i \mathbf{v}^i \equiv (k_{s,i} + k_{m,i}) \mathbf{v}^i = 0,$$

gde su matrica krutosti elementa $k_{s,i}$ i matrica mase elementa $k_{m,i}$ jednake

$$(45) \quad k_{s,i} = \frac{1}{h_i} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad k_{m,i} = \frac{c h_i}{6} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{a} \quad \mathbf{v}^i = \begin{pmatrix} v_i \\ v_{i+1} \end{pmatrix}.$$

Izračunavanjem integrala (38) nalazimo da je doprinos prvog elementa $[x_0, x_1]$ sistemu (33) jednak

$$(46) \quad \frac{1}{h_0} v_1 + \frac{c h_0}{3} v_1 = \frac{1}{h_0} - \frac{c h_0}{6}.$$

Asembliranjem sistema (44) za $i = 1, \dots, n-1$, i jednačine (46), dobijamo da je sistem (33), dimenzije n^2 , jednak

$$(47) \quad (K_s + K_m) \mathbf{v} = \mathbf{f},$$

gde je K_s globalna matrica krutosti,

$$(48) \quad K_s = \begin{pmatrix} \frac{1}{h_0} + \frac{1}{h_1} & -\frac{1}{h_1} & & & 0 \\ -\frac{1}{h_1} & \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} & -\frac{1}{h_2} & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \frac{1}{h_{n-2}} + \frac{1}{h_{n-1}} & -\frac{1}{h_{n-1}} \\ 0 & & & -\frac{1}{h_{n-1}} & \frac{1}{h_{n-1}} \end{pmatrix},$$

K_m globalna matrica mase,

$$(49) \quad K_m = \frac{c}{6} \begin{pmatrix} 2h_0 + 2h_1 & h_1 & & & 0 \\ & h_1 & 2h_1 + 2h_2 & h_2 & \\ & & \ddots & & \\ & & & 2h_{n-2} + 2h_{n-1} & h_{n-1} \\ 0 & & & h_{n-1} & 2h_{n-1} \end{pmatrix},$$

a slobodni član sistema je vektor $\mathbf{f} = (\frac{1}{h_0} - \frac{ch_0}{6}, 0, \dots, 0)^\top$.

Ako su svi konačni elementi iste dužine, $h_i = h$, $i = 0, \dots, n-1$, ove matrice dobijaju jednostavniji oblik

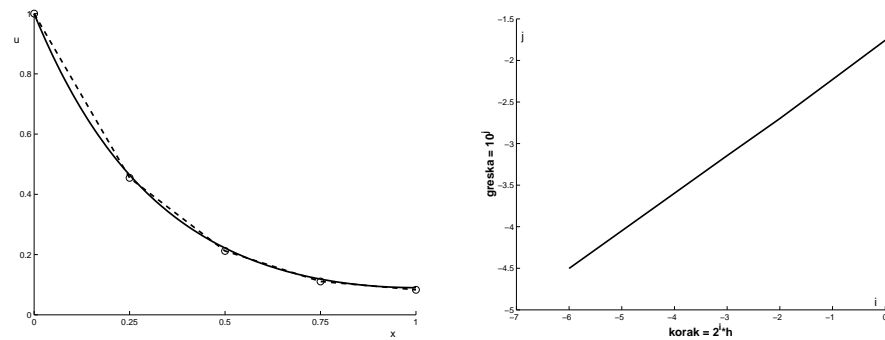
$$(50) \quad K_s = \frac{1}{h} \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & 0 \\ -1 & 2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 2 & -1 \\ 0 & & & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad K_m = \frac{ch}{6} \begin{pmatrix} 4 & 1 & & & 0 \\ 1 & 4 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 4 & 1 \\ 0 & & & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Rešenje sistema (47), određenog sa četiri konačna elementa jednake dužine i izborom bezdimenzionane konstante $c = 9.6$, kao u primeru 1, prikazano je na slici 3.7, levo. Greška opada sa povećanjem broja elemenata (smanjenjem njihove dužine h), i ova zavisnost prikazana je na logaritamskoj skali, slika 3.7, desno. ■

Analogno, ali tehnički mnogo složenije, primenjuje se metoda konačnog elementa za rešavanje više dimenzionih problema.

3.4 Sopstvene vrednosti diferencijalnog operatora

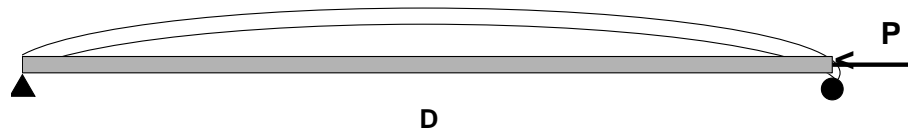
Matematički model koji opisuje izvijanje grede pod dejstvom bočne sile je, na prvi pogled, sličan modelu raspodele temperature, formulisanom primerom 1. Ipak, drugačiji granični uslovi i drugačiji znak koeficijenta jednačine, opisuju sasvim različit fizički proces.



Slika 3.7: Rešenje određeno sa 4 elementa (levo), i zavisnost greške od broja elemenata (desno)

PRIMER 10. Greda je pričvršćena na jednom kraju, a na drugi kraj deluje sila u pravcu grede, koja izaziva izvijanje grede. Ukoliko se greda ne polomi pri prvoj kritičnoj vrednosti sile, ona će nastaviti da se izvijava do druge kritične vrednosti, i tako dalje. Jasno je da je vrlo važno znati ove kritične vrednosti, pri kojima može doći do pucanja grede.

Opišimo ovaj fizički proces matematičkim modelom. Postavimo gredu dužine D u pravcu x -ose, tako da je njen levi kraj u koordinatnom početku (slika 3.8). Neka $U(X)$ predstavlja vertikalno pomeranje grede (izvijanje) u tački X . Dalje, pretpostavimo da je greda oslonjena na krajevima, $U(0) = U(D) = 0$. Na desni kraj grede deluje, u pravcu grede, sila P , usled čega se greda izvijava.



Slika 3.8: Izvijanje grede pod dejstvom bočne sile

Matematički model je formulisan graničnim problemom

$$(51) \quad R \frac{d^2 U(X)}{dX^2} = -P U(X), \quad U(0) = U(D) = 0,$$

gde je R konstanta koja karakteriše elastičnost grede. Kao u primeru 1, smenama

$$(52) \quad X = D x, \quad U(X) = u(x) \quad \text{za} \quad 0 \leq x \leq 1, \quad \text{i} \quad c = P D^2 / R,$$

granični problem (51) svodi se na bezdimenzioni granični problem

$$(53) \quad u''(x) + c u(x) = 0, \quad u(0) = u(1) = 0.$$

Jasno je da je $u(x) \equiv 0$ jedno rešenje problema (53). Nas interesuju netrivialna rešenja (deformisana greda), kao i vrednosti parametra c za koje postoje netrivialna rešenja. Te vrednosti parametra c određuju kritične vrednosti sile P za gredu dužine D i elastičnosti R , pri kojima može doći do pucanja grede. Vrednost parametra c za koju problem (53) ima netrivialno rešenje naziva se sopstvena vrednost, a odgovarajuće rešenje sopstvena funkcija graničnog problema (53).

S obzirom da je problem sopstvenih vrednosti predstavljen homogenim graničnim problemom, za njegovo numeričko rešavanje se koriste već pomenute metode konačnih razlika i varijacione metode. Diferencijska šema koja aproksimira problem (53) sa greškom $O(h^2)$ je, prema (19),

$$(54) \quad v_{\bar{x}x,i} + c_n v_i = 0, \quad i = 1, \dots, n-1, \quad v_0 = v_n = 0,$$

gde je sa c_n označena aproksimacija sopstvene vrednosti određena na mreži sa korakom $h = 1/n$. Šemom je, ustvari, definisan problem sopstvenih vrednosti

$$A\mathbf{v} = c_n \mathbf{v},$$

$(n-1)$ -dimenzione kvadratne matrice

$$A = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & & \ddots & 0 \\ 0 & & & 2 \end{pmatrix}.$$

Neposredno, smenom, može se proveriti da su sopstvene vrednosti i sopstveni vektori graničnog problema (54) jednaki

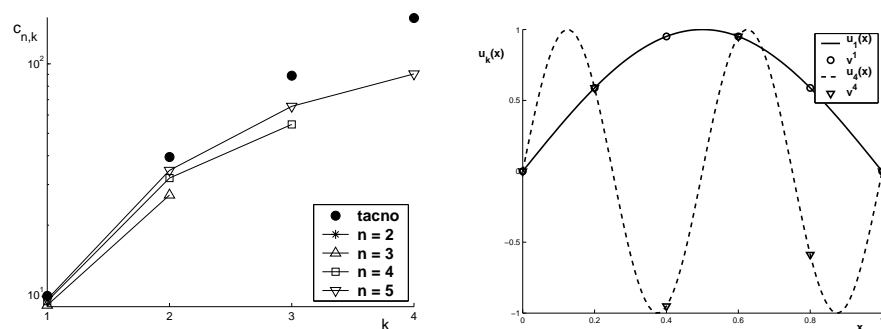
$$(55) \quad c_{n,k} = \frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{k\pi h}{2}, \quad \mathbf{v}^k = \begin{pmatrix} \sin k\pi x_1 \\ \vdots \\ \sin k\pi x_{n-1} \end{pmatrix}, \quad k = 1, \dots, n-1,$$

i da predstavljaju diskretizaciju, na čvorovima mreže koraka $h = 1/n$, prvih $(n-1)$ sopstvenih vrednosti i funkcija kontinualnog problema (53),

$$(56) \quad c_k = k^2 \pi^2, \quad u_k(x) = \sin k\pi x, \quad k = 1, 2, \dots$$

I ako kontinualan problem (53) ima prebrojivo mnogo sopstvenih vrednosti i sopstvenih funkcija, diskretizacijom konačnim razlikama su određene aproksimacije prvih $(n-1)$ vrednosti, gde je $(n+1)$ broj čvorova mreže diferencijske šeme (slika 3.9). Pri tome je aproksimacija sopstvene vrednosti to lošija što je k veće. Zgušnjavanjem mreže, tj. smanjivanjem koraka i povećavanjem broja čvorova n , dobijaju se aproksimacije većeg broja sopstvenih vrednosti i veća tačnost aproksimacije onih sa nižim indeksom k . ■

Za nalaženje sopstvenih vrednosti i funkcija mogu se koristiti i varijacione metode, kojima se takođe problem svodi na nalaženja sopstvenih vrednosti i vektora matrice. Dimenzija matrice je u ovom slučaju određena dimenzijom prostora u kome tražimo aproksimaciju rešenja.



Slika 3.9: Metodom mreže određene aproksimacije sopstvenih vrednosti (levo) i funkcija (desno)

Teme

- 1.1 Putanja projektila ([24], pp.225)
- 1.2 Teniska loptica ([12],pp.143)
- 1.3 Skok u dalj ([24],pp.226)
- 2.1 Izbor najbržeg puta ([11],pp.71)
- 2.2 Unutrašnje polje u poluprovodniku ([13],pp.73)
- 2.3 Raspodela toplote u sfernom zidu ([13],pp.191)
- 2.4 Tečni kristal ([15],pp.166)
- 2.5 Catenary kriva ([13], pp.421)
- 2.6 Disperzija dima iz visokog dimnjaka ([37],pp.150)
- 3.1 Kapljica vode ([15],pp.163)
- 3.2 Podmazivanje klizajućeg nosača ([2],pp.205)
- 4.1 Nelinearni primer ([2],pp.217)
- 4.2 Konopac za preskakanje ([16],pp.188, [15],pp.166)
- 4.3 Deformacija osovine ([16],pp.192)

4

Mešoviti problemi

Kada se modeluju fizički procesi koji se menjaju sa vremenom, veličine koje se javljaju u modelu zavise i od prostornih koordinata (a možda i nekih drugih) i od vremena. Stoga je prirodno da odgovarajući matematički model bude definisan kao Cauchy-jev problem u vremenu i granični problem u prostoru, što ćemo nazvati mešovitim matematičkim problemom.

4.1 Jednačina provođenja toplote

U uvodnom primeru prethodnog poglavlja, primeru 1, modelovali smo raspodelu toplote u štapu, u tzv. stacionarnom slučaju. Naime, parametri problema se nisu menjali sa vremenom, te i raspodela toplote u štapu ne zavisi od vremena. Sada ćemo pretpostaviti da postoji izvor toplote (ili hlađenja) koji se menja sa vremenom, i da se uslovi na granici menjaju sa vremenom.

PRIMER 1. *Formulišimo matematički model koji opisuje raspodelu toplote u štapu jediničnog poprečnog preseka, čija je temperatura $T(x, t)$, i koji se greje nekim spoljašnjim izvorom toplote q (apsorpcija, radijacija, struja, hemijska reakcija, ...)*

Zakon o održanju energije kaže da promena količine toplote u ma kom elementu zapremine $[x_1, x_2]$ unutar tela mora biti jednaka zbiru količine toplote koja prolazi kroz granicu i toplote koja se telu predaje iz spoljašnjeg izvora q ,

$$(1) \quad \frac{d}{dt}(\text{toplotna energija}) = -\text{toplotni fluks izlazi kroz } x_2 \\ + \text{toplotni fluks ulazi kroz } x_1 + \int_{x_1}^{x_2} q \, dx.$$

Toplotna energija je jednaka integralu toplote po jedinici zapremine, a toplotni fluks je srazmeran temperaturnom gradijentu

$$(2) \quad \text{toplotna energija} = \int_{x_1}^{x_2} cT \, dx, \quad \text{toplotni fluks} = -k \frac{\partial T}{\partial x},$$

gde je c toplotni kapacitet po jedinici zapremine, a k termalna provodljivost. Sme-nom matematičkih zapisa fizičkih veličina (2) u zakon o održanju energije (1), dobijamo integralnu formu jednačine difuzije

$$(3) \quad \frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} cT dx = k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=x_2} - k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=x_1} + \int_{x_1}^{x_2} q dx,$$

koja važi i kada su c i k prekidne funkcije (na primer, kada je štap napravljen od različitih metala).

Da bismo dobili diferencijalnu formu jednačine, uočimo da važi

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) = k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=x_2} - k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=x_1}, \quad \frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} cT dx = \int_{x_1}^{x_2} c \frac{\partial T}{\partial t} dx,$$

što, zamenom u (3), daje

$$(4) \quad \int_{x_1}^{x_2} \left(c \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) - q \right) dx = 0.$$

Da bi izraz (4) važio za proizvoljan interval $[x_1, x_2]$, podintegralna funkcija mora biti jednaka nuli, što daje diferencijalnu formu jednačine difuzije

$$(5) \quad c \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) - q = 0.$$

Ako je k konstanta, dobijamo jednostavniji oblik ove jednačine

$$(6) \quad \frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + Q,$$

gde je $\kappa = k/c$ toplotna provodljivost (difuzivnost) materijala, a $Q = q/c$ toplotni izvor po jedinici zapremine. Jednačina (6) je parcijalna diferencijalna jednačina paraboličkog tipa¹ i naziva se jednačina provođenja toplote. Jednačina difuzije ne opisuje samo širenje toplote, već se njom može modelovati, na primer, i zagađenje vode ili vazduha, i slično. ■

U m -dimezionom slučaju jednačina je oblika

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \Delta T + Q,$$

gde je Δ Laplace-ov operator definisan formulom (3.27). U stacionarnom slučaju temperatura u tački se ne menja sa vremenom ($\partial T/\partial t = 0$), pa zadovoljava Poisson-ovu jednačinu (jednačina eliptičkog tipa, §3.2)

PRIMER 2. *Odrediti raspodelu temperature u izolovanom štapu, koji na krajevima ima stalno temperaturu jednaku nuli, a početna raspodela temperature je određena funkcijom $T(x, 0) = e^{-10x^2}$, $x \in [-1, 1]$ (posle skaliranja).*

¹[18], strana 176

Matematički model štapa definisan je mešovitim problemom zadatim jednačinom

$$(7) \quad \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad x \in [-1, 1], \quad t > 0,$$

graničnim uslovima

$$(8) \quad T(-1, t) = T(1, t) = 0, \quad t > 0,$$

i početnim uslovom

$$(9) \quad T(x, 0) = e^{-10x^2}, \quad x \in [-1, 1].$$

Po prostornoj promenljivoj x problem je granični, i definisan je graničnim uslovima (8). Kako je opisano u prethodnom poglavlju, metodom mreže problem se aproksimira na mreži

$$\omega_h = \{x_i, | x_i = ih, i = -n, \dots, n, h = \frac{1}{n}\},$$

za svako t , diferencijском šemom

$$(10) \quad \begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t}(x_i, t) &\approx T_{\bar{x}x}(x_i, t), & i = -n + 1, \dots, n - 1, \\ T(x_{-n}, t) &= 0, & T(x_n, t) = 0. \end{aligned}$$

U jednačinama (10) i dalje postoji izvod po vremenu. Problem (9)–(10) je početni problem po vremenu u svakom čvoru $x_i, i = -n + 1, \dots, n - 1$, mreže ω_h , jer je zadato $T(x_i, 0)$ uslovom (9). Aproksimiramo ga na novoj mreži, po t ,

$$\omega_\tau = \{t_j, | t_j = j\tau, j = 0, \dots, m, \tau = \frac{tmax}{m}\},$$

gde $tmax$ definiše vremenski interval u kome posmatramo problem. Primenimo neku od metoda tipa Runge-Kutta, polazeći od početne vrednosti zadate funkcijom (9), čime vršimo potpunu diskretizaciju problema (7)–(9) na mreži

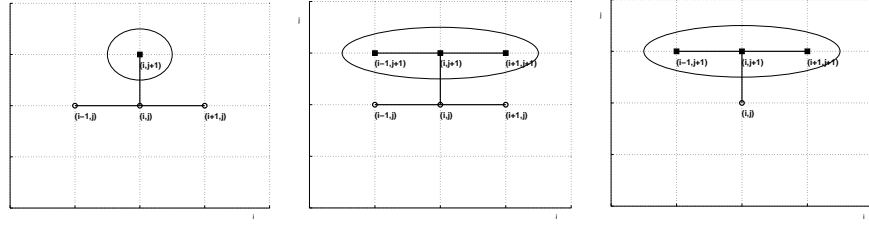
$$(11) \quad \omega_h \times \omega_\tau = \{(x_i, t_j), i = -n, \dots, n, j = 0, \dots, m\}.$$

Ako primenimo osnovnu Euler-ovu metodu, dobijamo tzv. eksplicitnu šemu

$$(12) \quad \begin{aligned} v_{t,i}^j &= v_{\bar{x},i}^j, & i = -n + 1, \dots, n - 1, & j = 0, \dots, m - 1, \\ v_{-n}^j &= v_n^j = 0, & v_i^0 &= e^{-10x_i^2}, \end{aligned}$$

gde smo označili približnu vrednost temperature u čvorovima mreže (11) sa $v_i^j \approx T(x_i, t_j)$. Ako aproksimiramo izvod po vremenu konačnom razlikom unazad, dobijamo tzv. implicitnu diferencijску šemu

$$(13) \quad \begin{aligned} v_{t,i}^{j+1} &= v_{\bar{x},i}^{j+1}, & i = -n + 1, \dots, n - 1, & j = 0, \dots, m - 1, \\ v_{-n}^j &= v_n^j = 0, & v_i^0 &= e^{-10x_i^2}. \end{aligned}$$



Slika 4.1: Šablon eksplicitne (levo), Crank-Nicolson-ove (sredina) i implicitne (desno) šeme

Šema sa težinama dobija se kao zbir formule (12), pomnožene težinskim koeficijentom $(1 - \sigma)$, i formule (13), pomnožene težinskim koeficijentom σ ($0 \leq \sigma \leq 1$),

$$(14) \quad \begin{aligned} v_{t,i}^j &= (1 - \sigma) v_{xx,i}^j + \sigma v_{xx,i}^{j+1}, & i = -n + 1, \dots, n - 1, \\ & & j = 0, \dots, m - 1, \\ v_{-n}^j &= v_n^j = 0, & v_i^0 = e^{-10x_i^2}, \end{aligned}$$

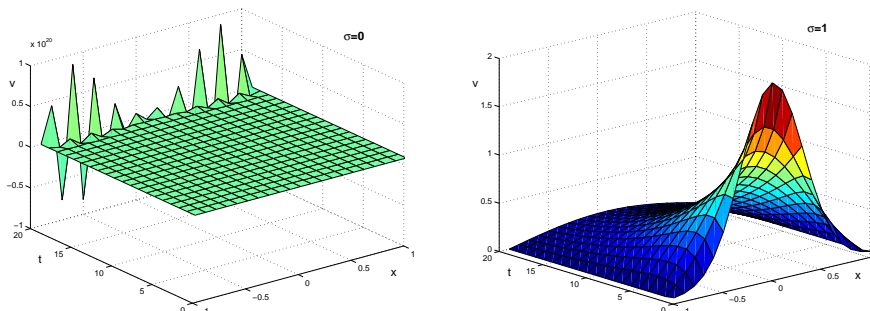
jer je $v_{t,i}^{j+1} = v_{t,i}^j$. Za $\sigma = 0.5$ dobija se tzv. Crank-Nicolson-ova šema, koja je tačnosti $O(\tau^2)$ po vremenu i numerički je stabilna. Slika 4.1 prikazuje tzv. šablon, pozicije na mreži (11) čvorova kojima su pridružene vrednosti rešenja koje učestvuju u (i, j) -jednačini sistema (14). Nepoznate vrednosti su uokvirene. Očigledno je da se u eksplicitnoj šemi (slika levo) one direktno računaju, jer svaka jednačina sadrži samo jednu nepoznatu. U Crank-Nicolson-ovoj (slika u sredini) i implicitnoj šemi (slika desno) svaka jednačina sadrži tri nepoznate veličine, te je potrebno na svakom vremenskom nivou j rešavati sistem sa trodijagonalnom matricom. Ovaj zaključak važi kad god je $\sigma \neq 0$.

S obzirom da su šeme (12) i (13) obuhvaćene šemom (14) (prva se dobija za $\sigma = 0$, a druga za $\sigma = 1$), rešavaćemo problem (7)-(9) šemom sa težinama (14). Kao što je rečeno, ona na svakom vremenskom nivou, za $j = 0, \dots, m - 1$, predstavlja sistem linearnih jednačina sa trodijagonalnom matricom

$$(15) \quad \begin{aligned} -\frac{\sigma\tau}{h^2} v_{i-1}^{j+1} + (1 + 2\frac{\sigma\tau}{h^2}) v_i^{j+1} - \frac{\sigma\tau}{h^2} v_{i+1}^{j+1} & \quad i = -n + 1, \dots, n - 1, \\ &= \frac{(1 - \sigma)\tau}{h^2} v_{i-1}^j + (1 - \frac{2(1 - \sigma)\tau}{h^2}) v_i^j + \frac{(1 - \sigma)\tau}{h^2} v_{i+1}^j \\ v_{-n}^j &= v_n^j = 0. \end{aligned}$$

Desna strana sistema za $j = 0$ je određena početnim uslovom $v_i^0 = e^{-10x_i^2}$, a za $j > 0$ prethodno izračunatim vrednostima na nivou $(j - 1)$. Rešenje šeme (14) je predstavljeno na slici 4.2. Slika levo predstavlja rešenje određeno eksplicitnom šemom ($\sigma = 0$), a slika desno predstavlja rešenje određeno implicitnom šemom ($\sigma = 1$), za isti izbor koraka $h = 0.1$ i $\tau = 0.05$. Nestabilnost eksplicitne šeme je očigledna. Da bi se ovom šemom dobilo stabilno rešenje potrebno je da odnos

koraka po vremenu i koraka po prostoru bude mnogo manji. Dakle, jednostavniji račun na svakom vremenskom nivou mora se kompenzovati mnogo većim brojem vremenskih nivoua (manjim korakom τ), da ne bi došlo do nagomilavanja računске greške. ■

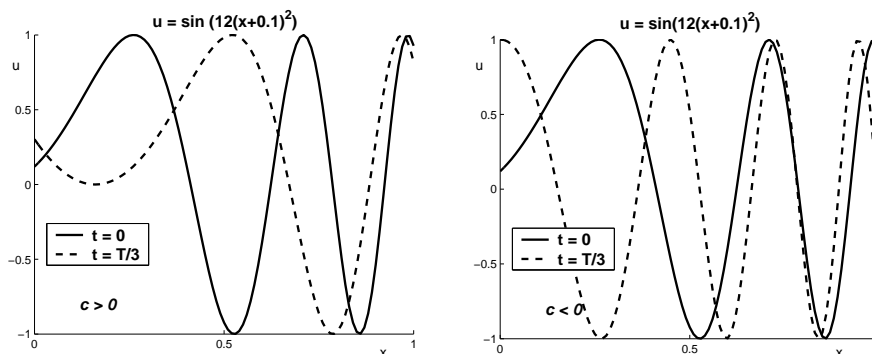


Slika 4.2: Promena temperature u štapu sa vremenom

4.2 Talasna jednačina

Talasna jednačina opisuje različite fizičke pojave, kao što su zvučni talas, mreškanje (talasanje) vodene površine, oscilovanje žice ili membrane, ali i elektromagnetene talase. Dve glavne osobine talasa jesu da se oni prostiru konačnom brzinom kroz sredinu, i da prenose energiju kroz tu sredinu ne proizvodeći trajnu promenu sredine.

PRIMER 3. Izvedimo jednodimenzioni matematički model koji opisuje konvekciju (convection = prenošenje, strujanje) fizičke veličine u konstantnom brzinom c .



Slika 4.3: Kretanje veličine sa vremenom u desno ($c > 0$), ili u levo ($c < 0$)

Veličina u u datoj tački zavisi od položaja tačke na x -osi i trenutka u kome posmatramo tu tačku, $u(x, t)$. U početnom trenutku posmatranja, za $t = 0$, neka je ova veličina zadata funkcijom $u(x, 0) = u_0(x)$, tzv. početnim uslovom. Pretpostavimo da se profil $u_0(x)$ tokom vremena, bez promene oblika, konstantnom brzinom c pomera udesno. U trenutku t on se pomorio za rastojanje ct (slika 4.3, levo). Ako novi koordinatni početak postavimo u tačku $x = ct$, rastojanje od njega je $\xi = x - ct$. Pošto se oblik funkcije nije promenio, mora biti

$$(16) \quad u(x, t) = u_0(\xi) = u_0(x - ct).$$

Kako je

$$\frac{\partial u}{\partial x} = u'_0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = -c u'_0,$$

funkcija $u(x, t)$ je rešenje parcijalne diferencijalne jednačine

$$(17) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

Na primer, rešenje ove jednačine je i funkcija $\sin k(x - ct)$, koja predstavlja osnov Fourier-ove analize.

Ako se početni profil pomera ulevo, translacija će biti definisana smenom $\eta = x + ct$ (pretpostavlja se da je brzina c pozitivna), tako da je funkcionalna zavisnost od vremena u ovom slučaju (slika 4.3, desno) izražena funkcijom

$$(18) \quad u(x, t) = u_0(\eta) = u_0(x + ct).$$

Parcijalna diferencijalna jednačina, čije rešenje je funkcija (18), je

$$(19) \quad \frac{\partial u}{\partial t} - c \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

■

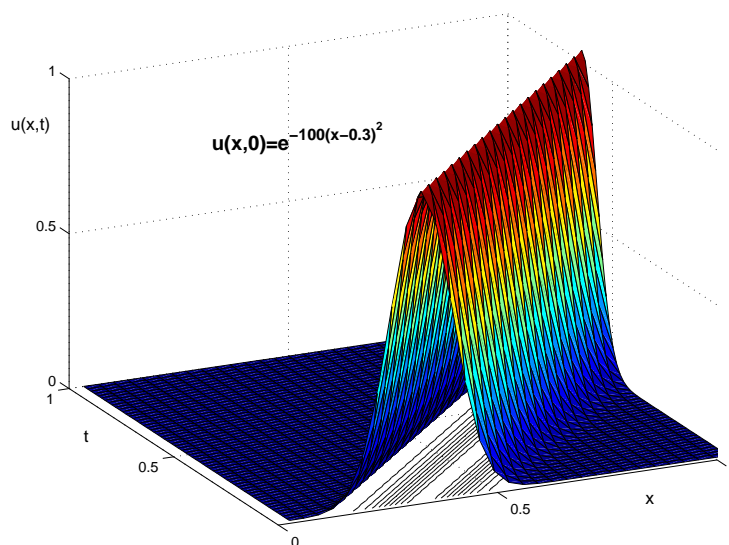
Iz izraza (16) (ili (18)) jasno sledi da rešenje ima istu vrednost $u_0(X)$ u svim tačkama (x, t) ravni za koje važi da je

$$(20) \quad x - ct = X \quad \longrightarrow \quad u(x, t) = u_0(X).$$

Prava $x - ct = X$ naziva se karakteristika. To je, dakle, prava duž koje se vrednost funkcije u , koja postoji u početnom trenutku u tački X , prenosi bez promene kroz prostor i vreme. Nagib i oblik karakteristike određuje brzina c . Ako je brzina konstantna, kao što je slučaj u prethodnom primeru, karakteristike su prave linije, međusobno paralelne. Na slici 4.4 to su prave linije u ravni (x, t) koje odgovaraju različitim vrednostima za X . Ako je brzina funkcija promenljivih x i t , karakteristika je kriva linija, koja može biti i prekidna, ukoliko je brzina i funkcija rešenja u (udarni talasi).

PRIMER 4. *Opisati matematičkim modelom prostiranje talasa.*

Kada bacite kamen u vodu, talas se prostire u svim pravcima. U jednodimenzionom slučaju, talas se prostire i levo i desno. Matematički model prostiranja



Slika 4.4: Kretanje duž karakteristika

talasa bi trebalo da opisuje konvekciju u oba smera, i da rešenje ovog modela sadrži i rešenje jednačine (17) i rešenje jednačine (19),

$$(21) \quad u(x, t) = v(\xi, \eta) = f(\xi) + g(\eta) = f(x - ct) + g(x + ct),$$

gde je

$$(22) \quad f(x) + g(x) = u(x, 0) = u_0(x).$$

Kako su ξ i η nezavisne promenljive, to je

$$(23) \quad \frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} = 0.$$

Sa druge strane, s obzirom na vezu (21) i uvedene smene

$$(24) \quad x = \frac{1}{2}(\xi + \eta), \quad t = \frac{1}{2c}(\eta - \xi),$$

sledi da je

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial v}{\partial \eta} \right) &= \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial \eta} \right) = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2c} \frac{\partial u}{\partial t} \right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2c} \frac{\partial u}{\partial t} \right) - \frac{1}{2c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2c} \frac{\partial u}{\partial t} \right) \\ &= \frac{1}{4c^2} \left(c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right), \end{aligned}$$

gde je korišćena osobina izvoda da je $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x}$. Uzimajući u obzir jednačinu (23), dobijamo jednodimenzionu talasnu jednačinu

$$(25) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Ova parcijalna diferencijalna jednačina reda dva naziva se jednačina žice koja treperi, i spada u jednačine hiperboličkog tipa². U višedimenzionom slučaju ona je oblika

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \Delta u + P,$$

gde su u , c i P funkcije vremena t i prostornih koordinata x_1, \dots, x_m , a Δ Laplace-ov operator (3.27). Brzina c i slobodni član P mogu zavisiti od rešenja u , što definiše mnogo složenije nelinearne modele.

Očigledno je da funkcije f i g ("desni" i "levi" talas) nisu jednoznačno definisane početnim uslovom (22). Za potpuno određenje partikularnog rešenja Cauchy-jevog problema talasne jednačine (25) u neograničenoj oblasti potrebno je zadati i drugi početni uslov. Taj uslov se definiše zadavanjem prvog izvoda rešenja u trenutku $t = 0$, pošto je ovo diferencijalna jednačina reda dva po promenljivoj t (vidi poglavlje 2 o Cauchy-jevim problemima za obične diferencijalne jednačine),

$$(26) \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x), \quad x \in \mathcal{R}.$$

Sada je, na osnovu (21),

$$(27) \quad u_1(x) = -c f'(x) + c g'(x).$$

Integraljenje jednačine (27) od x_0 do x daje jednačinu

$$\frac{1}{c} \int_{x_0}^x u_1(s) ds = f(x_0) - f(x) + g(x) - g(x_0),$$

što, zajedno sa (22), čini sistem jednačina po funkcijama $f(x)$ i $g(x)$, čije rešenje je

$$(28) \quad f(x) = \frac{1}{2} u_0(x) - \frac{1}{2c} \int_{x_0}^x u_1(s) ds - \frac{1}{2} (g(x_0) - f(x_0)),$$

$$(29) \quad g(x) = \frac{1}{2} u_0(x) + \frac{1}{2c} \int_{x_0}^x u_1(s) ds + \frac{1}{2} (g(x_0) - f(x_0)).$$

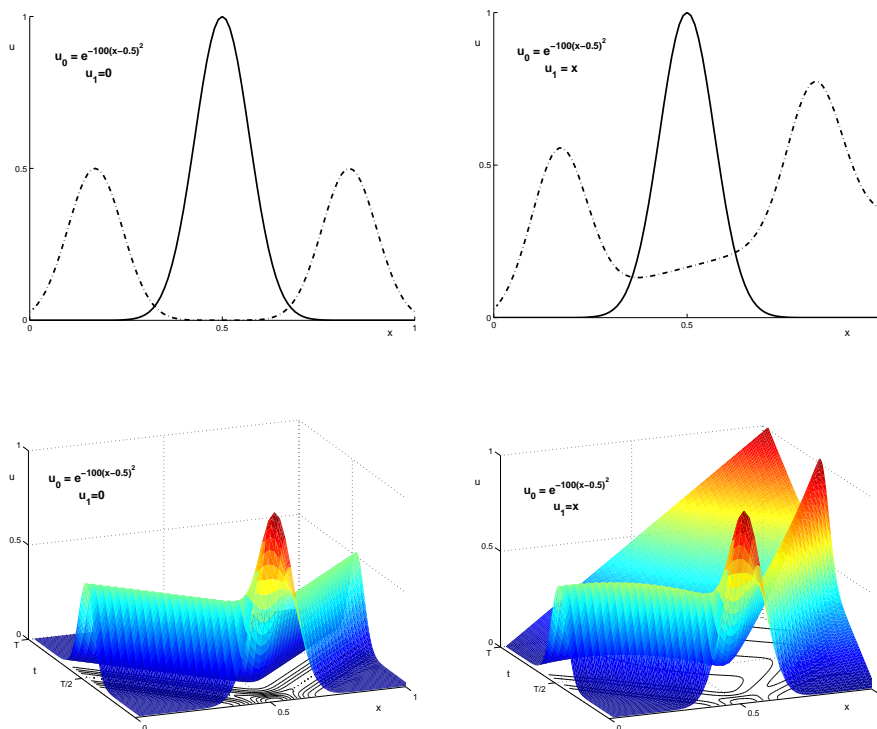
Uvrstimo dobijene funkcije u rešenje (21), pri čemu treba zameniti x sa $x - ct$ u (28) i sa $x + ct$ u (29). Posle sabiranja, dobijamo tzv. D'Alambert-ovo rešenje

$$u(x, t) = \frac{1}{2} (u_0(x - ct) + u_0(x + ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} u_1(s) ds$$

²[18], strana 192

Cauchy-jevog problema za homogenu talasnu jednačinu

$$(30) \quad \begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} &= c^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}, & x \in \mathcal{R}, \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= u_0(x), & \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} &= u_1(x). \end{aligned}$$

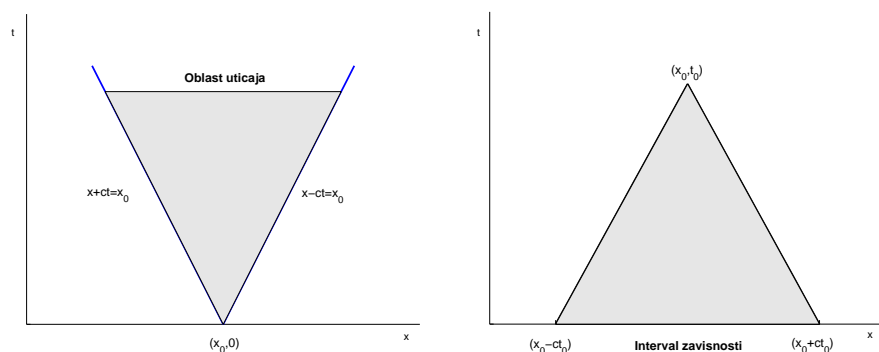


Slika 4.5: Rešenje talasne jednačine reda dva

Slike 4.5, gore, pokazuju početni uslov u_0 i rešenje problema (30) posle vremena $T/3$, za različiti izbor drugog početnog uslova, funkcije u_1 . Donje slike pokazuju 3D grafike istih talasa ($u(x, t)$ koordinatnom sistemu).

S obzirom da je rešenje problema (30) funkcija čije rešenje je superpozicija dva talasa, jednog koji se kreće levo i drugog koji se kreće desno konstantnom brzinom c , početna vrednost rešenja u tački x_0 , $u(x_0, 0)$, uticaće na vrednost rešenja u oblasti određenoj karakteristikama $x - ct = x_0$ i $x + ct = x_0$ (slika 4.6, levo). Vrednost rešenja u tački x_0 u trenutku t_0 biće određena početnim uslovom zadatim u intervalu $[x_0 - ct_0, x_0 + ct_0]$, određenom karakteristikama koje prolaze kroz datu tačku (x_0, t_0) ravni (slika 4.6, desno).

Jasno je da pri konstrukciji numeričkih metoda treba voditi računa o ovim fizičkim karakteristikama rešenja, tj. da početni interval $[x_0 - ct_0, x_0 + ct_0]$ od



Slika 4.6: Oblasti zavisnosti i uticaja određene karakteristikama

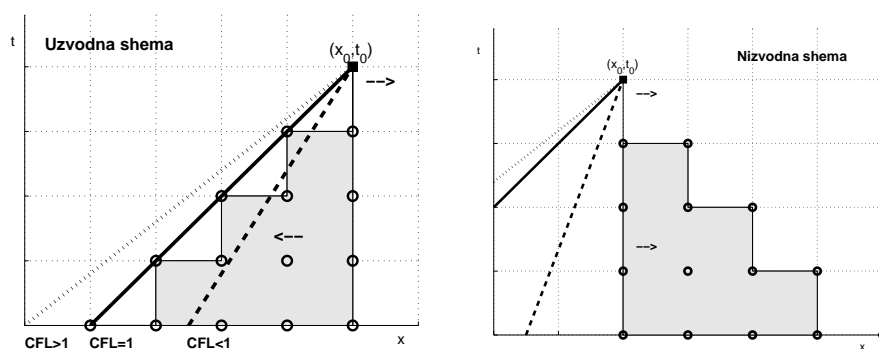
koga zavisi rešenje u tački (x_0, t_0) treba da pripada oblasti koja određuje numeričko rešenje u toj tački. Od poklapanja ovih domena zavisi stabilnost i disipativnost numeričke metode. Ilustrovaćemo prethodni komentar na jednačini (19), izvedenoj u primeru (3).

PRIMER 5. *Odrediti približno rešenje Cauchy-jevog problema*

$$(31) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad u_0(x) = e^{-100(x-0.3)^2}, \quad x \in \mathcal{R},$$

periodično na intervalu $[0, 1]$.

Kao i u primeru 2 za jednačinu provođenja toplote, diskretan problem rešavamo na mreži $\omega_h \times \omega_\tau$, definisanoj formulom (11). U jednačini se javljaju prvi izvodi po vremenskoj i prostornoj promenljivoj, te ćemo ih aproksimirati količnicima konačnih razlika reda jedan, pri čemu možemo koristiti konačne razlike unapred ili unazad. Za aproksimaciju izvoda po prostornoj promenljivoj izbor šeme i koraka treba izvršiti tako da karakteristika pripada numeričkom domenu (šrafirane oblasti na slici 4.7).



Slika 4.7: Optimalan izbor diferencijske šeme

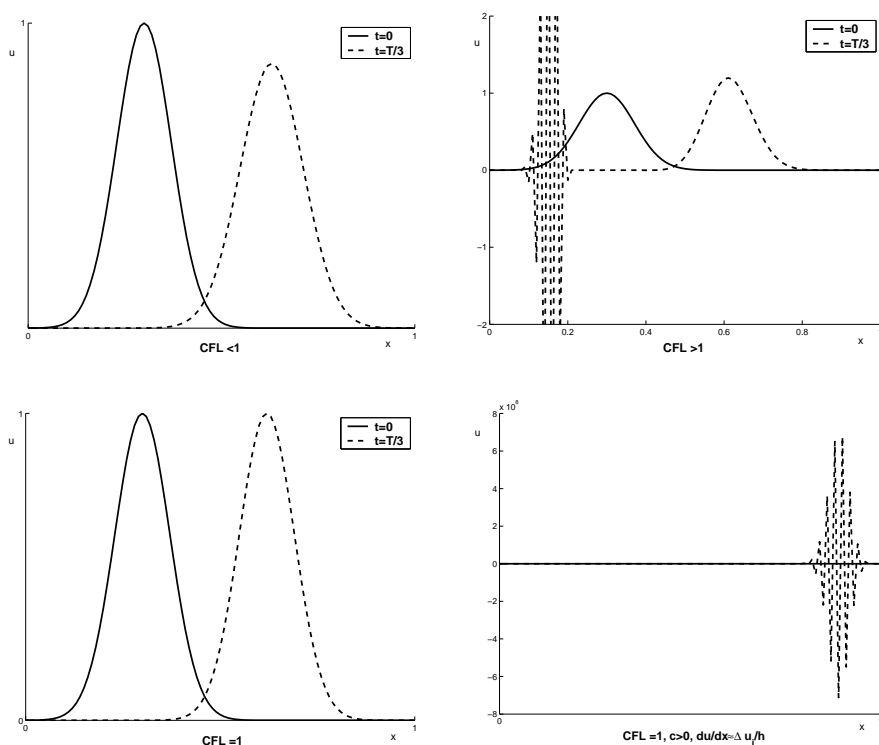
Čvorove šeme treba izabrati iz pravca odakle talas dolazi, tj. uzvodno. Kada se talas kreće sa leva na desno, korišćićemo konačne razlike unazad, a kada se kreće sa desna na levo, konačne razlike unapred,

$$(32) \quad \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0 & \quad \rightarrow \quad \frac{1}{\tau} (v_i^{j+1} - v_i^j) + c \frac{1}{h} (v_i^j - v_{i-1}^j) = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} - c \frac{\partial u}{\partial x} = 0 & \quad \rightarrow \quad \frac{1}{\tau} (v_i^{j+1} - v_i^j) - c \frac{1}{h} (v_{i+1}^j - v_i^j) = 0. \end{aligned}$$

Ovakva šema naziva se uzvodna diferencijska šema.

Slika 4.7, levo, pokazuje da nije dovoljno izabrati uzvodnu šemu da bi odgovarajuća karakteristika pripadala numeričkom domenu. Potrebno je da nagib karakteristike $1/c$ bude veći od nagiba granice numeričkog domena τ/h , što se izražava tzv. Courant-Friedrichs-Lewy-jevim uslovom stabilnosti diferencijske šeme

$$\text{CFL} = c \frac{\tau}{h} \begin{cases} \leq 1, & \text{stabilna} \\ > 1, & \text{nestabilna.} \end{cases}$$



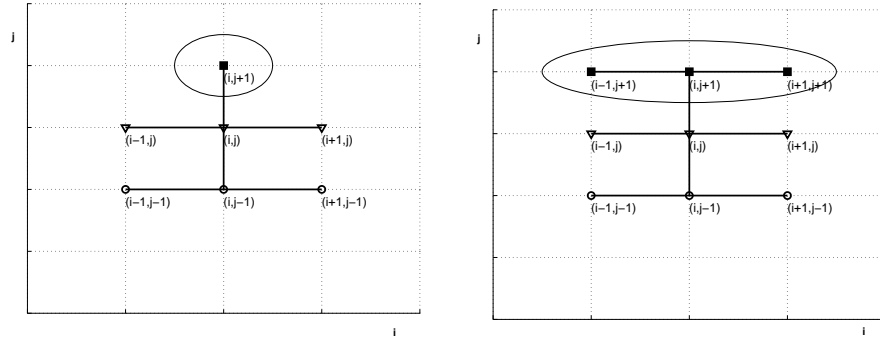
Slika 4.8: Uticaj odnosa koraka po vremenu i prostoru na diferencijsku šemu

Slika 4.8 prikazuje grafike numeričkih rešenja problema (31) pri različitim izborima koraka i šeme. Punom linijom je prikazan početni uslov, i ova funkcija se, kako smo već zaključili u primeru 3, sa vremenom pomera udesno bez promene oblika. Kada se koristi uzvodna šema uz uslov da je $CFL < 1$, rešenje je stabilno, ali se početna funkcija širi i smanjuje (disipacija - slika gore levo). Ista šema za izbor $CFL > 1$ pokazuje nestabilnost sa oscilacijama do veličine 6 (slika gore desno), a za izbor $CFL = 1$ numeričko rešenje je identično tačnom rešenju (slika dole levo). Konačno, ako se izabere nizvodna šema (numerički domen predstavljen na slici 4.7, desno), numeričko rešenje je jako nestabilno (vrednosti reda veličine 10^{18}), bez obzira na vrednost CFL broja (slika dole desno). ■

Slično šemi sa težinama (14), koja se koristi za rešavanje jednačine provođenja toplote, za rešavanje talasne jednačine (25) koristi se šema sa težinama sa dva težinska koeficijenta,

$$(33) \quad v_{t,i}^j = \sigma_1 v_{x,i}^{j+1} + (1 - \sigma_1 - \sigma_2) v_{x,i}^j + \sigma_2 v_{x,i}^{j-1}, \quad j = 1, \dots, m-1,$$

gde je $0 \leq \sigma_1, \sigma_2 \leq 1$. Umesto dva vremenska sloja koja se javljaju u šemi (14), u šemi (33) povezana su tri vremenska sloja, što je posledica aproksimacije drugog izvoda po vremenu konačnom razlikom reda dva. Šema je eksplicitna za $\sigma_1 = 0$, jer se tada u jednačini javlja samo jedna nepoznata veličina v_i^{j+1} (slika 4.9, levo). Ako je $\sigma_1 \neq 0$, šema (33) predstavlja na svakom vremenskom sloju (za svako $j > 0$) sistem linearnih jednačina sa trodijagonalnom matricom (slika 4.9, desno).



Slika 4.9: Šablon za eksplicitnu (levo) i implicitnu (desno) šemu sa težinama

U jednačini (33) vektor $\mathbf{v}^{j+1} = \{\dots, v_0^{j+1}, \dots, v_n^{j+1}, \dots\}$ je nepoznati vektor, a vektori \mathbf{v}^j i \mathbf{v}^{j-1} su poznati. Oni se odeđuju ili izračunavanjem u prethodnim koracima, ili na osnovu zadatih početnih uslova (30), ako je $j = 0$ ili $j = 1$,

$$(34) \quad \begin{aligned} v_i^0 &= u_0(x_i), \\ v_{t,i}^0 &= u_1(x_i), \quad \text{odnosno} \quad v_i^1 = v_i^0 + \tau u_1(x_i). \end{aligned}$$

Izrazima (33)-(34) je aproksimiran Cauchy-jev problem (30), definisan na beskonačnoj oblasti (realnoj pravoj). U prirodi je obično sredina u kojoj se prostire talas ograničena, ili se pretpostavlja periodičnost talasa. To zahteva zadavanje uslova na granici intervala $[a, b]$ (ako razmatramo jednodimenzioni slučaj, kao do sada) opšteg tipa,

$$(35) \quad \alpha_1 u'(a, t) + \beta_1 u(a, t) = p(t), \quad \alpha_2 u'(b, t) + \beta_2 u(b, t) = q(t), \quad t \geq 0,$$

gde su $\alpha_k, \beta_k, k = 1, 2$, poznate konstante, a $p(t)$ i $q(t)$ poznate funkcije, ili periodičnih graničnih uslova

$$(36) \quad u(a, t) = u(b, t), \quad u'(a, t) = u'(b, t).$$

Jednačine (30),(35) ili (30),(36) definišu mešoviti problem za talasnu jednačinu, koji se rešava diferencijском šemom na mreži (11).

PRIMER 6. Modelovati oscilovanje žice koja je

- (i) učvršćena na krajevima,
- (ii) izložena je dejstvu sile, čija je zavisnost od prostora i vremena predstavljena funkcijom $f(x, t) = x^2 + t^2$, pod pretpostavkom da je dužina žice normirana na jedinicu dužine,
- (iii) oblik žice na početku posmatranja je definisan funkcijom $\sin(\pi x)$ (uz istu pretpostavku o normiranosti),
- (iv) početna brzina oscilovanja $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0)$ je jednaka nuli.

Matematički model opisanog fizičkog problema je

$$(37) \quad \begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x^2 + t^2, & 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ u(0, t) = u(1, t) &= 0, & u(x, 0) = \sin(\pi x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0. \end{aligned}$$

Rešimo mešoviti problem (37) diferencijском šemom sa težinama tačnosti $O(h^2 + \tau^2)$. Promena šeme sa težinama (33), koju treba prilagoditi ovom modelu, sastoji se u dodavanju slobodnog člana zadatog funkcijom $f(x, t)$ (tačka (ii)),

$$(38) \quad \begin{aligned} v_{tt,i}^j &= \sigma_1 v_{xx,i}^{j+1} + (1 - \sigma_1 - \sigma_2) v_{xx,i}^j + \sigma_2 v_{xx,i}^{j-1} + f(x_i, t_j), \\ i &= 1, \dots, n-1, \quad j = 1, \dots, m-1. \end{aligned}$$

Granični uslovi (i) određuju vrednosti rešenja na krajevima žice,

$$(39) \quad u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad \longrightarrow \quad v_0^j = v_n^j = 0, \quad j = 0, \dots, m,$$

a uslov (iii) definiše početni oblik žice

$$(40) \quad u(x, 0) = \sin(\pi x) \quad \longrightarrow \quad v_i^0 = \sin(\pi x_i), \quad i = 0, \dots, n.$$

Drugi početni uslov (iv) je definisan prvim izvodom, koji, prema zahtevu zadatka, treba aproksimirati sa tačnošću $O(\tau^2)$. Aproksimacije v_i^1 , određene formulom (34),

nisu zadovoljavajuće jer je tačnost aproksimacija reda $O(\tau)$. Da bismo dobili aproksimaciju prvog izvoda tražene tačnosti, potrebno je u Taylor-ovom razvoju zadržati i sledeći član,

$$\begin{aligned}
 u_t(x, 0) &= \frac{1}{\tau} (u(x, \tau) - u(x, 0)) \\
 (41) \quad &= \frac{1}{\tau} \left(u(x, 0) + \tau \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) + \frac{\tau^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, 0) + O(\tau^3) - u(x, 0) \right) \\
 &= \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) + \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, 0) + O(\tau^2).
 \end{aligned}$$

Prvi sabirak je zadat početnim uslovom (iv) i jednak je nuli, a drugi je zadat samom jednačinom i početnim uslovom (iii),

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, 0) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, 0) + f(x, 0) = -\pi^2 \sin(\pi x) + x^2.$$

Zamenom u (41) dobijamo da je

$$u_t(x, 0) = \frac{\tau}{2} (-\pi^2 \sin(\pi x) + x^2) + O(\tau^2),$$

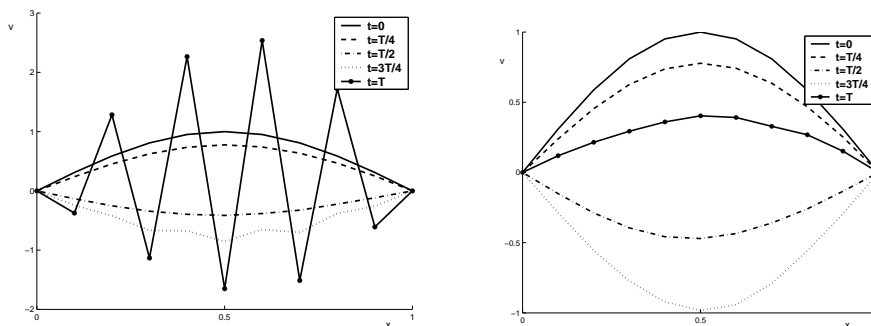
te zanemarivanjem člana $O(\tau^2)$ dobijamo da je drugi početni uslov diskretnog problema jednak

$$(42) \quad v_i^1 = \sin(\pi x_i) + \frac{\tau^2}{2} (x_i^2 - \pi^2 \sin(\pi x_i)), \quad i = 0, \dots, n.$$

Objedinjavanjem aproksimacija (38), (39), (40) i (42) dobijamo diskretan model problema (37),

$$\begin{aligned}
 v_i^0 &= \sin(\pi x_i), \\
 v_i^1 &= \sin(\pi x_i) + \frac{\tau^2}{2} (x_i^2 - \pi^2 \sin(\pi x_i)), \quad i = 1, \dots, n-1, \\
 -c\sigma_1 v_{i-1}^{j+1} + (1 + 2c\sigma_1)v_i^{j+1} - c\sigma_1 v_{i+1}^{j+1} \\
 &= c(1 - \sigma_1 - \sigma_2)v_{i-1}^j + 2(1 - c(1 - \sigma_1 - \sigma_2))v_i^j + c(1 - \sigma_1 - \sigma_2)v_{i+1}^j \\
 &\quad + c\sigma_2 v_{i-1}^{j-1} - (1 + 2c\sigma_2)v_i^{j-1} + c\sigma_2 v_{i+1}^{j-1} + \tau^2(x_i^2 + t_j^2), \\
 v_0^j &= v_n^j = 0, \quad j = 0, 1, \dots,
 \end{aligned}$$

gde je uvedena oznaka $c = \tau^2/h^2$. Ako je $\sigma_1 = 0$ šema je eksplicitna. Kada je $\sigma_1 \neq 0$ šema je implicitna, jer se mora rešavati sistem linearnih jednačina da bi se odredile nove vrednosti rešenja. Od vrednosti parametra c zavisi stabilnost šeme. Za izbor parametra $c = 1.1^2$ ($h = 0.1$ i $\tau = 0.11$) eksplicitna šema ($\sigma_1 = \sigma_2 = 0$) je očigledno nestabilna (slika 4.10, levo), a implicitna šema sa težinama za isti odnos koraka po vremenu i prostoru je stabilna (slika 4.10, desno, za $\sigma_1 = 1/3$, $\sigma_2 = 2/3$). ■



Slika 4.10: Eksplicitna i implicitna diferencijska šema

Teme

- 1.1 Analiza hemijskog uzorka putem zagrevanja ([37], pp.6)
- 1.2 Zagrevanje površine ([13],pp.195, [11],ch.7)
- 1.3 Bušenje laserom ([3],pp.83)
- 1.4 Raspodela toplote u sfernom zidu ([13],pp.191)
- 1.5 Difuzni modeli u biologiji ([10],ch.10, [15],pp.172)
- 2.1 Protok saobraćaja ([21],pp.41)
- 2.2 Stabilnost diferencnih šema za talasnu jednačinu ([31])
- 2.3 Protok granula u levku ([37], pp.83)
- 2.4 Ispitivanje žile uglja zvukom ([37], pp.78)
- 2.5 Detektovanje podmornice zvukom ([37], pp.68)
- 2.6 Dinamika pantografa (uređaj za napajanje električne lokomotive) ([37], pp.40,50)

Literatura

- [1] Abramowitz M., Stegun I., *Handbook of Mathematical Functions*, Dover Publications, Inc., New York, 1972.
- [2] Akin J.E., *Application and Implementation of Finite Element Methods*, Academic Press, London, 1982.
- [3] Andrews J.G., McLone R.R., *Mathematical Modelling*, (ruski prevod) Mir, Moskva, 1979.
- [4] Barker V., *Some Computational Aspects of Wavelets*, Technical University of Denmark, Lyngby, pp.110, 2001.
- [5] Bender E., *An Introduction to Mathematical Modeling*, Dover, New York, 1978.
- [6] Berezin I.S., Zidkov N.P., *Numerička analiza*, Nućna knjiga, Beograd, 1963.
- [7] Bossel H., *Modeling and Simulation*, A K Peters, Wellesley, 1994.
- [8] Bungartz H.J., *Mathematical models - ODE and PDE, Lesson 01*, in: Second Short Course on Parallel Numerical Simulation, www.ipvs.uni-stuttgart.de/sgs 2003.
- [9] Doolan E., Miller J., Schilders W., *Uniform Numerical Methods for Problems with Initial and Boundary Layers*, Boole Press, Dublin, 1980. (ruski prevod – Mir, Moskva, 1983).
- [10] Edelstein-Keshet L., *Mathematical Models in Biology*, SIAM, Philadelphia, 2005.
- [11] Fowkes N., Mahony J., *An introduction to Mathematical Modelling*, Wiley, New York, 1994.
- [12] Gustaffson F., Bergman N., *MATLAB for Engineers Explained*, Springer, London, 2003.
- [13] Gander W., Hřebíček J., *Solving Problems in Scientific Computing Using Maple and Matlab, fourth edition*, Springer, Berlin, 2004.

- [14] Goedecker S., *Wavelets and Their Application*, EPFL, Lausanne, 1998.
- [15] Higham D., Higham N., *Matlab Guide*, SIAM, Philadelphia, 2000.
- [16] Hildebrand F., *Advanced Calculus for Applications*, Second edition, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1976.
- [17] Jerome J.(edit.), *Modelling and Computation for Applications in Mathematics, Science, and Engineering*, Clarendon Press, Oxford, 1998.
- [18] Jovanović B., Radunović D., *Numerička analiza*, Matematički fakultet, 2003.
- [19] Klamkin M. (edit), *Mathematical Modelling: Classroom Notes in Applied Mathematics*, SIAM, Philadelphia, 1987.
- [20] Leon S., *Linear Algebra with Applications*, Prentice Hall, 1998.
- [21] LeVeque R., *Numerical Methods for Conservation Laws*, Birkhauser, Basel, 1990.
- [22] Meerschaert M., *Mathematical Modeling (Second Edition)*, Academic Press, 1999.
- [23] Mesterton-Gibbons M., *A Concrete Approach to Mathematical Modelling*, Wiley, New York, 1995.
- [24] Moler C., *Numerical Computing with Matlab*, SIAM, Philadelphia, 2004.
- [25] Mulcahy C., *Plotting and scheming with wavelets*, preprint, 1996.
- [26] Nievergelt Y., *Wavelets Made Easy*, Birkhauser, Boston, 2001.
- [27] Press W., Flannery B., Teukolsky S., Vetterling W., *Numerical Recipes*, Cambridge University Press, Cambridge, 1986.
- [28] Radunovic D., *Numeričke metode (3. izdanje)*, Akademska misao, Beograd, 2004.
- [29] Radunovic D., Samardžić A., Marić M., *Numeričke metode – Zbirka zadataka kroz C, Fortran i Matlab*, Akademska misao, Beograd, 2005.
- [30] Radunovic D., *Talasići*, Akademska misao, Beograd, 2005.
- [31] Rosales R., *Simplest car following traffic flow model*, <http://ocw.mit.edu>
- [32] Stoer J., Bulirsch R., *Introduction to Numerical Analysis*, Springer-Verlag, New York, 1980.
- [33] Stollnitz E., DeRose T., Salasin D., *Wavelets for computer graphics: A primer, part 2*, IEEE Comp. Graphics and Applications, V15, N4, 75-85, 1995.

- [34] Strang G., *Introduction to Applied Mathematics*, Willesley-Cambridge Press, Willesley, 1986.
- [35] Strang G., Fix G., *An Analysis of the Finite Element Method*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1973.
- [36] Strang G., Nguyen T., *Wavelets and Filter Banks*, Wellesley-Cambridge Press, 1996.
- [37] Tayler A.B., *Mathematical Models in Applied Mechanics*, Clarendon Press, Oxford, 1986.
- [38] Wilkinson J.H., Reinsch C., *Linear Algebra*, Handbook of Automatic Computation, Springer-Verlag, Berlin, 1971. (ruski - Masinostroenie, Moskva, 1976)
- [39] Zalznjak V.E., *Osnovi vicisliteljnoi fizike (cast 1: Vedenie v konecno-raznostnie metodi)*, Inzevsk, Moskva, 2004.