gde je $\gamma = tg(\varphi)$ određeno uglom koji zrak zaklapa sa horizontalnom osom. Kao rezultat se dobija da će putanja biti zatvorena i periodična ili će ona biti gusta unutar kvadrata. Prvi slučaj se dešava ako i samo ako je koeficijent pravca polazne putanje racionalan broj, dok će se drugi slučaj dobiti kada je γ iracionalan broj (rezultat da putanja zraka predstavlja gust skup u kvadratu slediće iz Kronekerove teoreme).

3.2 Didonin problem ili izoperimetrijski problem

Legenda kaže da je feničanska princeza Didona nakon smrti njenih roditelja i svađe sa svojim bratom Pigmalionom, uzela veliku količinu novca i pobegla u Severnu Afriku sa ciljem da izgradi grad. Na tom putu joj se našao tamošnji vladar Jarbas, koji u početku nije želeo da proda zemlju Didoni. Međutim, Didona je bila dobar pregovarač i ponudila je određenu sumu novca Jarbasu za zemlju koju je moguće ograničiti samo volovljom kožom. Nakon pristanka Jarbasa, ona zemlju nije prekrila kožom, već je kožu isekla na sitne niti od kojih je načinila konopac i njime ograničila znatno veću površinu zemlje za izgradnju Kartagine. Didona je pri ograničavanju imala problem kako da ograniči što veću površinu, koji je rešen uz pomoć mudraca koje je povela sa sobom. Ovaj problem je poznat pod imenom **Didonin problem** ili u matematici kao **izoperimetrijski problem**. Opšta matematička definicija ovog problema glasi:

Među prostim zatvorenim krivama iste dužine, pronaći krivu koja ograničava najveću površinu.

U nastavku ćemo dati jedno od rešenja ovog problema, koje je objavio **Hurvic**[20] **(1901)**, ali najpre hajde da kažemo nešto o krivama.

Krive u $\mathbb{R}^n$

Kriva u prostoru $\mathbb{R}^n$ je neprekidno preslikavanje $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, pri čemu je $a, b \in \mathbb{R}$ i $a < b$. Ako je $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ kriva, tada postoje koordinate $x_1, x_2, ..., x_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ tako da za svako t važi $\gamma(t) = (x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t))$. Očigledno, neprekidnost funkcije γ na $[a,b]$ jednaka je neprekidnosti svih koordinatnih funkcija $x_1, ..., x_n$ na $[a,b]$.

Orijentacija krive zavisi od rasta parametra, drugim rečima $\forall t_1, t_2 \in [a,b]$ i $t_1 < t_2$, važi da je kriva γ orijentisana od tačke $\gamma(t_1)$ ka tački $\gamma(t_2)$. Ako postoje tačke $t_1, t_2 \in [a,b]$, takve da $t_1 \neq t_2$ i $\gamma(t_1) = \gamma(t_2) = A$, onda je A tačka **samopreseka** krive γ. Specijalno, ako je $\gamma(a) = \gamma(b) = A$, onda je tačka A početak i kraj krive γ, ali nije tačka samopreseka. Dalje, ako je $\gamma(a) = \gamma(b)$, onda kažemo da je γ **zatvorena** kriva. Kriva γ je **prosta**, ako nema tačaka samopreseka.

Funkcija $\gamma = (x_1, x_2, ...x_n)$ je **diferencijabilna** akko su sve koordinatne funkcije diferencijabilne tj. $\gamma' = (x_1', x_2', ..., x_n')$. Kriva γ je **neprekidno diferencijabilna** akko γ' postoji i neprekidna je funkcija. Za krivu γ kažemo da je **glatka** ako je γ' neprekidna funkcija i $\gamma'(t) \neq 0$ za svako $t \in [a,b]$. Kriva je **deo po deo glatka**, ako postoji podela segmenta $[a,b]$ tj. $\mathcal{P} : a = s_1 < ... < s_m = b$, tako da je kriva γ glatka na svakom od segmenata $[s_{j-1}, s_j],\ j = \overline{1,m}$.

U skladu s ovim dolazimo do termina **rektificijabilnosti** odnosno kriva ima dužinu i računa se na sledeći način:

[20] Adolf Hurvic (1859-1919)- nemački matematičar

Teorema 3.2. *Neka je $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ glatka kriva. Tada je γ rektificijabilna kriva i njena dužina je*

$$\ell(\gamma) = \int\limits_a^b \sqrt{(x_1'(t))^2 + ... + (x_n'(t))^2} dt.$$

Teorema 3.3. *Ako je γ deo po deo glatka kriva u $\mathbb{R}^n$, tada je γ rektificijabilna kriva i njena dužina je*

$$\ell(\gamma) = \int\limits_a^b \sqrt{(x_1'(t))^2 + ... + (x_n'(t))^2} dt.$$

pri čemu zanemarujemo konačno mnogo tačaka s_j u kojima ne postoji $\gamma'(s_j)$.

Za dokaz izoperimetrijskog problema od značaja nam je **Grinova** [21] **formula**:

Teorema 3.4. *Neka je C pozitivno orijentisana, deo po deo glatka, prosta zatvorena kriva u ravni i neka je D oblast ograničena krivom C. Ako funkcije P i Q imaju neprekidne parcijalne izvode na otvorenoj oblasti koja sadrži D onda*

$$\int\limits_C P dx + Q dy = \iint\limits_D \Big(\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} \Big) dx dy.$$

Iz Grinove formule se lako dokazuje da je površina oblasti D koja je ograničena krivom C data formulom:

$$P(D) = \frac{1}{2} \int\limits_C x dy - y dx.$$

Rešenje izoperimetrijskog problema

Dokaz izvodimo za slučaj kada je dužina krivih jednaka jedinici, a parametrizacija data po luku krive, dok će svi ostali slučajevi slediti iz pokazanog.

Neka je $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ deo po deo glatka prosta zatvorena kriva, tj. za $t \in [0,1]$ je $\gamma(t) = (x(t), y(t))$. Kako je parametrizacija data po luku, to je za svako $t \in [0,1]$: $\big|\big(x'(t), y'(t)\big)\big| = 1$ odnosno $x'^2(t) + y'^2(t) = 1$, pa je

$$\int\limits_0^1 x'^2(t) + y'^2(t) dt = 1.$$

Površinu ograničenu krivom γ možemo izračunati na osnovu Grinove formule

$$P_\gamma = \frac{1}{2} \Big| \int\limits_0^1 x(t)y'(t) - x'(t)y(t) dt \Big|.$$

Funkcije $x(t), y(t)$ su neprekidno diferencijabilne i periodične sa periodom 1, a kako je γ zatvorena kriva važi $x(0) = x(1)$ i $y(0) = y(1)$, pa se one mogu razviti u Furijeov red

[21] Džordž Grin (1793-1841)- engleski matematičar i fizičar

$$x(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{i2n\pi t} \tag{3.1}$$

$$y(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} b_n e^{i2n\pi t} \tag{3.2}$$

gde su, ako pogledamo (2.7), Furijeovi koeficijenti dati u kompleksnom obliku:

$$a_n = \int_0^1 x(t)e^{-i2n\pi t}dt$$

$$b_n = \int_0^1 y(t)e^{-i2n\pi t}dt$$

Slično, zbog neprekidnosti funkcija $x'(t)$, $y'(t)$ i periodičnosti sa periodom 1, kao i zbog zatvorenosti krive, ove funkcije možemo razviti u Furijeov red koji se dobija formalnim diferenciranjem redova datim u (3.1) i (3.2):

$$x'(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} i2n\pi a_n e^{i2n\pi t}$$

$$y'(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} i2n\pi b_n e^{i2n\pi t}$$

Kako je sistem $\{e^{i2\pi kt}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ zatvoren u prostoru $\mathcal{C}[0,1]$, tada on zadovoljava Parsevalovu jednakost. Prema tome, imamo da važi:

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}(|i2n\pi a_n|^2 + |i2n\pi b_n|^2) = \int_0^1 x'^2(t) + y'^2(t)dt$$

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} 4n^2\pi^2(|a_n|^2 + |b_n|^2) = 1$$

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} n^2(|a_n|^2 + |b_n|^2) = \frac{1}{4\pi^2} \tag{3.3}$$

Zamenom prethodnih rezultata u P_γ dobijamo:

$$\begin{aligned}
P_\gamma &= \frac{1}{2}\Big|\int_0^1 x(t)y'(t) - x'(t)y(t)dt\Big| \\
&= \frac{1}{2}\Big|\int_0^1 \sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ k\in\mathbb{Z}}} \Big(i2\pi k a_n b_k - i2\pi n a_n b_k\Big) e^{i2\pi(n+k)t}dt\Big| \\
&= \frac{1}{2}\Big|\sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ k\in\mathbb{Z}}} \int_0^1 (i2\pi k a_n b_k - i2\pi n a_n b_k\Big) e^{i2\pi(n+k)t}\ dt\Big|
\end{aligned}$$

Dalje, zbog ortonormiranosti sistema $\{e^{i2\pi kt}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ sledi da su svi članovi u dvostrukoj sumi nula sem onih za koje je $n = -k$. Napomenimo još i da važi $\overline{a_n} = a_{-n}$, $\overline{b_n} = b_{-n}$ te imamo:

$$P_\gamma = \frac{1}{2}\Big|\sum_{n\in\mathbb{Z}} \Big(i2\pi n a_n \overline{b_n} + i2\pi n a_n \overline{b_n}\Big)\Big| = 2\pi\Big|\sum_{n\in\mathbb{Z}} n a_n \overline{b_n}\Big|. \tag{3.4}$$

Posmatrajmo sada nejednakosti koje su zadovoljene za svaki ceo broj n:

$$2|n||a_n\overline{b_n}| \le 2n^2|a_n\overline{b_n}| \le n^2(|a_n|^2 + |\overline{b_n}|^2).$$

Zamenom u (3.4) i korišćenjem (3.3) dobija se

$$P_\gamma \le \pi \sum_{n\in\mathbb{Z}} n^2(|a_n|^2 + |b_n|^2) = \frac{\pi}{4\pi^2} = \frac{1}{4\pi}$$

takozvana **Poenkareova**[22] **nejednakost**.

Prirodno sledi pitanje, da li je moguće da važi jednakost tj. $P_\gamma = \frac{1}{4\pi}$ i ukoliko može, za koju krivu to važi?

Da bi važila jednakost mora da važi $2|n||a_n\overline{b_n}| = 2n^2|a_n\overline{b_n}|$, a odavde sledi da je $n = 0, \pm 1$. Iz $2n^2|a_n\overline{b_n}| = n^2(|a_n|^2 + |\overline{b_n}|^2)$ imamo da je $|a_n| = |\overline{b_n}|$. Dakle,

$$|a_1| = |\overline{a_1}| = |b_1| = |\overline{b_1}|.$$

Ako upotrebimo ovaj rezultat u (3.3) imamo da je

$$\frac{1}{4\pi^2} = |a_1|^2 + |\overline{a_1}|^2 + |b_1|^2 + |\overline{b_1}|^2 = 4|a_1|^2$$
$$\Longrightarrow |a_1| = \frac{1}{4\pi}$$

Sada funkcije $x(t),\ y(t)$ možemo zapisati u obliku

$$x(t) = \overline{a_1}e^{-i2\pi t} + a_0 + a_1 e^{i2\pi t}$$

$$y(t) = \overline{b_1}e^{-i2\pi t} + b_0 + b_1 e^{i2\pi t}$$

dok $a_1,\ b_1$ možemo zapisati kao

$$a_1 = \frac{1}{4\pi}e^{i2\pi\alpha}$$
$$b_1 = \frac{1}{4\pi}e^{i2\pi\beta}$$

gde je $|e^{i2\pi\alpha}| = |e^{i2\pi\beta}| = 1$ za $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$. Primenom Ojlerove formule $e^{in\varphi} = \cos n\varphi + i\sin n\varphi$ i primenom prethodnih rezultata u (3.4) zahtevajući da $P_\gamma = \frac{1}{4\pi}$ dobija se:

$$\frac{1}{4\pi} = 2\pi|a_1\overline{b_1} - \overline{a_1}b_1|$$
$$\frac{1}{4\pi} = \frac{1}{8\pi}|e^{i2\pi(\alpha-\beta)} - e^{-i2\pi(\alpha-\beta)}|$$
$$\frac{1}{4\pi} = \frac{1}{8\pi}|2i\sin 2\pi(\alpha-\beta)|$$
$$\frac{1}{4\pi} = \frac{1}{4\pi}|\sin 2\pi(\alpha-\beta)|$$
$$1 = |\sin 2\pi(\alpha-\beta)|$$

[22] Anri Poenkare (1854-1912)- francuski matematičar

odakle rešavanjem sledi da je $\alpha - \beta = \frac{2k+1}{4},\ k \in \mathbb{Z}$.

Konačno, sređivanjem $x(t)$ i $y(t)$ imamo da je

$$\begin{aligned} x(t) &= a_0 + \overline{a_1} e^{-i2\pi t} + a_1 e^{i2\pi t} \\ &= a_0 + \frac{1}{4\pi}\left(e^{-2\pi i(\alpha+t)} + e^{2\pi i(\alpha+t)}\right) \\ &= a_0 + \frac{1}{4\pi} \cdot 2\cos 2\pi(\alpha+t) \\ &= a_0 + \frac{\cos 2\pi(\alpha+t)}{2\pi}; \\ y(t) &= b_0 + \frac{\cos 2\pi(\beta+t)}{2\pi}. \end{aligned}$$

Međutim zamenom $\beta = \alpha - \frac{2k+1}{4}$ u

$$\begin{aligned} \cos 2\pi(\beta+t) &= \cos\left(2\pi(\alpha+t) - \frac{(2k+1)\pi}{2}\right) \\ &= \cos 2\pi(\alpha+t)\cos\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right) + \sin 2\pi(\alpha+t)\sin\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right) \\ &= (-1)^k \sin 2\pi(\alpha+t) \end{aligned}$$

sledi da je

$$y(t) = b_0 \pm \frac{\sin 2\pi(\alpha+t)}{2\pi}. \tag{3.5}$$

Odnosno, znak u (3.5) zavisi od parnosti broja k pri izboru ugla β.

Dakle, sva rešenja izoperimetrijskog problema su **kružnice** poluprečnika $\frac{1}{2\pi}$ čije su jednačine gore navedene, a od vrednosti α i znaka uz sinus zavisi orijentacija tog kruga.

3.3 Neprekidna nigde diferencijabilna funkcija

Znamo mnogo primera neprekidnih funkcija koje nisu diferencijabilne u jednoj tački, jedna takva je $f(x) = |x|$. Takođe, nije teško definisati funkciju koja je neprekidna za bilo koji najviše prebrojiv podskup realnih brojeva i nigde diferencijabilna na tom konačnom skupu.

Riman je tvrdio da je jedna takva funkcija data redom

$$R(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n^2 x}{n^2}$$

međutim on nikada svoju tvrdnju nije potkrepio dokazom. Ovo pitanje je zaintrigiralo mnoge, pa i Vajerštrasa koji je želeo da pronađe primer jedne ovakve funkcije, što mu je pošlo za rukom 1872. godine. On je pokazao da ako su $a, b \in \mathbb{R}$ takvi da $b \in (0,1)$ i $a \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ za koje važi $ab > 1 + \dfrac{3\pi}{2}$, tada funkcija

$$W(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b^n \cos a^n x$$

nije nigde diferencijabilna, što se može naslutiti sa slike: