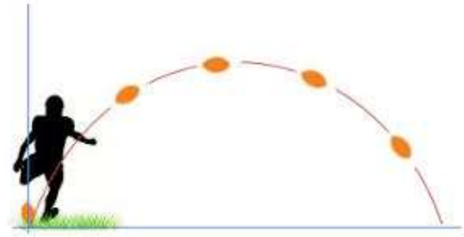
Osnovi matematičkog modeliranja - Kosi hitac



Slika 1.

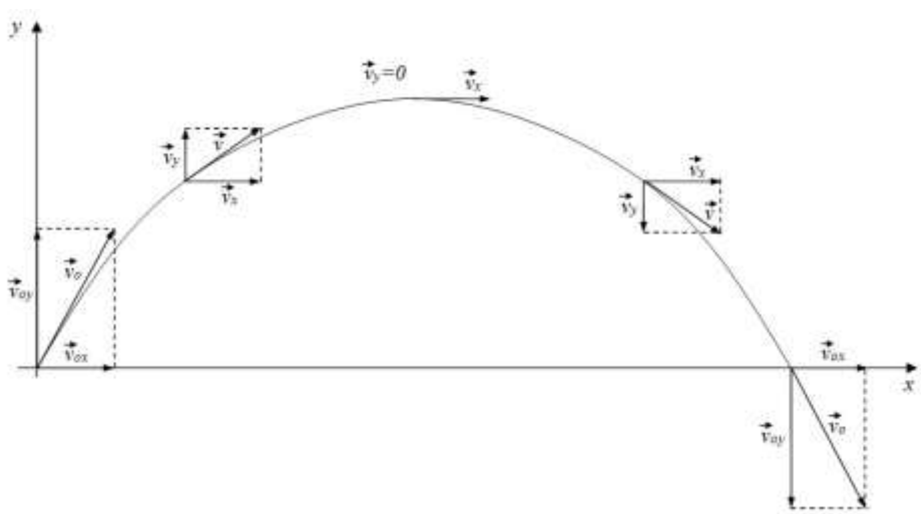
Problem:

Odrediti trajektoriju i domet nekog projektila nakon što je na njega, pod određenim uglom, delovala neka sila.

Rešenje:
Radi jednostavnije ilustracije, posmatraćemo trajektoriju lopte nakon šuta.
U cilju preciznog definisanja matematičkog modela, uvešćemo neke pretpostavke:

1. Lopta se može predstaviti kao jedna tačka pozitivne mase i šutira se sa površine Zemlje, videti sliku 1.
2. Gravitaciono privlačenje sferično simetričnog tela je isto kao kada bi sva masa tog tela bila koncentrisana u centru tog tela.
3. U svakom trenutku možemo da izmerimo visinu na kojoj se lopta nalazi, kao i udaljenost od fudbalera, tj. u svakom trenutku t, možemo reći da su coordinate lopte odredjene sa $x(t)$ i $y(t)$.
   U momentu šuta lopta se nalazi u koordinatnom početku, tj. $x(0) = 0, y(0) = 0$.
4. Pretpostavimo da se čitav eksperiment šutiranja lopte vrši u vakuumu (lopta se neometano kreće).
5. Zemlja je ravna i gravitacija deluje nadole, normalno na ravno tlo u svim tačkama.
6. Jačina sile zemljine teže ne zavisi od visine, već je svuda $g = 9.81\,\frac{m}{s^2}$.
7. Funkcije $x(t)$ i $y(t)$ su dva puta neprekidno diferencijabilne funkcije.

Da li ima smisla pretpostavljati da su funkcije $x(t)$ i $y(t)$ dva puta neprekidno diferencijabilne funkcije? Da.
Primetimo da se početna brzina v može razložiti na v_x i v_y koordinate. Primetimo, zatim, da se dužina vektora koji se kreće po x osi ne menja, dok se dužina vektora koji se kreće po y osi smanjuje do nule a zatim ponovo povećava (slika 2).



Slika 2.

Dakle, na loptu deluje sila zemljine teže u negativnom pravcu: gravitacija se može posmatrati kao negativno ubrzanje, tj. možemo reći da je

$$y''(t) = -g$$

Diferenciranjem ove jednačine (na segmentu $[0, t)$), dobija se da je

$$y'(t) = -gt + c$$

Sa obzirom da je $y'(0) = v_{y_0}$, može se odrediti vrednost koeficijenta c:

$$v_{y_0} = -g * 0 + c$$

$$y'(t) = v_{y_0} - gt.$$

Integralimo dobijenu jednačinu:

$$y(t) = v_{y_0} t - \frac{gt^2}{2} + c.$$

Sa obzirom da se lopta u trenutku $t = 0$ nalazila na površini zemlje, jasno je da je $y(0) = 0$, odnosno

$$y(t) = v_{y_0} t - \frac{gt^2}{2}.$$

Sa druge strane, neka je početna brzina kojom se šutira lopta v i neka je ugao pod kojim je lopta šutnuta θ, tada važe sledeće relacije

$$y'(0) = v_{y_0} = v_0 \sin(\theta)$$

$$x'(0) = v_{x_0} = v_0 \cos(\theta)$$

Sa obzirom da se lopta šutira u vakuumu, na nju neće delovatni ni jedna horizontalna sila, pa će brzina kretanja biti konstantna. Diferenciranjem se dobija da je

$$x(t) = v_0 \cos(\theta)\, t$$

Konačno, dobijamo kretanje lopte se matematički može opisati preko sledeće dve jednačine:

$$x(t) = v_0 \cos(\theta)\, t$$

$$y(t) = v_0 \sin(\theta) t - \frac{gt^2}{2}$$

Postavlja se pitanje za koje vrednosti v_0, θ i t ovo matematičko rešenje odgovara realnom fizičkom problemu.
Pretpostavićemo da je $v_0 \geq 0$ i da je $0 < \theta < \pi$. Ako uzmemo da je $v_0 = 0$ to znači da lopta nije dobila ni jednu početnu brzinu, tj. neće se pomeriti. Uzećemo zato da je $v_0 > 0$.

Kako se lopta kreće? Nakon šuta, lopta leti u vis do nekog momenta (maksimalna visina koju će lopta dostići će biti u momentu t za koji važi $y'(t) = 0$) a zatim pada:

$$y'(t) = 0 \iff v_0 \sin(\theta) - gt = 0$$

$$\iff t_1 = \frac{v_0 \sin(\theta)}{g}$$

Dakle, u trenutku t_1 lopta će dostići svoju maksimalnu visinu:

$$y(t_1) = \frac{v_0 \sin(\theta)\, v_0 \sin(\theta)}{g} - g\left(\frac{v_0 \sin(\theta)}{g}\right)^2 = \frac{v_0^2 \sin(\theta)^2}{2g}$$

i nalaziće se na rastojanju od fudbalera

$$x(t_1) = \frac{v_0 \cos(\theta) v_0 \sin(\theta)}{g} = \frac{v_0 \sin(2\theta)}{2g}.$$

Kada će lopta ponovo pasti na zemlju?
Lopta će pasti na zemlju u trenutku t_2 za koji važi $y(t_2) = 0$
Rešavanjem jednačine dobija se sledeće:

$$y(t_2) = 0 \iff v_0 \sin(\theta)\, t_2 - \frac{gt_2^2}{2} = 0$$

$$\iff t_2 \left(v_0 \sin(\theta) - \frac{gt}{2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad t_2 = 0 \ \ ili \ t_2 = \frac{2v_0 \sin(\theta)}{g} = 2t_1$$

Dakle, lopta će leteti do trenutka t_1 kada će postići svoju maksimalnu visinu a zatim isto toliko vremena padati, sve dok ne bude udarila o zemlju.

Na kom rastojanju od početne tačke će lopta udariti o zemlju?

$$x(t_2) = v_0 \cos(\theta)\, t_2 = \frac{v_0^2 \sin(2\theta)}{g}.$$

Nakon trenutka t_2, ukoliko se lopta odbija od zemlje, trajektorija lopte se ponavlja. Dakle, pomatraćemo kretanje lopte za $0 \leq t \leq t_2$.

Ukoliko iz jednačine $x(t)$ izrazimo t i zamenimo u izraz za $y(t)$ dobijćemo sledeću jednačinu:

$$y = tg(\theta)x - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2(x)}$$

Što predstavlja jednačinu parabole.

Primetimo da su neke naše pretpostavke bile pogrešne ali da, nezavisno od njih, model poprilično dobro opisuje pravu putanju lopte.

Šta se može zaključiti o trajektoriji lopte?

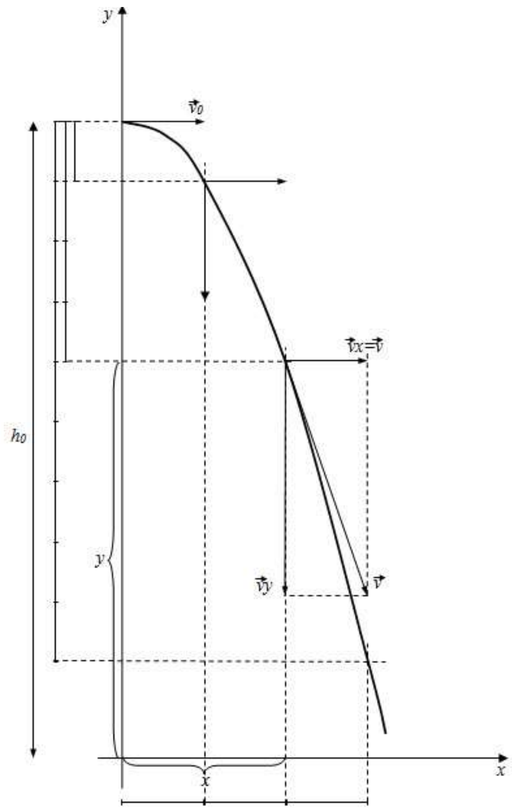
Domet lopte iznosi $x(t_2) = \frac{v_0^2 \sin(2\theta)}{g}$, tj. lopta će najdalje otići od nas ukoliko je šutnemo pod uglovm od $\theta = \frac{\pi}{4}$ $(\sin(2\theta) = 1)$. Domet lopte koju šutnemo pod uglovima $\pi/3$ i $\pi/6$ je isti.

Zadatak: Pretpostavimo da je teren na koji pada projektil na nekoj visini h koja može biti i negativna. Pronaći tačku pada projektila.

Zadatak: Kako izleda trajektorija projektila ako Zemlja nije ravna? Da li će projektil uvek pasti na tlo?

Zadatak: Da li Pera Kojot može da pobegne od projektila? Ukoliko pucamo u vis, da li postoji opsanost da će nas metak u povratku pogoditi?

Primer:
Posmatrajmo kretanje tela koje je izbačeno u horizontalnom pravcu, nekom brzinom v_0.
Neka na telo deluje samo trenutna sila koja je telu saopštila početnu brzinu. Ako pretpostavimo da na telo ne deluje ni jedna druga vertikalna sila, ono će se konstantno kretati po inerciji u tom pravcu. Međutim, na to telo će uticati vertikalna sila i to ravnomerno ubrzano pod dejstvom Zemljine teže. Opisati trajektoriju putanje tela.



Brzina kretanja tela u trenutku t_0 je sledeća:

$$v_x = v_0, v_y = gt$$

Položaj tela u trenutku t_0:

$$x(t_0) = 0, y(t_0) = h$$

Sa obzirom da je $x(t)' = v_0$ i $y(t)' = -gt$, u trenutku $t > t_0$ kretanje tela se može opisati na sledeći način:

$$x(t) = v_0 t + c_1, x(t_0) = 0 \rightarrow \quad x(t) = v_0 t$$

$$y(t) = -\frac{gt^2}{2} + c, y(t_0) = h_0 \rightarrow \quad y(t) = h_0 - \frac{gt^2}{2}$$

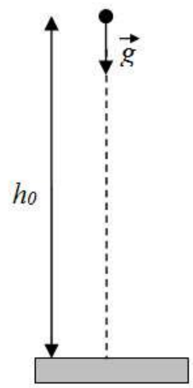
Odnosno, ako izrazimo t iz prve jednačine preko x i zamenimo u drugu:

$$t = \frac{x}{v_0} \rightarrow \quad y = h_0 - \frac{gx^2}{2v_0^2}$$

Što je opet parabola.

1. Slobodan pad

Posmatrajmo problem kretanja tela pri slobodnom padu (slobodan pad predstavlja ubrzano kretanje tela uzrokovano delovanjem Zemljine sile teže).



Posmatrajmo telo koje pada sa visine h usled gravitacije g. Pretpostavimo da prilikom slobodnog pada telo nije imalo početnu brzinu. Pretpostavimo još da na telo ne deluje ni jedna horizontalna sila (vetar na primer), kao ni jedna druga vertikalna sila (sila otpora vazduha).

Ako uzmemo u obzir da se telo u trenutku pada nalazilo na visini h, u svakom trenutku možemo pratiti njegovo kretanje u funkciji $y(t)$ (duž ose y). Sa obzirom da na telo deluje vertikalna sila, sledi da je $y''(t) = g$
Diferenciranjem jednačine dalje se dobija da je $y'(t) = gt + c$ (a sa obzirom da je početna brzina bila jednaka nuli, jasno je da je $y'(0) = 0 \rightarrow \ y'(t) = gt$).
Ponovnim diferenciranjem jednačine, sledi da je

$$y(t) = gt^2/2$$

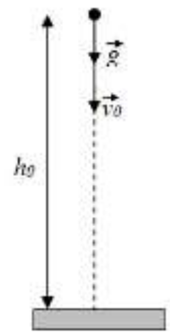
Ako nas zanima momenat kada će telo udariti o tlo, tj. kada je $y(t_1) = h$ dobiće se da je $h = \frac{gt_1^2}{2}$, tj. $t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}}$.

Brzina pri udaru o Zemlju biće $y'(t_1) = g\sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{2hg} = v$.

Zadatak: Ukoliko bacimo novčić sa vrha najviše zgrade, da li postoji opsanost da ćemo nekoga ubiti tim novčićem?

2. Hitac naniže

Posmatrajmo kretanje tela bačenog sa neke visine nekom brzinom usmerenom vertikalno naniže.
Ubrzanje Zemljine teže g ima isti smer kao i početna brzina v_0 pa je kretanje ubrzano.



Uzmimo sledeće pretpostavke:

- Brzina u trenutku t_0 iznosi v_0
- Na telo deluje samo Zemljina sila $g = 9.81\ m/s^2$
- U trenutku t_0 telo se nalazilo na visini h_0

Odrediti trajektoriju tela.

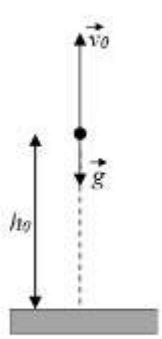
Sa obzirom da se telo kreće isključivo usled vertikalne sile, odredimo položaj tela u dvodimenzionalnom sistemu sa $x(t)$ i $y(t)$. Inutitivno je jasno da je $x(t) = const$.
Dok za y važi sledeće:

$$y''(t) = -g$$
$$y'(t) = -v_0$$

Dakle,

$$y'(t_0) = -gt_0 + c = -v_0 \ \rightarrow \ y'(t) = -gt - v_0$$
$$\rightarrow y(t) = -\frac{gt^2}{2} - v_0 t + c, \quad y(0) = h_0 \ \rightarrow \quad y(t) = h_0 - \left(v_0 t - \frac{gt^2}{2}\right)$$

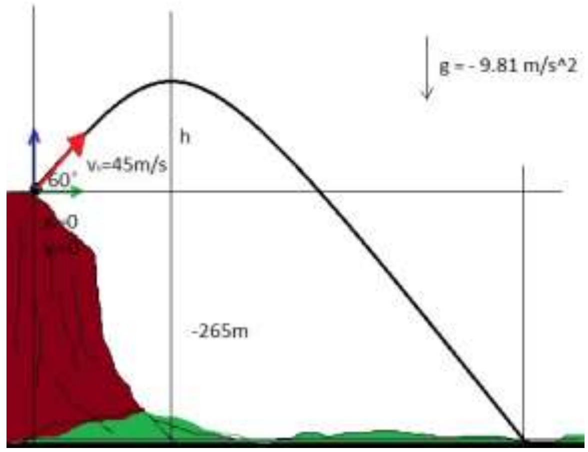
Hitac naviše:
Kakva je sudbina Pere Kojota koji projektil iz topa ispaljuje nakon što je nišan uperio vertikalno?



Zadatak 1.

Ako se kamen šutira sa početnom brzinom $v_0 = 45\ m/s$ i pod uglom od 60^o sa ivice litice koja je visoka 265m, odrediti koordinate mesta pada tog kamena.

Rešenje:



Označimo trajektoriju kamena sa $x(t)$ i $y(t)$.

Neka je u trenutku $t = 0$: $x(0) = 0, y(0) = 0$.

Na kamen deluju:

1. Početna brzina $v_0 = 45m/s$
2. Horizontalna sila $g = 9.81\ m/s^2$

Početna brzina može da se razloži na svoje x i y koordinate:

$$v_x = v_0 \cos(\theta) = 45 * \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 22.5\ m/s$$

$$v_y = v_0 \sin(\theta) = 38.9711\ m/s$$

Dakle, za funkcije x i y smo ranije izračunali trajektorije (kada je u pitanju kosi hitac):

$$y(t) = v_y t - \frac{gt^2}{2}$$

$$x(t) = v_x t = v_0 cost(\theta)t$$

i zaključili da kamen dostiže svoju maksimalnu visinu u trenutku $t_1 = \frac{v_0 \sin(\theta)}{g}$.

Dakle, maksimalna visina koju kamen dostiže je $t_1 = 45 * \frac{\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)}{9.81} = 3.9726s$

Visina kamena u trenutku t_1 iznosi $y(t_1) = 77.4083 + 265 = 342.4083$.

Dalje nas zanima u kom momentu će se kamen naći na površini zemlje, tj. Treba odrediti t_2 za koje važi $y(t_2) = -265$

Rešavanjem jednačine

$$v_y t - \frac{gt^2}{2} = 38.9711t - \frac{9.81t^2}{2} = -265$$

dobijaju se sledeća rešenja: $t_2 = 12.3227$ i $t_2 = -4.3825$. Negativno rešenje odbacujemo sa obzirom da kamen ne može pasti u negativnom vremenu. Dakle, kamen je pao na zemlju nakon 12 sekundi.

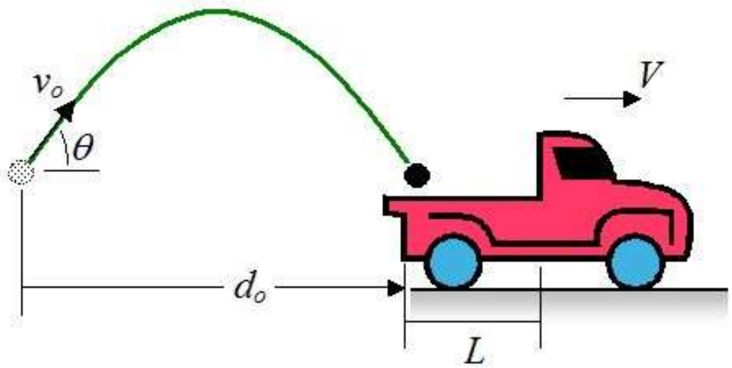
Koliko daleko je kamen pao u odnosu na stenu? $x(12.3227) = 45 * \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) * 12.3227 = 277.3737$m.

Koordinate kamena u momentu kada je pao na zemlju su (277.3737,-265).

Zadatak: Pod kojim uglom treba ispaliti projektil, ako su poznte koordinate projektila i tacke na koju zelimo da projektil padne i ako je početna brzina projektila v_0?

Zadatak 2.

Posmatrajmo sledeći problem: Dečak šutira loptu pod uglom od 45 stepeni u pravcu kamiona. Cilj je da lopta upadne u gepek kamiona dok je u pokretu. Gepek je dužine 2.5m Ako su u momentu šutiranja lopte kamion i lopta na rastojanju od 5m i ako se kamion kreće ravnomerno pravolinijski u smeru supotnom od lopte brzinom od 9m/s, odrediti minimalnu i maksimalnu brzinu kojom je potrebno šutnuti loptu tako da ona upadne u gepek kamiona. Pretpostavićemo da su početna visina sa koje se šutira lopta i visina u momentu kada će upasti u gepek jednake.



Rešenje:

Poznati su nam sledeći podaci:

$\theta = 45^0$

$L = 2.5$m

$d_0 = 5$m

$v = 9\ m/s$

Sa obzirom da se smatra da je lopta ušla u gepek u trenutku t_{end} ukoliko važi

$$y(t_0) = y(t_{end}) \quad \text{i}$$
$$x(t_0) = 0, \ \ x(t_{end}) = d_0 + Vt \ \ (= d_0 + L + Vt)$$

rešavanjem sistema dobiće se vreme leta, tj. t_{end}

Odredimo prvo minimalnu početnu brzinu:

$$x(t_{end}) = v_0 \cos(\theta)\, t_{end} = d_0 + V t_{end}$$
$$y(t_{end}) = v_0 \sin(\theta)\, t_{end} - \frac{g t_{end}^2}{2} = 0$$

Rešavanjem sistema dobija se jednačina

$$d_0 + V t_{end} - \frac{g t_{end}^2}{2} = 0$$
$$-\frac{9.81}{2} t_{end}^2 + 9t + 5 = 0$$
$$t_{end} = 2.2816 \ \text{ ili } t_{end} = -0.4468$$

Negativno vreme odbacujemo.

Dakle, ukoliko je lopta upala u gepek, to će biti u trenutku $t_{end} = 2.2816$.

Minimalnu početnu brzinu odredićemo iz jednačine za x:

$$v_0 = \frac{d_0 + V t_{end}}{\cos(\theta)\, t_{end}} = 15.8270\ m/s$$

Sličnim postupkom dobija se i maksimalna vrednost početne brzine.

Maksimalna $v_0 = 17.041 \frac{m}{s}$

Zadatak 3.

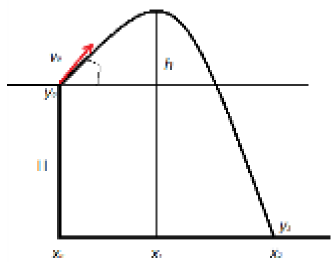
Rešiti problem 2 ukoliko se zna da je $\theta = 30^0, v_0 = 10\frac{m}{s}$, rupa je dubine $10mm$, otpor vazduha ima koeficijent 0.47, frontalni prostor je $0.01m^2$, gustina vazduha iznosi 1.2 kg/m^3 , masa projektila je 0.1kg.

Rešenje:

$$h = 1.175$$
$$\Delta d_x = 14.22m$$

Zdatak 4.

Odrediti maksimalnu visinu koju projektil ispaljen brzinom $v_0 = 10\ m/s$ i pod uglom $\theta = 30^0$ može da dostigne ako je mesto pada na nadmorskoj visini koja je za 10m niža od nadmorske visine sa koje je projektil ispaljen. Odrediti dužinu trajanja leta.



Rešenje:

$v_0 = 10\frac{m}{s}$

$\theta = 30^0$

$h = 10m$

Kretanje projektila opisujemo jednačinama

$$y(t) = v_0 \sin(\theta) t - \frac{gt^2}{2}$$
$$x(t) = v_x t = v_0 cost(\theta) t$$

U trenutku $t_1 = \frac{v_0 \sin(\theta)}{g} = 0.5097s$ projektil dostiže maksimalnu visinu leta h.

Od trenutka t_1 do trenutka t_2 projektil pada: $\Delta y = y(t_1) - y(t_2) = H + h$.

Rešavanjem poslednje jednačine dobićemo vreme leta t_2:

$$h = \frac{v_0^2 \sin(\theta)^2}{2g} = 100 * \frac{\sin^2 30^0}{2 * 9.81} = 1.2742\ m$$
$$H + h\ = 10 + 1.2742 = 11.2742\ m$$

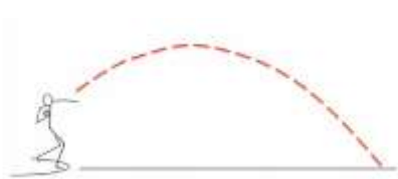
Visinu od 11.2742 m projektil prelazi samo usled slobodnog pada:

$$\frac{gt^2}{2} = 11.2742$$

Vreme trajanja pada je $\Delta t = \sqrt{2 * 11.2742/g} = 1.5161s$. Ukupno vreme leta iznosi $t_1 + \Delta t = 2.0258s$

Zadatak 5.

Odrediti maksimalnu visinu i mesto pada projektila ukoliko je $v_0 = 10\ m/s$ i $\theta = 90^0$.



Zadatak 6.

Odrediti maksimalnu visinu koju projektil ispaljen brzinom $v_0 = 10\,m/s$ i pod uglom $\theta = 30^0$ može da dostigne i ako padne u rupu koja je dubine 1m. Odrediti vreme trajanja leta.

Rešenje:

$$h = 1{,}276$$
$$t = 0.747\,s$$
$$x(t) = 6.472\,m$$

Zadatak 7.

Odrediti maksimalno propadanje projektila ukoliko je $v_0 = 10\frac{m}{s},\ \theta = 30^0$, i ako je projektil pao na udaljenosti (horziontalnoj) od 15m od mesta ispaljivanja.

Rešenje:

Primetimo da su $\Delta d_x = 15 = (v_0 \cos(\theta))t$, v_0 i θ poznate veličine..

$$15 = 10cost(30)t$$

Odredimo vreme t.

$$t = 1{,}7321s$$

Zmanimo dobijene vrednosti u jednačinu za y:

$$y(t) = v_0 \sin(\theta)\, t - \frac{gt^2}{2} = 10 \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) * 1.7321 - 9.81 * \frac{1.7321^2}{2} = -6.0547m$$

Projektil je pao u rupu dubine 6.05m nakon 1.732s leta.

Zadatak 8.

Pretpostavimo da dečak može da šutne loptu pod uglom od 50 stepeni tako da lopta, prelazeći zid visine 8m, dostiže svoju maksimalnu visinu i svoj let završava padom u rupu dubine 2m neposredno iza zida. Odrediti početnu brzinu lopte i dužinu trajanja leta.