103 A, 13.10.

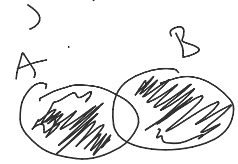
Tuesday, October 13, 2020 8:16 AM

Још нека потребна знања

Скупови, релације, функције

- Скупови $\cap$, $\cup$, $\setminus$, $\subseteq$, ^{c}, $\Delta \to$ симетрична разлика

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$



Де Морганови закони:

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

Комплемент зависи од амбијенталног простора

X амбијентални простор, $A \subseteq X$

$A^c = X \setminus A$

$X = \mathbb{R}$, $A = [1,2]$, $A^c = (-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$

$X = [0,2]$, $A = [1,2]$, $A^c = [0,1)$

Доказ:

$x \in (A \cup B)^c$

$\iff \neg (x \in A \cup B)$

$\iff \neg (\underbrace{x \in A}_{p} \lor \underbrace{x \in B}_{q})$ $\qquad \neg(p \lor q) = \neg p \land \neg q$

$\iff \neg x \in A \land \neg x \in B$

$\iff x \notin A \land x \notin B$

$\iff x \in A^c \land x \in B^c \iff x \in A^c \cap B^c$

Аналогно се доказује и друго.

Важи и општи Де Морганов закон:

(1) $(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n)^c = A_1^c \cup A_2^c \cup \ldots \cup A_n^c$

(2) $(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n)^c = A_1^c \cap A_2^c \cap \ldots \cap A_n^c$

Доказ индукцијом: (1) за $n=1$ тривијално $A_1^c = A_1^c$ ✓

за $n=2$ то је део од малопре

за $n=2$ што је део од таутологије

ИП: Нека важи $(A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n)^c = A_1^c\cup A_2^c\cup\ldots\cup A_n^c$

КОРАК: Докажимо да важи

$$(A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n\cap A_{n+1})^c = A_1^c\cup A_2^c\cup\ldots\cup A_n^c\cup A_{n+1}^c$$

$$(A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n\cap A_{n+1})^c = \big(\underbrace{(A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n)}\cap \underline{A_{n+1}}\big)^c$$

$$\overset{\text{Де Морган}}{=} (A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n)^c\cup A_{n+1}^c$$

$$\overset{\text{и.х.}}{=} A_1^c\cup A_2^c\cup\ldots\cup A_n^c\cup A_{n+1}^c \quad \text{што је и био циљ}$$

Декартов производ

Нека су дати скупови A и B. Њихов Декартов производ дефинишемо као скуп $A\times B=\{(a,b)\mid a\in A,\ b\in B\}$

Пример: $A=\{1,2\}$, $B=\{3\}$ $\quad A\times B=\{(1,3),(2,3)\}$

Подсетник: $(a,b)=(c,d) \iff a=c,\ b=d$

— **Релације:**

Деф: Нека је дат скуп X. Релација ρ на скупу X је подскуп Декартовог производа $X\times X$.

Пример: Релација $\rho = \mid$ ↳ дељивост $\quad x\rho y \iff \underbrace{x\mid y}$

$X=\{1,2,3,4,5,6\}$ $\qquad y=kx,\ k\in\mathbb{N}$

ρ	1	2	3	4	5	6
1	⊤	⊤	⊤	⊤	⊤	⊤
2	⊥	⊤	⊥	⊤	⊥	⊤
3	⊥	⊥	⊤	⊥	⊥	⊤
4	⊥	⊥	⊥	⊤	⊥	⊥
5	⊥	⊥	⊥	⊥	⊤	⊥
6	⊥	⊥	⊥	⊥	⊥	⊤

$\rho=\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,2),(2,4),(2,6),(3,3),(3,6),(4,4),(5,5),(6,6)\}$

Представљање релације (X,ρ)

6 | + | + | + | + | + | ①

Особине релација: (X, ρ)

① $\boxed{Р}$ рефлексивност $(\forall x \in X)$ $x \rho x$
↓
сваки

② $\boxed{С}$ симетричност $(\forall x, y \in X)$ $x \rho y \Rightarrow y \rho x$

③ $\boxed{АС}$ антисиметричност $(\forall x, y \in X)$

$$x \rho y \wedge y \rho x \Rightarrow x = y$$

④ $\boxed{Т}$ транзитивност

$(\forall x, y, z \in X)$ $x \rho y \wedge y \rho z \Rightarrow x \rho z$

Хајде да видимо која својства задовољава релација $|$ на $\mathbb{N}$.

$\boxed{Р}$ ✓ $\boxed{С}$ × $(1|6$ али $6 \nmid 1)$

$\boxed{АС}$ ✓ $x|y \wedge y|x \Rightarrow x = y$

$$y = kx \wedge x = ly \Rightarrow y = k \cdot ly \Rightarrow y = kly$$

$k \in \mathbb{N}$ $\quad l \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow kl = 1 \Rightarrow k = l = 1$

$\Rightarrow y = x$

$\boxed{Т}$ ✓ $x|y \wedge y|z \Rightarrow x|z$

$$y = kx \wedge z = ly \Rightarrow z = lkx \Rightarrow x|z$$

Релације које задовољавају својства Р, АС и Т називају се релације поретка. Назив су добиле на основу чињенице да је $\leq$ релација поретка на скупу $\mathbb{R}$.

Ако су свака два елемента упоредива (тј. $x \rho y$ или је $y \rho x$) и ρ је релација поретка, тада је ρ тзв. релација тоталног (потпуног, линеарног) поретка

Пример релације поретка која није релација тоталног поретка:

Покушај студента $<$, но, ово није релација поретка јер

није рефлексивна ... $2 \not< 2$

Покушај студента: < Но, ово није релација поретка јер није рефлексивна. Наиме $2 \not< 2$.

2. покушај: $\leq$ јесте потпуног поретка

или је $a \leq b$ или је $b \leq a$

3. покушај (успешан) $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$

$\mathcal{P}(X)$ где је $X = \{1,2\}$

$\{1\} \not\subseteq \{2\}$ нити је $\{2\} \not\subseteq \{1\}$

4. $(\mathbb{N}, |)$ није потпуног поретка
јер $2 \nmid 3$ и $3 \nmid 2$

Напомена: Особине релације доста зависе (наравно) од скупа на коме се посматрају.

Пример: Да ли је | релација поретка на $\mathbb{Z}$?

$x \rho y \Leftrightarrow x | y \Leftrightarrow y = kx, k \in \mathbb{Z}$

(Р) $x|x$ ✓

(АС) $x|y \wedge y|x \Rightarrow x=y$ НЕ $2|-2 \wedge -2|2 \not\Rightarrow 2=-2$.

$y = kx, k\in\mathbb{Z} \wedge x = ly, l\in\mathbb{Z}$

$\Rightarrow \cancel{y} = kl\cancel{y}, \Rightarrow kl=1 \Rightarrow k=l=1 \vee k=l=-1$

Друга значајна класа релација су релације еквиваленције код којих важи (Р), (С), (Т).

Пример: (1) $(\mathbb{R}, =)$

(2) $(\mathbb{N}, \equiv_3)$ $x \rho y \Leftrightarrow 3 | x-y$

(Р) $x \rho x$ јер $3 | x-x=0$

(С) $x \rho y \Rightarrow 3 | x-y \Rightarrow 3 | -(x-y) \Rightarrow 3 | y-x \Rightarrow y \rho x$

(Т) $x \rho y \wedge y \rho z \Rightarrow 3 | x-y \wedge 3 | y-z$

$\Rightarrow 3 | (x-\cancel{y}) + (\cancel{y}-z) \Rightarrow 3 | x-z \Rightarrow x \rho z$

Класа еквиваленције елемента $x \in X$, где је ρ релација