$\Rightarrow 3 \mid (x-y)+(y-z) \Rightarrow 3 \mid x-z \Rightarrow x\,\rho\, z$

Класа еквиваленције елемента $x \in X$, где је ρ релација еквиваленције је скуп

$$C_x = \{ y \in X \mid x \,\rho\, y \}$$

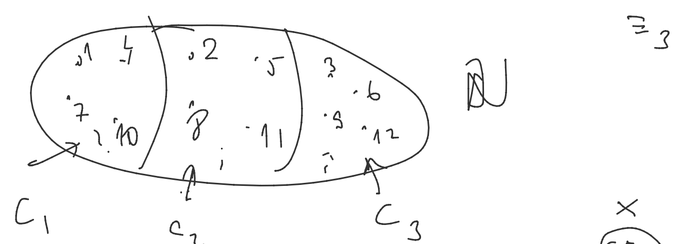
$(\mathbb{N}, \equiv_3)$ $\quad C_1 = \{1, 4, 7, \dots\}$ $\quad C_1 = C_4$

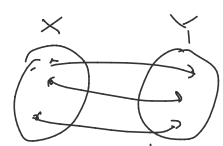
$3 \mid x-1$ $\quad C_2 = \{2, 5, 8, \dots\}$ $\quad$ случајност? не бих рекао

$3 \mid x-2$ $\quad C_4 = \{1, 4, 7, \dots\}$

$3 \mid x-4$

Теорема: (X, ρ) (скуп; релација еквиваленције). Ако $x, y \in X$ тада је $C_x \cap C_y = \emptyset$ или је $C_x = C_y$. Штавише класе еквиваленције чине партицију скупа X, тј. $X = \bigcup_{x\in X} C_x$ и те C_x морају бити међусобно дисјунктне.



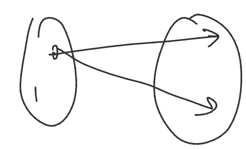


Функције

Деф: Нека су дати скупови X и Y. Пресликавање (функција) f из скупа X у скуп Y је релација $f \subseteq X \times Y$ таква да (ознака)

(1) $(\forall x \in X)(\exists y \in Y)\ (x, y) \in f \quad (x\, f\, y)$

(2) Ако $(x, y_1) \in f$ и $(x, y_2) \in f \Rightarrow y_1 = y_2$



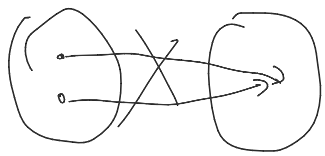
Својство (1) говори да сваки елемент домена мора пресликати у неки елемент кодомена, док својство (2) говори о чињеници да је та слика јединствена.

Различите врсте ф-ја:

Деф: Кажемо да је функција $f: X \to Y$ „1-1" (инјективна)

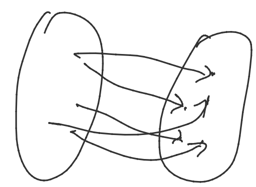
Деф: Кажемо да је функција $f: X \to Y$ „1-1" (инјективна) ако за $(\forall x_1, x_2 \in X)$ $\underbrace{x_1 \neq x_2}$ $\Rightarrow$ $\underbrace{f(x_1) \neq f(x_2)}$ или еквивалентно

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$



Деф: Ф-ја $f: X \to Y$ је „на" (сурјекција) ако за $(\forall y \in Y)(\exists x \in X)$ $f(x) = y$.

У преводу, кодомен је „потрошен".



Деф: $f: X \to Y$ бијекција ако је она „1-1" и „на"

Да ли је ф-ја $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ „1-1"?

Није! јер $f(-2) = f(2) = 4$!

Шта можемо урадити (најмање) са доменом, односно кодоменом да она постане „1-1". Можемо посматрати

$f: \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. Она јесте „1-1"

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1^2 = x_2^2 \Rightarrow x_1^2 - x_2^2 = 0 \Rightarrow (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{x_1 = x_2} \vee \cancel{x_1 = -x_2}$$

✓ јер $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$

Да ли је $f: \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ „на"?

Не! јер не постоји $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ за који је $f(x) = -1$.

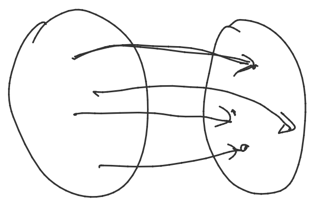
Како направити бијекцију од ове ф-је?

Довољно је посматрати $f: \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, $f(x) = x^2$

Инверзна ф-ја:

Инверзна ф-ја:

Деф: Ако је дата ф-ја $f: X \to Y$ која је бијекција, тада је њена инверзна ф-ја (у ознаци $f^{-1}: Y \to X$) дата правилом:
ако је $f(x)=y$, тада је $f^{-1}(y)=x$.

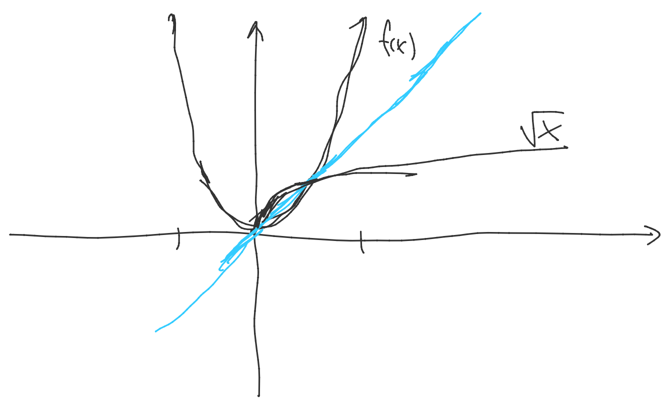


Која је инверзна ф-ја ф-је $f(x)=x^2$?

$f: \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ $\qquad y = f(x) = x^2 \;/\sqrt{}$

$f^{-1}(y) = \sqrt{y}$ $\qquad \underline{x = \sqrt{y}}$

На графику, то изгледа овако:



инверзна ф-ја је симетрична у односу на праву $y=x$ оригиналној

Ако је $f(\underbrace{3x+1}_{t}) = x+5$, колико је $f(x)=$?

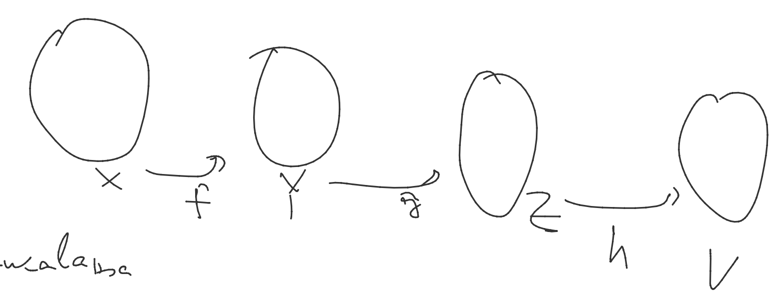
$3x+1=t \Rightarrow x = \frac{t-1}{3}$

$f(t) = \frac{t-1}{3} + \frac{15}{3}$

$f(t) = \frac{t+14}{3} \Rightarrow f(x) = \frac{x+14}{3}$

Композиција ф-ја:

$f: X \to Y$, $g: Y \to Z$



Композиција ова два пресликавања

Композиција ова два пресликавања   и V

је ф-ја $g\circ f : X \to Z$ таква да је

$$(g\circ f)(x) = g(f(x))$$

Став: За композицију ф-ја важи закон асоцијативности

$$(h\circ g)\circ f = h\circ(g\circ f)$$

Још неке значајне неједнакости

Неједнакости између средина: $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}_+ \; (\mathbb{R}_{>0})$

- хармонијска: $X_n = \dfrac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\dots+\frac{1}{x_n}}$
- геометријска: $\Gamma_n = \sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_n}$
- аритметичка: $A_n = \dfrac{x_1+x_2+\dots+x_n}{n}$
- квадратна: $K_n = \sqrt{\dfrac{x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2}{n}}$

На практикуму ће бити показано $X_n \le \underbrace{\Gamma_n \le A_n}_{АГ} \le K_n$.

Коши-Шварцова неједнакост: Нека су $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}_+$, $y_1, y_2, \dots, y_n \in \mathbb{R}_+$. Тада је

$$(x_1y_1+\dots+x_ny_n)^2 \le (x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2)(y_1^2+y_2^2+\dots+y_n^2)$$

Доказ: $\Leftrightarrow \left(\dfrac{x_1y_1+\dots+x_ny_n}{\sqrt{x_1^2+\dots+x_n^2}\cdot\sqrt{y_1^2+\dots+y_n^2}}\right) \le 1$

$$\frac{x_1y_1}{\sqrt{x_1^2+\dots+x_n^2}\cdot\sqrt{y_1^2+\dots+y_n^2}} = \sqrt{\frac{x_1^2\,y_1^2}{(x_1^2+\dots+x_n^2)(y_1^2+\dots+y_n^2)}} \overset{АГ}{\le} \frac{\frac{x_1^2}{x_1^2+\dots+x_n^2}+\frac{y_1^2}{y_1^2+\dots+y_n^2}}{2}$$

АГ неједнакост

Слично,

$$\frac{x_2^2}{\dots} + \frac{y_2^2}{y_1^2+\dots+y_n^2}$$

неједнакост

Слично,

$$
+\begin{cases}
\dfrac{x_2 y_2}{\sqrt{x_1^2+\dots+x_n^2}\cdot\sqrt{y_1^2+\dots+y_n^2}} \le \dfrac{\dfrac{x_2^2}{x_1^2+\dots+x_n^2}+\dfrac{y_2^2}{y_1^2+\dots+y_n^2}}{2} \\
\vdots \\
\dfrac{x_n y_n}{\sqrt{x_1^2+\dots+x_n^2}\cdot\sqrt{y_1^2+\dots+y_n^2}} \le \dfrac{\dfrac{x_n^2}{x_1^2+\dots+x_n^2}+\dfrac{y_n^2}{y_1^2+\dots+y_n^2}}{2}
\end{cases}
$$

$$
\frac{x_1y_1+x_2y_2+\dots+x_ny_n}{\sqrt{x_1^2+\dots+x_n^2}\cdot\sqrt{y_1^2+\dots+y_n^2}} \le \frac{\underbrace{\dfrac{x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2}{x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2}}_{=1}+\underbrace{\dfrac{y_1^2+y_2^2+\dots+y_n^2}{y_1^2+\dots+y_n^2}}_{=1}}{2}
$$

$$= 1$$

одакле квадрирањем добијамо тражено.