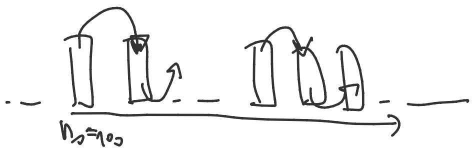
Математичка индукција

- метод за доказивање тврђења која важе за природне бројеве
- користимо га често у задацима, а у теорији је незаобилазан твр

$n \to n+1$



Желимо да докажемо да неко тврђење важи за све n почевши од неког природног броја n_0

Формално, метод се састоји од 3 целине:

1. БАЗА индукције: провера тврђења за почетни услов n_0
2. ИНДУКТИВНА ХИПОТЕЗА: ПП да тврђење важи за неко $n \ge n_0$
3. ИНДУКТИВНИ КОРАК: докажимо да онда тврђење важи и за $n+1$

Задаци

(1) Доказати уопштени дистрибутивни закон:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right) y = \sum_{k=1}^{n} x_k y, \quad x_1, x_2, \dots, x_n, y \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$$

$$\sum_{k=1}^{n} x_k = x_1 + x_2 + \dots + x_n$$

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_n) y = x_1 y + x_2 y + \dots + x_n y$$

База: $n=1 \to x_1 y = x_1 y$ ✓

Хипотеза: ПП да је $\left(\sum^{n} x_k\right) y = \sum^{n} x_k y$

Хипотеза: ПП да је $\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right) y = \sum_{k=1}^{n} x_k y$

Корак: Треба доказати да је $\left(\sum_{k=1}^{n+1} x_k\right) y = \sum_{k=1}^{n+1} x_k y$

$$\left(\sum_{k=1}^{n+1} x_k\right) y = \left(\underbrace{\sum_{k=1}^{n} x_k} + \underbrace{x_{n+1}}\right) y$$

дистрибутивни закон $\leftarrow = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right) y + x_{n+1} y$

$$\overset{\text{и.х.}}{=} \sum_{k=1}^{n} x_k y + x_{n+1} y = \sum_{k=1}^{n+1} x_k y$$

---

2 Доказати да важе следећа тврђења:

а) $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ $\left(1+2+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}\right)$

б) $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ $\leftarrow$

в) $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

Решење: а) База: $n=1$ $\rightarrow$ Л $=1$, Д $= \frac{1\cdot(1+1)}{2} = 1$ ✓

Хипотеза: ПП да је $1+2+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

Корак: докажимо да је $1+2+\ldots+n+(n+1) = \frac{(n+1)(n+1+1)}{2}$

$$\underbrace{1+2+\ldots+n}+(n+1) \overset{\text{и.х.}}{=} \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = (n+1)\left(\frac{n}{2}+1\right)$$

$$\underbrace{1+2+\dots+n}+(n+1) \underset{ч.х.}{=} \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = (n+1)\left(\frac{n}{2}+1\right)$$

$$= (n+1)\,\frac{n+2}{2} \quad ✓$$

б) База: $n=1 \rightarrow Л = 1^2 = 1$, $Д_1 = \frac{1\cdot(1+1)\cdot(2\cdot 1+1)}{6} = 1$ ✓

Хипотеза: ПП да важи $1^2+2^2+\dots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Корак: Доказујемо да је $1^2+2^2+\dots+(n+1)^2 = \frac{(n+1)\cdot(n+1+1)\cdot(2(n+1)+1)}{6}$

$$\underbrace{1^2+2^2+\dots+n^2}_{ч.х.}+(n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$$

$$= \frac{(n+1)}{6}\cdot\left(n(2n+1) + 6(n+1)\right)$$

$$= \frac{n+1}{6}\cdot\left(2n^2 + n + 6n + 6\right)$$

$$= \frac{n+1}{6}\cdot\left(2n^2+7n+6\right)$$

$$= \frac{n+1}{6}\cdot\left(2n^2+4n^2+3n+6\right)$$

$$= \frac{n+1}{6}\cdot\left(2n(n+2)+3\cdot(n+2)\right)$$

$$= \frac{n+1}{6}\cdot(n+2)\cdot(2n+3) \quad ✓$$

в) База: $n=1 \rightarrow Л = 1^3 = 1$

$Л_1 = \left(\frac{1\cdot(1+1)}{2}\right)^2 = 1^2 = 1$ ✓

Хипотеза: пп да је $1^3+2^3+\ldots+n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

Корак: докажимо да је $1^3+2^3+\ldots+(n+1)^3 = \left(\frac{(n+1)(n+1+1)}{2}\right)^2$

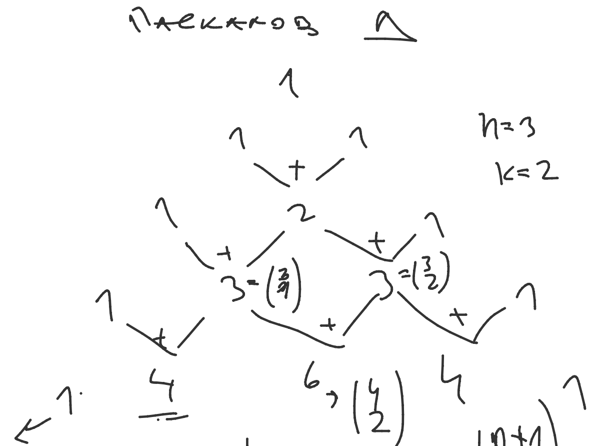
$$\underbrace{1^3+2^3+\ldots+n^3}+(n+1)^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2+(n+1)^3$$

$$= \frac{(n+1)^2}{2^2}\cdot\left(n^2+4(n+1)\right)$$

$$= \frac{(n+1)^2}{2^2}\cdot\left(n^2+4n+4\right) = \frac{(n+1)^2}{2^2}\cdot(n+2)^2 \checkmark$$

③ Биномна формула, $n\in\mathbb{N}$

Паскалов △



$\Rightarrow \binom{n+1}{k}$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \underbrace{\binom{n}{k}}_{\text{биномни коефицијент}} a^k b^{n-k}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\cdot k!}$$

$$(a+b)^4 = a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$$

База $n=1 \to (a+b)^1 = a+b = Л$

$$Д_1 = \sum_{k=0}^{1}\binom{1}{k}a^k b^{1-k} = \underbrace{\binom{1}{0}}_{k=0}^{=1} a^0 b^{1-0} + \underbrace{\binom{1}{1}}_{k=1}^{=1} a^1 b^{1-1}$$

$0! = 1$

$= b+a$ ✓

$\sum^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}$

Хипотеза: пп да је $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}$

Корак: Треба доказати да је

$$(a+b)^{n+1} = \underbrace{\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}a^k b^{n+1-k}}$$

$$\underbrace{\binom{n+1}{0}}_{1} b^{n+1} + \binom{n+1}{1}ab^n + \dots + \underbrace{\binom{n+1}{n+1}}_{1} a^{n+1}$$

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)^n\cdot(a+b)$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}\cdot(a+b)$$

① + дистрибутивност

$$= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{k+1}b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n+1-k}$$

$$= \left(\binom{n}{0}ab^n + \binom{n}{1}a^2b^{n-1} + \dots + \binom{n}{n}a^{n+1}\right) + \left(\binom{n}{0}b^{n+1} + \binom{n}{1}ab^n + \dots + \binom{n}{n}a^n b\right)$$

= из прве суме узмемо последњи, а из друге први

$$= \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}a^{k+1}b^{n-k} + \binom{n+1}{n+1}a^{n+1} + \binom{n+1}{0}b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n+1-k}$$

померимо индексе за 1

$$= \binom{n+1}{0}b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}a^{k\cancel{-1}\cancel{+1}}b^{n-(k-1)} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n+1-k} + \binom{n+1}{n+1}a^{n+1}$$

$$= \binom{n+1}{0}b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\left(\underbrace{\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}}\right)a^k b^{n+1-k} + \binom{n+1}{n+1}a^{n+1}$$

Докажимо да је $\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$

$$\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k} = \frac{n!}{\ } + \frac{n!}{\ }$$

$$\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k+1)!\cdot(k-1)!} + \frac{n!}{(n-k)!\cdot k!}$$

$$= n! \cdot \frac{\cancel{k} + (n-\cancel{k}+1)}{(n-k+1)!\cdot k!}$$

$$= \frac{(n+1)!}{(n+1-k)!\cdot k!} = \binom{n+1}{k}$$

$$= \underbrace{\binom{n+1}{0} b^{n+1}}_{k=0} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}a^k b^{n+1-k} + \underbrace{\binom{n+1}{n+1}a^{n+1}}_{k=n+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}a^k b^{n+1-k} \quad ✓$$

④ Муаврова формула

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi \quad , n\in\mathbb{N}$$

БАЗА $n=1$ → $Л = (\cos\varphi + i\sin\varphi)^1$ ✓

$Д_1 = \cos\varphi + i\sin\varphi$

Хипотеза: пп да је $(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi$

Корак: Докажимо да је $(\cos\varphi + i\sin\varphi)^{n+1} = \cos((n+1)\varphi) + i\sin((n+1)\varphi)$

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^{n+1} = (\cos\varphi + i\sin\varphi)^n(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

$$\underset{h.x.}{=} (\cos n\varphi + i\sin n\varphi)(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

$$= \cos n\varphi\cos\varphi + i\cos n\varphi\sin\varphi + i\sin n\varphi\cos\varphi - \sin n\varphi\sin\varphi$$

$$= (\cos n\varphi\cos\varphi - \sin n\varphi\sin\varphi) + i(\cos n\varphi\sin\varphi + \sin n\varphi\cos\varphi)$$

адициона

$$= \cos(n\varphi+\varphi) + i\sin(n\varphi+\varphi) = \cos((n+1)\varphi) + i\sin((n+1)\varphi) \quad ✓$$