$= \cos(n\varphi+\varphi) + i\sin(n\varphi+\varphi) = \cos((n+1)\varphi) + i\sin((n+1)\varphi)$ ✓

5. Бернулијева неједнакост

Нека је $x>-1$ и $n\in\mathbb{N}$. Тада је

$$(1+x)^n \ge 1+nx$$

Притом, једнакост важи ако је $n=1$ или $x=0$.

Реш: БАЗА $n=1$ → $L=(1+x)^1$, $R_1 = 1+1\cdot x$ ✓

$L \ge R$, штавише важи једнакост

Хипотеза: пп да је $(1+x)^n \ge 1+nx$

Корак: Докажимо да је $(1+x)^{n+1} \ge 1+(n+1)x$

$$(1+x)^{n+1} = \boxed{(1+x)^n}(1+x)$$

$$\underset{\text{и.х.}}{\ge} \boxed{(1+nx)}(1+x) \quad \text{(овде је битно да је } x>-1 \text{, тј. } 1+x>0\text{)}$$

$$= 1+nx+x+nx^2$$

$$= 1+(n+1)x + \underbrace{nx^2}_{\ge 0} \ge 1+(n+1)x$$

да би овде важила једнакост мора бити $x=0$

Провером добијамо да за $x=0$ важи једнакост и у почетку.

6. Докажимо да је $2^n>n^2$ за $n\ge 5$.

Решење: БАЗА: $n=5$ → $2^5=32>25=5^2$ ✓

Хипотеза: $2^n>n^2$

КОРАК: треба показати да је $2^{n+1} > (n+1)^2 = n^2+2n+1$

$$2^{n+1} = 2\cdot 2^n \underset{\text{и.х.}}{>} 2n^2 = n^2+n^2 \geq n^2+2n+1 = (n+1)^2 \checkmark$$

$n^2 \geq 2n+1$

показати

индукција у индукцији $n^2 \geq 2n+1$

База: $n=5 \rightarrow 25 \geq 11 \checkmark$

ПП $n^2 \geq 2n+1$

КОРАК: циљ: $(n+1)^2 \geq 2\cdot(n+1)+1$

$$\boxed{n^2+2n+1} \geq 2n+3$$

$$n^2+2n+1 \underset{\text{и.х.}}{\geq} \underbrace{2n+1}+\underbrace{2n}_{>1}+1 > 2n+1+1+1 = 2n+3 \checkmark$$

7) Доказати да за сва $n \in \mathbb{N}$ важи

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n} \leq \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$$

БАЗА: $n=1 \rightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{1}{\sqrt{3\cdot 1+1}} = \frac{1}{2} \checkmark$

ХИПОТЕЗА: ПП да је $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n} \leq \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$

КОРАК: докажимо да је

$$\underbrace{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n}}\cdot\frac{2\cdot(n+1)-1}{2\cdot(n+1)} \leq \frac{1}{\sqrt{3(n+1)+1}}$$

$$\underbrace{\underbrace{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n}}\cdot\frac{2(n+1)-1}{2(n+1)}} \le \frac{1}{\sqrt{3(n+1)+1}}$$

$$\text{и.х. } \le \boxed{\frac{1}{\sqrt{3n+1}}\cdot\frac{2n+1}{2n+2} \overset{?}{\le} \frac{1}{\sqrt{3n+4}}}$$

доказујемо ово

$$\frac{\sqrt{3n+4}}{\sqrt{3n+1}}\cdot\frac{2n+1}{2n+2} \le 1 \quad /^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{(3n+4)(2n+1)^2}{(3n+1)(2n+2)^2} \le 1$$

$$\Leftrightarrow (3n+4)(4n^2+4n+1) \le (3n+1)(4n^2+8n+4)$$

$$\Leftrightarrow \cancel{12n^3}+\cancel{12n^2}+3n+\cancel{16n^2}+16n+\cancel{4} \le \cancel{12n^3}+\cancel{24n^2}+12n+\cancel{4n^2}+8n+\cancel{4}$$

$$\Leftrightarrow 19n \le 20n \quad \checkmark$$

8) Доказати да се сви бројеви облика

$2^{2^{n+1}}+1$ завршавају цифром 7.

БАЗА: $n=1 \to 2^{2^{1+1}}+1 = 2^{2^2}+1 = 2^4+1 = 17$ ✓

Хипотеза: Претпоставимо да се $2^{2^{n+1}}+1$ завршава са 7

Корак: Докажимо да се и број

$2^{2^{n+1+1}}+1$ завршава са 7

$2^{2^{n+1+1}}+1$ завршава са 7

$$\underline{2^{2^{n+2}}}+1 = 2^{2^{n+1}\cdot 2}+1 = \left(2^{2^{n+1}}\right)^2+1$$

Како се $2^{2^{n+1}}+1$ завршава са 7, то се

$2^{2^{n+1}}$ завршава са 6.

$\Rightarrow \left(2^{2^{n+1}}\right)^2$ се завршава са 6

$\Rightarrow \left(2^{2^{n+1}}\right)^2+1$ се завршава са 7.

5) <u>БОНУС</u> Доказати да за сваки природан број n, постоји n-тоцифрен број, састављен само од цифара 1 и 2 који је дељив са 2^n.

<u>БАЗА:</u> <u>$n=1$</u> $\rightarrow$ 2

<u>Док:</u> $n=2 \rightarrow 12$ (дељив са $4=2^2$)

<u>ПП</u> да за сваки n постоји неки број B_n такав да има n цифара и да су оне или 1 или 2

<u>Корак:</u> идеја је да ставимо или 1 или 2 на прву позицију а првих n цифара да буду исте као у $B_n=\overline{c_1c_2c_3\ldots c_n}$

Неки број $\overline{2c_1c_2c_3\ldots c_n}$ или $\overline{1c_1c_2\ldots c_n}$

ити број … $c_1 c_2 \ldots c_n$

Докажимо да је неки од ових дељив са 2^{n+1}.

$$\overline{2c_1c_2\ldots c_n} = 2\cdot 10^n + B_n$$

$$\begin{aligned} &\shortparallel \\ &200\ldots0 \\ +\ &\overline{c_1c_2\ldots c_n} \end{aligned}$$

Знамо да $2^n \mid B_n$

$$\overline{1c_1c_2\ldots c_n} = 10^n + B_n$$

Хоћемо да докажемо да

$$2^{n+1} \mid 2\cdot \underset{\shortparallel}{10^n} + B_n \quad \lor \quad 2^{n+1} \mid \underline{10^n + B_n}$$

$$2\cdot 2^n\cdot 5^n + B_n$$

$$\shortparallel$$

$$2^{n+1}\cdot 5^n + \underline{B_n}$$

Ако $2^{n+1} \mid B_n \Rightarrow 2^{n+1} \mid 2^{n+1}\cdot 5^n + B_n = \overline{2c_1c_2\ldots c_n}$ ✓

Ако $\underline{2^{n+1} \nmid B_n}$ (али знамо да $2^n \mid B_n$)

$B_n = 2^n \cdot k$, k је непаран

$$10^n + B_n = 2^n\cdot 5^n + 2^n\cdot k = 2^n\cdot(\underbrace{5^n+k}_{\text{збир два непарна, тј. паран}})$$

$$\Rightarrow 2^{n+1} \mid 10^n + B_n$$