103 B, 13.10.

Tuesday, October 13, 2020 10:15 AM

Још знамените неједнакости

1) [Лема о пермутацијама]

Нека су $a_1, a_2, \dots, a_n$, $b_1, b_2, \dots, b_n$ произвољни реални бројеви такви да је $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ и $b_1 < b_2 < \dots < b_n$. Нека је дата произвољна пермутација π скупа $\{1,2,\dots,n\}$ (заправо бијекција $\pi : \{1,2,\dots,n\} \to \{1,2,\dots,n\}$). Тада важи неједнакост

$$a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \dots + a_n b_1 \le a_1 b_{\pi(1)} + a_2 b_{\pi(2)} + \dots + a_n b_{\pi(n)} \le \underline{a_1 b_1} + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$$

Пример:

$$2 < 3 < 4 \quad , \quad 5 < 6 < 7$$

Најмањи збир је $2 \cdot 7 + 3 \cdot 6 + 4 \cdot 5 = 14 + 18 + 20 = 52$

множи обрнутим редом

Највећи збир је (множи директно)

$$2 \cdot 5 + 3 \cdot 6 + 4 \cdot 7 = 10 + 18 + 28 = 56$$

Решење: Узмимо $i < j$ такве да је $\pi(i) > \pi(j)$

Шта се дешава са разликом

$$\left[a_i b_{\pi(i)} + a_j b_{\pi(j)}\right] - \left[a_i b_i + a_j b_j\right]$$

$$= a_i\left(b_{\pi(i)} - b_i\right) + a_j\left(b_{\pi(j)} - b_j\right)$$

у овом случају не можемо даље да радимо

Стога, посматрамо разлику

$$\left[a_i b_{\pi(i)} + a_j b_{\pi(j)}\right] - \left[a_i b_{\pi(j)} + a_j b_{\pi(i)}\right]$$

$$= a_i\left(\underline{b_{\pi(i)} - b_{\pi(j)}}\right) + a_j\left(\underline{b_{\pi(j)} - b_{\pi(i)}}\right)$$

$$= a_i \left(b_{\pi(i)} - b_{\pi(j)}\right) + a_j \left(b_{\pi(j)} - b_{\pi(i)}\right)$$

$$= \underbrace{(a_i - a_j)}_{} \underbrace{\left(b_{\pi(i)} - b_{\pi(j)}\right)}_{} < 0$$

$i<j \Rightarrow a_i - a_j < 0$ $\qquad$ $\pi(i) > \pi(j) \Rightarrow b_{\pi(i)} - b_{\pi(j)} > 0$

Закључак је да је

$$a_i b_{\pi(i)} + a_j b_{\pi(j)} < a_i b_{\pi(j)} + a_j b_{\pi(i)}$$

Узмимо нпр. $i=1$, $j=2$. Узмимо је $\pi(1) > \pi(2)$

$$a_1 b_{\pi(1)} + a_2 b_{\pi(2)} < a_1 b_{\pi(2)} + a_2 b_{\pi(1)}$$

Окретањем места у пермутацији добијамо мањи збир.
На левој страни почетне неједнакости је обрнути поредак, а на десној је идентичан, па добијамо тражено.
За добити $n=2$ и $n=3$

$$a_1b_2 + a_2b_1 \le a_1 b_{\pi(1)} + a_2 b_{\pi(2)} \le a_1b_1 + a_2b_2$$ итд.

$$a_1b_3 + a_2b_2 + a_3b_1 \le a_1 b_{\pi(1)} + a_2 b_{\pi(2)} + a_3 b_{\pi(3)} \le a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

$\boxed{2}$ Чебишевљева неједнакост:

Нека су $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n \in \mathbb{R}$ такви да је

$$a_1 < a_2 < \dots < a_n \quad \text{и} \quad b_1 < b_2 < \dots < b_n$$

Тада је

$$\frac{a_1b_n + \dots + a_nb_1}{n} \le \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \cdot \frac{b_1 + b_2 + \dots + b_n}{n} \le \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n}{n} \quad \Big/ \cdot n^2$$

Доказ:

$$n \cdot (a_1b_n + \dots + a_nb_1) \le \underbrace{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)(b_1 + b_2 + \dots + b_n)}_{} \le n \cdot (a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)$$

Доказ:

$$n\cdot(a_1b_n+\dots+a_nb_1) \le \underbrace{(a_1+a_2+\dots+a_n)(b_1+b_2+\dots+b_n)}_{S} \le n\cdot(a_1b_1+a_2b_2+\dots+a_nb_n)$$

$$\begin{aligned} S = &\boxed{a_1b_1} + a_1b_2 + \dots + a_1b_n \\ &+ a_2b_1 + a_2b_2 + \dots + \boxed{a_2b_n} \\ &+ \dots \\ &+ a_nb_1 + \boxed{a_nb_2} + \dots + a_nb_n \end{aligned}$$

Узимамо редом елементе из леве врсте и колоне, затим следеће који иду из те врсте из те колоне

Таквих збирова има n

На основу леме о пермутацијама, сваки од ових n збирова је мањи од $a_1b_1+\dots+a_nb_n$ и већи од $a_1b_n+\dots+a_nb_1$

$$\Rightarrow \quad n(a_1b_n+\dots+a_nb_1) \le S \le n(a_1b_1+\dots+a_nb_n)$$

3) Јенсенова неједнакост: Нека су $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n \in [0,1]$ такви да је $\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_n=1$ и нека је $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ конвексна ф-ја.

Ако $x_1,x_2,\dots,x_n \in (a,b)$ тада важи:

$$f(\lambda_1x_1+\dots+\lambda_nx_n) \le \lambda_1f(x_1)+\lambda_2f(x_2)+\dots+\lambda_nf(x_n)$$

$(\ge)$ уколико је f конкавна

Решење:

← Најпре мало о конвексности!

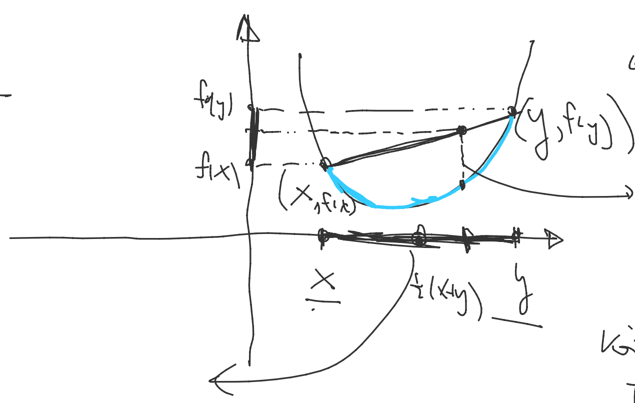

график је испод дужи која спаја било које две тачке тог графика.

Све тачке ове дужи можемо описати са $x+\lambda(y-x)$, $\lambda\in[0,1]$

$\lambda=0 \to x$

$$\lambda = 0 \to x$$

$$\lambda = 1 \to \cancel{x} + y - \cancel{x} = y$$

$$\lambda = \tfrac{1}{2} \to x + \tfrac{1}{2}y - \tfrac{1}{2}x = \tfrac{1}{2}(x+y)$$

Други начин је $\lambda x + (1-\lambda)y$, $\lambda \in [0,1]$

$\lambda = 0 \to y$ $\qquad \lambda = \frac{1}{2} \to \frac{1}{2}(x+y)$

$\lambda = 1 \to x$

Конвексност: $\quad f(\lambda x + (1-\lambda)y) \underset{\geq \text{ (конкавне)}}{\leq} \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$

за све $x \in (a,b)$ и $\lambda \in [0,1]$

Вратимо се на задатак

$n=1 \to f(1\cdot x_1) \leq 1 \cdot f(x_1)$ ✓

$n=2 \to f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \leq \lambda_1 \cdot f(x_1) + \lambda_2 \cdot f(x_2)$

$$\boxed{\lambda_1 + \lambda_2 = 1}$$

Ово је дефиниција конвексности када узмемо $\lambda_1 = \lambda$, $\lambda_2 = 1-\lambda$

Индукција:

ПП да је $f(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n) \leq \lambda_1 f(x_1) + \dots + \lambda_n f(x_n)$

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = 1$$

Докажимо да је $f(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n + \lambda_{n+1} x_{n+1}) \leq \lambda_1 f(x_1) + \dots + \lambda_n f(x_n) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1})$

$f(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n + \boxed{\lambda_{n+1}} x_{n+1})$ → ако је неки $\lambda_i = 0$ готово!

$$= f\Big(\underline{(1-\lambda_{n+1})} \underbrace{\Big(\frac{\lambda_1}{1-\lambda_{n+1}} x_1 + \dots + \frac{\lambda_n}{1-\lambda_{n+1}} x_n\Big)} + \underline{\lambda_{n+1}} x_{n+1}\Big)$$

$$\leq (1-\lambda_{n+1})\, f\Big(\frac{\lambda_1}{\dots} x \dots \lambda_n$$